Un problème de Fermat

Table des matières

1. Le prince des amateurs et le père du baromètre

Enrichir sa culture

En août 1601 naquit à Beaumont-de-Lomagne en France celui qui allait bien plus tard être surnommé ([1]) le « prince des amateurs » dans le milieu des mathématiques.

Pierre Fermat était le fils d'un riche courroyeur, et reçut une éducation privilégiée, au cours de laquelle il ne montra cependant aucune disposition particulière pour les mathématiques.
En 1631, il devint conseiller à la chambre des requêtes au parlement de Toulouse. A cette occasion, son nom s'orna d'un petit « de »...
Il resta dans cette administration jusqu'à la fin de ces jours. La période était plutôt sombre : la peste sévissait ([2])et les dangers politiques étaient nombreux.
La stratégie de Fermat consistait à s'acquitter de ses tâches sans jamais chercher à se distinguer. Il ne pouvait entretenir d'amitié dans la société toulousaine, car chacun était susceptible d'un jour passer devant lui au tribunal. Hors son métier, il consacrait donc son temps libre exclusivement aux mathématiques.

Fermat ne quittait que très rarement Toulouse, et ne discutait avec d'autres mathématiciens que par échanges épistolaires. Il correspondit ainsi avec le père Marin Mersenne, Blaise Pascal et bien d'autres...

Il aimait lancer des défis à ses condisciples en ne leur donnant pas sa solution, ce qui présentait l'avantage de ne pas avoir à mettre de l'ordre dans ses notes, ni à retravailler ses démonstrations.

L'une de ses plus célèbres énigmes fut inspirée à Fermat par la lecture de l'*Arithmetica* de Diophante traduit par Claude Gaspar Bachet de Méziriac.
C'est en marge du problème VIII du deuxième livre que Fermat écrivit en latin une note qui acquit la célèbrité en devenant son *dernier théorème*.

QVÆSTIO VIII.

Propositum quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ [illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Il fallut en effet attendre le XX^{ème} siècle pour venir à bout de cette énigme. C'est en prouvant une conjecture des japonais Shimura et Taniyama que l'anglais Andrew Wiles, secondé par Richard Taylor, résolu le mystère en 1994.

([1]) Ce surnom est selon toute évidence dû à E.T. Bell. Notons que Fermat a été exclu de l'ouvrage de J. Coolidge — *Mathématiques des grands amateurs* — pour cause de professionalisme !
([2]) Fermat la contracta d'ailleurs si fort qu'il fut l'objet d'un avis de décès bien avant sa mort. Une maladie l'emporta quelques années plus tard, trois jours après sa dernière opération juridique. On était le 12 janvier 1665...

La photo ci-dessus montre un extrait d'une édition de l'*Arithmetica* contenant les remarques de FERMAT, éditée par son fils CLÉMENT-SAMUEL. C'est grâce à cette édition posthume que la note nous est parvenue. Elle peut se traduire comme suit :

> *Il est impossible pour un cube d'être écrit comme la somme de deux cubes ou pour une quatrième puissance d'être écrite comme la somme de deux quatrièmes puissances ou, en général, pour n'importe quel nombre égal à une puissance supérieure à deux d'être écrit comme la somme de deux puissances semblables.*

Changer de registre

Ce qui, avec nos notations modernes, peut encore se dire :

> *L'équation $x^n + y^n = z^n$ où n est un nombre entier n'a pas de solution dans les entiers strictement positifs lorsque $n > 2$.*

La note de FERMAT se terminait par cette touche de légère ironie qui allait intriguer plusieurs générations de mathématiciens :

> *J'ai une démonstration véritablement merveilleuse de cette proposition, que cette marge est trop étroite pour contenir.*

Cependant, il arrivait souvent que les correspondants de FERMAT trouvent les solutions à ses questions. Notamment, EVANGELISTA TORRICELLI se pencha — suite à une lettre de FERMAT — sur le problème du point contenu dans un triangle quelconque et qui minimise la somme des distances de chacun des sommets à ce point.

TORRICELLI naquit le 15 octobre 1608 à Faenza au sein de ce que l'on appelle de nos jours l'Italie. Il mourut le 25 octobre 1647 dans la ville de Florence.
Il fut le secrétaire puis le successeur de GALILÉE, à la cour du Grand Duc FERDINAND II DE TOSCANE.
Ses travaux l'ont mené à découvrir le principe du baromètre.

Notons qu'il a également contribué à l'analyse mathématique par l'emploi de méthodes infinitésimales, et qu'il s'intéressa au mouvement des projectiles. Son unique publication est à ce propos : *Opera Geometrica* en 1664.

