Deuxième partie

Culture mathématique
à partir de 12 ans

Chapitre 5

Mathémagiques

1 Multiples et diviseurs de nombres composés de 0 et de 1

De quoi s'agit-il ? Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie.

Enjeux Expliquer un phénomène numérique qui peut paraître « magique » à première vue. Ce développement permettra de réexaminer le principe de la numération de position et son rôle dans la multiplication écrite. Il nécessitera également un travail sur les nombres ainsi que sur la notion de diviseurs et de multiples. Une attention particulière devra être portée à l'utilisation rigoureuse des vocables « chiffre » et « nombre ». Cette distinction est indispensable pour effectuer le travail décrit dans cette activité.

Compétences transversales

Dans les activités qui suivent, on retrouve les quatre compétences transversales à développer dans le cadre du cours de mathématiques.

Analyser et comprendre un message.

Résoudre, raisonner et argumenter.

Appliquer et généraliser.

Structurer et synthétiser.

Compétences

Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

Choisir et utiliser avec pertinence le calcul mental, le calcul écrit ou la calculatrice en fonction de la situation.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une calculatrice.

Prérequis

La notion de diviseur d'un nombre. La propriété : si a est multiple de b, alors a est multiple de tous les diviseurs de b.

L'écriture d'un nombre sous la forme d'une somme de produits.

La distributivité simple.

1.1 Multiplier un nombre par 11.

Les multiplications, dans lesquelles un des facteurs est un nombre formé uniquement de chiffres 1, mettent en exergue le principe de la numération de position.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant introduit l'activité de la manière suivante.

> Lorsque je multiplie le nombre 25 par 11, j'additionne les deux chiffres qui forment le nombre 25. J'obtiens le nombre 7 que je place entre le 2 et le 5. Le nombre obtenu, 275, est le produit de 25 par 11.
>
> Est-ce exact ? Est-ce que cela fonctionne dans tous les cas ? Modifie éventuellement le « truc ».

L'enseignant demande aux élèves de vérifier que ce qu'il vient d'utiliser comme procédure de calcul donne un résultat exact. Ensuite, il leur demande de proposer des nombres pour illustrer cette affirmation. Il les écrit au tableau (en veillant à espacer le chiffre des unités et celui des dizaines). Il calcule la somme des chiffres et l'écrit au milieu comme il l'a précédemment indiqué.

La classe est confrontée à deux cas de figure : d'une part, la somme des chiffres peut être inférieure à 10 et d'autre part, elle peut être supérieure à 10. Ces deux situations vont être explorées l'une après l'autre.

Si la somme des chiffres est inférieure à 10, l'explication du phénomène est relativement simple. L'illustration de la situation sous forme de calcul écrit permet de comprendre la technique proposée et de lever l'aspect magique du problème.

$$\begin{array}{rccc} & & 2 & 5 \\ \times & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & 5 \\ & 2 & 5 & \\ \hline & 2 & 7 & 5 \end{array}$$

Il peut cependant être intéressant de procéder à un travail de verbalisation sur ce premier cas, afin de mettre en place le vocabulaire pour expliquer les suivants.

Pour le produit,

- le chiffre des unités, 5, est obtenu en multipliant 1 unité par 5 unités ;
- le chiffre des dizaines, 7, est obtenu en calculant la somme du produit d'1 unité par 2 dizaines (= 2 dizaines) et du produit d'1 dizaine par 5 unités (= 5 dizaines) ;

– le chiffre des centaines, 2, est obtenu en multipliant 1 dizaine par 2 dizaines.

Le produit est donc bien un nombre à trois chiffres où le chiffre des dizaines est égal à la somme des chiffres composant le nombre initial. Le « truc » proposé par l'enseignant est ainsi expliqué dans cette première situation.

Le deuxième cas de figure que l'on peut rencontrer concerne les nombres dont la somme des chiffres est supérieure à 10. Lorsque l'on travaille avec ces nombres, on se rend immédiatement compte qu'il faut modifier le « truc » fourni par l'enseignant au début de l'activité. Pour trouver la procédure à suivre, nous allons à nouveau avoir recours au calcul écrit, ce dernier illustrant bien le phénomène à observer.

$$\begin{array}{rccc} & & 3 & 9 \\ \times & & 1 & 1 \\ \hline & & 3 & 9 \\ & 3 & 9 & \\ \hline & 4 & 2 & 9 \end{array}$$

Pour le produit,

- le chiffre des unités, 9, est obtenu en multipliant 1 unité par 9 unités (= 9 unités) ;
- le chiffre des dizaines, 2, est obtenu en calculant la somme du produit d'1 unité par 3 dizaines (= 3 dizaines) et du produit d'1 dizaine par 9 unités (= 9 dizaines), soit 12 dizaines, c'est-à-dire 1 centaine et 2 dizaines ; on ne conserve, pour le chiffre des dizaines, que le nombre de dizaines, le chiffre des centaines étant ajouté aux centaines ;
- le chiffre des centaines, 4, est obtenu en mutlipliant 1 dizaine par 3 dizaines (= 3 centaines) ; à ce produit, on ajoute la centaine obtenue précédemment.

