Chapitre 6

Produits remarquables

Préambule

Les produits remarquables ne semblent guère difficiles à apprendre. Pour les établir, il s'agit seulement d'appliquer les propriétés de distributivité et d'observer qu'à des produits de sommes particulières correspondent des développements particuliers. Et pourtant !

Tous les enseignants constatent que les élèves hésitent souvent devant une expression algébrique : ont-ils affaire à une somme que l'on peut factoriser ou à un produit que l'on peut développer ? En général, ils perçoivent mal quand et pourquoi il faut passer, selon le contexte, d'une écriture à l'autre. Et que dire du nombre de doubles produits ≪ oubliés ≫, des problèmes de signes qui refont brusquement surface dès lors que les élèves se mettent à ≪ fabriquer ≫ les termes d'un développement sans plus avoir conscience de la nature des opérations qu'ils effectuent ?

Il s'avère que l'apprentissage des produits remarquables mobilise un ensemble de procédures et constitue par là, tout à la fois un seuil à franchir et un accès à une réelle habileté calculatoire.

La maîtrise de cet ensemble articulé de procédures passe par un travail de symbolisation à partir de contextes géométriques ou arithmétiques. L'élève apprend par là à construire une expression algébrique qui traduit une relation, il apprend aussi à organiser une suite de calculs pour établir de nouvelles relations.

Dans le cadre qui nous occupe, les contextes les plus éclairants sont ceux, déjà présents dans les mathématiques grecques, qui tirent les égalités remarquables de relations entre des aires de figures planes et les appliquent à des questions d'arithmétique.

Les activités proposées s'inscrivent dans cette tradition sans pour autant reprendre les objectifs de calcul rapide, importants jadis, devenus inutiles à l'ère des calculatrices. Notre démarche prend acte de la présence de celles-ci dans les classes et, à maintes occasions, utilise leurs ressources. Nous dépassons ensuite le contexte des aires de figures pour aborder des formes plus abstraites de calcul : celles qui intègrent des nombres relatifs.

1 Carré d'une somme

De quoi s'agit-il ? Les élèves décodent et appliquent une procédure de calcul avec des nombres naturels. Ils expliquent ce phénomène numérique par analogie avec le calcul de l'aire d'un carré. Un travail de généralisation s'ensuit.

Enjeux

Découverte du carré d'un binôme sous ses différents aspects : numérique, géométrique et algébrique.

Compétences

La plupart des compétences (relatives aux nombres) qu'il faut certifier à 14 ans sont travaillées dans les activités ci-après.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.

Construire des expressions littérales.

Calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.

Utiliser dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.

De plus, ces activités répondent à ce qui est dit dans le texte qui introduit ces compétences et les situe dans la genèse des apprentissages mathématiques [3]. Voici un extrait de ce texte.

La découverte et l'élaboration de propriétés relatives à certaines catégories de nombres naturels contribuent à assurer une aisance dans le domaine des nombres. De plus, l'analyse de ces phénomènes arithmétiques conduit à établir des preuves et à employer des lettres pour généraliser. Cette étude constitue ainsi un tremplin pour accéder à l'algèbre.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Papier quadrillé, règle graduée, crayon, gomme, calculatrice.

Prérequis

L'écriture avec des lettres : le carré d'un nombre, deux nombres consécutifs, la somme de deux nombres, le double d'un nombre.

Le calcul numérique avec les entiers et les nombres relatifs (ou si l'on préfère, avec des décimaux positifs ou négatifs).

La double distributivité. La mise en évidence.

1.1 Au suivant !

Comment s'y prendre ?

> Connaissant le carré d'un nombre, on peut calculer mentalement (ou presque), le carré du nombre qui suit. Voici comment procéder :
> ajouter 1 au carré du nombre donné,
> ajouter ensuite le double du nombre donné.
> Utiliser ce procédé pour calculer le carré de 21 à partir du carré de 20, puis le carré de 22. Vérifier et expliquer le procédé.