Nous allons nous intéresser dans la suite de cette fiche à ce problème de minimisation que PIERRE DE FERMAT suggéra un beau jour à EVANGELISTA TORRICELLI...Ce dernier trouva une solution que nous proposons également au lecteur.

2. L'énoncé du problème

Soient A, B et C les sommets d'un triangle. Il s'agit de trouver un point P au sein du triangle tel que la somme $PA + PB + PC$ soit minimale.

3. Solution utilisant une conique

1 Mise en situation

La preuve suivante est simple, mais offre le désavantage de faire appel à une hypothèse d'existence : nous allons SUPPOSER qu'il existe un point P tel que $PA + PB + PC$ soit minimal.

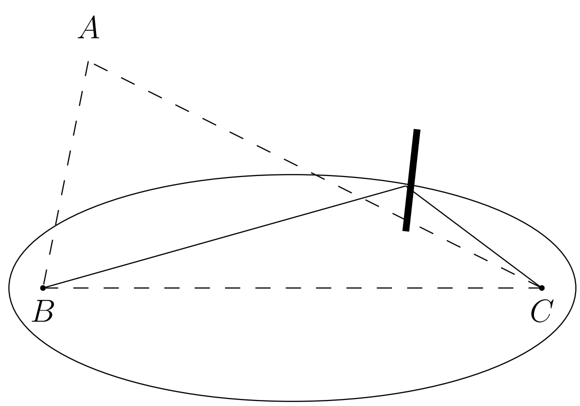
Imposer une condition

La valeur de $PB+PC$ est donc fixée, et nous pouvons dessiner l'ensemble des points Q vérifiant $QB + QC = PB + PC$ en nous mettant dans la peau d'un jardinier...

Coordonner des registres de représentation

La méthode du jardinier

Un jardinier plante deux piquets dans le sol et y attache une corde. Il déplace une pointe mobile partout où elle peut aller sous la condition de *tendre* la corde. La courbe ainsi dessinée (voir ci-contre) est appelée *ellipse*. Les deux piquets sont appelés les *foyers* de cette ellipse.



Ici, la longueur $PB+PC$ fixée est la longueur de notre corde, et P et l'un des points Q possibles, à savoir l'un des points de l'ellipse.

Comme $QB + QC = PB + PC$, l'inégalité :

$$PA + PB + PC \leq QA + QB + QC$$

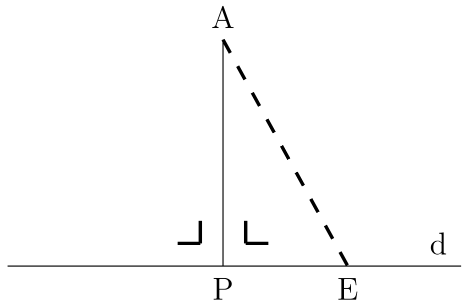
devient $PA \leq QA$ pour tout point Q de l'ellipse.

Parmi les points Q possibles, il y en a donc un — que nous avons noté P — qui minimise la valeur de QA. C'est donc le point de l'ellipse *le plus proche* du point A.

2 Rappels

1 La plus courte distance d'un point à une droite

Exploiter un acquis



Pour obtenir la plus courte distance d'un point à une droite, il faut construire la perpendiculaire à cette droite passant par ce point.
Ici, $|AP| < |AE|$ car l'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle.

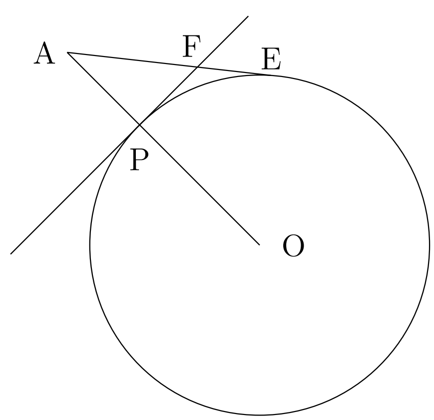
2 La plus courte distance d'un point à un cercle

Pour obtenir la plus courte distance d'un point à un cercle, on trace la droite joignant le point A considéré au centre O du cercle.

Cette droite AO coupe le cercle en P. $|AP|$ est la distance cherchée.

En effet, montrons que pour tout autre point E du cercle, on a $|AE| > |AP|$.

Construisons la perpendiculaire à AO en P, que nous appellerons la *tangente au cercle en* P.
Cette droite ne contient aucun autre point du cercle. En effet, si l'intersection de la droite et du cercle contenait un autre point P', le segment $|OP'|$ serait l'hypoténuse du triangle rectangle POP', et donc le segment OP' serait plus grand que le segment OP. Or, ils sont tous deux des rayons du cercles et doivent être de même longueur.
Dès lors, $|AE| > |AF|$ et comme $|AF| > |AP|$ (voir cas précédent), on a : $|AE| > |AP|$.

