Chapitre 10

Des pavages aux polyèdres

Préambule

Les pavages sont très présents dans la vie de tous les jours : les carrelages de la cuisine, les trottoirs, les allées de garage, les murs de briques, ... sont autant de motifs qui nous semblent banals et que nous ne prenons plus le temps de regarder. Pourtant, ils sont élaborés avec une grande rigueur et dégagent des régularités surprenantes.

L'étude des pavages, dès le début du secondaire, donne l'occasion d'aborder les constructions élémentaires et bon nombre de concepts mathématiques, tels que les angles, les symétries et les rotations. Elle constitue déjà à elle seule une bonne activité mathématique. Elle va nous mener d'une analyse plus approfondie des pavages réguliers et semi-réguliers à la découverte des polyèdres réguliers, en passant par des considérations sur les mesures des angles.

1 À la découverte des pavages

De quoi s'agit-il ? À l'aide de divers documents (reproductions, photos, dessins), faire découvrir les pavages aux élèves.

Enjeux Dégager les caractéristiques des pavages et formuler des hypothèses quant à leur construction.

Mettre au point la définition de pavage en l'affinant progressivement, par la vérification qu'elle s'adapte bien à tous les documents présentés.

Compétences

Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.

Reconnaître, comparer des figures et les classer.

Dans un contexte de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La fiche 17, à la page 338, sur laquelle se trouvent des reproductions ou photographies de pavages.

Prérequis

La connaissance du vocabulaire de géométrie plane (noms des figures, notion d'angle, de côté, ...).

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue la fiche 17, sur laquelle se trouve la consigne suivante.

> Quel est le lien entre toutes ces images ? Comment pourrait-on les appeler ? Quelles en sont les caractéristiques communes ?

Les élèves observent les images et remarquent que l'on y trouve des régularités. Ils prennent note de leurs observations. Parmi les images se trouvent des photos liées à la vie quotidienne (figures 3, 4, 5, 6 et 9) qui devraient leur paraître familières. D'autres images sont des réalisations artistiques (figures 1 et 7) ou encore des photos prises dans des sites archéologiques ou autres (figure 2). On acceptera à ce moment qu'ils parlent de carrelages, de pavés, de briques, ... le mot *pavage* ne sera sans doute évoqué que par la suite.