Dans les exemples rencontrés jusqu'ici, le produit par 11 d'un nombre de deux chiffres – dont la somme des chiffres est supérieure à 10 – est un nombre à trois chiffres où

- le chiffre des unités est le chiffre des unités du nombre initial ;
- le chiffre des dizaines correspond au chiffre des unités de la somme des chiffres composant le nombre initial ;
- le chiffre des centaines correspond au chiffre des dizaines du nombre initial (puisqu'il a été multiplié par 10) auquel on ajoute le nombre des dizaines de la somme des chiffres du nombre initial – qui vaudra toujours 1.

Une fois ces conclusions établies avec les élèves, l'enseignant pose la question qui suit.

> A-t-on envisagé tous les cas de figure ? Ne pourrait-on pas obtenir un nombre de quatre chiffres en multipliant un nombre de deux chiffres pas 11 ?

L'enseignant laisse les élèves tester les conclusions établies sur des exemples que chacun choisit. Une fois que l'un d'entre eux a proposé un nombre de deux chiffres pour lequel le produit par 11 est un nombre à quatre chiffres, il s'agit de cibler tous les nombres de deux chiffres qui mettent à mal les procédures de calcul proposées plus haut. Les élèves se rendront rapidement compte que ce sont tous les nombres plus grands que 90.

Une fois cette observation faite, il reste à formuler la procédure à suivre pour ces nombres. Tout comme pour les deux cas précédents, il nous semble plus judicieux de partir d'un exemple numérique.

$$\begin{array}{rcccc} & & & 9 & 3 \\ \times & & & 1 & 1 \\ \hline & & & 9 & 3 \\ & & 9 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

Pour le produit,

- le chiffre des unités, 3, est obtenu en multipliant 1 unité par 3 unités (= 3 unités) ;
- le chiffre des dizaines, 2, est obtenu en calculant la somme du produit d'1 unité par 9 dizaines (= 9 dizaines) et du produit d'1 dizaine par 3 unités (= 3 dizaines), soit 12 dizaines, c'est-à-dire 1 centaine et 2 dizaines ; on ne conserve, pour le chiffre des dizaines que le nombre de dizaines, le chiffre des centaines étant ajouté aux centaines ;
- le chiffre des centaines, 0, est obtenu en mutlipliant 1 dizaine par 9 dizaines (= 9 centaines) ; à ce produit, on ajoute la centaine obtenue précédemment ; on obtient 10 centaines, c'est-à-dire 0 centaine et 1 millier.

Prolongements possibles

Un prolongement possible est de proposer aux élèves un problème comparable à la situation ci-dessus. La question est la suivante.

> Que se passe-t-il si on ne travaille plus avec un nombre formé de deux chiffres mais avec un nombre formé de trois chiffres ?

Grâce au développement effectué, ils peuvent découvrir seuls cette deuxième « astuce calculatoire » en procédant par analogie.

Un autre prolongement consiste à travailler le « caractère de divisibilité par 11 » ou à rechercher le nombre dont le produit par 11 est, par exemple, 253 ou 627.

Échos des classes

La difficulté principale rencontrée par les élèves au cours des différentes étapes de cette activité réside dans la formulation des constatations qu'ils ont effectuées.

Utiliser à bon escient les notions de chiffre, nombre, dizaine, ... n'est pas évident pour beaucoup d'entre eux. Ils savent par exemple expliquer ce que sont des nombres et des chiffres mais une fois qu'il s'agit d'utiliser ces mots pour exprimer ce qu'ils ont découvert, ils ne savent pas mettre en œuvre la différence entre ces deux notions.

Certains élèves sont également vite satisfaits de leurs observations. Il est alors important que l'enseignant les pousse à affiner ou à clarifier leurs remarques. Lors de l'activité, des élèves ont trouvé que pour tous les nombres à deux chiffres se terminant par un 9, la procédure initialement proposée ne fonctionnait pas. Il est certain que cette observation est exacte mais elle doit être complétée ; l'enseignant doit intervenir et les encourager à vérifier s'ils ont bien envisagé tous les cas de figure.

Certains élèves s'orientent également dans des directions non porteuses. Il nous semble cependant important de les laisser faire. L'un d'entre eux a par exemple cherché une explication au niveau des critères de divisibilité des nombres. C'est avec sa propre expérience et en voyant qu'il n'arrivait à aucune conclusion, qu'il a abandonné cette voie.