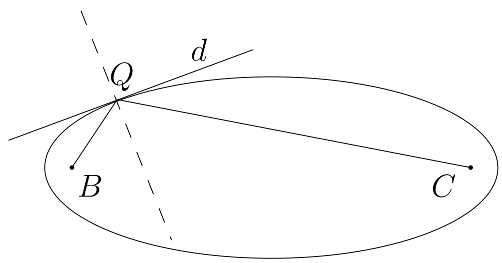


3 Retour à l'ellipse : construction de la tangente en un point d'une ellipse

Revenons à notre problème : il s'agit de construire le point P de l'ellipse tel que $|AP|$ soit la plus courte distance de A à l'ellipse.

Dans le cas de l'ellipse et par analogie avec le cercle, définissons ([3]) la tangente en P comme étant la droite passant par P, ne contenant *aucun* point de l'ellipse, et se trouvant d'un même côté de celle-ci (elle ne traverse pas la courbe en Q).

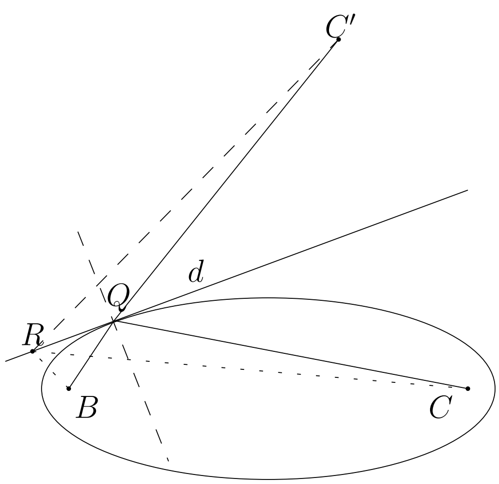
Prenons un point quelconque Q de l'ellipse. Traçons la bissectrice de l'angle $\widehat{BQC}$, et traçons la perpendiculaire d à cette droite passant par Q.



Montrons que la droite d est bien la tangente à l'ellipse au point Q c'est-à-dire que tout autre point R de d n'appartient pas à l'ellipse.

Rappelons-nous que l'ellipse est l'ensemble des points Q tels que $BQ + QC$ est un nombre fixé.

Par conséquent, si nous montrons que $BR + RC > BQ + QC$ alors nous serons convaincus que R n'est pas un point de l'ellipse, et que R est à l'extérieur de l'ellipse.



Soit C' l'image de C par la symétrie orthogonale d'axe d. On a les égalités suivantes :

$$|QC| = |QC'|$$
$$|RC| = |RC'|$$

Les points B, Q et C' sont alignés. Il est donc clair par inégalité triangulaire que

$$BR + RC > BQ + QC$$

Les autres points de l'ellipse construits par la méthode du jardinier ne peuvent donc se trouver que *sous* la droite d. Par conséquent, aucun point de la droite — mis à part Q — n'appartient à l'ellipse.

Donc, la droite d est bien la *tangente* à l'ellipse au point Q selon la définition que nous avons adoptée.

([3]) Cette définition est-elle vraie pour n'importe quelle courbe, et notamment pour une droite (courbe particulière, dont la courbure est nulle) ? La tangente en un point est-elle unique ? Comment allons-nous *construire* la tangente ? Le problème de la définition de la tangente à une courbe quelconque, connu sous le nom de *problème des tangentes*, n'a été vraiment résolu qu'au XVII$^{\text{eme}}$ siècle et bien assimilé par la communauté des mathématiciens qu'au XVIII$^{\text{eme}}$.

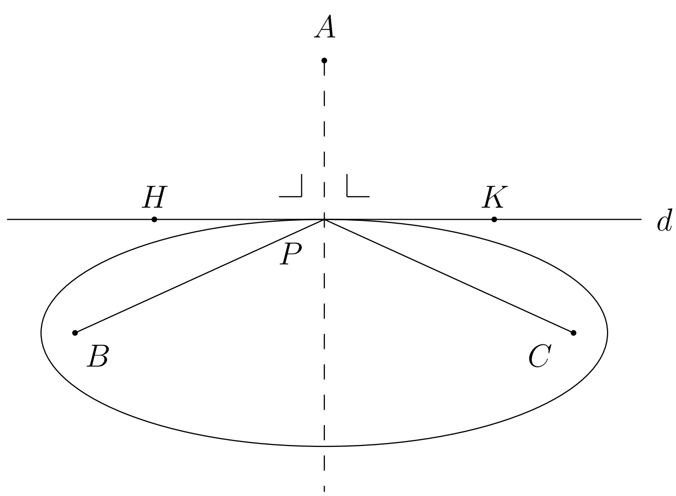
4 Solution du problème initial

N'oublions pas que nous avions au départ trois point A, B et C. Nous avons utilisé deux d'entre eux — B et C — comme *foyer* de l'ellipse.