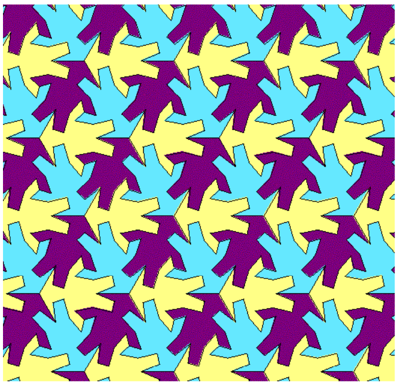


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

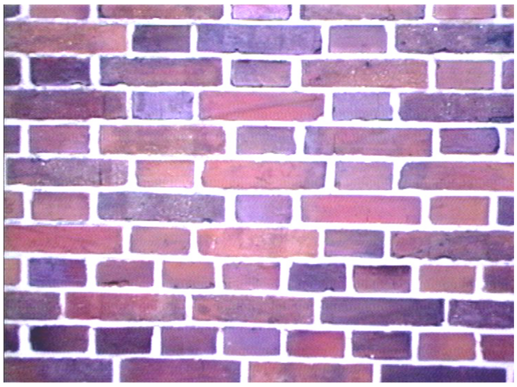


Fig. 4

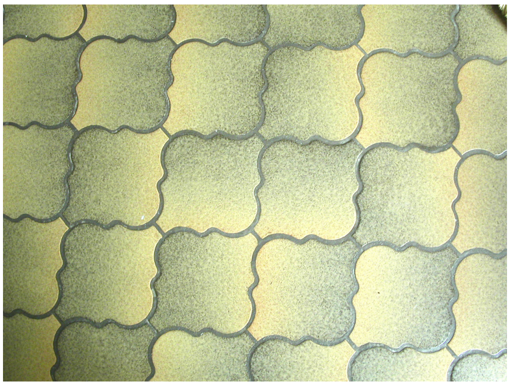


Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

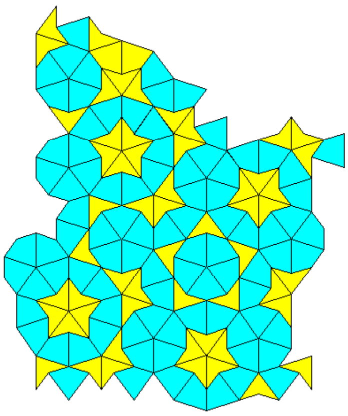


Fig. 8

Fig. 9

Peu à peu, les élèves font ressortir les caractéristiques des pavages, et proposent des définitions qu'ils affinent. À chaque étape, ils doivent vérifier que ces essais de définition s'adaptent à toutes les reproductions. Si ce n'est pas le cas, ils doivent les préciser davantage.

Voici une première idée de la notion de pavage à laquelle les élèves devraient arriver.

Un ***pavage*** *est un assemblage de figures qui couvre le plan entier, et tel que ces figures ne se recouvrent pas et ne laissent entre elles aucune lacune.*

Échos des classes

Cette activité et celles qui suivent ont été réalisées dans une classe de deuxième secondaire d'un institut technique de Bruxelles.

Nous avons remarqué que les élèves se focalisent davantage sur les couleurs et les formes des figures, plutôt que sur les conditions de non-recouvrement et d'absence de lacune.

Ils accordent également de l'importance à la nature des images : « ce sont des carrelages, des murs, des fonds de piscine, des mosaïques, des papiers peints, … ». Le professeur doit donc veiller particulièrement à recentrer la discussion sur les caractéristiques des pavages.

2 Paver le plan à l'aide de polygones réguliers

De quoi s'agit-il ?

Réaliser des pavages réguliers et semi-réguliers à l'aide de différents matériels.

Déterminer le nombre de pavages réguliers et explorer les pavages semi-réguliers.

Élaborer des calculs sur les angles des polygones.

Enjeux

Étudier les polygones réguliers et leurs caractéristiques.

Découvrir les conditions qui déterminent si un pavage est régulier ou semi-régulier.

Établir une formule qui permette de connaître la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés.

Vérifier la plausibilité de certaines conjectures.

Compétences

Reconnaître, comparer des figures, les différencier et les classer.

Construire des figures avec du matériel varié.

Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles.

Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions [...].

Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables.

2.1 Manipulation

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Pour chaque élève, une enveloppe contenant une série de polygones réguliers en carton, et la reproduction de ces mêmes polygones en grand format pour le tableau. Dans chacun des deux formats, les longueurs des côtés de ces différents polygones doivent être égales entre elles. Pour cette activité, notre choix s'est porté sur une quantité particulière de chaque type de polygones : 4 dodécagones, 4 hendécagones[1], 4 décagones, 4 ennéagones[2], 6 octogones, 6 heptagones, 8 hexagones, 6 pentagones, 9 carrés et 18 triangles équilatéraux. C'est un choix qui permet une bonne pratique de la manipulation. Mais le professeur peut le modifier à sa guise.

Les fiches 18 à 27, aux pages 339 à 348, reprennent les gabarits des petits polygones. Les grands polygones pour le tableau peuvent être obtenus

[1]Polygone à onze côtés.
[2]Polygone à neuf côtés.

par agrandissement à la photocopieuse.

Prérequis

Les notions de triangle, de quadrilatère, de polygone, de côté et d'angle.

L'activité 1 ou toute autre activité qui introduit la notion de pavage.

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue une enveloppe à chaque élève, et donne la consigne suivante.

> À l'aide des figures contenues dans ton enveloppe, amorce un pavage du plan.

Les élèves travaillent seuls mais peuvent confronter leurs idées avec celles de leurs voisins. Ils essaient plusieurs combinaisons de polygones afin d'obtenir un pavage qui couvre le plan sans recouvrement ni lacune.

La consigne étant volontairement vague, il est probable que les élèves obtiennent des constructions variées. Afin de limiter les possibilités et de focaliser l'attention sur certains pavages particuliers, le professeur ajoute la consigne suivante.

> Assemble les polygones de telle sorte que deux polygones qui se touchent aient en commun soit un sommet, soit un côté complet.

Pour illustrer la consigne, le professeur montre les figures 3, 4 et 6. Celles-ci sont des exemples de pavages qui ne remplissent pas la condition de la nouvelle consigne.