La plupart des élèves imaginent que le carré de 21 est formé du carré de 20 auquel on ajoute le carré de 1. Il leur semble étrange de devoir ajouter aussi le double du nombre. Le professeur les engage à vérifier leurs conjectures, soit par calcul écrit, soit en utilisant la calculatrice. Ils réalisent qu'ils se trompent et retournent à l'énoncé.
On sait que le carré de 20 est 400. En appliquant le procédé, on trouve

$$21^2 = 400 + 1 + (2 \times 20) = 441,$$

$$22^2 = 441 + 1 + (2 \times 21) = 484.$$

Vérifions à la calculatrice :

$$22^2 = 484.$$

Le procédé a donc l'air fiable. On l'utilisait jadis pour construire une table de carrés. D'où vient ce procédé, comment l'expliquer ? Ces questions introduisent la consigne suivante.

Faire un dessin qui montre le carré de 10, puis le carré de 11.

L'expression *carré d'un nombre* peut être associée à l'image de points disposés en carré, comme les représentaient les Grecs, probablement déjà à l'époque des Pythagoriciens. C'est ce que montre la figure 1.

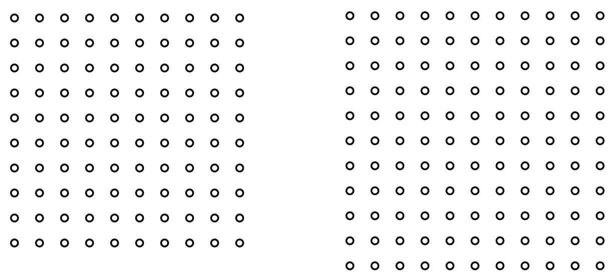

Fig. 1

La figure 2 montre les points qu'il faut ajouter au premier carré pour obtenir le second.

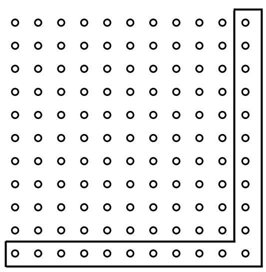

Fig. 2

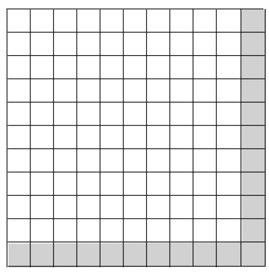

Fig. 3

Ces points sont disposés en équerre, figure que les Grecs appelaient *gnomon*[1]. Le gnomon qui complète 10^2 pour former 11^2 est formé de deux rangées de 10 points et d'un point supplémentaire.

D'autres élèves, plutôt que de dessiner des points, utilisent leur page quadrillée pour représenter 10^2 et 11^2. Ils dessinent la figure 3 et font ainsi le lien entre *nombre carré* et *aire d'un carré*.

Le professeur demande alors de généraliser à partir d'un carré de côté $n + 1$ (voir figure 4) et d'écrire dans le langage algébrique comment passer du carré d'un nombre quelconque n au carré du nombre $n + 1$. D'où la formule :

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

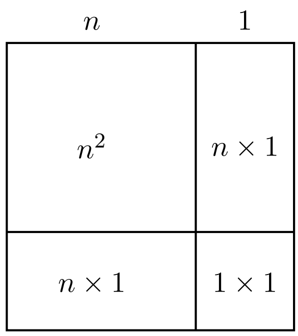

Fig. 4

Prolongement possible

Voici une question qui requiert d'utiliser les acquis récents dans une situation analogue. Il y en a bien sûr beaucoup d'autres.

> Un carré est tel que si son côté augmente d'un mètre, son aire augmente de 57 m^2. Calculer le côté de ce carré.

On sait que $(c + 1)^2 - c^2 = 2c + 1$. D'après l'énoncé, $2c + 1 = 57$, donc $c = 28$.

Le côté mesure donc 28 mètres.

1.2 Attention aux deux rectangles !

Comment s'y prendre ?

On explore à présent une situation plus générale : le nombre 1 ne joue plus aucun rôle, les sommes et les nombres que l'on élève au carré sont quelconques.

> Quelqu'un dit $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Est-ce vrai ?

[1]Ce mot désignait à l'origine, un objet ayant la forme d'une équerre et dont l'ombre indique l'heure. C'est en quelque sorte une forme primitive de cadran solaire. Plus tard, ce mot a été utilisé par les Pythagoriciens dans le contexte des *nombres figurés* pour désigner le nombre qui ajouté à un nombre carré, permet d'atteindre le nombre carré suivant.