Reprenons donc notre point A avant qu'il ne se sente trop seul !

Parmi les points Q qui constituent cette ellipse, choisissons à présent un point — que nous nommerons P — de façon que PA soit perpendiculaire à la tangente à l'ellipse au point P.

Nous baptiserons cette dernière d.



Pour plus de facilité, introduisons H et K, des points de d situés de chaque côté de P. Il en résulte que :

$$\widehat{APH} = \widehat{APK} = 90°$$

De plus, comme PA est la bissectrice de $\widehat{BPC}$ par construction de la tangente d,

$$\widehat{BPH} = \widehat{CPK}$$

Les formules précédentes nous conduisent à dire que

$$\widehat{APB} = \widehat{APC}$$

Utiliser les symétries d'un problème

Dans cette démonstration, nous avons considéré $PB + PC$. En répétant notre raisonnement avec $PC+PA$ et avec $PA+PB$, nous obtenons respectivement $\widehat{BPC} = \widehat{BPA}$ et $\widehat{APB} = \widehat{APC}$.

Donc : $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC}$

Conclure

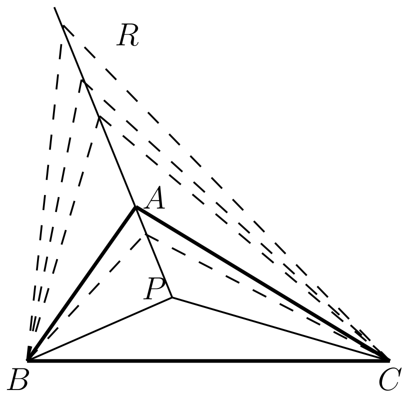
La somme de ces angles valant 360°, chacun d'eux vaut 120°.

Le point P cherché est donc le point du triangle tel que les angles $\widehat{APB}$, $\widehat{APC}$ et $\widehat{BPC}$ valent 120°.

On l'appelle le *point de Fermat*, *point de Torricelli*, ou encore *centre isogonique* du triangle.

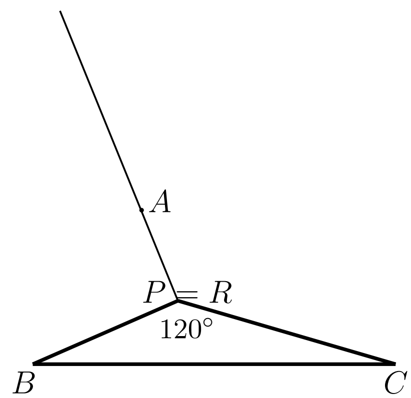
5 Attention aux apparences !

Après la lecture de la démonstration ci-dessus, il serait un peu trop rapide de croire que la construction fonctionne pour tous les triangles.



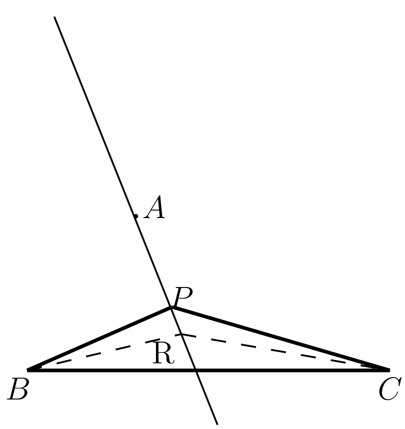
En effet, prenons un triangle quelconque dont les angles sont strictement inférieurs à 120°, et appelons P son point de Fermat.
Il est clair que *tous* les points R de la demi-droite PA sont tels que le triangle RBC conserve le même point de Fermat P car les angles en P définis par les droites le reliant aux sommets sont toujours de 120°.

A présent, faisons tendre le point R (qui coulisse sur la demi-droite PA) vers le point P. Dans le cas limite, $R = P$.
Dans le nouveau triangle RBC, les angles $\widehat{RPB}$ et $\widehat{RPC}$ ont cessé d'exister.
L'angle $\widehat{BRC} = \widehat{BPC}$ vaut 120°.



Nous sommes donc dans le cas où l'un des angles du triangle vaut 120°, et nous voyons que le point de Fermat semble être le sommet de cet angle. Nous prouvons qu'il en est bien ainsi dans les paragraphes suivants.

