

Première partie

Culture mathématique
à partir de 5 ans

Chapitre 1

La construction des nombres

Préambule

La notion de nombre se construit petit à petit. Dès leur plus jeune âge, les enfants sont confrontés à l'univers des nombres dans leur vie quotidienne. Ainsi, ils arrivent tous en maternelle avec des acquis différents qu'il va falloir enrichir et structurer tout au long de l'apprentissage.

Dans les activités qui suivent et qui s'inspirent de ERMEL [64], le début de l'apprentissage des nombres est présenté sous différents aspects. La découverte des nombres et le comptage, leur agencement et leur mémorisation, la comparaison de quantités et les opérations sur les nombres seront abordés. Ces approches sont proposées séparément, mais il convient de réaliser d'incessants va-et-vient entre les différentes sections lors des activités quotidiennes en classe. L'ordre de présentation des sections ne correspond donc pas à une logique de progression particulière.

Il est également important d'effectuer les activités à plusieurs reprises en faisant varier les paramètres pour permettre à chaque enfant de progresser à son rythme.

1 Dénombrer et compter

De quoi s'agit-il ? Prendre le nombre d'objets nécessaires pour combler les espaces vides d'un plateau de jeu.

Constituer une collection ayant le même nombre d'éléments qu'une autre.

Enjeux Faire correspondre un nombre à une quantité d'objets.

Associer une quantité d'objets à un nombre.

Compétences

Agir et interagir sur des matériels divers.

Utiliser directement et dans un même contexte une règle apprise, une méthode, un énoncé.

Dénombrer.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Un support en carton (boîte découpée ou autre) qui représente un parking avec une zone d'attente, des petites voitures (ou les cartes fournies en annexe pour les représenter), éventuellement une plastifieuse et de la pâte adhésive, une corbeille par enfant ainsi que des gommettes, des jetons, des pièces ou d'autres matériels suivant le choix de l'enseignant.

Les fiches 1 à 11 figurant des parkings et des dessins de voitures, fournies en annexe aux pages 93 à 103.

La fiche 12 à la page 104, représentant un clown.

1.1 Appropriation

Comment s'y prendre ?

On forme des groupes d'élèves de niveaux sensiblement identiques. Des supports en carton tels que celui de la figure 1 sont placés sur chaque table.

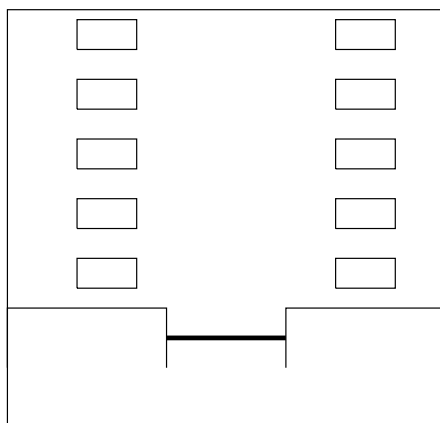


Fig. 1

Ce support est composé de deux parties : le parking proprement dit et une zone d'attente située en avant de celui-ci. Pour le cas où le support est un fond de boîte, l'enseignant adapte les dimensions des fiches à celles de son support. Des petites voitures ou les représentations de ces dernières sur des cartes (voir les figures 2, 3, 4, 5) se trouvent dans une « réserve » située à l'écart des différentes tables.

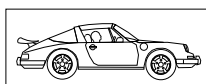


Fig. 2

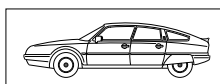


Fig. 3



Fig. 4

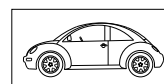
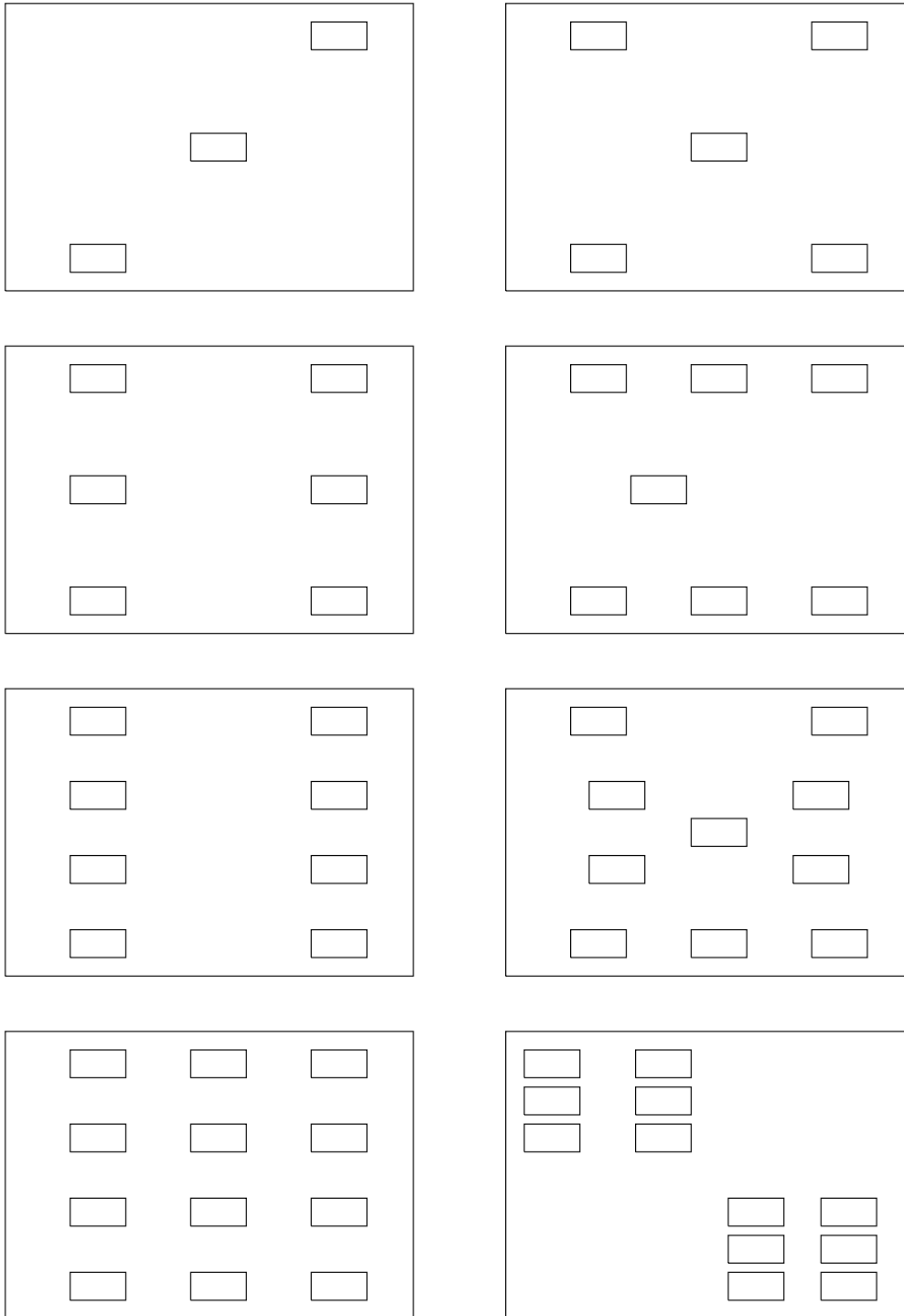


Fig. 5

Préalablement à l'activité, l'enseignant aura disposé sur le support une fiche dont le nombre de places de parking correspond au niveau de connaissance des enfants. En annexe, nous proposons

une série de fiches comportant de trois à douze places. La disposition spatiale des places de parking sur les fiches permet de faciliter ou de compliquer le dénombrement suivant les possibilités de chaque enfant. L'enseignant peut lui-même créer de nouvelles fiches avec des dispositions spatiales supplémentaires. Voici quelques exemples.



Va chercher le nombre exact de voitures nécessaires pour remplir le parking.

Chaque enfant dispose d'une corbeille pour y déposer les voitures. Il compte le nombre d'emplacements vides et va chercher les véhicules dans la « réserve ». Il dépose les voitures sur la zone d'attente tandis qu'un autre élève du groupe vérifie si le compte est bon en déposant une voiture sur chaque emplacement de parking. Les autres enfants du groupe sont invités à être attentifs et à formuler leurs éventuelles remarques. Si le nombre de voitures rapportées ne correspond pas à celui des places disponibles, le premier élève peut retourner chercher le nombre de véhicules nécessaires pour compléter le parking. S'il en a pris trop, il les reporte dans la « réserve ».

Pendant toute la durée de l'activité, l'enseignant circule dans les différents groupes pour observer le comportement des élèves. Il peut, par exemple, être amené à reformuler la consigne en utilisant des termes plus proches du langage des enfants, comme « juste assez » plutôt que exactement. Il peut ajuster la fiche s'il s'avère qu'il a mal apprécié le niveau de connaissance des élèves.

Il est très important que l'enseignant amène les enfants à expliquer leurs démarches pour mieux comprendre leurs réactions.

Quand l'action est réussie, c'est au tour de chacun des autres enfants de réaliser le défi.

Il est prévu que cette activité soit répétée plusieurs fois au cours de l'année en faisant évoluer le nombre et la disposition des emplacements de parking.

1.2 Transfert dans une situation semblable

Comment s'y prendre ?

Cette activité est un prolongement de la précédente. L'enseignant a préalablement disposé des représentations de voitures (fiche 11 à la page 103) sur certains emplacements de parking. Pour fixer les voitures sur les emplacements, nous conseillons de plastifier aussi bien les fiches que les images de voitures et d'apposer un bout de pâte adhésive au dos de ces dernières.

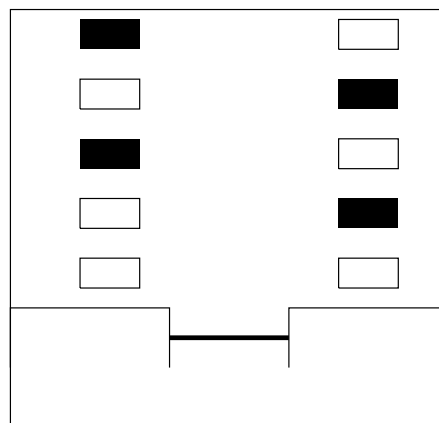


Fig. 6

Demande le nombre exact de voitures pour que le parking soit complet.

Les élèves vont chercher dans la « réserve » le nombre exact de dessins de voitures nécessaires

pour remplir le parking. Ils obtiennent les voitures contre remise d'un jeton. Ils disposent de trois jetons (ou plus) qui leur permettent d'effectuer trois essais (ou plus). Le gardien de la réserve de voitures est l'enseignant ou, éventuellement, un enfant. S'ils se trompent lors d'un essai, les élèves peuvent, tant qu'ils possèdent des jetons, venir passer une nouvelle commande après avoir rendu toutes les voitures de leur précédente demande. Comme précédemment, chaque enfant du groupe réalise l'activité et l'enseignant observe leurs comportements.

La présence des jetons a pour but de ne pas exiger des enfants d'avoir immédiatement un comportement idéal. Il leur est, à ce moment, permis de se tromper. Au fur et à mesure que l'activité sera reproduite au cours de l'année, la difficulté des fiches sera croissante et le nombre de jetons donnés aux élèves diminuera, le but étant de tendre vers la bonne commande dès le premier essai.

1.3 Individualisation

Comment s'y prendre ?

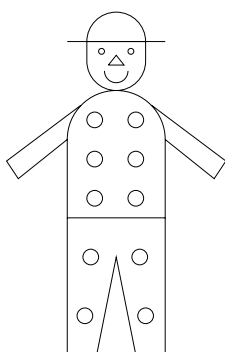


Fig. 7

Les élèves reçoivent chacun une feuille sur laquelle un clown est dessiné. L'enseignant a garni le costume de ce clown d'un certain nombre d'emplacements destinés à recevoir des gommettes de couleur. Un clown « sans emplacement » se trouve sur la fiche 12 à la page 104. Il permet à l'enseignant de choisir lui-même le nombre de cases avec lequel il veut travailler, par exemple dix, comme à la figure 7.

Prends deux bandelettes comportant le même nombre de gommettes. Ce nombre doit être égal au nombre de ronds sur le clown. Colle la première sous le dessin. Place les gommettes de la deuxième bandelette sur le costume du clown pour vérifier si ton choix est correct.

Une réserve de bandelettes (figure 8) comportant des gommettes se trouve dans un endroit de la classe à l'écart des bancs des élèves. Pour aider ceux-ci à mieux discerner les bandelettes de tailles différentes, il est conseillé de les ranger par nombre de gommettes. Pour cela, on peut utiliser des enveloppes, des boîtes, des corbeilles, ...



Fig. 8

Chaque enfant va chercher deux bandelettes de gommettes identiques. Le nombre de gommettes des bandelettes doit correspondre au nombre d'emplacements à compléter. Les élèves collent une de ces deux bandelettes sous le clown représenté sur la feuille (figure 9). Ensuite, pour vérifier leurs réponses, ils collent les gommettes de la deuxième bandelette sur les emplacements adéquats (figure 10).