Il nous semble intéressant de laisser les élèves chercher, avec la méthode de leur choix, les cas pour lesquels le « truc » ne fonctionne pas. En effet, certains d'entre eux se servent de la calculatrice, d'autres du calcul écrit ou du « truc » proposé par l'enseignant et enfin, certains appliquent la méthode par laquelle on effectue la somme du nombre et de son produit par 10. Nous avons pu observer que les élèves travaillant par calcul écrit ou appliquant le « truc » découvrent l'explication plus facilement, probablement parce qu'ils constatent le phénomème du report.

À la question de savoir si le produit d'un nombre de deux chiffres par 11 pouvait être un nombre de quatre chiffres, l'enseignant a dû insister auprès des élèves pour qu'ils explorent les différentes possibilités. Ils n'avaient, en effet, pas choisi d'eux-mêmes des nombres strictement supérieurs à 90 lors de leur recherche, il leur semblait donc impossible d'obtenir comme résultat autre chose que les deux cas explorés jusque-là. L'enseignant leur a alors demandé s'ils avaient envisagé toutes les possibilités de nombres à deux chiffres. Un élève a alors proposé 99, le plus grand d'entre eux. Comme le produit de ce dernier par 11 est un nombre à quatre chiffres pour lequel aucune des deux procédures de calcul évoquées précédemment ne peut être appliquée, ils ont cherché d'autres exceptions en procédant par ordre décroissant (98, 97, ...).

1.2 Les multiples de 1 001

Comment s'y prendre ?

> Écris ta taille en centimètres deux fois l'une à côté de l'autre. Tu obtiens un nombre à six chiffres. Divise-le par 7, puis divise le quotient par 11, et enfin le dernier quotient par 13. Tu retrouves quelque chose de connu. Pourquoi ?

Pour faciliter l'approche, l'enseignant suggère de citer à haute voix le nombre à six chiffres : 168 mille et 168 unités. L'étape suivante consiste à remplacer les mots par les nombres,

$$168\,168 = (168 \times 1\,000) + (168 \times 1)$$

Les élèves peuvent alors remarquer que le nombre 168 a été distribué sur les nombres 1 000 et 1. Cette somme peut donc s'écrire sous la forme des produits suivants :

$$168\,168 = 168 \times (1\,000 + 1)$$
$$168\,168 = 168 \times 1\,001$$

Les nombres du type $abc\,abc$ sont donc obtenus en multipliant un nombre à trois chiffres par 1 001.

> Quel lien y a-t-il entre 7, 11 et 13 et les nombres de six chiffres de la forme $abc\,abc$? Quel lien y a-t-il avec 1 001 ?

Étant donné que chacun des nombres à six chiffres proposés est le produit d'un nombre de trois chiffres par 1 001, l'enseignant propose d'examiner les diviseurs du nombre à six chiffres en passant par les diviseurs de 1 001. Il demande alors aux élèves de trouver les diviseurs de 1 001. Ils se rendront alors compte que les trois diviseurs proposés pour chacun des nombres à six chiffres (7, 11 et 13) divisent 1 001.

La clé réside donc dans la propriété évoquée dans les prérequis. L'enseignant la rappelle aux élèves à l'aide d'exemples numériques. Pour ce faire, il propose le nombre 48 et demande de chercher ses diviseurs. Une fois ces nombres indiqués au tableau, il fait remarquer par les élèves que 12 est un diviseur de 48 et que tous les diviseurs de 12 sont aussi diviseurs de 48. Il peut éventuellement traiter d'autres cas si nécessaire. En fin de parcours, il importe de transférer les observations faites sur ces exemples numériques à la situation précédente.

1 001 est diviseur des nombres à six chiffres du type *abc abc* ;

7, 11 et 13 sont des diviseurs de 1 001 ;

7, 11 et 13 sont donc des diviseurs des nombres du type *abc abc*.

À ce stade, il importe que les élèves réalisent que, quels que soient les chiffres a, b et c, les nombres *abc abc* auront au moins 7, 11 et 13 comme diviseurs. Ce n'est donc pas le nombre en tant que tel qui a de l'importance mais plutôt la manière dont il est formé.

Prolongements possibles Un premier prolongement possible consiste à aborder d'autres problèmes du même type :

- proposer un nombre du type *aaa aaa* ; affirmer qu'il est divisible par 13, par 21 et par 407 ; l'explication réside, tout comme dans l'exercice développé ci-dessus, dans le fait que $13 \times 21 \times 407 = 111\,111$;
- proposer un nombre du type *aba bab* ; affirmer qu'il est divisible par 3, par 7, par 13 et par 37 ; l'explication réside, tout comme dans l'exercice développé ci-dessus, dans le fait que $3 \times 7 \times 13 \times 37 = 10\,101$.

Un deuxième prolongement possible consiste à se baser sur ces problèmes pour découvrir les propriétés des diviseurs et multiples. Dans ce cas, la notion de nombres premiers entre eux intervient. Elle doit donc être un prérequis ou faire l'objet d'un apprentissage préalable.