Deux approches sont possibles. L'une, numérique, consiste à remplacer a et b par des naturels. Elle conduit très vite à invalider l'énoncé mais ne montre pas la différence entre les deux expressions. L'autre, géométrique, permet de comparer le carré d'une somme de deux nombres avec les carrés de chacun de ces nombres et de *voir* la différence.

Dessiner des carrés, ça va ! Mais comment comparer ? Le travail précédent donne des pistes. Lorsque les élèves indiquent les mesures respectives des côtés, il faut les inciter à ne pas effectuer les sommes, ni les carrés pour garder la trace des données. Ils tentent alors de placer les deux premiers carrés à l'intérieur du troisième. On s'attarde aux figures qui font apparaître deux rectangles et deux carrés. Ensuite le professeur trace des figures, il y introduit des lettres et explique que de cette façon, le dessin n'est pas lié à des mesures particulières (voir figure 5). Les élèves écrivent l'aire de chaque pièce.

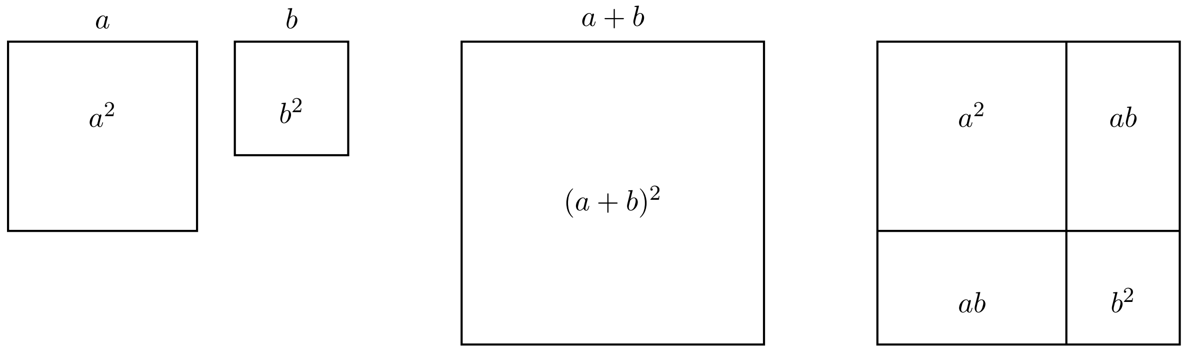

Fig. 5

Les deux derniers dessins montrent les deux façons d'écrire le carré d'une somme. La première façon consiste à effectuer d'abord la somme des deux nombres et à élever le résultat au carré, l'autre façon consiste à élever chaque terme au carré, en faire la somme et y ajouter le double produit des deux nombres. On retient l'égalité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

> Parmi les calculs ci-après, quels sont ceux qui ont comme résultat le carré de 19 ?
>
> $$20^2 - 1^2$$
>
> $$10^2 + 9^2$$
>
> $$100 + 180 + 81$$
>
> $$400 - 40 + 1$$

Si on compare les résultats de ces calculs à celui de 19^2 (que l'on trouve par calcul écrit ou avec une calculatrice), on constate que seuls les deux derniers calculs donnent le même résultat. Pour expliquer pourquoi ces résultats sont égaux, comparons les calculs au développement que nous venons d'écrire.

La somme $100 + 180 + 81$ est la valeur numérique de $a^2 + 2ab + b^2$ pour $a = 10$ et $b = 9$.

La somme $400 - 40 + 1$ est la valeur numérique de la même expression pour $a = 20$ et $b = -1$.

Utiliser la même identité pour calculer 29^2, 49^2, 99^2.

Les élèves s'exercent à calculer des valeurs numériques de $a^2 + 2ab + b^2$ pour $b = (-1)$. Ils écrivent par exemple

$$29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841,$$
$$49^2 = (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401,$$
$$99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801.$$

Ils s'aperçoivent que ce développement permet de calculer certains carrés sans recourir à la calculatrice et sans calcul écrit.

Il s'agit à présent d'explorer plus avant l'égalité remarquable pour des valeurs de a et de b qui sont tantôt positives, tantôt négatives. C'est l'objet de la consigne qui suit.

Calculer les deux membres de l'égalité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ en prenant pour a les valeurs 5 ou -5 et pour b les valeurs 2 ou -2.