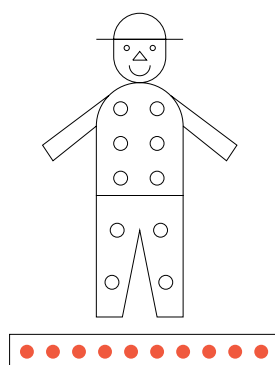


Fig. 9

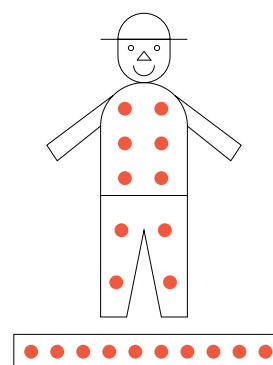


Fig. 10

Cette activité peut également se dérouler à plusieurs reprises tout au long de l'année en faisant varier les paramètres de la fiche (nombre d'emplacements, gommettes déjà collées, ...). Un enfant pourra ainsi commencer avec de petits nombres, puis poursuivre en augmentant le champ numérique. S'il le souhaite, l'enseignant peut indiquer les nombres sur les enveloppes ou les boîtes pour créer une relation avec les activités de lecture et d'écriture. Il peut aussi réinvestir les apprentissages lors d'autres activités plus rituelles comme par exemple la distribution du matériel. Ceci permet également à l'enseignant d'évaluer l'acquisition des notions et de garder une trace tangible du travail des élèves.

2 Comparer des nombres

De quoi s'agit-il ?

Comparer des collections.

Choisir la quantité correspondant le mieux à une consigne.

Enjeux

Associer un nombre à une quantité d'objets.

Mettre en œuvre des procédures de comparaison, puis les affiner.

Structurer le début de la file numérique.

Introduire les notions de « plus que », « moins que » et « autant que ».

Compétences

Agir et interagir sur des matériels divers.

S'exprimer dans un langage clair et précis.

Dénombrer.

Classer.

Utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des sachets transparents, des billes ou autres objets au choix de l'enseignant, des dés, des pions.

2.1 Première approche

Comment s'y prendre ?

Cette activité se déroule sous forme de jeu. L'enseignant prépare des sachets transparents qui contiennent un nombre de billes variant de 1 à 6. Il pose un des sacs sur la table de chacun des groupes. Le premier enfant lance le dé. Il prend le sachet si celui-ci contient plus de billes que le score de son dé. L'élève suivant joue à son tour et ainsi de suite. Si le sac a été remporté par son prédécesseur, on en place un nouveau sur la table. Dans le cas contraire, il joue avec le même sac.

Lance le dé. Prends le sac s'il contient plus (ou moins) de billes que le nombre marqué par le dé.

L'enseignant détermine d'abord le nombre de joueurs par groupe. Il fixe aussi le nombre total de sachets avec lequel les enfants vont jouer. Chacun joue à tour de rôle. Un sac est posé sur la table. Voici un exemple.

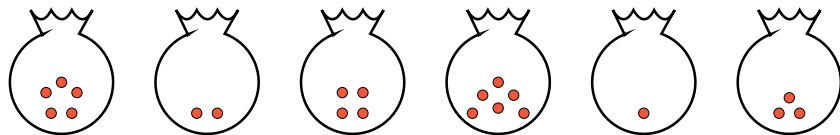


Après une période de jeu, l'enseignant passe de groupe en groupe et demande aux enfants quels sont les scores des dés qui leur permettent de gagner le sac. Ces questions ont pour but de structurer les apprentissages des élèves. Quand tous les sachets ont été distribués, les joueurs comparent leurs collections. Pour ce faire, on peut par exemple utiliser la correspondance terme à terme si le comptage pose des difficultés aux élèves. Chaque joueur place alors chacune de ses billes en face d'une bille de son adversaire. Le vainqueur est celui qui possède le plus de billes à la fin de la partie.

2.2 Évolution de la situation

Comment s'y prendre ?

Lance le dé. Choisis un sac qui contient moins (ou plus) de billes que le score sur le dé.



Les sacs sont maintenant tous alignés sur la table. Les règles du jeu sont les mêmes que dans l'activité précédente. La seule différence réside dans le fait que, cette fois, les élèves peuvent choisir le sachet qu'ils vont prendre. Le but est bien entendu qu'ils choisissent le sac qui leur rapportera le plus de billes.

Ici aussi le rôle de l'enseignant est fort important. Il peut demander aux élèves de citer les scores des dés qui leur permettent de prendre tel sachet ou tel autre. Si les enfants ne prennent pas le sac qui contient le plus de billes, il tente de les y amener par des questions quant au choix le plus judicieux. Par exemple, si l'élève obtient 4 sur son dé et qu'il reste les sachets contenant 2, 3 et 5 billes, il demande d'abord quels sont les sacs que l'enfant peut prendre, en l'occurrence ici 2

et 3. Puis, il lui demande dans lequel il y a le plus de billes, ce qui permet à l'enfant d'effectuer un meilleur choix.

3 Ordonner des nombres

De quoi s'agit-il ? Reconnaître les nombres sur la bande numérique et pouvoir les ordonner.
Réciter la comptine numérique.
Observer des livres à compter.
Fabriquer un livre à compter.

Enjeux Organiser le début de la suite des nombres.
Surcompter, décompter.
Mettre en relation les nombres les uns avec les autres.

Compétences

Agir et interagir sur des matériels divers.
Dénombrer.
Classer.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une grande bande numérique à afficher au mur, de petites bandes en carton souple pour les élèves, éventuellement des cartes plastifiées reprenant les différents nombres de la bande et des pinces à linge ou d'autres objets du même type.

Les fiches 13 à 16 situées en annexe aux pages 105 à 108.

3.1 La bande numérique

Comment s'y prendre ?

Dans la classe, chaque enfant dispose de sa propre bande numérique. Elle est fabriquée dans du carton assez souple de manière à pouvoir être pliée. Un exemple de bande numérique (figure 11) a été reproduit en réduction en annexe sur la fiche 13 à la page 105. Elle comporte deux parties ; la rangée du haut contient la suite des nombres de 0 à 20 et celle du bas est vide pour permettre aux enfants de poser le doigt sous les nombres comptés pour mieux les visualiser lors du comptage.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fig. 11

On peut plier la bande en accordéon par dizaines. Les bandes sont prolongées au fur et à mesure des progrès des élèves. Au départ, elles vont au-delà des connaissances de la plupart d'entre eux ce qui leur montre que la suite des nombres ne s'arrête pas là où ils sont « bloqués ». Nous avons choisi 20 dans le cas de la bandelette présentée. Plus tard, nous avons décidé de ne pas dépasser 40 ou 50 même si certains enfants sont capables de réciter une comptine plus longue. En effet, à cet âge, les nombres supérieurs à 31 ne sont pratiquement pas rencontrés en classe. De plus, il peut être dangereux d'aller trop loin et de décourager les enfants qui ne connaissent leur comptine que pour de très petits nombres. L'enseignant choisit l'endroit où est conservée la bandelette, mais celle-ci doit être constamment accessible aux élèves. La bande numérique proposée ici comporte un zéro bien que dans les activités en rapport avec le calendrier, le zéro n'intervient pas. Par contre, il peut être employé pour indiquer le nombre d'absents lors de l'appel. C'est pourquoi, nous conseillons de placer le zéro sur la bande numérique, mais en pliant la bandelette juste après lui de sorte qu'on puisse le masquer ou le montrer selon l'exercice.

Une bande « grand format » est affichée sur un mur de la classe, idéalement à hauteur des yeux des enfants. Sa grandeur leur permet de bien la voir de quelque endroit où ils se trouvent. Des cartes plastifiées reprenant les différents nombres peuvent être accrochées sous le nombre correspondant de la bande numérique. Elles sont à la disposition des élèves lorsqu'ils en ont besoin au cours d'une activité. Ils prennent alors la carte-nombre qu'ils viendront ensuite replacer au bon endroit après utilisation. Il est donc intéressant de disposer de plusieurs cartes avec chacun des nombres présents.

De nombreuses situations de la vie de classe permettent d'utiliser cette bande numérique. L'écriture de la date et le rite de l'appel en sont des exemples quotidiens. Voici une description de ce qui peut se faire dans le cadre de ces deux situations traditionnelles et de ce que cela apporte sur le plan numérique.

Le calendrier

Suivant les classes, il existe de nombreuses sortes de calendriers. Il est ainsi possible d'utiliser des systèmes d'étiquettes, de roues que l'on tourne, des calendriers ressemblant à ceux vendus dans le commerce ou d'autres encore. L'utilisation de la bande numérique peut se faire avec chacun d'entre eux et ne prend que très peu de temps. En effet, dès qu'un élève est venu citer la date ou compléter un calendrier, il place un repère, par exemple une pince à linge de couleur prédéfinie, sur la bande numérique suspendue au mur de la classe. À partir de là, l'enseignant demande d'indiquer la date du jour suivant ou précédent. Par la suite, il pourra compliquer l'activité en y insérant les week-ends. Par exemple, si la date est le vendredi 16, il demande la date du lundi. Ces activités débutent sur la bande numérique affichée au mur. Progressivement, on les répétera sur les bandes individuelles. Petit à petit la bande numérique permettra aussi d'observer quelques régularités telles que la présence d'un 9 avant les plis ou encore le fait qu'après un nombre se terminant par 9, le premier chiffre change.

Le rite de l'appel

Cette activité se déroule tous les matins en classe. On compte tous les élèves. Au début, l'enseignant continue le comptage quand les enfants sont bloqués. Puis, petit à petit, les élèves parviennent à progresser de plus en plus sans son aide car il y en a toujours qui parviennent à réciter plus loin. Enfin, dans un troisième temps, les enfants comptent seuls, chacun à leur tour, avec l'aide éventuelle de certains autres. Pour conserver les renseignements, on peut placer une pince à linge de couleur définie qui représente l'ensemble des élèves de la classe et une pince d'une autre couleur qui correspond au nombre de présents. Par des questions, l'enseignant

amène les enfants à travailler sur la bande numérique. Ainsi, si la classe comprend 18 élèves et qu'aujourd'hui il n'y a que quinze présents, il peut leur demander combien il y a d'absents. Plusieurs procédés peuvent être mis en œuvre. Ainsi, on peut compter un, deux et trois à partir de 16 pour arriver à 18. On peut aussi utiliser le surcomptage en disant « 16, 17, 18, ça fait trois ». On peut encore partir de 18 et décompter « 17, 16, 15 », bien que cette méthode soit moins courante et un peu plus compliquée. Ces différentes techniques peuvent bien entendu être toutes appliquées au cours de l'année.

Par la suite, l'enseignant peut demander aux enfants de compter les garçons et les filles présents, les enfants qui retournent manger à la maison et ceux qui restent, ...

Pour une bonne utilisation de la bande numérique, il ne suffit pas de l'introduire dans la classe. C'est par un emploi fréquent que la connaissance de l'ordre des nombres va se développer et que les enfants vont y recourir spontanément. Elle peut non seulement servir d'aide-mémoire et de dictionnaire de nombres, mais aussi être utilisée dans les diverses activités de comptage et de calcul mises en place dans la classe. La bande peut bien entendu accompagner l'élève lorsqu'il change de classe. Il suffit en effet de la compléter pour qu'elle trouve encore son utilité en début d'école primaire.

3.2 Les comptines numériques

Comment s'y prendre ?

Les comptines font partie de l'univers habituel des enfants de maternelle. La plupart du temps, elles sont envisagées comme des activités rituelles et se déroulent collectivement à un moment déterminé de la journée. Chaque comptine est récitée pendant un certain temps, puis on passe à une autre en essayant d'aller de plus en plus loin dans la connaissance de la suite des nombres.

Récite la comptine en même temps que moi.

Ici, les comptines numériques ont été regroupées en quatre grandes catégories suivant qu'elles utilisent l'aspect cardinal ou ordinal des nombres, qu'elles comportent des additions ou qu'elles emploient de grands nombres. Les comptines évoquées ci-dessous sont reprises en entier sur les fiches 14 à 16 situées en annexe aux pages 106 à 108.

Les comptines les plus couramment récitées sont celles qui comprennent des nombres cardinaux. Elles peuvent se présenter de diverses manières. Ainsi, les nombres peuvent être présentés en ordre croissant comme dans « La poule » ou décroissant comme dans « Kourou » ou parfois même les deux comme dans « Les cubes ». La suite peut s'énoncer d'un seul trait comme dans « Violette, violette ». Chaque nombre peut aussi être séparé du suivant par un mot ou un groupe de mots comme dans « Dix miniqui » ou « En rêvant, j'ai vu ... ». Les nombres peuvent être groupés par 2, 3, ou plus et entrecoupés par des mots comme dans « 1, 2 v'là les oeufs ».

Bien que les comptines qui comportent des nombres ordinaux soient beaucoup plus rarement utilisées dans les classes, nous avons tenu à en répertorier l'une ou l'autre pour ne pas délaisser cet aspect des nombres. On trouve ainsi « Sept petits enfants » ou encore « Les douze mois ».

Certaines autres comptines permettent de travailler l'addition des nombres. Ainsi en est-il de « Voici ma main » ou de « Les mains ».

D'autres enfin font apparaître de nouveaux nombres, plus grands. C'est par exemple le cas de

celles intitulées « Le singe » ou « 1, 2, 3, 4, 5, la lune est éteinte ».

Les activités faisant intervenir les comptines numériques se déroulent essentiellement au niveau oral, en n'oubliant pas l'aspect ludique de la récitation. Elles doivent s'opérer en interaction avec les autres activités d'apprentissage. Jouer avec les comptines numériques permet de structurer la suite des nombres. Au cours de l'année, on pourra, par exemple, demander aux élèves de continuer la comptine à partir d'un certain endroit.

Ceux qui désirent posséder un répertoire de comptines plus important peuvent consulter le site du centre départemental de documentation pédagogique du Haut-Rhin¹. Ils y trouveront plus de deux cents comptines numériques à télécharger.