Lors de l'activité, on demande aux élèves d'expliquer ce qu'ils ont réalisé, en justifiant pourquoi tel assemblage convient ou pourquoi il ne convient pas. De ce dialogue devraient ressortir des remarques du type

– on observe souvent des régularités dans les pavages,
– on peut mélanger différentes sortes de polygones ou bien n'utiliser que des polygones identiques,
– en tout sommet commun à plusieurs polygones (ce qu'on appelle un nœud), la somme des angles vaut 360°,
– il y a toujours au moins 3 polygones en chaque nœud,
– ...

À la suite d'une discussion entre le professeur et les élèves, ceux-ci identifient deux familles particulières de pavages. Certains utilisent un seul type de polygones réguliers, on les appelle *pavages réguliers* ; d'autres utilisent deux (ou plusieurs) types de polygones réguliers différents.

Échos des classes

La plupart des réalisations des élèves présentent des régularités : on y trouve un assemblage de quelques polygones tel que le pavage soit constitué par une reproduction infinie d'assemblages identiques. Le professeur attire l'attention des élèves sur ces régularités.

Lors de la première expérimentation, il avait été demandé de réaliser des pavages présentant de telles régularités. Cette consigne s'est révélée trop difficile à mettre en œuvre, c'est pourquoi nous avons renoncé à imposer cette condition supplémentaire.

Le premier réflexe des élèves est généralement de prendre un grand polygone (au moins un décagone) et de l'entourer de plus petits. Ils obtiennent ainsi souvent des rosaces qu'ils ne peuvent ensuite étendre à tout le plan avec les polygones dont ils disposent (figures 10 et 11).

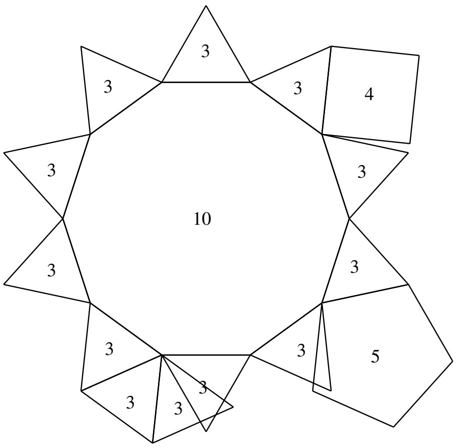


Fig. 10

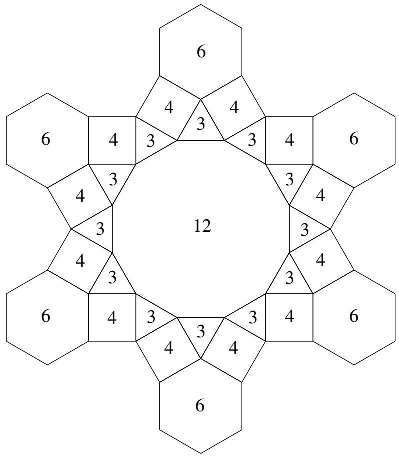


Fig. 11

Lors de la mise en commun, les élèves ne passent pas aisément de la manipulation intuitive à une réflexion de cause à effet.

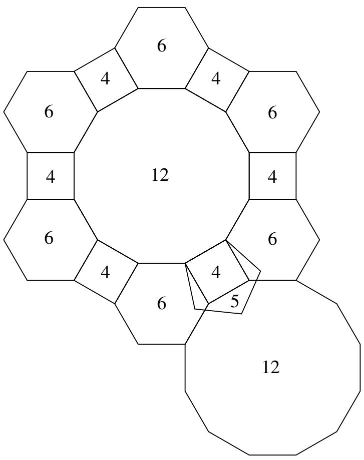


Fig. 12

À la question : ≪ Pourquoi cet assemblage (figure 12) fonctionne-t-il avec un carré et pas avec un pentagone ? ≫, les élèves ne répondent pas correctement. Ils disent par exemple : ≪ C'est parce qu'il y a un côté en trop ≫ ou bien ≪ C'est parce que les côtés ne sont plus multiples ≫. Nous supposons ici qu'ils veulent dire que 5 n'est pas un diviseur de 12. Ils n'ont pas l'idée de s'exprimer en terme d'angles.

La notion de nœud n'est pas non plus simple à mettre en place. En effet, celle-ci est nouvelle pour les élèves. La question : ≪ Combien d'hexagones trouve-t-on en chaque nœud dans le pavage régulier d'hexagones ? ≫ n'était pas claire pour eux. Il semble donc très important que le professeur prenne le temps de mettre correctement cette notion en place.