En partant par exemple du nombre 924 924, l'enseignant peut travailler la propriété : « si un nombre est divisible par deux autres nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit ». Le nombre 924 924 est divisible par 2 et 7, nombres premiers entre eux, il est donc divisible par 14.

2 Des problèmes magiques expliqués par l'algèbre

De quoi s'agit-il ? Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie.

Enjeux Transposer un énoncé en une suite de calculs.

Apprendre à formaliser un énoncé et saisir la portée du symbolisme et du calcul algébrique.

Utiliser la distributivité et l'associativité pour transformer une expression algébrique.

Expliquer un phénomène numérique et le démontrer par l'algèbre.

Compétences

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

Respecter les priorités des opérations.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.

Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.

Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

Le vocabulaire propre aux quatre opérations. Les règles de priorité des opérations. Les quatre opérations sur les nombres fractionnaires.

La multiplication et la division d'une somme et d'un produit de nombres.

2.1 Toujours 40 !

Comment s'y prendre ?

> Chaque élève choisit un nombre, le note et le cache. Il le multiplie par 3, ajoute 120 au produit obtenu puis divise le résultat par 3. Il retranche enfin le nombre de départ.
>
> Le professeur dit : « Je parie que chacun d'entre vous a obtenu 40… »

L'enseignant demande à quelques élèves de citer le nombre qu'ils avaient initialement choisi et le résultat qu'ils ont obtenu de manière à faire remarquer que son pari est gagné.

Il leur pose alors la question qui suit.

> Pourquoi obtient-on 40 quel que soit le nombre choisi ?

Les élèves testent la procédure au départ d'un nouveau nombre. Sachant que le résultat est 40, ils ébauchent quelques explications. Comme la formulation est souvent confuse et incomplète, l'enseignant note au tableau plusieurs exemples dont il détaille les étapes.

$$\boxed{23} \xrightarrow{\times 3} \boxed{69} \xrightarrow{+120} \boxed{189} \xrightarrow{:3} \boxed{63} \xrightarrow{-23} \boxed{40}$$

$$\boxed{48} \xrightarrow{\times 3} \boxed{144} \xrightarrow{+120} \boxed{264} \xrightarrow{:3} \boxed{88} \xrightarrow{-48} \boxed{40}$$

$$\boxed{-5} \xrightarrow{\times 3} \boxed{-15} \xrightarrow{+120} \boxed{105} \xrightarrow{:3} \boxed{35} \xrightarrow{-(-5)} \boxed{40}$$

On écrit autant d'exemples que nécessaire pour illustrer la situation.

Le troisième exemple ci-dessus part d'un nombre entier négatif. Si les élèves n'en proposent pas eux-mêmes, l'enseignant peut aborder ces cas dans le prolongement de l'activité.

La phase suivante consiste à décortiquer les différentes étapes de la « procédure magique » de manière à mettre en évidence les passages-clés du phénomène. C'est-à-dire que les calculs intermédiaires ne sont effectués que partiellement en vue de laisser apparaître, tout au long du développement, le nombre choisi.

Nous conseillons d'écrire en couleur le nombre de départ chaque fois qu'il apparaît dans les étapes de calcul, de manière à faciliter la compréhension du phénomène. Ce nombre est indiqué en gras dans l'illustration qui suit.

$$\boxed{\mathbf{23}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{\mathbf{23} \times 3} \xrightarrow{+120} \boxed{(\mathbf{23} \times 3) + 120} \xrightarrow{:3} \boxed{\mathbf{23} + 40} \xrightarrow{-\mathbf{23}} \boxed{40}$$

Cette démarche facilite la phase de formalisation et donc la compréhension. Ceci dit, certains passages seront probablement source de difficultés pour les élèves et principalement celui où il s'agit de diviser la somme obtenue par 3. L'enseignant pourra saisir cette occasion pour retravailler la distributivité.

La dernière étape, consistant à généraliser les observations effectuées, nécessite la formalisation. De la sorte, tous les cas de figure sont illustrés grâce à une seule expression. L'enseignant insiste sur le fait que la lettre a peut remplacer n'importe quel nombre.

Si cela n'a déjà été fait, il introduit la convention selon laquelle une lettre précédée d'un nombre, sans qu'une opération soit indiquée entre les deux, représente le produit de ces deux facteurs.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{\boldsymbol{a}\times 3} \xrightarrow{+120} \boxed{(\boldsymbol{a}\times 3)+120} \xrightarrow{:3} \boxed{\boldsymbol{a}+40} \xrightarrow{-a} \boxed{40}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 3} \boxed{3\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+120} \boxed{3\boldsymbol{a}+ 120} \xrightarrow{:3} \boxed{\boldsymbol{a}+ 40} \xrightarrow{-a} \boxed{40}$$

La formalisation montre clairement que le nombre de départ disparaît et permet de comprendre la raison pour laquelle le résultat obtenu est 40.