3.3 Les livres à compter

De nombreux éditeurs de littérature enfantine publient des livres à connotation mathématique ayant pour but d'aider les enfants dans leurs premiers apprentissages. Ainsi en est-il de ce qu'on appelle communément « les livres à compter ». Ces derniers présentent la plupart du temps les premiers nombres en les associant à des quantités et en exhibant leur écriture et leur nom. Ils sont généralement destinés à être lus à la maison bien qu'ils soient présents dans de nombreuses classes. Ces ouvrages sont de qualité fort inégale et certains d'entre eux comportent même des erreurs importantes sur le plan mathématique comme, par exemple la confusion entre chiffre et nombre. Tout comme les comptines numériques, les livres à compter ne permettent pas à eux seuls d'apprendre à compter. Mais on peut, entre autres, les considérer comme un bon auxiliaire pour arriver à la connaissance de la suite des nombres.

Une activité possible en classe est de créer un de ces livres. La première étape consiste à observer comment ces livres sont fabriqués. Il est donc nécessaire d'en présenter un nombre suffisant pour dégager leurs caractéristiques. Dans ce contexte, une série d'ouvrages a retenu notre attention.

« Un, deux, trois, c'est à moi » [39] propose une collection de nombres qui va de 1 à 5 avec des corps d'animaux comportant des orifices qui permettent de passer les doigts. Les nombres sont écrits en chiffres. « Les chiffres de Balthazar » [116] présente sur la page de gauche une petite histoire dans laquelle on montre les nombres sur les doigts. Sur la page de droite, l'écriture en chiffres permet aux enfants de passer leur doigt sur le tracé des nombres. À noter que le zéro est présent à la fin de cette histoire. « Dix petits amis déménagent » [7] montre un ensemble de dix enfants, cinq filles et cinq garçons, qui déménagent. Le nombre des enfants qui déménagent augmente de un à dix tandis que celui de ceux qui restent diminue en même temps. Il n'y a ni texte, ni nombre. « Dix dans un lit » [121] présente une suite décroissante avec les nombres écrits en lettres et la possibilité de visualiser les compléments à dix. « J'apprends à compter » [13] permet de rencontrer des nombres allant jusqu'à cent, en les présentant tous de un à dix, puis de dix en dix jusqu'à cent. Ces grandes quantités sont groupées par paquets de dix. « Vingt-deux ours » [91] raconte quant à lui la longue histoire d'une famille d'ours. Les nombres ne sont pas écrits. Enfin, « Chiffres en friche » [123] présente quatre types d'écriture des nombres (traditionnelle, arabe, romaine et chinoise) sur la gauche et des collections diverses d'objets sur la droite. Le livre va de un en un jusque douze, puis il présente quelques nombres entre treize et cent, puis entre cent et mille, puis mille et enfin un million.

Lors de la lecture, l'enseignant amène les élèves à émettre des remarques au sujet du contenu des différents livres : quels nombres sont écrits, sont-ils grands ou petits, ... À la fin de ces

¹<http://www.crdp-strasbourg.fr/cddp68/maternelle/comptn00.htm>

échanges, il met en évidence les ressemblances et les différences entre les ouvrages. Il propose alors aux enfants de créer un « livre à compter ».

La première étape consiste à prendre des décisions au sujet de la présentation de ce livre. Des questions sont ainsi posées.

Quel sera le format ? Jusqu'à quel nombre va aller le livre ? Va-t-on représenter les nombres ? De quelle manière ? En quelle matière ? Va-t-on dessiner ou coller des collections ? Que dessiner ou coller ?

Un débat est mené par l'enseignant dans la classe pour prendre les décisions. Lorsque l'on s'est mis d'accord, les enfants sont répartis en groupes pour réaliser une ou deux pages du livre sous la direction attentive de l'enseignant. Pour tirer le meilleur parti de cette activité de fabrication, ce dernier veillera à y intégrer des apprentissages au niveau du langage et de la création artistique. Les pages sont alors assemblées pour obtenir un livre. Ce dernier est d'abord lu ensemble. Il peut ensuite être présenté à d'autres classes avant d'aboutir dans la bibliothèque, où il pourra être fréquemment consulté.

4 Les réglettes de type Brissiaud

Nous avons axé le travail à l'aide des réglettes de type Brissiaud sur l'apprentissage de l'égalité. Toutefois, dans un premier temps, il est nécessaire de s'appropriier le matériel. C'est pourquoi nous proposons d'abord quelques activités qui se trouvent dans la brochure qui accompagne les réglettes.

De quoi s'agit-il ? Représenter des nombres à l'aide de réglettes.

Calculer des sommes et des différences.

Enjeux Additionner et soustraire de petits nombres.

Étudier l'égalité sous ses différents aspects.

Compétences

S'exprimer dans un langage clair et précis.

Dénombrer, classer.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Vérifier le résultat d'une opération.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des réglettes de type Brissiaud, des dés classiques et d'autres comportant deux fois les nombres 0, 1 et 2 situés face à face ainsi que des pions.

Les fiches 17 à 22 aux pages 109 à 114.

Prérequis

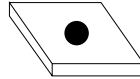
L'ordre de succession des dix premiers nombres.

4.1 Présentation du matériel

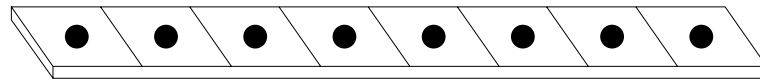
Les réglettes qui sont utilisées dans le cadre de cette activité ont été créées par Rémi BRISSIAUD [30]. Elles sont disponibles aux éditions Retz à Paris. Il est possible de les commander via internet².

Un jeu complet de ce matériel comprend :

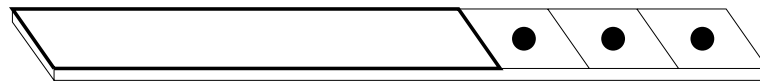
110 carrés unités,



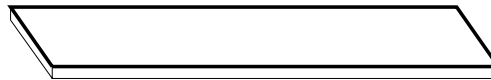
4 jeux de réglettes sans cache contenant chacun dix réglettes qui correspondent respectivement aux nombres de un à dix,



6 jeux de réglettes sur lesquelles une suite de cinq unités est remplacée par un cache,



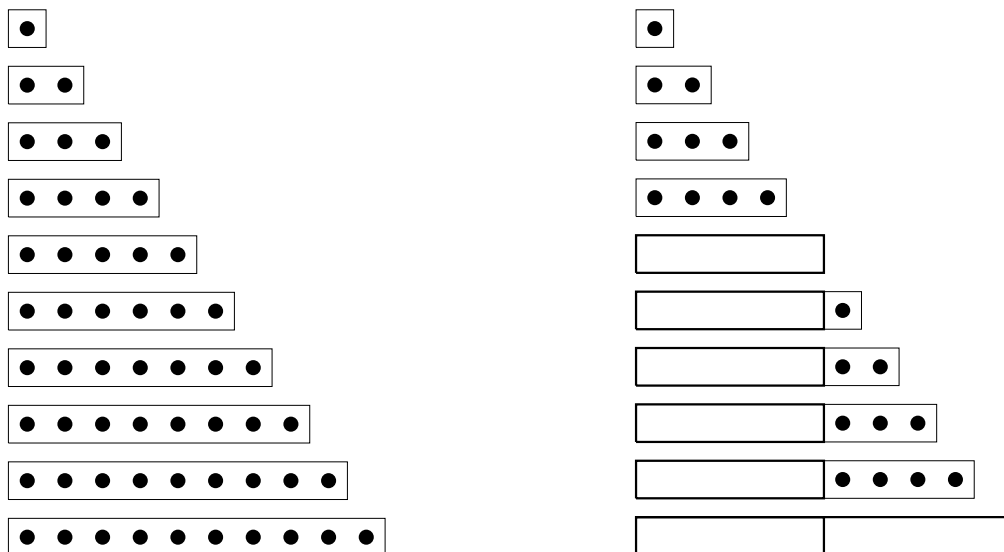
28 caches de cinq,



8 réglettes de dix constituées par la juxtaposition de deux caches de cinq.



Ce matériel est fabriqué en carton. Voici les deux séries de dix réglettes, avec et sans caches.



²<http://www.editions-retz.com>

La présence d'un cache de cinq permet aux enfants de reconnaître rapidement la quantité représentée sur une réglette. Les trois premières activités qui suivent donnent l'occasion de manipuler les réglettes et les caches et de réaliser des additions et soustractions de petits nombres. La quatrième aborde le problème de l'égalité.

4.2 Introduction du cache

Comment s'y prendre ?

L'activité se déroule sous forme de jeu. Les élèves sont répartis en groupes de 2 à 4 joueurs. Ils disposent, par groupe, d'un dé comportant deux fois les nombres 0, 1 et 2 situés face à face. Au centre de la table se trouve une réserve, appelée ci-dessous « pioche » qui contient 10 carrés unités et deux caches de cinq par joueur.

Lance le dé. Prends le nombre de carrés correspondant à ton score et aligne-les devant toi. Lorsque tu as cinq points, recouvre-les à l'aide d'un cache. Continue jusqu'à obtenir dix points.

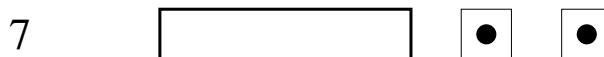
Après chaque lancer de dé, l'élève concerné prend dans la pioche le nombre de carrés correspondant à son score. Les enfants jouent chacun à leur tour. Dès qu'un joueur possède cinq carrés, il doit les recouvrir d'un cache de cinq. S'il ne le fait pas, l'arbitre, qui peut être l'enseignant, remet les groupes de cinq unités non masquées dans la pioche. Lorsqu'un enfant atteint le score de dix carrés en ayant bien recouvert les deux groupes de cinq, il remporte la partie.

Dans un premier temps, les élèves ont tendance à compter les points masqués à travers le cache. Certains éprouvent parfois des difficultés lors de ce comptage et dénombrent quatre ou six points sous le cache. Cet obstacle est généralement surmonté quand on leur fait prendre conscience que le cinquième point est situé juste au bord du cache avant le premier point visible.

Pendant l'activité, l'enseignant intervient en demandant le plus souvent possible aux élèves de dire le nombre de points qu'ils possèdent. Tout au long de la partie, on vérifie quel joueur a le plus de points. Lorsqu'un enfant a atteint les dix points, cela permet de classer les autres joueurs selon le score qu'ils ont à cet instant. Cette verbalisation ainsi que la remise des groupes de cinq points non masqués dans la pioche amène les élèves à être plus attentifs et à recompter régulièrement leurs points. Il est nécessaire de reprendre fréquemment cette activité, car c'est celle qui établit la correspondance entre le cache et les cinq unités. Comme prolongement, on peut proposer aux enfants des exercices écrits tels que ceux de la fiche 17 à la page 109. Les élèves doivent, dans un premier temps, inscrire en chiffres les points représentés.



Ensuite, ils doivent dessiner les réglettes correspondant au nombre indiqué.



4.3 À la découverte des réglettes

Comment s'y prendre ?

Venons-en maintenant à l'activité d'introduction des réglettes. Elle est prévue pour se dérouler par groupes de deux élèves. Il est nécessaire de se munir de deux dessins d'escaliers par groupe. Ces escaliers correspondent à une série complète de réglettes disposées verticalement de la plus petite à la plus grande (figure 12).

La fiche 18 à la page 110 reprend la configuration de cet escalier. Il faudra l'agrandir au format A3 pour pouvoir y placer les réglettes. Pour améliorer la présentation et la solidité du matériel, l'enseignant peut coller les escaliers sur un carton, puis coller sur ce support un autre carton où la forme de l'escalier a été évidée de manière à laisser un creux destiné à recevoir les réglettes.

En plus des deux escaliers, chaque groupe reçoit une série de réglettes sans cache, une autre avec cache et, au minimum, sept caches de cinq.

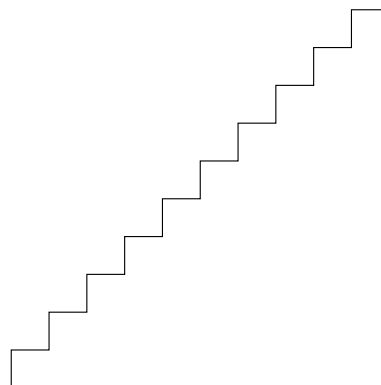


Fig. 12

Remplis un des escaliers à l'aide des réglettes sans cache disposées verticalement et l'autre à l'aide des réglettes avec cache. Vérifie que les deux escaliers sont identiques en plaçant des caches aux bons endroits sur le premier escalier.

Cette activité permet aux élèves de prendre contact avec les différentes réglettes et de montrer la correspondance entre les deux séries de réglettes. Les nombres représentés ici sont assez aisément reconnus puisque les réglettes sont placées en ordre croissant. Quand les élèves ont complété leur escalier, l'enseignant peut enlever une des réglettes et demander aux enfants quel est le nombre qui y est représenté. Cette dernière question permet de vérifier si les élèves maîtrisent la correspondance entre le cache et la quantité cinq.

4.4 Ajout et retrait de petits nombres

Comment s'y prendre ?

Au cours de cette activité, les élèves sont répartis par groupes de trois. Deux d'entre eux disposent des mêmes escaliers que précédemment et d'un dé comportant deux fois 0, 1 et 2 face à face. Le troisième enfant tient le rôle du banquier et gère deux séries de réglettes avec cache.

Lance le dé. Avance ton pion sur l'escalier du nombre de points inscrits sur le dé. Demande la réglette correspondante au banquier. Place-la sous ton pion.