2.2 Dénombrement et analyse des pavages réguliers

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les même polygones en carton que pour la section 2.1.

Prérequis

L'amplitude des angles du triangle équilatéral et du carré.

Comment s'y prendre ?

Le professeur propose de continuer à travailler par essais et erreurs avec les polygones en carton.

> Combien de pavages réguliers différents existe-t-il ? Utilise tes polygones pour les trouver.

Les élèves essaient d'amorcer un pavage du plan à l'aide uniquement de polygones réguliers identiques. Ils devraient trouver sans trop de difficultés les trois seuls pavages réalisables de cette manière (figures 13 à 15),

à l'aide de triangles équilatéraux, ou de carrés, ou d'hexagones réguliers.

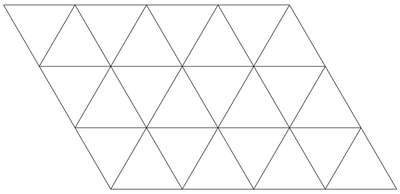


Fig. 13

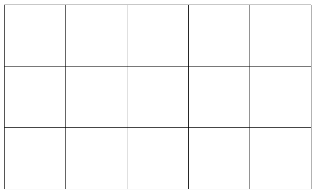


Fig. 14

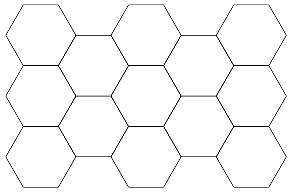


Fig. 15

Il est important de passer à une phase d'analyse de ce résultat. Pour ce faire, le professeur demande tout d'abord aux élèves d'expliquer pourquoi ils n'ont pu trouver que ces trois pavages réguliers. Ils doivent alors mener une réflexion sur les angles des polygones, en utilisant leurs acquis antérieurs.

- « On peut paver le plan à l'aide de triangles équilatéraux car leurs angles valent 60° ; si on en place six autour d'un nœud, la somme fait effectivement 360°. »
- « On peut paver aussi avec des carrés car leurs angles valent 90° ; on peut en placer quatre en chaque nœud. »
- « Cela ne fonctionne pas avec les pentagones car si on en met trois, il y a un trou (une lacune) comme le montre la figure 16, et si on en met quatre, ils se superposent (un recouvrement), comme à la figure 17. »

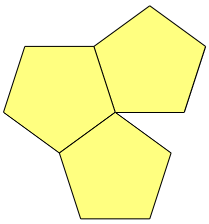


Fig. 16

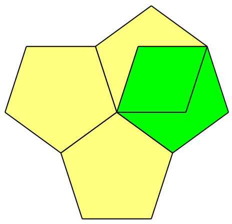


Fig. 17

- « Pour les hexagones, on constate que trois en un nœud amorcent un pavage. »

  Le professeur peut poser la question suivante : « Connaît-on la valeur de l'angle d'un hexagone ? N'a t-on pas déjà rencontré cette forme quelque part ? »

S'il n'y a pas de réaction de la part des élèves, il peut attirer leur attention sur le pavage de triangles équilatéraux et leur faire remarquer qu'on peut y voir des hexagones, comme le montre la figure 18.

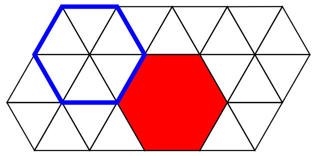


Fig. 18

Les élèves voient alors que la mesure de l'angle de l'hexagone vaut deux fois celle de l'angle d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire 120° et cela justifie le fait que l'on peut placer trois hexagones en chaque nœud.

– « À partir des heptagones, si on essaie d'en mettre trois, il y a toujours recouvrement. »

Il y a donc trois pavages réguliers dont nous avons montré l'existence ; on peut considérer que cette démarche correspond à une démonstration intuitive largement suffisante pour des élèves de treize ans.

2.3 Calcul de l'angle intérieur d'un polygone régulier

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 28 et 29, aux pages 349 et 350.

Prérequis

Les premiers éléments de calcul littéral.

La somme des angles d'un triangle quelconque.

Comment s'y prendre ?

À la section 2.2, nous nous sommes rendu compte qu'il était nécessaire de connaître les valeurs des angles intérieurs des polygones réguliers, pour justifier l'existence d'un pavage régulier.