On incitera les élèves à présenter leurs calculs de manière à ce qu'ils puissent vérifier facilement que tous les cas ont été envisagés, par exemple en complétant un tableau.

	$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
$a = 5$ et $b = 2$	$7^2 = 49$	$5^2 + 20 + 2^2 = 49$
$a = 5$ et $b = -2$	$3^2 = 9$	$5^2 + (-20) + (-2)^2 = 9$
$a = -5$ et $b = 2$	$(-3)^2 = 9$	$(-5)^2 + (-20) + 2^2 = 9$
$a = -5$ et $b = -2$	$(-7)^2 = 49$	$(-5)^2 + 20 + (-2)^2 = 49$

Il s'avère donc que cette seule égalité suffit pour calculer le carré d'une somme ou le carré d'une différence, étant entendu que, dans ce dernier cas, il faut ajouter *l'opposé* du terme à retrancher. On peut démontrer cela en appliquant la double distributivité au produit $(a + b)(a + b)$, dans lequel a et b sont des nombres relatifs. On a ainsi

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Revenons à présent aux mesures de longueurs et d'aires qui s'expriment toutes par des nombres positifs.

En supposant $a > b$, montrer à l'aide de figures que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

On peut chercher l'inspiration du côté de la figure 5. Il suffit de considérer le carré extérieur (voir figure 6) comme le carré de côté a et l'un des carrés intérieurs comme le carré de la différence. On voit ensuite que l'on ne peut retrancher qu'un rectangle (ab) au carré (a^2) et que pour en ôter un deuxième, il faut au préalable rajouter le petit carré (b^2).

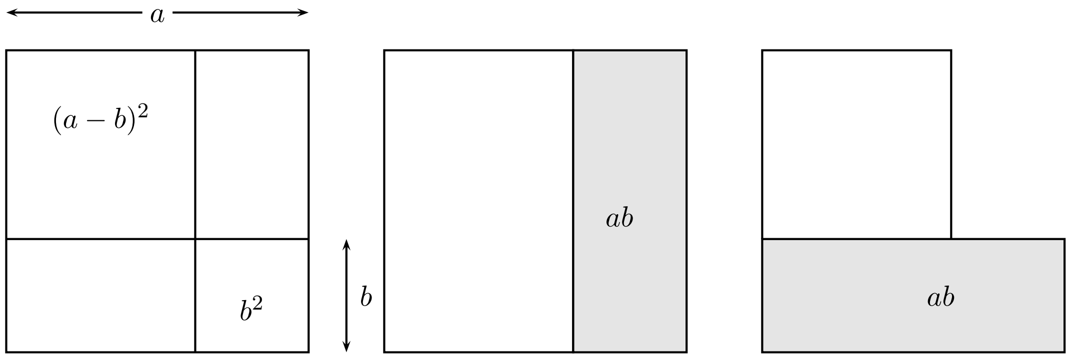

Fig. 6

D'autres figures, plus difficiles à découvrir, illustrent aussi cette égalité. En voici une que le professeur peut faire travailler en classe.

Voici une figure qui montre comment développer le carré d'une différence de deux nombres positifs. Reconstituer les étapes qui y conduisent.

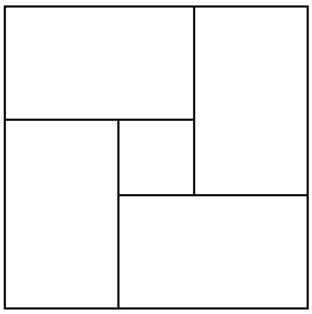

Fig. 7

Il suffit d'appeler a et b respectivement la longueur et la largeur de chacun des quatre rectangles. Le carré intérieur a comme côté $(a-b)$ et comme aire $(a-b)^2$. On peut calculer son aire comme différence entre celle du carré extérieur et celles des quatre rectangles. On a alors

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab,$$

puis

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$$

et finalement

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

La question qui suit conduit à utiliser le carré d'une somme pour expliquer une égalité surprenante et à la généraliser.

1.3 Des calculs surprenants

Comment s'y prendre ?