Il est important de remarquer que dans ce cas, la construction du point P de sorte que $\widehat{RPB} = \widehat{RPC} = \widehat{BPC}$ =120° ne fonctionne plus, puisque seul l'angle $\widehat{BPC}$ existe encore.



Considérons à présent la *droite* PA, et prenons un point R *à l'intérieur* du triangle PBC. Le point P (toujours le même tant que R est sur la droite PA) n'est cette fois pas le point de Fermat du triangle RBC, puisqu'il se trouve à *l'extérieur* de celui-ci.
Prendre R à l'intérieur de BPC revient à avoir un angle $\widehat{BRC}$ >120°.

Réciproquement, dès que l'on a un angle $>120°$ dans un triangle, la construction de P telle que décrite ci-dessus le fait sortir du triangle considéré, et l'exclu donc de la candidature au titre de point de Fermat de ce triangle.

En bref, nous avons donc vu que la construction du point de Fermat présentée ci-dessus *n'est pas valable* lorsque l'un des angles du triangle de départ est $\geq 120°$

Voyons à présent une autre preuve dans laquelle nous allons montrer que le point P existe (ce n'était pas le cas dans la preuve précédente). Au vu des remarques qui précèdent, nous aborderons donc cette preuve en trois cas :

- le cas où tous les angles du triangle sont $<120°$
- le cas où l'un des angles du triangle vaut $120°$
- le cas où l'un des angles du triangle est $>120°$

4. Solution prouvant l'existence du point cherché

Voici précisément ce que nous allons montrer :

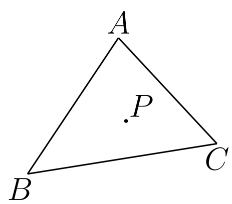
Soit ABC un triangle quelconque. Il existe un unique point P au sein du triangle tel que $PA+PB+PC$ soit minimum.

Si aucun angle du triangle n'est supérieur ou égal à 120°, alors le point P est donné par la relation $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC}$.

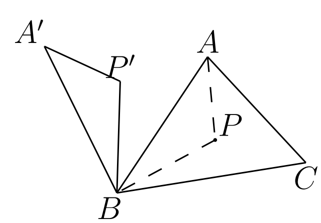
Si l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120°, alors P se trouve au sommet de cet angle.

1 Premier cas : tous les angles du triangle sont $<120°$

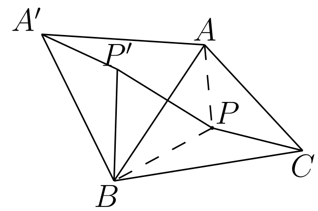
Discuter



Prenons un point quelconque au sein du triangle ABC et faisons subir au triangle ABP une rotation antihorlogique de 60°autour du point B. On obtient ainsi le triangle $A'BP'$.



Remarquons que puisque $BA = BA'$ et que l'angle $\widehat{A'BA}$ =60°, le triangle ABA' est équilatéral.
Pour des raisons identiques, BPP' est lui aussi un triangle équilatéral.



Utiliser des analogies

De fait,

$$AP + BP + CP = A'P' + P'P + PC$$

Minimiser $AP + BP + CP$ revient donc à minimiser $A'P' + P'P + PC$. C'est le cas lorsque les points A', P', P et C sont alignés.

$A'P'PC$ est une droite lorsque :

$$\widehat{A'P'B} + \widehat{BP'P} = 180° \text{ et } \widehat{BPP'} + \widehat{BPC} = 180°$$

c'est-à-dire, vu que $\widehat{BP'P} = 60°$, lorsque :

$$\widehat{A'P'B} = 120° \text{ et } \widehat{BPC} = 120°$$

et vu que $\widehat{A'P'B} = \widehat{APB}$, cela revient à dire :

$$\widehat{APB} = 120° \text{ et } \widehat{BPC} = 120°$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, $\widehat{APC} = 120°$ aussi.

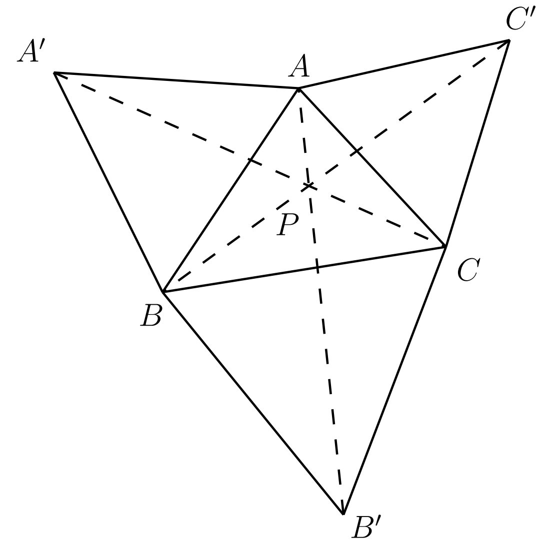
Finalement :