L'enseignant pourra s'il le désire s'assurer de la prise de conscience, par les élèves, de l'utilité de la formalisation, à l'aide du deuxième prolongement.

Prolongements possibles

Comme prolongement, on demande aux élèves d'imaginer un « tour de magie », comparable à celui qui vient d'être exploité. L'obtention d'un résultat constant est le critère de réussite.

Un autre prolongement – qui aura peut-être déjà été abordé précédemment selon les nombres proposés par les élèves – consiste à leur demander ce qui se passe si on part d'un nombre entier négatif ou d'une fraction. L'enseignant vérifie ainsi si les élèves ont intégré la démarche de formalisation.

Échos des classes

La principale difficulté rencontrée dans cette activité est liée à la division par 3. Beaucoup d'élèves ne divisent qu'un des deux termes de la somme. Ce passage a été facilité par une intervention de l'enseignant.

Il a fait rappeler par les élèves une technique de calcul mental qui leur est familière : pour diviser 112 par 4, je divise 100 par 4 et ensuite 12 par 4.

Lorsqu'il s'est agi seulement de montrer que le tour de magie fonctionne avec n'importe quel nombre, les élèves ont proposé de remplacer le nombre par une lettre. Ceci dit, lorsqu'ils ont dû inventer un tour de magie, la plupart sont partis d'un exemple numérique.

Chacun a mis à l'épreuve le tour qu'il a inventé en le testant sur ses condisciples. Certains tours n'ont pas fonctionné. Après quelques échanges, les élèves ont réalisé qu'il était plus judicieux de partir d'une lettre.

Les nombres négatifs n'ayant pas été abordés jusque-là, le professeur a demandé aux élèves le résultat qu'ils obtiendraient si le nombre de départ était -6 par exemple. De manière générale, même si beaucoup sont conscients de la portée de l'expression algébrique, ils éprouvent souvent le besoin de la tester.

2.2 Retrouver le nombre pensé

Comment s'y prendre ?

Chaque élève pense un nombre et effectue les différents calculs énoncés par l'enseignant. En fin de séquence, tous les élèves obtiennent le nombre initialement choisi. L'objectif est d'expliquer ce phénomène.

> Choisis un nombre. Multiplie-le par 8. Ajoute 10 au produit obtenu. Divise cette somme par 2. Ajoute 7 au quotient. Divise cette somme par 4. Et enfin, retranche 3.
>
> Je parie que chacun d'entre vous a obtenu comme résultat final le nombre qu'il avait choisi au départ !

Après avoir demandé confirmation auprès de quelques élèves, l'enseignant leur pose la question suivante :

> Comment expliquez-vous cette situation ?

Tout comme précédemment, le raisonnement se fera en plusieurs phases. Après avoir illustré le problème par quelques exemples numériques, on effectue partiellement les calculs de manière à ce que le nombre de départ reste apparent dans les expressions successives. Enfin, on remplace ce dernier par une lettre de manière à généraliser l'explication.

Première étape : quelques exemples numériques proposés par les élèves sont écrits au tableau.

$$\boxed{15} \xrightarrow{\times 8} \boxed{120} \xrightarrow{+10} \boxed{130} \xrightarrow{:2} \boxed{65} \xrightarrow{+7} \boxed{72} \xrightarrow{:4} \boxed{18} \xrightarrow{-3} \boxed{15}$$

$$\boxed{37} \xrightarrow{\times 8} \boxed{296} \xrightarrow{+10} \boxed{306} \xrightarrow{:2} \boxed{153} \xrightarrow{+7} \boxed{160} \xrightarrow{:4} \boxed{40} \xrightarrow{-3} \boxed{37}$$

$$\boxed{-8} \xrightarrow{\times 8} \boxed{-64} \xrightarrow{+10} \boxed{-54} \xrightarrow{:2} \boxed{-27} \xrightarrow{+7} \boxed{-20} \xrightarrow{:4} \boxed{-5} \xrightarrow{-3} \boxed{-8}$$

Deuxième étape : chaque phase de calcul est réécrite en faisant apparaître clairement le nombre de départ, ce qui met en relief la suite des opérations. L'enseignant écrit ce nombre en couleur. Dans la présentation ci-dessous, il est noté en gras.

$$\boxed{\mathbf{15}} \xrightarrow{\times 8} \boxed{\mathbf{15}\times 8} \xrightarrow{+10} \boxed{(\mathbf{15}\times 8)+10} \xrightarrow{:2} \boxed{(\mathbf{15}\times 4)+5}$$

$$\xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{15}\times 4)+12} \xrightarrow{:4} \boxed{\mathbf{15}+3} \xrightarrow{-3} \boxed{\mathbf{15}}$$

Pour cette partie, nous ne proposons qu'un exemple numérique. Dans les classes, l'enseignant procèdera de la sorte à plusieurs reprises de manière à clarifier le phénomène ; l'étape suivante en sera facilitée.