Au départ, les pions des deux élèves sont situés au bas de l'escalier. Le premier joueur lance le dé et avance son pion du nombre de marches égal à son score sur le dé. À ce moment, il

demande au banquier la réglette à placer sous la marche de l'escalier en citant son nom. Par exemple : « Je voudrais la réglette un ». Le banquier la lui fournit et le joueur la dispose sous son pion. Les deux enfants jouent alternativement. Le placement de la réglette adéquate sous le pion du joueur permet à l'élève de vérifier si sa demande au banquier était correcte et, donc, de se corriger lui-même. Si, suite à cette vérification, il constate qu'il s'est trompé dans le choix de la réglette, il la rend au banquier et replace son pion sur la marche de l'escalier qu'il occupait auparavant. Le rôle du banquier est important. Par sa présence, il amène les joueurs à employer les nombres et non à simplement comparer par tâtonnement la hauteur des marches de l'escalier et la longueur des réglettes. De plus, le banquier participe également activement au jeu puisqu'il doit répondre correctement aux demandes des joueurs et, donc, reconnaître les réglettes.

Plusieurs procédés peuvent être utilisés par les élèves pour trouver le nombre correspondant à la réglette souhaitée.

Ainsi, si le joueur s'est successivement arrêté sur les marches deux, quatre, cinq et sept, il obtient l'escalier de la figure 13. Si au lancer de dé suivant il obtient deux, il peut :

- soit recompter toutes les marches une à une jusqu'à celle sur laquelle se trouve son pion,
- soit surcompter à partir de la marche sept en énonçant successivement « huit, neuf »,
- soit calculer directement « sept et deux égalent neuf ».

L'un des buts est d'amener les élèves à employer les deux derniers procédés.

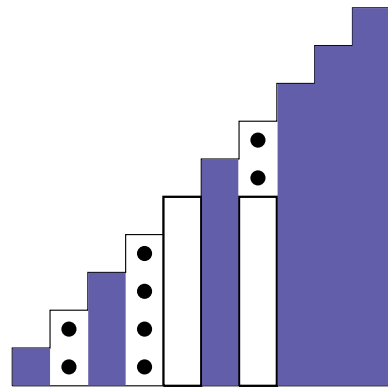


Fig. 13

Par la suite, la même activité est réalisée en démarrant cette fois du haut de l'escalier pour introduire les soustractions. La réglette dix est directement placée avant le premier lancer de dé. Il ne faut pas obligatoirement attendre que les élèves maîtrisent parfaitement les additions pour entamer cette activité. En effet, comme dit précédemment, le rapport entre le cache et les cinq unités qu'il représente est un cap essentiel à franchir. Lors des soustractions, les enfants doivent parfois remplacer mentalement un cache de cinq par les unités qui lui correspondent. C'est par exemple le cas lorsqu'ils retirent deux à dix. Et comme le dit BRISSIAUD, cela conduit très souvent à des progrès importants dans la représentation des nombres par des réglettes.

Prolongements possibles

L'enseignant peut demander aux élèves de remplir l'escalier entièrement et, donc, à chaque lancer de dé, de choisir le mouvement le plus adéquat entre la montée et la descente. Plus tard, l'activité peut également être prolongée en utilisant un escalier allant jusqu'à quinze ou vingt. Dans ce cas, le joueur peut, par exemple, demander treize et le banquier lui fournit une réglette dix et une réglette trois. C'est l'occasion d'introduire les relations numériques telles que « treize, c'est dix et trois ». La configuration des dés peut aussi être modifiée afin d'augmenter la taille de l'ajout ou du retrait.

4.5 La notion d'égalité

De nombreuses études menées au cours des dernières années concernent l'apprentissage de l'égalité à l'école primaire. Dans la plupart des cas, elles conduisent au même constat : les élèves éprouvent de grosses difficultés lorsque le symbole d'égalité n'est pas placé en fin d'opération. Ainsi, une majorité d'enfants parvient à compléter correctement des égalités de type $3 + 5 = \dots$ ou $3 + \dots = 8$, tandis que des opérations de type $8 = 3 + \dots$ ou $8 = \dots + 3$ leur posent de gros problèmes. Les réglettes constituent un matériel approprié pour surmonter cet obstacle. C'est pourquoi nous envisageons de l'utiliser dans le cadre d'un travail allant de problèmes simples jusqu'à d'autres plus complexes.

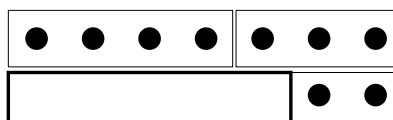
Dans un premier temps, l'activité se déroule avec les réglettes Brissiaud. Chaque élève dispose d'une série de réglettes. L'enseignant peut soit dessiner les opérations, soit reproduire les réglettes en grand pour les fixer au tableau. Les premières opérations proposées sont des additions classiques.

Mets devant toi les mêmes réglettes que celles du tableau. Prends la réglette qui correspond à la somme de ces deux réglettes et place-la en dessous. Énonce le calcul effectué.

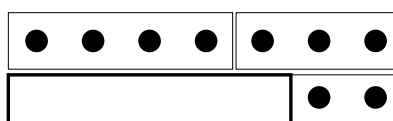
Voici un exemple d'opération possible.



Les élèves prennent la réglette qui correspond à la somme des deux autres et ils la placent juste sous celles-ci.



Il est important qu'ils énoncent le calcul effectué qui est noté au tableau sous les réglettes.

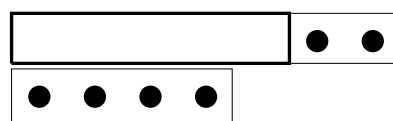


$$4 + 3 = 7$$

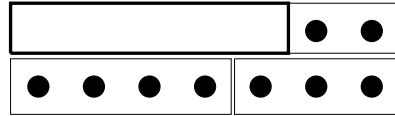
Plusieurs exercices de ce type sont proposés. Nous passons ensuite à un autre genre d'exercice.

Place devant toi les mêmes réglettes que celles du tableau. Complète ensuite pour obtenir la même quantité au-dessus et en dessous.

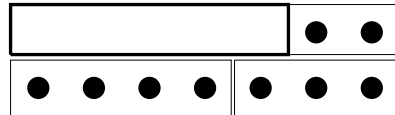
La disposition des réglettes est différente de celle des exercices précédents. La réglette la plus grande est placée au-dessus et une réglette plus petite en dessous comme dans l'exemple qui suit.



Les élèves complètent la rangée du dessous en ajoutant la réglette qui permet d'obtenir exactement celle du dessus.



Ici aussi, il est important qu'ils énoncent le calcul effectué. Ce dernier est noté au tableau sous les réglettes.



$$7=4+3$$

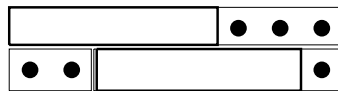
On propose encore de nombreux exercices. On peut ensuite poursuivre avec des exercices qui mélangent les deux types de manipulations décrites ci-dessus. Ce travail est alors suivi d'activités reprises sur des fiches.

La fiche 19 à la page 111 présente des situations avec les réglettes dessinées. Les élèves indiquent sous chaque dessin l'opération qui est représentée.

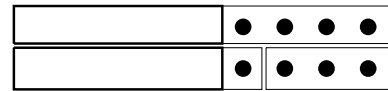
Écris le calcul correct en dessous de chaque dessin.



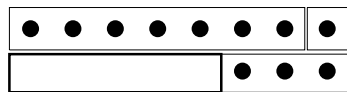
$$4+2=6$$



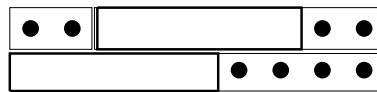
$$8=2+6$$



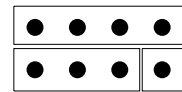
$$9=6+3$$



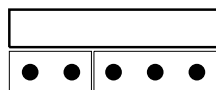
$$7+1=8$$



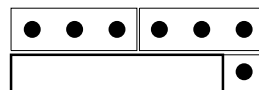
$$2+7=9$$



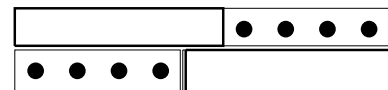
$$4=3+1$$



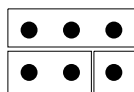
$$5=2+3$$



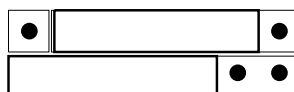
$$3+3=6$$



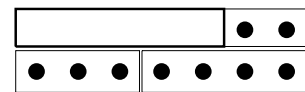
$$9=4+5$$



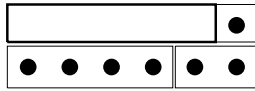
$$3=2+1$$



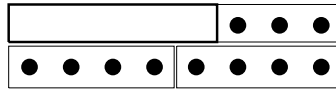
$$1+6=7$$



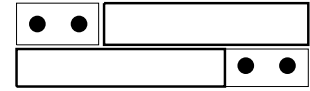
$$7=3+4$$



$$6=4+2$$



$$8=4+4$$

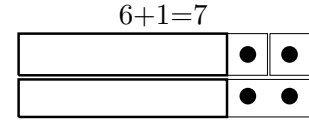
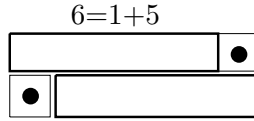
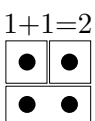
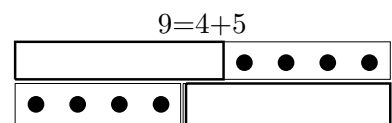
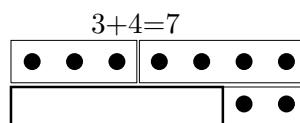
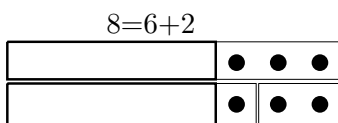
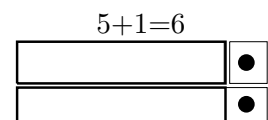
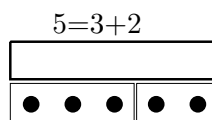
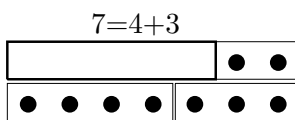
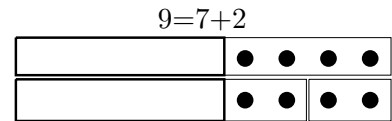
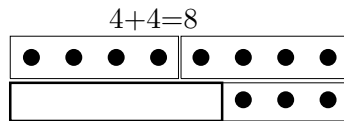
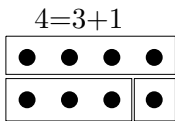
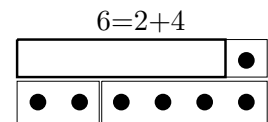
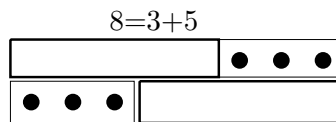
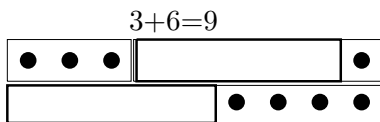


$$2+5=7$$

Dans un deuxième temps, les élèves reçoivent la fiche 20 à la page 112. Cette fois, l'opération est indiquée et les enfants doivent dessiner la représentation correspondante.

Dessine les réglettes pour représenter chaque opération.

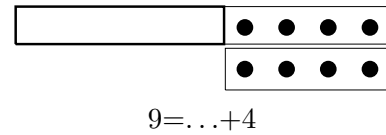
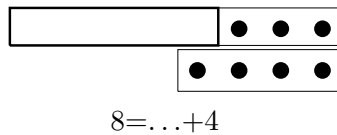
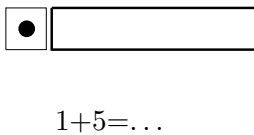
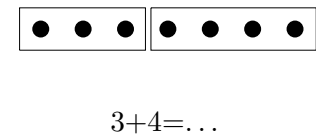
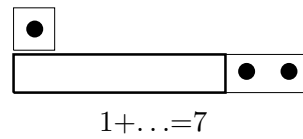
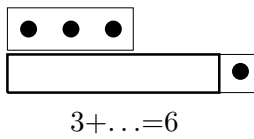
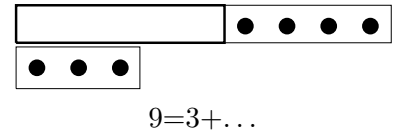
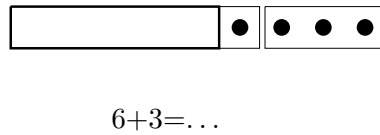
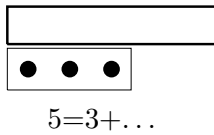
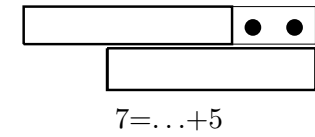
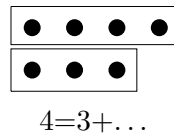
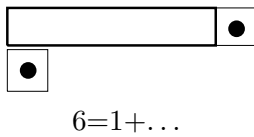
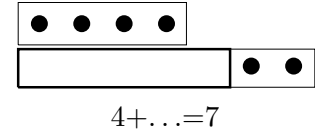
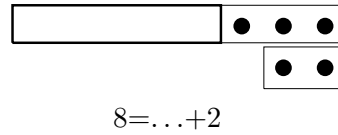
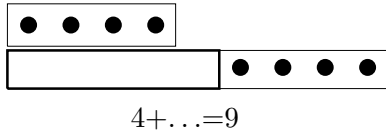
Voici les exemples proposés sur cette fiche 20. Ils sont ici présentés sous forme d'exercices résolus.



Ensuite, d'autres opérations sont proposées sur la fiche 21 à la page 113. Les élèves doivent compléter à la fois les dessins et les calculs.

Ajoute la réglette manquante. Complète le calcul pour qu'il soit correct.