La procédure que décrit l'énoncé ci-dessous permet de calculer le carré d'un nombre dont la partie décimale est cinq dixièmes. À condition que la partie entière ne soit pas trop grande, on peut faire ce calcul mentalement. Il va de soi que cet énoncé ne doit pas être mémorisé par les élèves. L'intérêt de l'exercice réside principalement dans l'exploration numérique et dans le travail de symbolisation algébrique qui conduit à expliquer ce phénomène.

> Pour élever $7,5$ au carré, je fais 7×8 et j'écris 56 qui est la partie entière du résultat. La partie décimale étant 25 centièmes. Le résultat est ainsi $56,25$.
> De même, pour élever $9,5$ au carré, je fais $9 \times 10 = 90$, puis j'écris 25 centièmes à la droite de 90.
> Utiliser cette méthode pour calculer d'autres carrés. Vérifier les résultats et expliquer.

Les différents tests (qui doivent comporter des exemples et des contre-exemples), conduisent les élèves à conjecturer que la méthode fonctionne uniquement pour des nombres dont la partie décimale est cinq dixièmes.

Les difficultés commencent quand il faut expliquer pourquoi la méthode fonctionne à tous les coups pour de tels nombres !

En un premier temps, on peut demander aux élèves d'écrire les calculs qui traduisent le procédé, sans les effectuer et ensuite de les comparer au développement du carré d'une somme.
Pour le premier exemple cela donne, en appliquant le procédé,

$$7,5^2 = (7 \times 8) + 0,5^2.$$

Par ailleurs, en utilisant l'égalité remarquable on a

$$7,5^2 = (7 + 0,5)^2 = 7^2 + (2 \times 7 \times 0,5) + 0,5^2.$$

L'idée qu'il faut avoir ici, c'est bien sûr de mettre 7 en évidence sur les deux premiers termes. On trouve alors

$$7,5^2 = 7(7 + 1) + 0,5^2.$$

Et tout s'éclaire !

Deuxième étape : utiliser des lettres. Cette forme d'expression permet en effet de généraliser et de découvrir par là comment l'application de la procédure correspond au développement du carré d'une somme. Pour ce faire, il faut décomposer le nombre donné pour qu'apparaisse la partie entière (a) et la partie décimale ($0,5$). La démonstration (car il s'agit bien de cela) tient en une seule ligne.

$$(a + 0,5)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 0,5 + 0,5^2 = a(a + 1) + 0,5^2.$$

Cette dernière expression algébrique traduit exactement la procédure.

Les deux questions qui terminent l'activité requièrent d'utiliser conjointement le produit remarquable comme méthode de démonstration et l'écriture d'un nombre dans le système décimal.

Vrai ou faux ?
Si un nombre se termine par 5, son carré se termine par 25.

Après avoir procédé à des essais numériques, les élèves sont amenés, dans une démarche analogue à celle que nous venons de détailler, à écrire la démonstration suivante.

Le nombre dont on parle est de la forme $(10d+5)$, la lettre d représentant le nombre de dizaines contenu dans ce nombre. On écrit donc

$$(10d+5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d+1) + 25.$$

Le premier terme $100d(d+1)$ est un multiple de 100, il se termine donc par deux zéros. Lorsqu'on lui ajoute 25, on trouve bien un nombre qui se termine par 25.

1.4 La calculatrice est dépassée !

Dans la foulée des calculs surprenants, voici un procédé décrit par Ibn al-Bannā[2] (vers 1256 – vers 1321).

Vrai ou faux ?

Pour élever 999 999 au carré, je multiplie 999 998 par 1 000 000 puis j'ajoute 1. Je trouve le résultat en moins de temps qu'il n'en faut pour sortir ma calculatrice… C'est 999 998 000 001.

La multiplication écrite est assez fastidieuse et les calculatrices qui n'affichent que 8 ou 10 chiffres ne permettent pas de vérifier ce calcul. Par contre, le produit remarquable conduit assez rapidement tout à la fois à valider et à expliquer le procédé.

$$(1\,000\,000 - 1)^2 = 1\,000\,000^2 - 2 \times 1\,000\,000 + 1,$$

$$(1\,000\,000 - 1)^2 = 1\,000\,000(1\,000\,000 - 2) + 1.$$

Et la question rebondit : voici une méthode qui permet de calculer un carré que la calculatrice ne peut afficher. Y en a-t-il d'autres ?