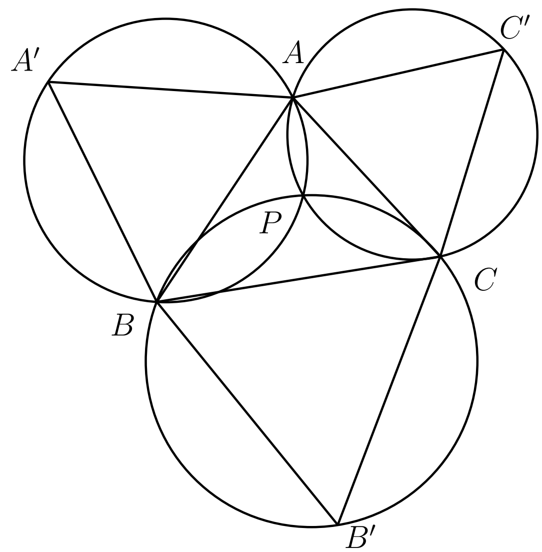
$$\boxed{A'P'PC \text{ est une droite lorsque } \widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC} = 120°.}$$

Utiliser des analogies

Il n'y a pas de raison de donner un statut particulier à l'un des sommets du triangle ABC.

Si B' et C' sont les points construits en décalquant la méthode de construction de A' — c'est-à-dire en construisant des triangles équilatéraux sur chaque côté du triangle ABC — le point P doit se trouver à la fois sur $A'A$, $B'B$ et $C'C$. On peut donc construire P comme l'intersection de ces trois droites (4).





Remarquons que P est également le point d'intersection des trois cercles circonscrits à ces triangles équilatéraux.
En effet, comme A', A, P et B sont sur un même cercle, ils forment un quadrilatère dont la somme d'une paire d'angles opposés fait 180°.
Donc, $\widehat{AA'B} + \widehat{APB} = 180°$

Or, $\widehat{AA'B} = 60°$ par construction, donc $\widehat{APB} = 120°$. On fait de même avec B', B, P et C et on a $\widehat{BPC} = 120°$

Il reste par déduction que $\widehat{APC} = 120°$ puisque le tout fait 360°.

2 Deuxième cas : l'un des angles du triangle vaut 120°

Discuter

Supposons que $\widehat{ABC}$ =120°. Alors via la méthode (5) décrite au premier cas, A', B et C sont colinéaires.

Le point B appartient donc à la droite $A'C$. Il est par conséquent impossible d'obtenir l'image P' de P par une rotation de 60° autour de B de sorte que PP' soit sur $A'C$, SAUF dans le cas où $B = P$ (car alors, $P = P'$).

Le point de Fermat P est donc situé en B (sommet de l'angle de 120°).

(4) Mais bien entendu, deux d'entre elles suffisent !
(5) En effet, les angles du triangle équilatéral $A'BA$ valent tous 60°, et 120°+60°=180°.

Notons que nous l'avions déjà montré — non formellement — dans la première preuve, au paragraphe « Attention aux apparences ! ». Dans ce même paragraphe, nous évoquions également le cas suivant.

3 Troisième cas : l'un des angles du triangle est $>$120°

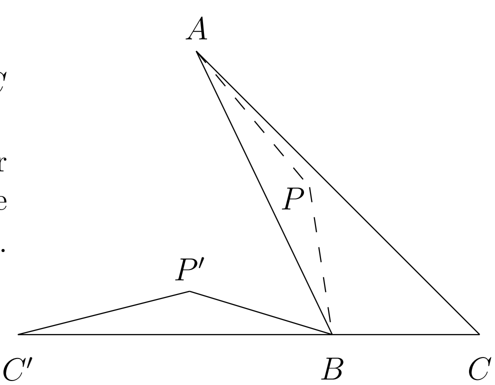
Dans ce cas, la droite $A'C$ ne traverse pas le triangle ABC et la construction ne fonctionne plus.

Cependant, nous allons montrer que :

$$\forall P \neq B \text{ on a : } AB + BC < AP + BP + CP.$$

Nous aurons alors prouvé que B est le point qui minimise la somme.

Soit C' un point de la droite BC tel que $C'B = AB$.
P' est l'image de P obtenue par rotation autour de B d'un angle $\widehat{ABC'}$ dans le sens antihorlogique.



Comme $\widehat{ABC}$ $\geq$120° et que $\widehat{ABC} + \widehat{ABC'}$ =180°, on a $\widehat{PBP'} = \widehat{ABC'}$ $\leq$60°.