Voici les exemples proposés sur cette fiche 21.



Enfin, les élèves reçoivent la fiche 22 à la page 114, qui comporte uniquement des opérations à compléter.

Complète pour obtenir une égalité.

Voici les exemples proposés sur la fiche 22.

$$7 = 4 + \dots$$

$$\dots + 4 = 6$$

$$9 = \dots + 2$$

$$\dots = 5 + 4$$

$$5 = 4 + \dots$$

$$5 = 2 + \dots$$

$$\dots = 4 + 2$$

$$6 + 3 = \dots$$

$$6 + \dots = 7$$

$$7 + 1 = \dots$$

$$3 + 1 = \dots$$

$$5 + \dots = 8$$

$$\dots + 2 = 4$$

$$8 = \dots + 3$$

$$\dots + 1 = 2$$

$$\begin{array}{lll}
 \dots = 3 + 5 & 1 + \dots = 3 & 7 = \dots + 5 \\
 8 = 4 + \dots & 5 + 2 = \dots & \dots + 3 = 4 \\
 \dots = 5 + 2 & 4 + \dots = 5 & 9 = \dots + 4 \\
 8 = 1 + \dots & 2 + 6 = \dots & \dots + 6 = 9 \\
 \dots = 2 + 2 & 4 + \dots = 8 & 7 = \dots + 1
 \end{array}$$

Cette dernière fiche peut être considérée comme une évaluation des activités. L'enseignant peut bien entendu adapter les exercices proposés au niveau de sa classe tout en présentant sur chacune des fiches des exemples qui reprennent les différentes sortes d'égalités. Le même type de travail peut ensuite être effectué avec les soustractions.

Prolongements possibles

Des activités comportant plusieurs termes de chaque côté du signe = peuvent être proposées aux élèves, par exemple, $2 + 5 = 4 + 3$. Dans un premier temps, il est possible de placer la réglette qui correspond à la somme au milieu comme sur la figure 14, puis, enlever celle-ci pour ne conserver que les termes de l'égalité comme sur la figure 15.

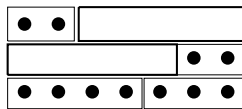


Fig. 14

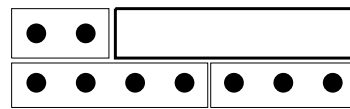
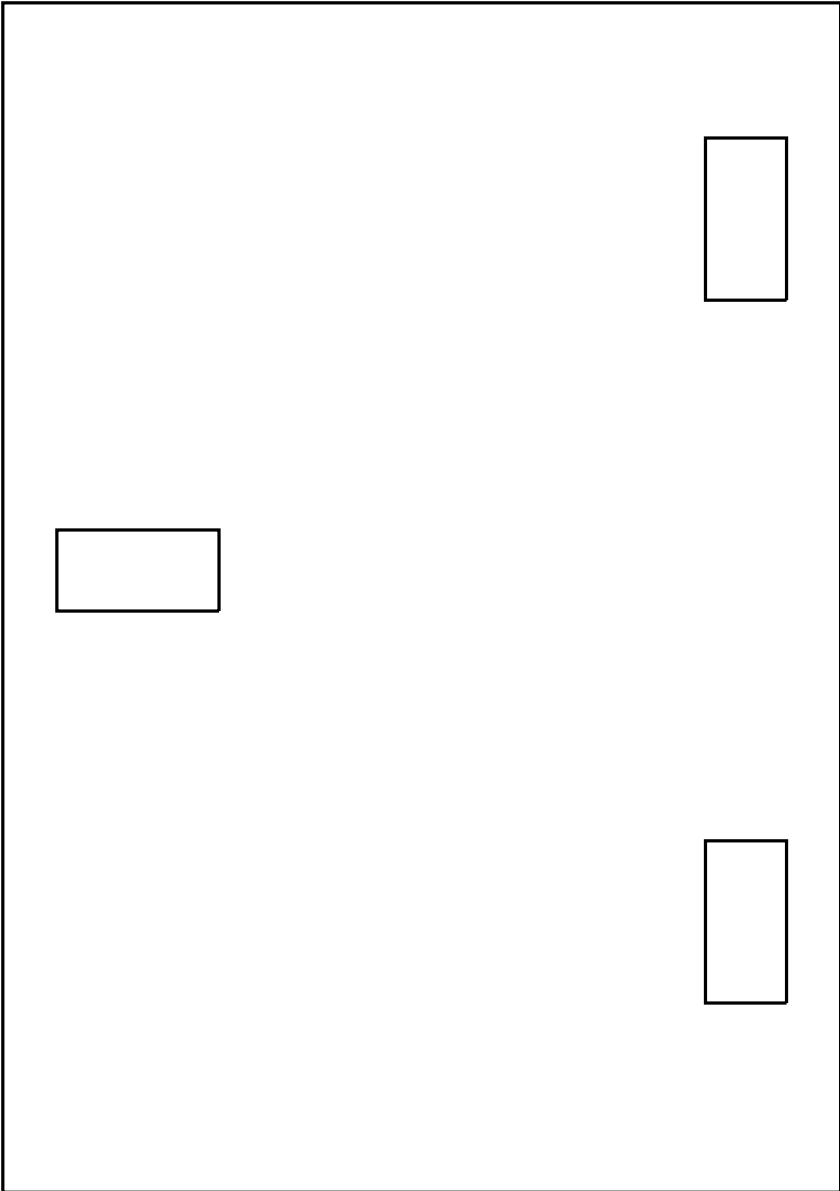


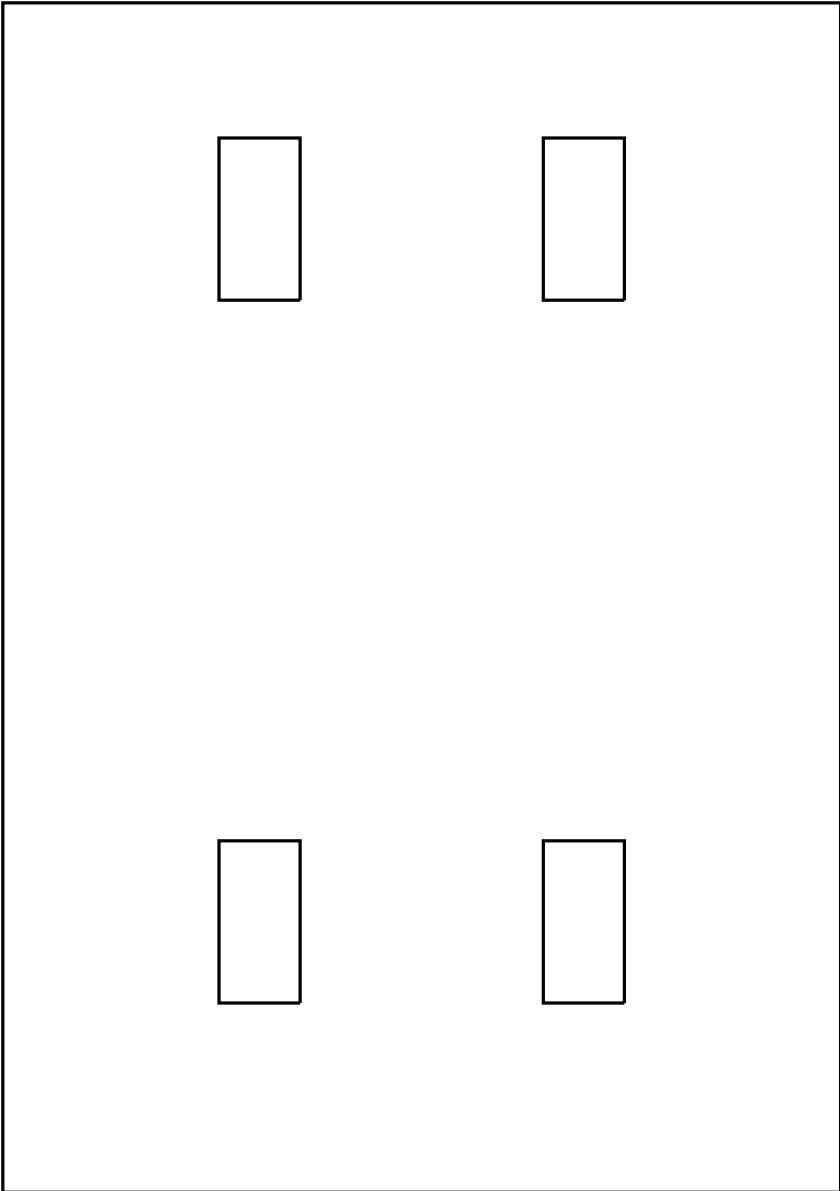
Fig. 15

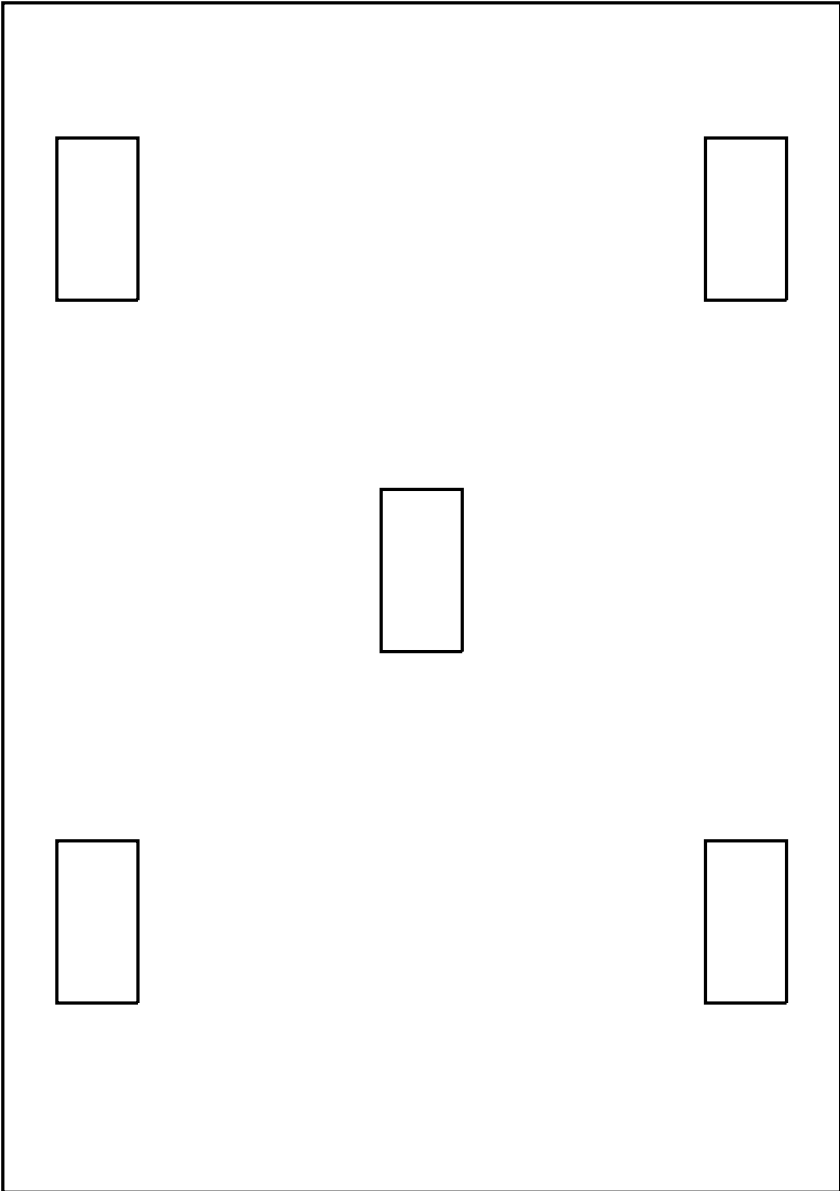
Il est également possible de travailler les inégalités puisqu'en plaçant les réglettes, on voit immédiatement que, par exemple, $4 + 3$ est plus grand que $5 + 1$.