Le procédé s'applique évidemment aux carrés de nombres dont tous les chiffres sont des 9. Après quelques vérifications analogues à celles que nous venons de montrer, on peut passer (si les élèves sont rompus au calcul avec des exposants littéraux) à une généralisation.

$$(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1,$$

$$(10^n - 1)^2 = 10^n(10^n - 2) + 1.$$

[2] Mathématicien originaire de Marrakech.

2 Binômes conjugués

De quoi s'agit-il ? Les élèves explorent un phénomène numérique et l'expliquent par la voie géométrique. Un travail de généralisation s'ensuit qui passe par du calcul avec des entiers et aboutit à un traitement algébrique du problème.

Enjeux Découverte du produit de binômes conjugués sous différents aspects : numérique, géométrique et algébrique.

Compétences

Ce sont les mêmes que celles relatives à la section 1 (voir page 169).

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Papier quadrillé, règle graduée, crayon, gomme, ciseaux.

Prérequis

L'écriture avec des lettres : le carré d'un nombre, trois nombres consécutifs, le produit de deux nombres.

Le calcul numérique avec les entiers et les nombres relatifs (ou si l'on préfère, avec des décimaux positifs ou négatifs).

La double distributivité. La mise en évidence.

2.1 Trois nombres consécutifs

Comment s'y prendre ? L'exploration du phénomène numérique ci-après introduit le produit de deux binômes conjugués pour des binômes dont l'un des termes est le nombre 1.

Soient trois nombres consécutifs. Le carré du deuxième, diminué de 1 est-il égal au produit des deux autres ?

Les élèves procèdent à des essais numériques qui donnent à penser que la réponse à la question posée est affirmative. Le professeur demande alors d'expliquer ce phénomène en dessinant des figures dont les aires correspondent aux calculs effectués. Partons par exemple du triple 5, 6, 7. L'énoncé se traduit alors sous forme de l'égalité

$$36 - 1 = 5 \times 7.$$

La figure 8 illustre le premier membre de l'égalité, la figure 9 illustre le second.

Pour expliquer l'égalité, il faut montrer que ces deux figures ont la même aire. La figure 10 indique comment transformer la figure 8 pour obtenir la figure 9. On imagine sans peine qu'on peut faire une transformation analogue pour tout autre *gnomon* dans lequel le carré ôté vaut 1.

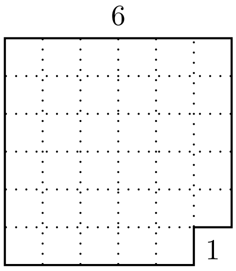

Fig. 8

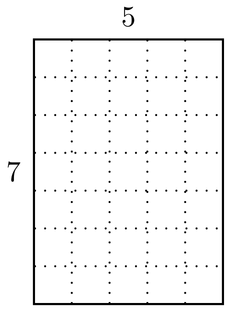

Fig. 9

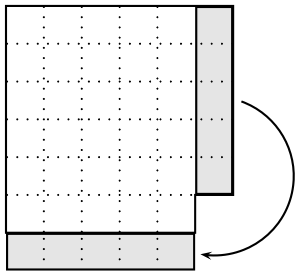

Fig. 10

Un autre découpage permet d'illustrer la même égalité. On coupe le gnomon en deux selon la diagonale montrée par la figure 11

On peut assembler les deux pièces de façon à faire apparaître un parallélogramme dont la base est 7 et dont la hauteur est 5. C'est ce que montre la figure 12. Avec les deux mêmes pièces, on peut encore former un rectangle ou un trapèze (voir figures 13 et 14).

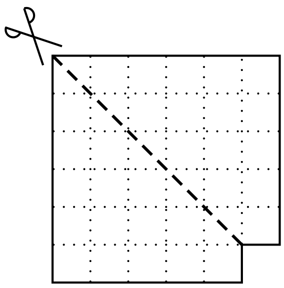

Fig. 11

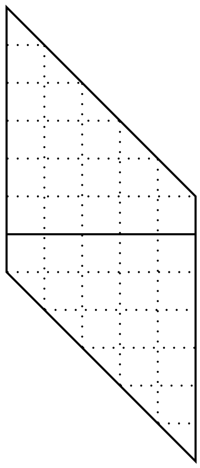

Fig. 12

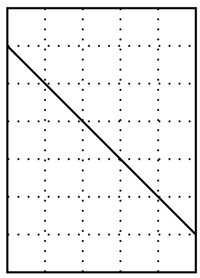

Fig. 13

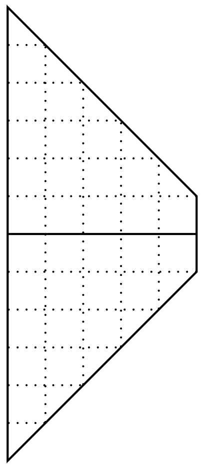

Fig. 14

L'aire des deux premiers quadrilatères s'exprime sous la forme du produit de 7 par 5, celle du trapèze est