Troisième étape : la formalisation est nécessaire pour comprendre la constance du résultat. Pour ce faire, le canevas établi précédemment est conservé.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 8} \boxed{8\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+10} \boxed{8\boldsymbol{a}+10} \xrightarrow{:2} \boxed{4\boldsymbol{a}+5} \xrightarrow{+7} \boxed{4\boldsymbol{a}+12} \xrightarrow{:4} \boxed{\boldsymbol{a}+3} \xrightarrow{-3} \boxed{\boldsymbol{a}}$$

Ce développement algébrique illustre de manière claire qu'après les différents calculs, le résultat final est le nombre choisi.

Prolongement possible

Les problèmes magiques du type de ceux présentés dans ce chapitre ont eu, à une époque, beaucoup de succès dans les milieux intellectuels. L'un des auteurs bien connu pour ce genre de récréations mathématiques est Claude-Gaspard Bachet sieur de Méziriac (1581 - 1638). Outre ses ouvrages mathématiques, il a écrit des poèmes, des textes relatifs à la mythologie et à la religion ou encore diverses traductions. Il fut également désigné pour siéger à l'Académie Française, lors de sa création en 1634.

Nous proposons ci-dessous un de ses *Problèmes plaisants et délectables* [12]. Le choix est arbitraire et d'autres énoncés auraient également pu être mentionnés. Même si la formulation peut surprendre les élèves, nous la reproduisons dans sa version originale.

Fais doubler le nombre pensé et à ce double fais ajouter 5, puis multiplier le tout par 5, puis ajouter 10 et multiplier le tout par 10. Lors t'enquérant quel est ce dernier produit, et ôtant d'icelui 350, le nombre des centaines du reste sera le nombre pensé.

Échos des classes

Tout comme lors de l'activité précédente, la division de la somme a été source de difficultés. Ceci dit, l'explication du « tour de magie » précédent a permis aux élèves d'acquérir une certaine aisance tant dans la façon d'aborder le problème que dans la manière de l'expliquer.

Une fois que les élèves ont compris le principe, ils proposent de rendre le tour plus intéressant. Selon eux : « C'est nul que le prof ne doive pas calculer et pas réfléchir pour retrouver le nombre choisi ». Ils veulent ajouter une manipulation que l'enseignant aura à effectuer une fois qu'ils lui donneront leurs résultats. Modifier le tour en ce sens peut se faire avec les élèves, certains ont d'ailleurs immédiatement fait des propositions. Un exemple cité a été de ne pas terminer par -3 mais par -8. De la sorte, l'enseignant doit ajouter 5 au résultat qui lui sera donné pour trouver le nombre initial.

3 Des problèmes magiques expliqués par la numération de position et l'algèbre

De quoi s'agit-il ?

Les élèves cherchent à expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des tours de magie. L'explication est à la fois fondée sur un passage à la formalisation et sur une bonne compréhension de la numération de position.

Enjeux

Expliquer un phénomène numérique qui peut paraître à première vue magique.

Transposer un énoncé en une suite de calculs.

Apprendre à formaliser cet énoncé et saisir par là la portée du symbolisme et du calcul algébrique.

Exprimer un nombre sous la forme d'une somme ou d'un produit de puissances de 10.

Les activités qui suivent respectent les intentions présentées en introduction de la partie *Algèbre* du document *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques* [2]. À titre informatif, un extrait est reproduit ci-dessous.

Les compétences algébriques reposent sur la connaissance de propriétés articulées entre elles et sur la capacité à traduire une situation en langage mathématique. Leur mise en œuvre requiert d'avoir acquis des routines de calcul, mais surtout de savoir élaborer et mener à bien les plans de calcul utiles à la solution. Cette habileté comporte le bon usage des outils de calcul électroniques, quand la difficulté ou l'efficacité l'imposent, ainsi que l'interprétation des résultats ainsi obtenus.

Compétences terminales

Organiser une suite d'opérations conduisant à la résolution du problème.

Interpréter le résultat des calculs en les replaçant dans le contexte du problème.

Traduire une situation en langage mathématique sous forme d'équation, d'inéquation ou d'autres formes de conditions.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

Le vocabulaire propre aux quatre opérations.

Le calcul sur les fractions.

La différence entre chiffre et nombre ainsi que l'utilisation de ces deux notions à bon escient.

3.1 Deviner le domino

Comment s'y prendre ?

Un ensemble de dominos est étalé sur la table. Les élèves en choisissent un que l'enseignant va deviner. Pour ce faire, il demande aux élèves d'effectuer les calculs suivants.

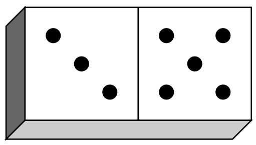
> Multiplier le nombre de gauche par 5. Ajouter 7 au résultat obtenu. Multiplier le résultat par 2. Retrancher 14. Ajouter le nombre de droite du domino.