Afin d'aller plus loin dans l'étude des pavages non réguliers, le professeur propose aux élèves de calculer les valeurs de ces angles intérieurs.

Quelle est la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à trois côtés ? À quatre côtés ? À cinq côtés ?

Les élèves connaissent bien la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à trois côtés, puisqu'il s'agit du triangle équilatéral dont l'angle vaut 60°. Celui à 4 côtés est le carré, son angle intérieur est connu également ; il vaut 90°. Par contre les élèves ne connaissent pas la valeur de l'angle intérieur du polygone régulier à 5 côtés, le pentagone.

Afin de ne pas s'engager dans des calculs fastidieux propres à chaque polygone, le professeur propose aux élèves d'établir une formule générale valable quel que soit le nombre de leurs côtés. Cette formule permettra de déterminer l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés.

Pour y arriver, il existe plusieurs méthodes, dont une consiste à décomposer le polygone régulier en triangles, en partant d'un sommet et en le reliant à tous les autres sommets qui ne lui sont pas adjacents (figures 19 et 20). Le professeur distribue la fiche 28 et réalise la démarche avec les élèves.

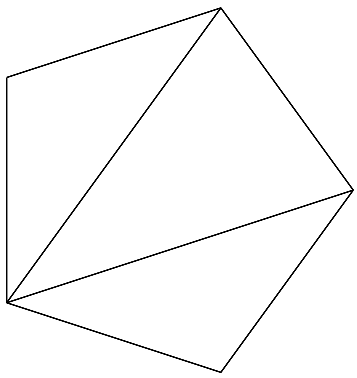


Fig. 19

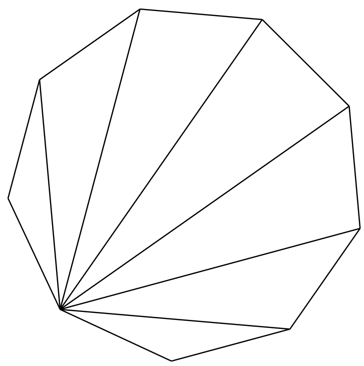


Fig. 20

Combien de triangles peut-on ainsi former dans un polygone régulier à n côtés ?

On remarque que le nombre de triangles contenus dans le polygone vaut toujours le nombre de ses côtés moins 2, on formera donc $(n-2)$ triangles.

Quel lien existe-t-il entre les angles des triangles et les angles du polygone régulier ?

Si on additionne tous les angles des triangles qui composent le polygone, on obtient la somme des angles intérieurs de ce dernier. Cette somme vaut donc le produit de 180° par le nombre de triangles. Comme on sait qu'un polygone régulier à n côtés est composé de $(n-2)$ triangles, on peut dire que la somme de ses angles vaut $180° \cdot (n-2)$.

$$\text{Somme des angles intérieurs du polygone} = (n-2) \cdot 180°.$$

Quelle est alors la valeur d'un seul angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés ?

Lorsqu'un polygone est régulier, tous ses côtés sont égaux, ainsi que tous ses angles. La valeur d'un angle vaut donc la somme des angles intérieurs du polygone divisée par le nombre de ses côtés.

Conclusion : si n est le nombre de côtés d'un polygone régulier, l'angle intérieur α de ce polygone vaut

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$

Vérifions, à l'aide de cette formule, qu'il n'y a pas plus de trois pavages réguliers du plan.

Le professeur demande aux élèves de remplacer le n de la formule par le nombre de côtés du polygone utilisé et d'en déduire α.

Prenons le cas, par exemple, des triangles équilatéraux,

$$\alpha = \frac{(3-2) \cdot 180°}{3} = \frac{1 \cdot 180°}{3} = \frac{180°}{3} = 60°,$$

ce qui correspond bien à la valeur connue des élèves.

Pour les pentagones,

$$\alpha = \frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = \frac{3\cdot 180°}{5} = \frac{540°}{5} = 108°.$$

Pour former un pavage régulier, il faudrait un nombre entier de pentagones en chaque nœud. Ce qui veut dire que 108 devrait être diviseur de 360. Or,

$$3 \times 108 = 324 < 360 \quad \text{et} \quad 4 \times 108 = 432 > 360.$$

On ne peut donc pas construire de pavage régulier à l'aide de pentagones.