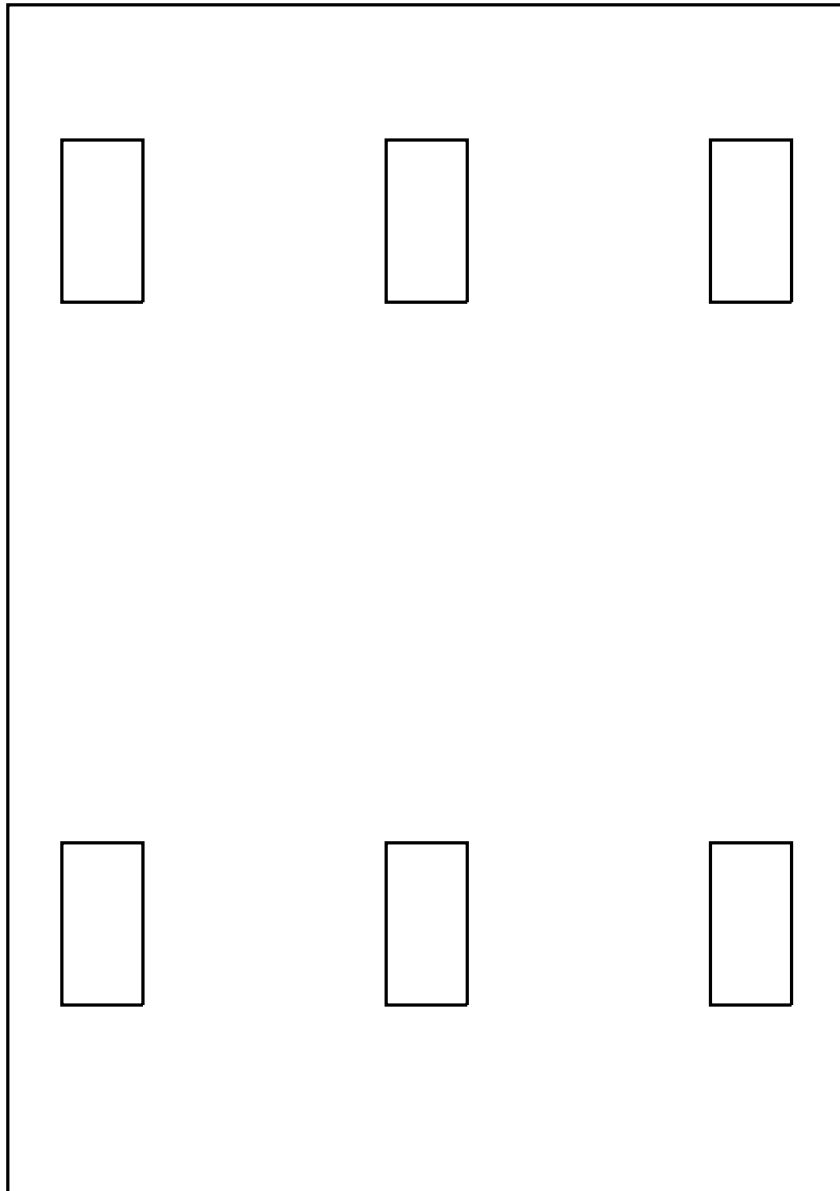
Annexe I

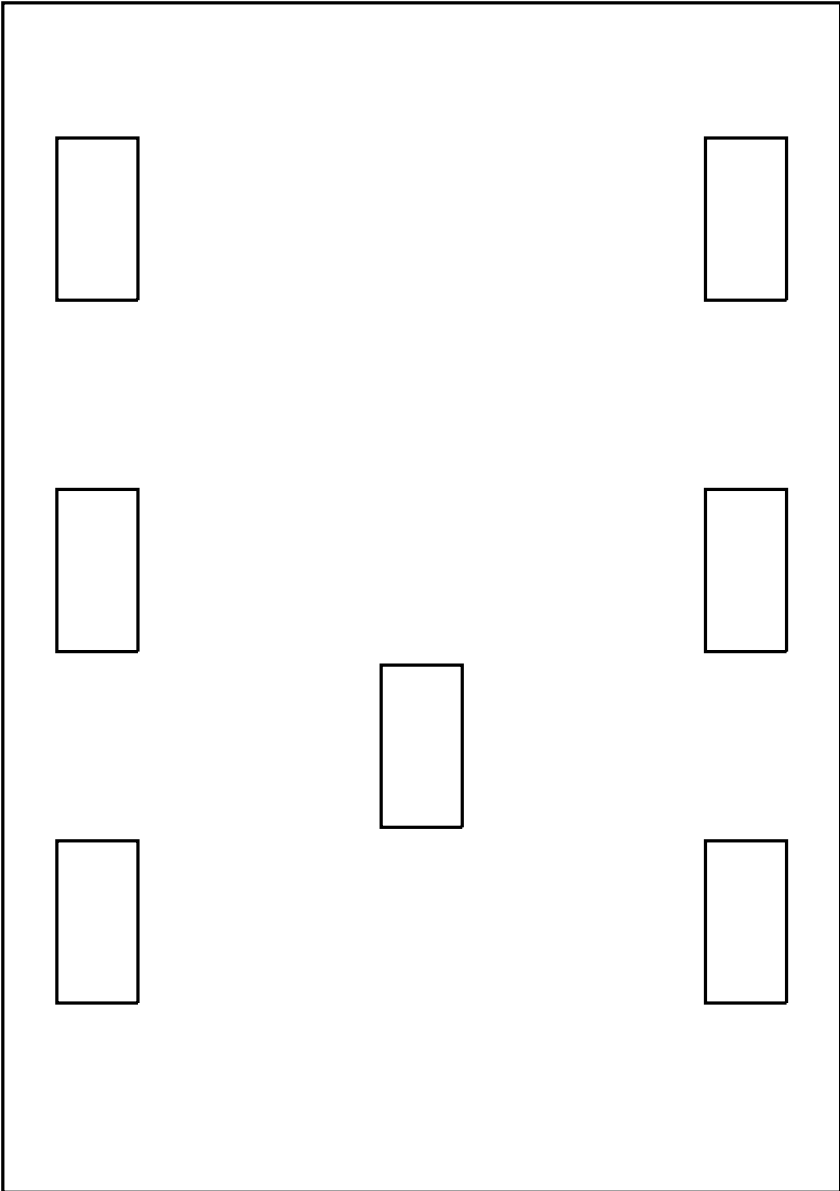
Fiches à photocopier

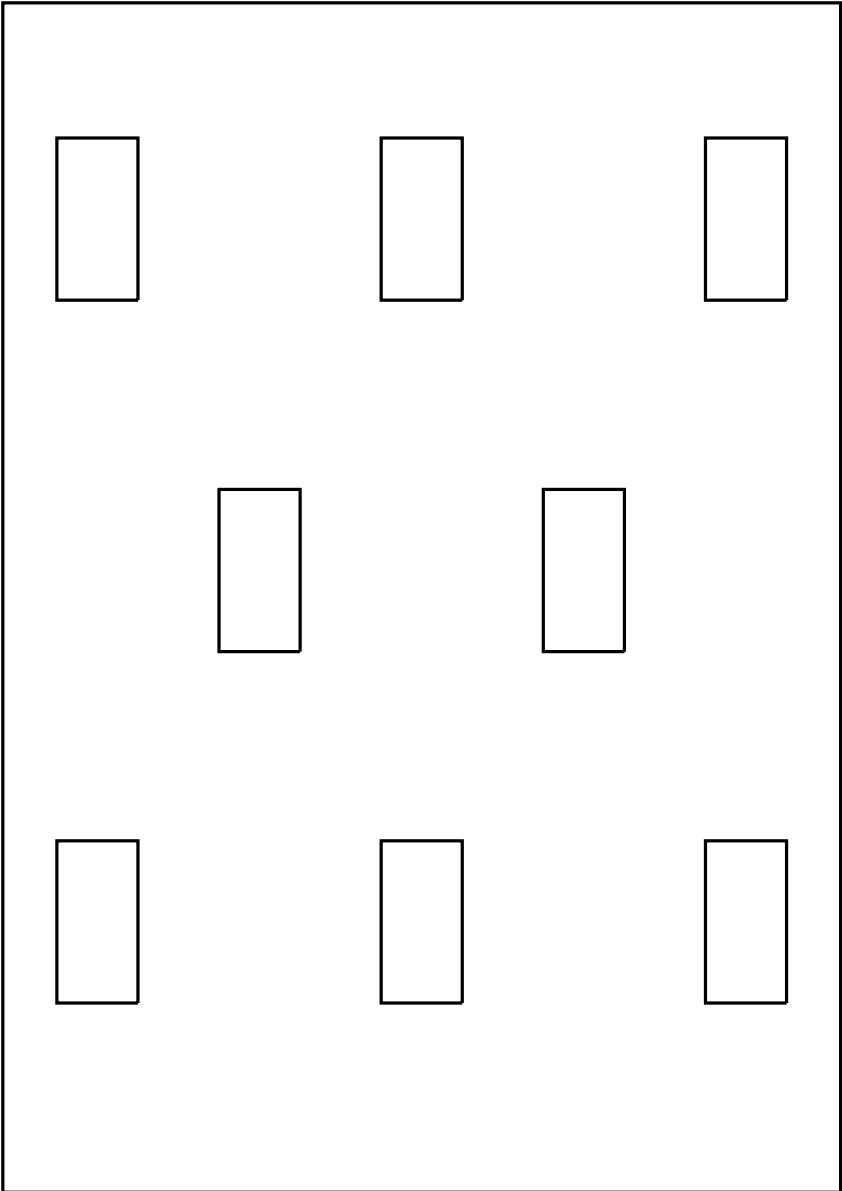


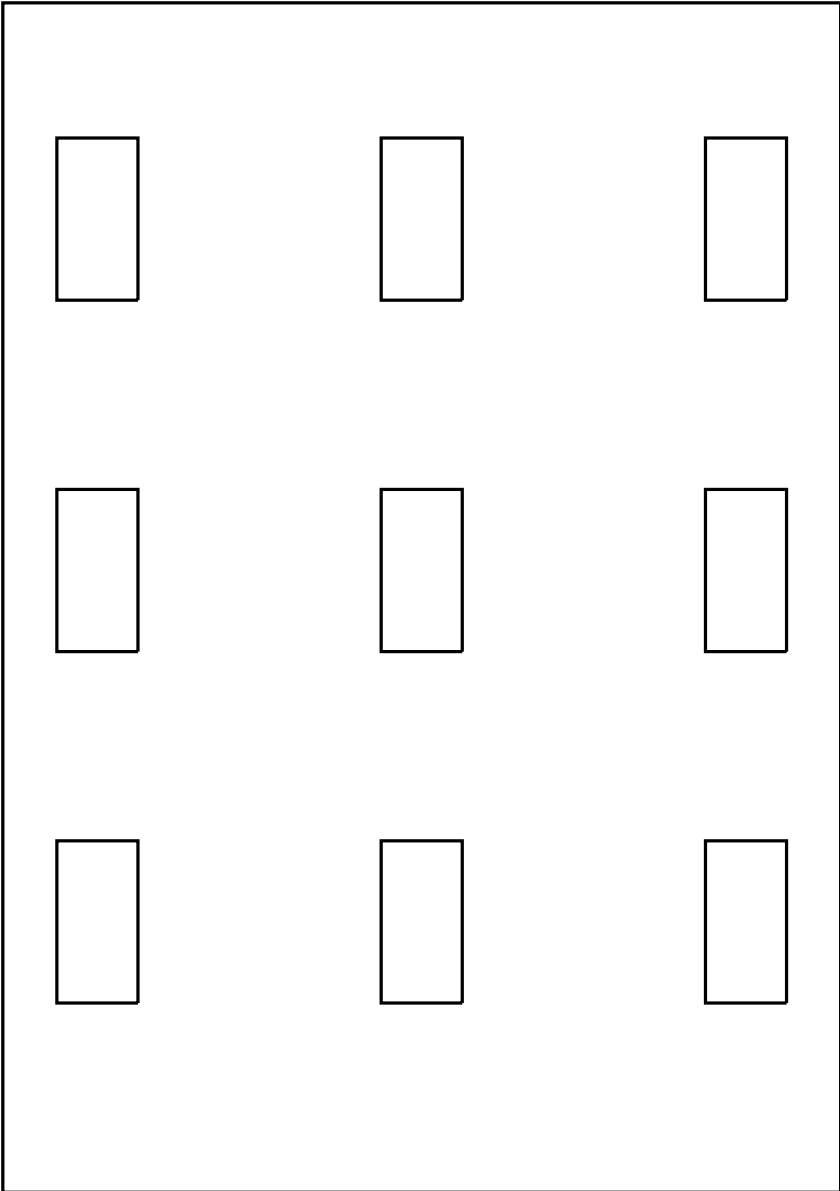


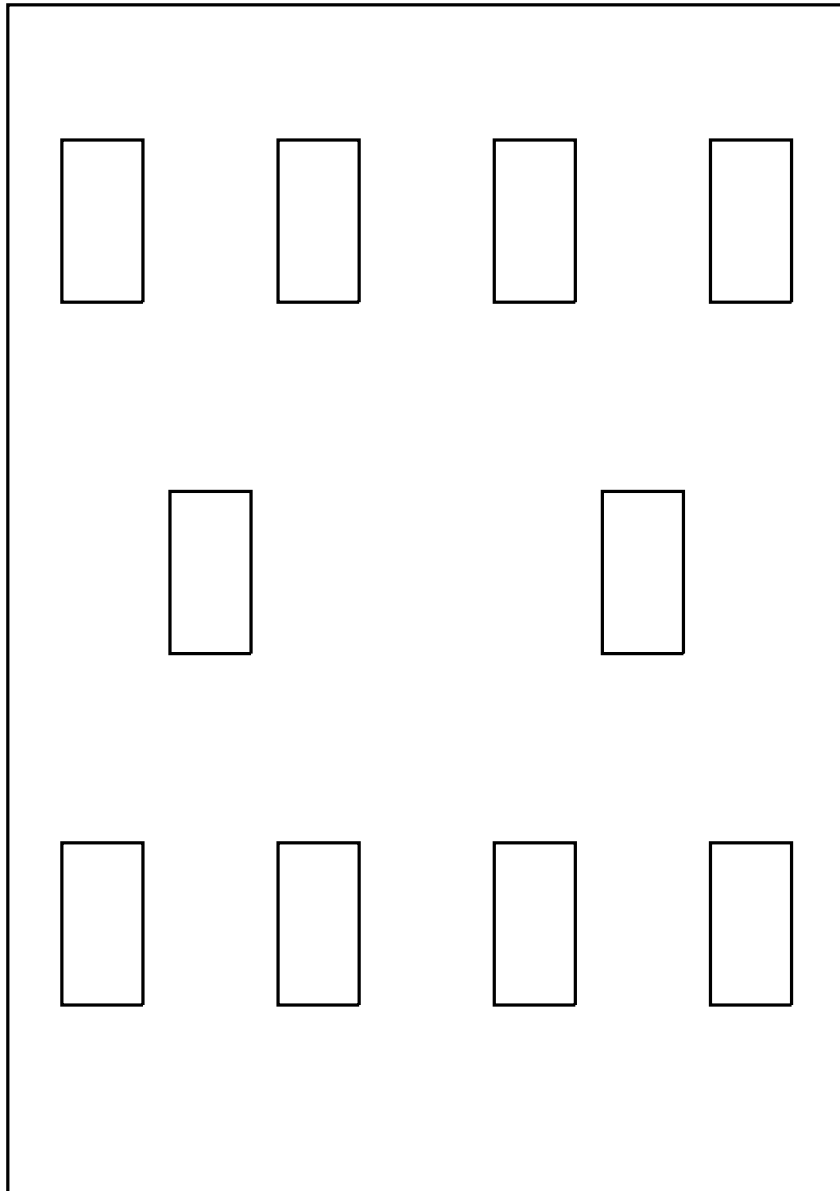


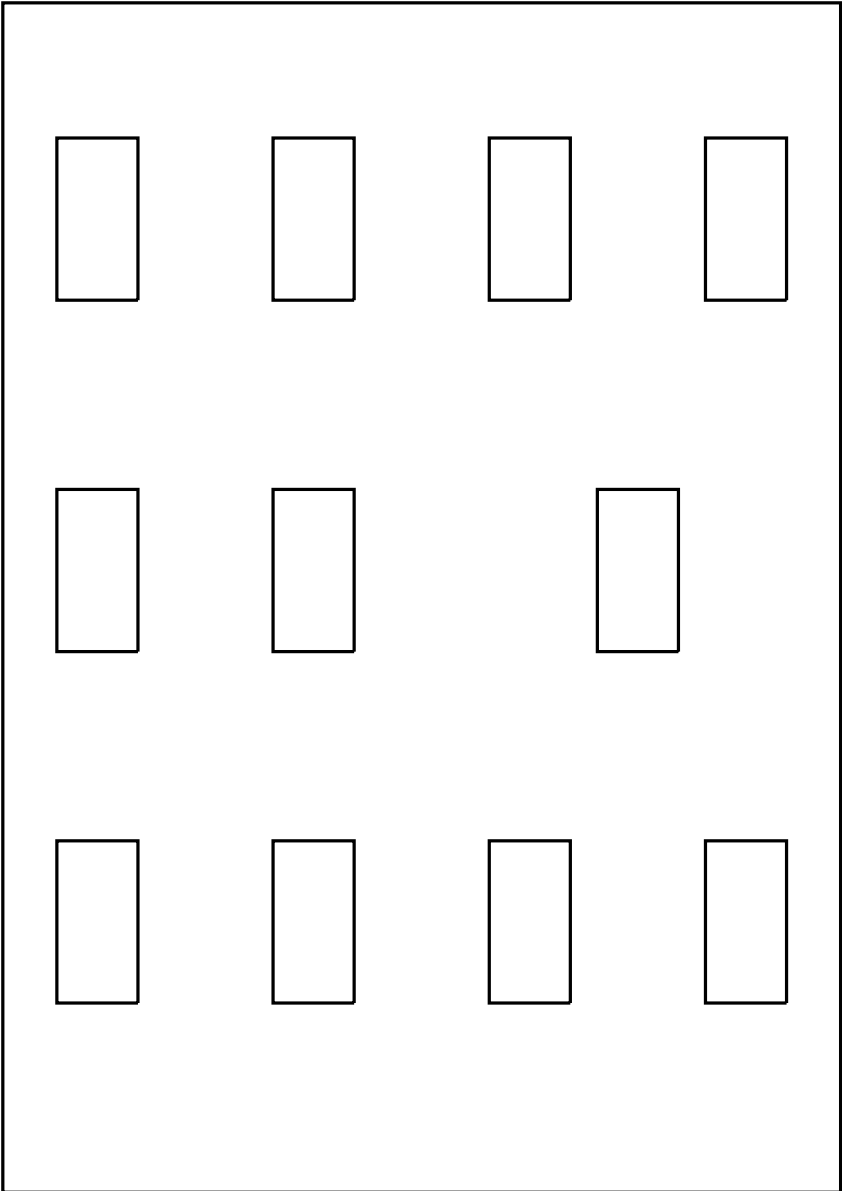


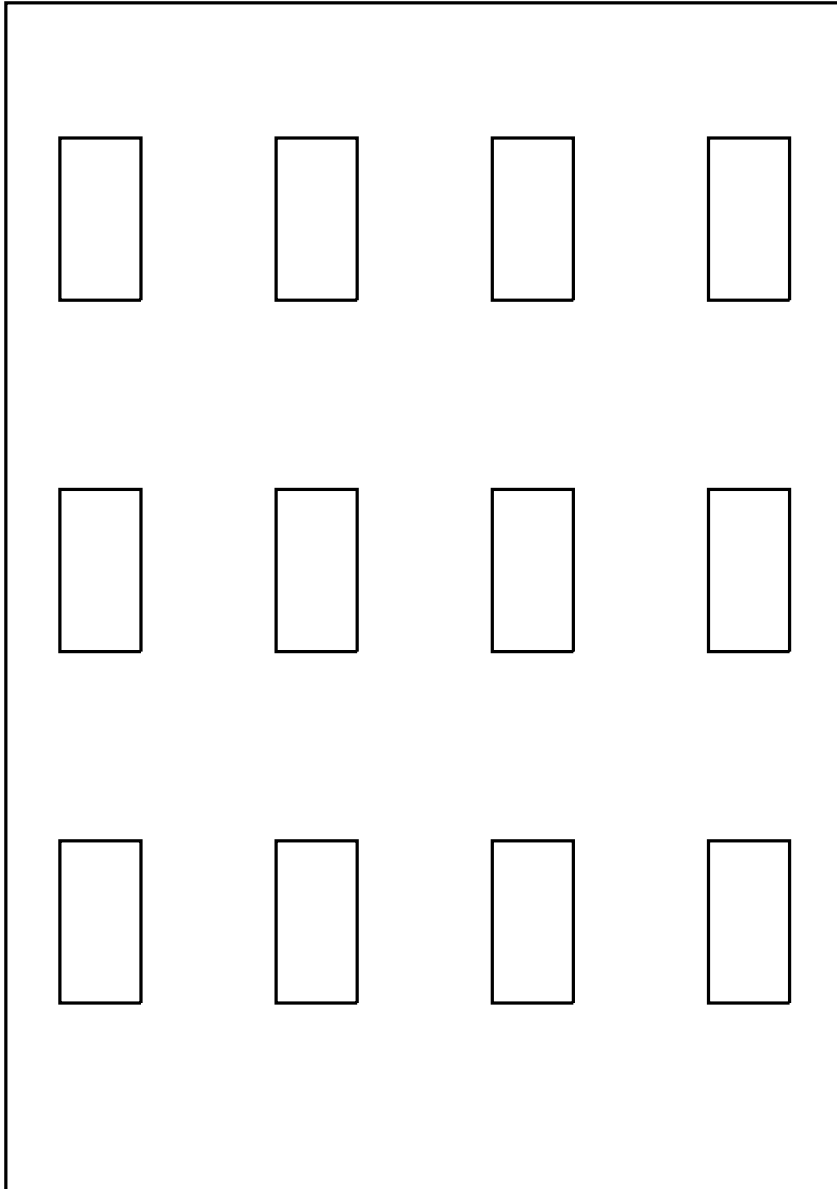