Or, BPP' est isocèle car $BP = BP'$, et donc $BP \geq P'P$. Le triangle BPP' est par conséquent au mieux équilatéral, et (6) donc :

$$AP + BP + CP \geq C'P' + P'P + PC > AB + BC$$

Par construction, P et P' ne peuvent en effet pas être simultanément sur la droite $C'C$. On a donc ce que l'on voulait.

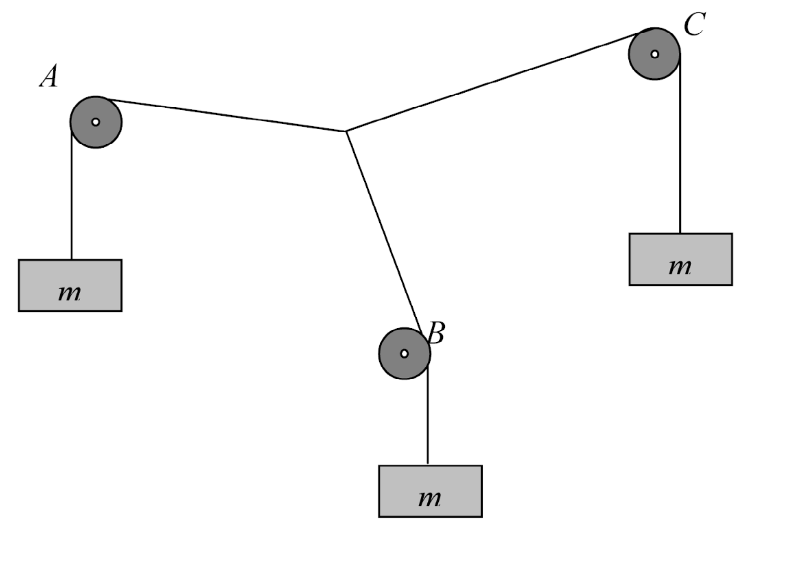
5. Solution mécanique

ATTENTION !

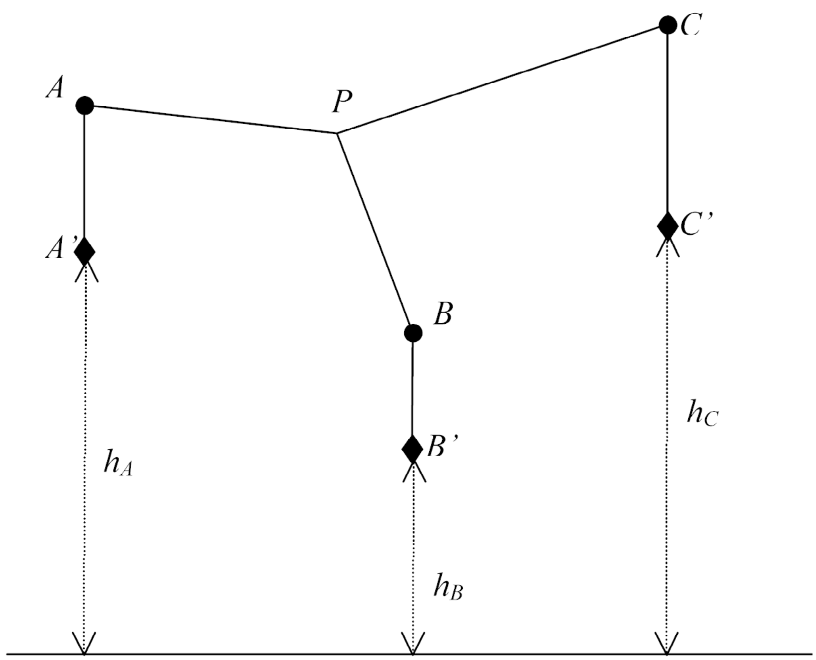
Nous n'allons considérer dans cette preuve que le cas où les angles du triangle considéré sont tous strictement inférieurs à 120°.
Nous laissons au lecteur le soin d'adapter le raisonnement aux autres cas.

(6) En effet, $AP = C'P'$.

Nous allons donner une solution mécanique à ce problème en faisant intervenir un système de poulies et de poids.



Aux sommets A, B et C du triangle, plaçons des poulies qui supportent des masses égales suspendues par un fil. Les trois fils sont reliés en P comme l'indique le schéma :



A l'équilibre, on constate que les angles $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ et $\widehat{APC}$ mesurent tous 120°. P est donc le point de Fermat du triangle ABC. Pour en faire la preuve, nous allons nous baser sur le principe de Dirichlet qui affirme qu'à l'équilibre, l'énergie potentielle d'un système mécanique est minimale.