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à deux chiffres. Le chiffre des dizaines correspond au nombre de gauche du domino et le chiffre des unités au nombre de droite du domino. L'élève donne le résultat obtenu au bout de la procédure proposée par l'enseignant et ce dernier retrouve sans mal le domino choisi. Il répète l'expérience à plusieurs reprises.

L'objectif de cette activité est d'amener les élèves à expliquer le phénomène. Ils auront vite fait de remarquer que les deux chiffres du nombre qu'ils obtiennent désignent les points du domino. Il reste maintenant à comprendre pourquoi il en est ainsi.

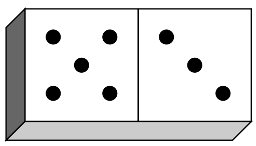
> Comment expliquer qu'on obtient un nombre dont le chiffre des dizaines correspond à la valeur de gauche du domino et celui des unités à la valeur de droite ?

On commence par écrire les calculs qui ont été faits mentalement et on les présente comme ci-dessous.

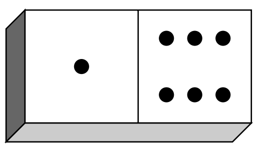


$$\boxed{3} \xrightarrow{\times 5} \boxed{15} \xrightarrow{+7} \boxed{22} \xrightarrow{\times 2} \boxed{44} \xrightarrow{-14} \boxed{30} \xrightarrow{+5} \boxed{35}$$

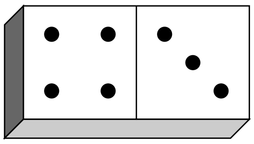
Si l'élève est de l'autre côté du domino, sa gauche et sa droite sont inversées et son résultat est 53, nombre qui désigne le même domino.



$$\boxed{5} \xrightarrow{\times 5} \boxed{25} \xrightarrow{+7} \boxed{32} \xrightarrow{\times 2} \boxed{64} \xrightarrow{-14} \boxed{50} \xrightarrow{+3} \boxed{53}$$

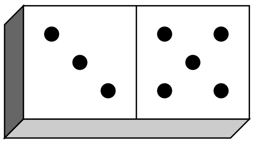


$$\boxed{1} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5} \xrightarrow{+7} \boxed{12} \xrightarrow{\times 2} \boxed{24} \xrightarrow{-14} \boxed{10} \xrightarrow{+6} \boxed{16}$$



$$\boxed{4} \xrightarrow{\times 5} \boxed{20} \xrightarrow{+7} \boxed{27} \xrightarrow{\times 2} \boxed{54} \xrightarrow{-14} \boxed{40} \xrightarrow{+3} \boxed{43}$$

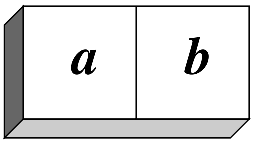
La deuxième étape vers la compréhension du phénomène consiste à développer quelques exemples en effectuant partiellement les calculs de manière à conserver tout au long du déroulement les deux nombres du domino. Nous présentons ci-dessous une possibilité parmi d'autres.



$$\boxed{\mathbf{3}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{\mathbf{3} \times 5} \xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{3} \times 5) + 7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{(\mathbf{3} \times 10) + 14} \xrightarrow{-14} \boxed{\mathbf{3} \times 10} \xrightarrow{+\mathbf{5}} \boxed{\mathbf{3} \times 10 + \mathbf{5}}$$

Une difficulté apparaît lorsqu'il s'agit de multiplier par 2 une somme dont un des termes est un produit.

La dernière étape consiste à généraliser les observations faites jusqu'ici sur des exemples numériques. Pour ce faire, nous inventons un « domino algébrique ».



$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+7} \boxed{5\boldsymbol{a}+7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{10\boldsymbol{a}+14} \xrightarrow{-14} \boxed{10\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+b} \boxed{10\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

Une fois la procédure de calcul décortiquée et formalisée, l'explication du phénomène apparaît clairement. Il reste cependant à interpréter l'écriture $10a + b$ comme l'écriture qui produit le nombre dont les chiffres sont a et b (dans cet ordre).

Prolongement possible

Le prolongement proposé est comparable à l'activité qui vient d'être exploitée, si ce n'est que l'on découvrira deux inconnues. Cette version du problème est valable pour 2003, l'enseignant devra l'adapter chaque année.

L'enseignant s'adresse à une personne et lui propose un tour qui lui permettra de trouver l'âge de n'importe qui. Il lui propose de le tester et lui dit :

> Pense un nombre compris entre 0 et 9. Multiplie-le par 50. Ajoute 6 au produit obtenu. Multiplie le résultat par 2. Ajoute 1 991 si ton anniversaire est passé et 1 990 s'il n'est pas encore passé. Enfin, retranche ton année de naissance. Avec le nombre obtenu, tu peux retrouver ton âge.