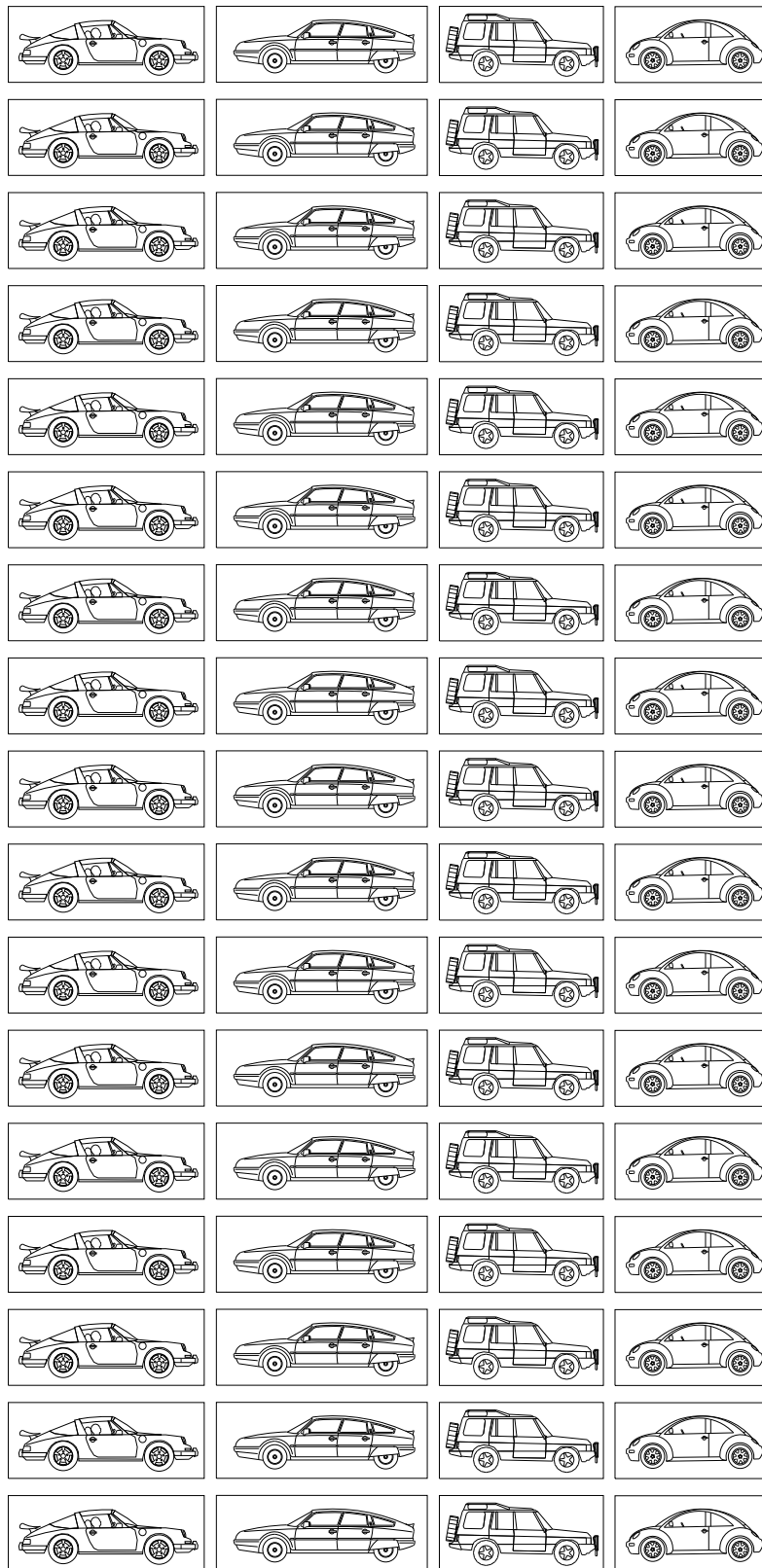




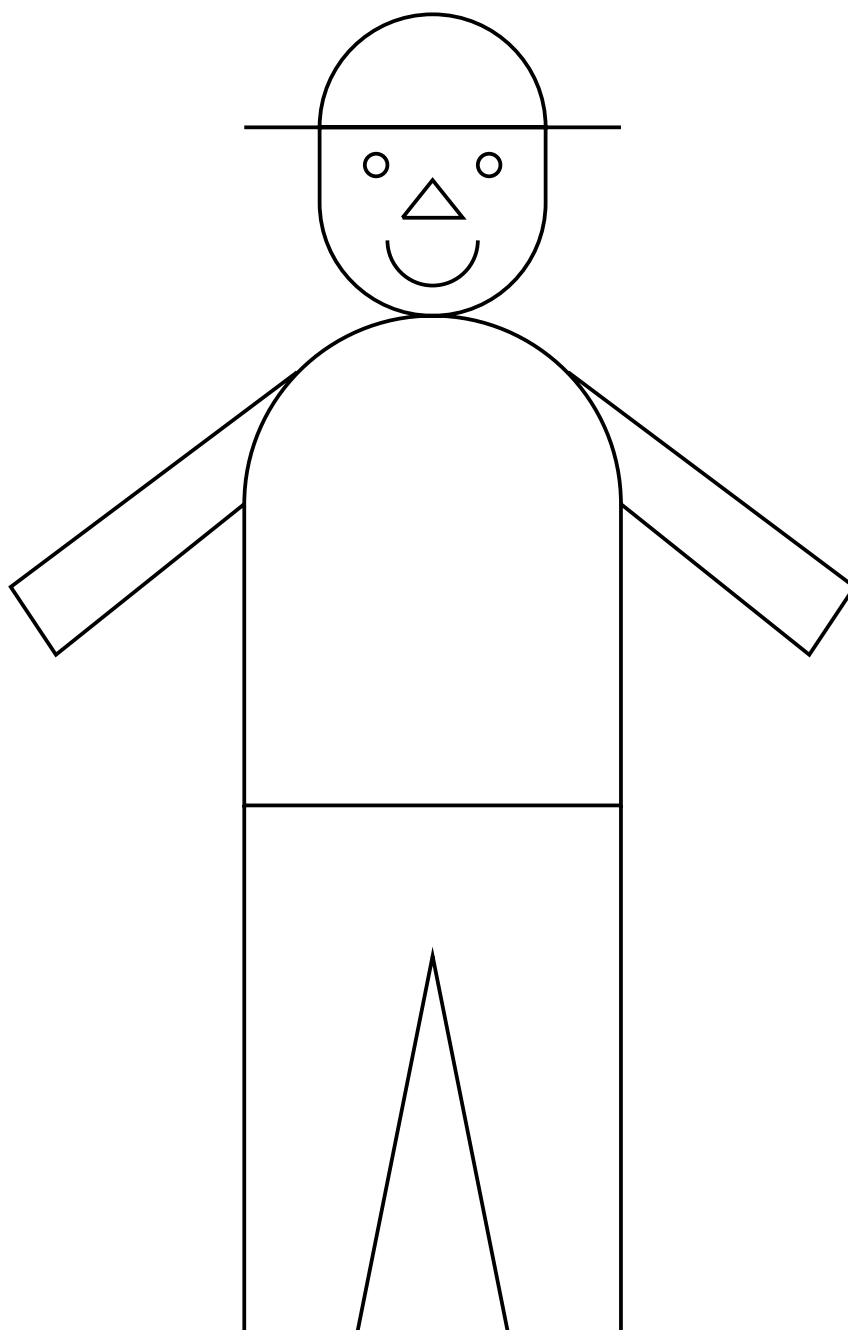








Prends deux bandelettes comportant le même nombre de gommettes. Ce nombre doit être égal au nombre de ronds sur le clown. Colle la première sous le dessin. Place les gommettes de la deuxième bandelette sur le costume du clown pour vérifier si ton choix est correct.