Rappelons que l'énergie potentielle d'un corps ponctuel est le produit $m \cdot g \cdot h$ où m désigne la masse du corps, h sa hauteur par rapport au sol et g l'accélération due à la gravité (9,81 m/s^2).

Dans le cas d'un système mécanique, m désigne la masse totale du système et h la hauteur de son centre de gravité.

Or, les seules forces agissant sur les cordes sont les poids des masses situées en A', B', C'. Pour minimiser l'énergie potentielle du système, il faut minimiser la hauteur h (car m et g sont constants) et par conséquent, $hA' + hB' + hC'$ doit être minimale.

Or, les poulies sont fixes et les cordes de longueurs constantes, par conséquent :

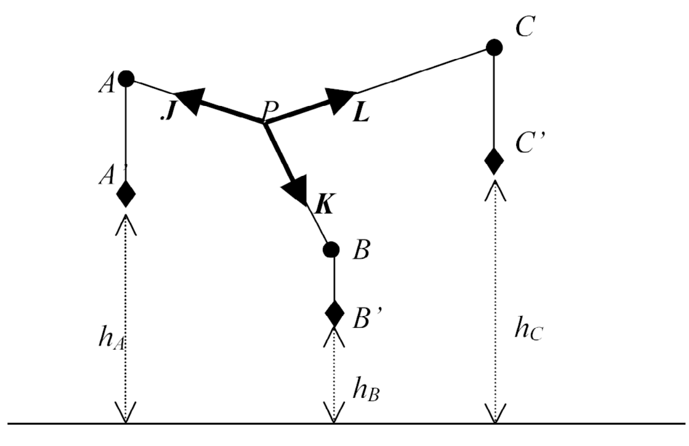
$$(1) : (hA' + AA') + (hB' + BB') + (hC' + CC') = \text{constante}$$
$$(2) : (PA + AA') + (PB + BB') + (PC + CC') = \text{constante}$$

Par (1), minimiser $hA' + hB' + hC'$ revient à maximiser $AA' + BB' + CC'$. Par (2), maximiser $AA' + BB' + CC'$ revient à minimiser $PA + PB + PC$.

En conclusion, lorsque la position d'équilibre est atteinte, la longueur $PA+PB+PC$ est minimale.

Prouvons à présent que $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ et $\widehat{APC}$ valent bien tous 120°.

Examinons les forces agissant sur le point P :



Ne considérons plus que les forces agissant sur P, représentées sur la figure par les vecteurs $\overrightarrow{PJ}$, $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{PL}$.

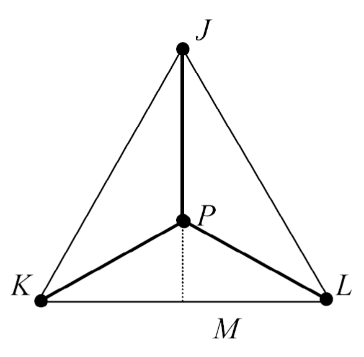
Elles vérifient :

$$\overrightarrow{PJ} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} = \overrightarrow{0}$$

(puisque le système est à l'équilibre)
et

$$\left|\overrightarrow{PJ}\right| = \left|\overrightarrow{PK}\right| = \left|\overrightarrow{PL}\right|$$

(car les forces ont la même intensité)



Dans le triangle PKL, appelons M le milieu de $[KL]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{PL} &= \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{ML}\\ &= \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{ML}\\ &= 2\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{ML}\\ &= 2\cdot\overrightarrow{PM}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{PL}=-\overrightarrow{PJ}$

Donc, $\overrightarrow{PJ}=-2\cdot\overrightarrow{PM}$ et $|PM|=\frac{1}{2}|PJ|$.

Dans le triangle rectangle LMP,

$$|PM|=|PL|\cdot\cos\widehat{LPM}$$

et

$$\frac{1}{2}|PJ|=|PJ|\cdot\cos\widehat{LPM}$$

Donc $\cos\widehat{LPM}=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\widehat{LPM}=60°$ et par conséquent $\widehat{LPK}=120°$.

6. Pour en savoir plus

- Ivan Niven, *Maxima and minima without calculus*, AMS, 1981.
- Simon Singh, *Le dernier théorème de Fermat*, Hachette Littératures, Paris 1999.
- David Wells, *Dictionnaire Penguin des curiosités mathématiques*, Eyrolles, 1996.
- A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques*, Presses Universitaires de France, 1996.
- J. d'Hombres et P. Radelet-de Grave, *Contingence et nécessité en mécanique : étude de deux textes inédits de de Jean d'Alembert*, Leo S. Olschki Editore, Firenze, 1991.
- http ://cedar.evansville.edu/ ck6/tcenters/class/fermat.html
- http ://www.businessweek.com/chapter/chap4.htm