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à trois chiffres : le chiffre des centaines correspond au nombre choisi et le nombre formé des deux derniers chiffres, à son âge. Cette procédure ne nécessite pas en réalité de restreindre le choix initial aux nombres compris entre 0 et 9. Si un élève choisit un nombre composé de deux chiffres, son résultat est un nombre à quatre chiffres dans lequel les deux premiers chiffres forment le nombre initial. La limitation à un chiffre a pour seul but de simplifier l'explication.

Pour comprendre cette situation, il est indispensable de passer par la formalisation et ensuite d'analyser l'expression obtenue. Nous développerons le cas où l'anniversaire de la personne est déjà passé, l'explication étant similaire dans l'autre cas.

Soit a, le nombre choisi.

Soit b, l'année de naissance de la personne.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 50} \boxed{50\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+6} \boxed{50\boldsymbol{a}+6} \xrightarrow{\times 2} \boxed{100\boldsymbol{a}+12} \xrightarrow{+1\,991} \boxed{100\boldsymbol{a}+2\,003} \xrightarrow{-b} \boxed{100\boldsymbol{a}+2\,003\text{-}\boldsymbol{b}}$$

Pour ce qui est du chiffre des centaines, on retrouve bien le nombre choisi et l'expression algébrique $100a$ est claire. Pour ce qui est de l'âge de la personne, il reste à analyser à quoi correspond le $2\,003 - b$.

Une fois la logique comprise, l'enseignant peut demander aux élèves d'adapter la situation pour l'année suivante. Il peut également leur demander d'inventer des variantes. La proposition suivante en est un exemple.

Choisis un nombre. Multiplie-le par 50. Ajoute 7 au produit. Multiplie le résultat obtenu par 2. Ajoute 1 989 si ton anniversaire est passé et 1 988 s'il n'est pas encore passé. Enfin, retranche ton année de naissance.

Une variante consiste à expliquer un tour dans lequel trois inconnues interviennent. Chaque élève doit disposer d'une calculatrice et effectuer les opérations qui lui sont dictées. En fin de parcours, sa date de naissance apparaîtra sur l'écran de la calculatrice.

> Encode le jour de ta naissance. Multiplie ce nombre par 20. Ajoute 3. Multiplie le résultat obtenu par 5. Ajoute le mois de ta naissance. Multiplie le nombre obtenu par 20. Ajoute 3. Multiplie le résultat obtenu par 5. Ajoute les deux derniers chiffres de ton année de naissance. Ôte 1 515, date de la bataille de Marignan. Que reconnais-tu sur l'écran ?

Si on pose que x est le jour de naissance, y le mois de naissance et z, le nombre formé des deux derniers chiffres de l'année de naissance, on obtiendra $10\,000x + 100y + z$.

3.2 Toujours 222

Comment s'y prendre ?

Le professeur demande à chacun de réaliser les étapes suivantes.

> Choisis trois chiffres différents (en évitant le 0). Additionne-les. Écris tous les nombres que l'on peut former à l'aide de ces trois chiffres. Additionne ces six nombres. Divise cette dernière somme par la première. Je peux affirmer, sans aucun doute, que vous avez tous obtenu 222.

L'enseignant sonde la classe en demandant à l'un ou l'autre élève le nombre qu'il a obtenu. Après avoir montré qu'ils ont tous le même résultat, l'enseignant leur demande :

Vous obtenez tous 222. Pourquoi ?

Première étape : développer la procédure pour un exemple numérique proposé par un élève.

Soit 2, 5 et 8, les trois chiffres choisis.

Leur somme vaut

$$2 + 5 + 8 = 15.$$

Les six nombres formés à l'aide de ces chiffres sont

$$258; 285; 528; 582; 825; 852.$$

La somme de ces nombres est

$$258 + 285 + 528 + 582 + 825 + 852 = 3\,330.$$

Le quotient de la deuxième somme par la première vaut

$$\frac{3\,330}{15} = 222.$$

Dans ce cas, les exemples numériques n'illustrent pas vraiment le phénomène.

Deuxième étape : éclairer la situation en formalisant.

Soit a, b et c, les trois chiffres choisis.

Leur somme est

$$a + b + c.$$

Les six nombres formés à l'aide de ces chiffres s'écrivent

$$100a + 10b + c\,;\ 100a + 10c + b\,;\ 100b + 10a + c\,;\ 100b + 10c + a\,;\ 100c + 10a + b\,;\ 100c + 10b + a.$$

La somme de ces nombres s'écrit

$$\begin{aligned}100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a\\ = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c).\end{aligned}$$

Le quotient vaut

$$\frac{222(a + b + c)}{(a + b + c)} = 222.$$

Après cette démonstration algébrique, le phénomène, apparaissant à première vue comme un « tour de magie », est mis à nu.