Comptines numériques (1)

La poule

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
 Moi je compte jusqu'à neuf
 avant de pondre mon œuf.
 1, 2, 3, 4, 5, 6,
 Si je compte jusqu'à six,
 mon œuf est en pain d'épice.
 1, 2, 3,
 Si je compte jusqu'à trois,
 mon œuf est en chocolat.

Violette, Violette

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
 Violette, Violette.
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
 Violette à bicyclette.

Dix miniqui

Une minilune,
 Deux minibœufs,
 Trois minicroix,
 Quatre minicartes,
 Cinq minizincs,
 Six minilits,
 Sept minimiettes,
 Huit mininuits,
 Neuf miniveufs,
 Dix miniqui,
 Miniquoi, gare à toi!
 C'est fini!

Les cubes

1 cube, 2 cubes, 3 cubes, 4 cubes, 5
 cubes, 6 cubes, 7 cubes, 8 cubes, 9
 cubes,
 ça titube!
 10 cubes, ...
 Patatras!
 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 Et voilà!
 Tous les cubes sont en tas...

Kourou

Tu cours où ?
 À Kourou,
 Dans le nord de la Guyane
 Pour voir la fusée Ariane.
 Elle décolle aujourd'hui,
 5, 4, 3, 2, 1, partie!

En rêvant, j'ai vu...

En rêvant, j'ai vu...
 Un chien taper dans un tambourin ;
 Deux macareux voler des œufs ;
 Trois oies chanter dans les bois ;
 Quatre canards pleurer dans le noir ;
 Cinq requins sauter sur des coussins ;
 Six souris planter des céleris ;
 Sept poulettes faire du patin à rou-
 lettes ;
 Huit brebis attraper des canaris ;
 Neuf crapauds jouer du pipeau
 Et dix fourmis en chemise de nuit
 Qui m'ont crié : « Réveille-toi ! Assez
 dormi ! ».

Comptines numériques (2)

Sept petits enfants

Sept petits enfants,
quatre filles et trois garçons,
ont inventé cette chanson.
La première s'appelait Lundi :
elle était vraiment jolie.
La deuxième, c'était Mardi :
elle savait danser sans bruit.
La troisième, Mercredi,
pleurait toujours à midi.
La quatrième, Jeudi
marchait, marchait jour et nuit.
Le cinquième, Vendredi,
avait toujours plein d'amis.
Le sixième, Samedi,
faisait des jardins fleuris.
Dimanche était le dernier.
Il glissait sans s'arrêter
de nuage en arc-en-ciel
au milieu du ciel.

Les douze mois

Le premier :
Janvier ouvre le bal.
Le deuxième :
Février fête carnaval.
Le troisième :
Mars envoie ses giboulées.
Le quatrième :
Avril ne se découvre pas d'un fil.
Le cinquième :
Mai offre du muguet.
Le sixième :
Juin cueille des cerises.
Le septième :
Juillet part en vacances.
Le huitième :
Août joue sans chemise.
Le neuvième :
Septembre fait sa rentrée.
Le dixième :
Octobre court dans le vent.
Le Onzième :
Novembre ramasse les feuilles.
Le douzième :
Décembre décore le sapin.

Comptines numériques (3)

Voici ma main

Voici ma main
 Elle a cinq doigts
 En voici deux
 En voilà trois
 Voici ma main
 Elle a cinq doigts
 En voici quatre
 Et un tout droit.

Les mains

Un, deux,
 Un, deux, trois,
 Ça fait une main.
 Un, deux, trois,
 Quatre, cinq,
 Ça fait cinq doigts.
 Six, sept, huit, neuf, dix,
 Ça fait deux mains
 Qui se disent bonjour.

1, 2, v'là les œufs

1, 2, v'là les œufs
 3, 4, faut les battre !
 5, 6, c'est Alice
 7, 8, qui les cuit !
 9, 10, c'est Félix
 11, 12, qui les couve !

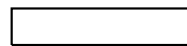
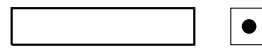
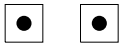
Le singe

Un petit singe comptait ses dents
 Vingt-et-une : la lune
 Vingt-deux : le feu
 Vingt-trois : la croix
 Vingt-quatre : l'emplâtre
 Vingt-cinq : c'est la fin.
 Des saucisses et du boudin.

1, 2, 3, 4, 5, la lune est éteinte

1, 2, 3, 4, 5, la lune est éteinte
 6, 7, 8, 9, 10, l'étoile se glisse
 11, 12, 13, 14, chez le rouge-gorge
 15, 16, 17, qui chante à tue-tête
 18, 19, car il voit dans l'œuf
 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,
 son petit enfant !

Indique le nombre représenté à côté du dessin.



Dessine les réglettes.

8 :

4 :

2 :

3 :

7 :

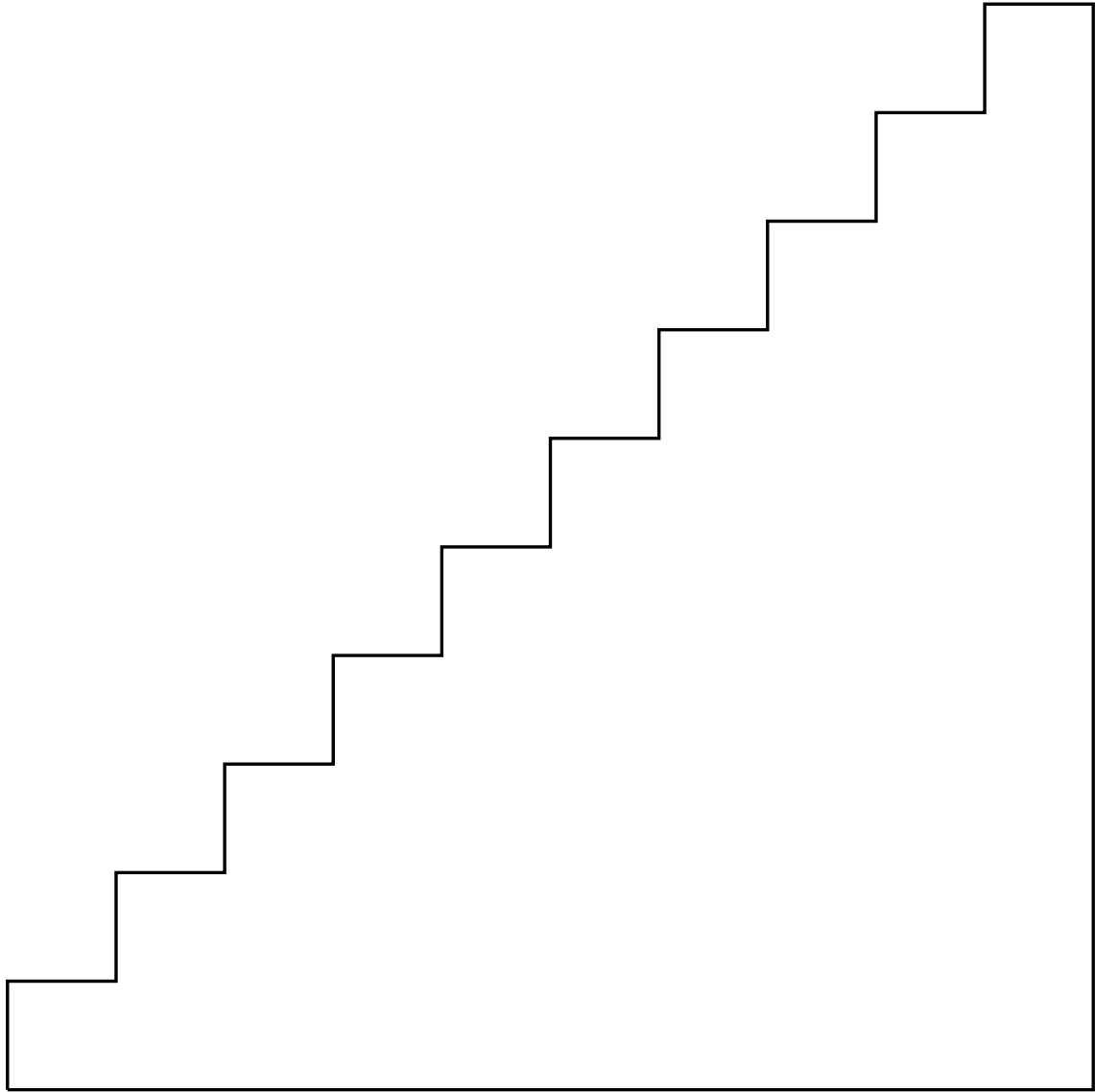
6 :

9 :

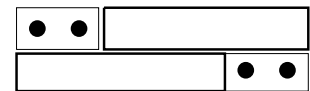
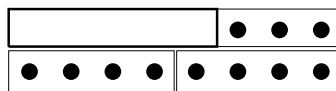
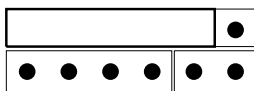
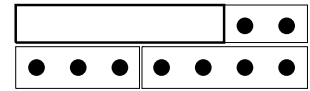
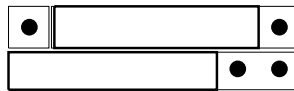
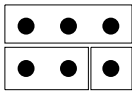
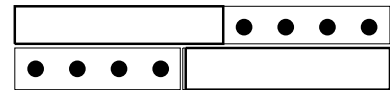
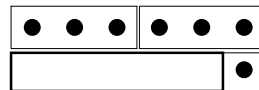
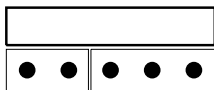
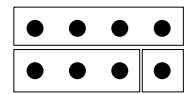
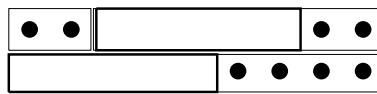
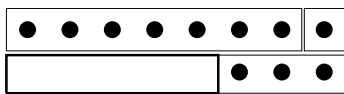
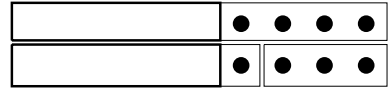
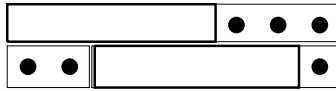
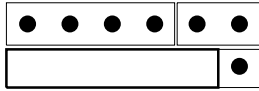
1 :

5 :

10 :



Écris le calcul correct en dessous de chaque dessin.



Dessine les réglettes pour représenter chaque opération.

$$3+6=9$$

$$8=3+5$$

$$6=2+4$$

$$4=3+1$$

$$4+4=8$$

$$9=7+2$$

$$7=4+3$$

$$5=3+2$$

$$5+1=6$$

$$8=6+2$$

$$3+4=7$$

$$9=4+5$$

$$1+1=2$$

$$6=1+5$$

$$6+1=7$$

Ajoute la réglette manquante. Complète le calcul pour qu'il soit correct.

$4 + \dots = 9$

$8 = \dots + 2$

$4 + \dots = 7$

$6 = 1 + \dots$

$4 = 3 + \dots$

$7 = \dots + 5$

$5 = 3 + \dots$

$6 + 3 = \dots$

$9 = 3 + \dots$

$3 + \dots = 6$

$1 + \dots = 7$

$3 + 4 = \dots$

$1 + 5 = \dots$

$8 = \dots + 4$

$9 = \dots + 4$

Complète pour obtenir une égalité.

$$7 = 4 + \dots$$

$$5 = 2 + \dots$$

$$3 + 1 = \dots$$

$$\dots + 4 = 6$$

$$\dots = 4 + 2$$

$$5 + \dots = 8$$

$$9 = \dots + 2$$

$$6 + 3 = \dots$$

$$\dots + 2 = 4$$

$$\dots = 5 + 4$$

$$6 + \dots = 7$$

$$8 = \dots + 3$$

$$5 = 4 + \dots$$

$$7 + 1 = \dots$$

$$\dots + 1 = 2$$

$$\dots = 3 + 5$$

$$1 + \dots = 3$$

$$7 = \dots + 5$$

$$8 = 4 + \dots$$

$$5 + 2 = \dots$$

$$\dots + 3 = 4$$

$$\dots = 5 + 2$$

$$4 + \dots = 5$$

$$9 = \dots + 4$$

$$8 = 1 + \dots$$

$$2 + 6 = \dots$$

$$\dots + 6 = 9$$

$$\dots = 2 + 2$$

$$4 + \dots = 8$$

$$7 = \dots + 1$$