$$\frac{(12+2)\times 5}{2}.$$

Pour que la transposition algébrique se présente sous la forme d'un produit remarquable et non d'une factorisation, on pose la question suivante.

Montrer, par la voie algébrique, que si trois nombres sont consécutifs, alors le produit du premier par le troisième est égal au carré de celui du milieu diminué de 1.

Les élèves commencent souvent en choisissant trois lettres différentes pour les trois nombres. Lorsque le professeur leur demande d'exprimer le lien entre ces trois nombres tel qu'il est décrit dans l'énoncé, ils les écrivent sous la forme a, $a+1$ et $a+2$. Ils montrent que

$$a(a+2) = (a+1)^2 - 1.$$

Ce calcul ne fait pas intervenir de binômes conjugués. Pour faire le lien avec l'exploration géométrique qui précède, le professeur signale que l'expression $a+2$ n'intervient dans aucun dessin et demande d'écrire trois nombres consécutifs dont le deuxième est a. Les trois nombres s'écrivent alors sous la forme a, $a-1$, et $a+1$ et l'égalité à vérifier est

$$(a-1)(a+1) = a^2 - 1.$$

Les élèves transforment le premier membre en appliquant la double distributivité et réduisent les termes semblables. Ils obtiennent le second membre.

2.2 D'un rectangle à un gnomon

Comment s'y prendre ?

On procède à présent à des généralisations successives qui conduiront à traiter des produits qui ne privilégient pas le nombre 1, puis des produits qui sortent du cadre de la géométrie et portent sur des nombres relatifs.

Montrer par la voie géométrique que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Le premier membre de l'égalité est un produit que l'on interprète comme l'aire d'un rectangle de dimensions $a+b$ et $a-b$. On peut voir le deuxième membre comme un *gnomon*. Il faut montrer que ces deux figures ont même aire.

Les élèves puisent leur inspiration dans les figures construites lors des activités précédentes. Les figures ci-après montrent les différentes étapes de la transformation.

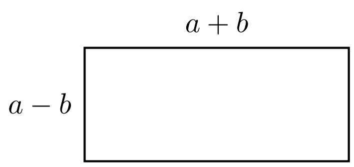

Fig. 15

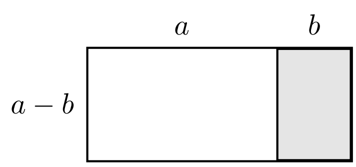

Fig. 16

On déplace le rectangle ombré de la figure 16 pour faire apparaître le gnomon de la figure 17. La figure 18 montre que celui-ci est obtenu par la différence des deux carrés d'aires a^2 et b^2.

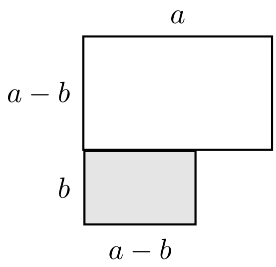

Fig. 17

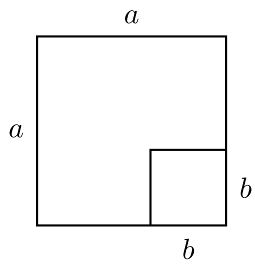

Fig. 18

Il faut à présent explorer comment se comporte cette égalité lorsque les nombres a et b sont des entiers. Pour ce faire on donne aux élèves la consigne

Calculer les deux membres de l'égalité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ en prenant pour a les valeurs 5 ou -5 et pour b les valeurs 2 ou -2.

Les élèves construisent un tableau analogue à celui que l'on a montré à propos du carré d'une somme.

Le professeur termine l'activité en demandant de prouver l'égalité par la voie algébrique.