Les valeurs des angles sont répertoriées dans un tableau, dans lequel on fait figurer le calcul qui permet de déterminer si les polygones peuvent former ou non un pavage régulier.

n	α	somme des angles en un nœud	pavage possible
3	60	$6 \times 60° = 360°$	oui
4	90	$4 \times 90° = 360°$	oui
5	108	$3 \times 108° < 360°$ et $4 \times 108° > 360°$	non
6	120	$3 \times 120° = 360°$	oui
7	128	$3 \times 128° > 360°$	non

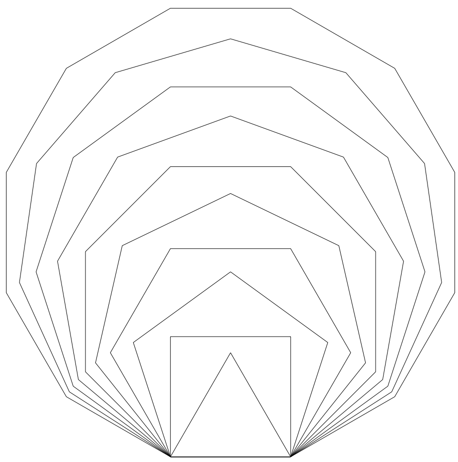


Fig. 21

Par l'illustration de la figure 21, le professeur peut facilement montrer aux élèves que la valeur de l'angle intérieur d'un polygone ne cesse d'augmenter avec le nombre de ses côtés. La démarche est donc bien finie lorsqu'on a vu que trois fois la valeur de l'angle d'un heptagone dépasse 360°.

À l'aide de la formule trouvée, le professeur peut proposer aux élèves de construire le graphe de la valeur de l'angle intérieur du polygone régulier en fonction du nombre de ses côtés (figure 22). Ce genre de graphe peut être facilement réalisé à l'aide de l'assistant graphique du tableur Excel. On peut y voir que la courbe est croissante, que les amplitudes des angles augmentent avec le nombre des côtés, et que cette augmentation est de plus en plus minime. La valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier à 53 côtés sera de ce fait juste un peu plus grande, à quelques centièmes de degrés près, que celle d'un polygone régulier à 52 côtés. Le professeur peut également demander aux élèves quelle est la limite de ces amplitudes, et ensuite de prolonger la suite pour que celle-ci vienne donc « lécher » l'horizontale passant par l'ordonnée 180 qu'on appelle asymptote.

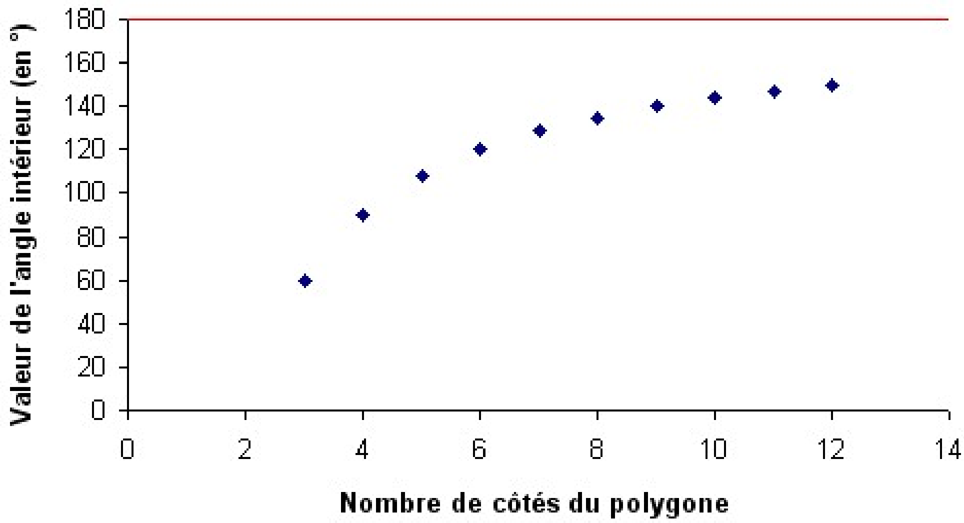


Fig. 22

On peut également montrer algébriquement que si n augmente, alors α augmente. On a

$$\alpha = 180 \cdot \frac{n-2}{n} = 180° \cdot (\frac{n}{n} - \frac{2}{n}) = 180° \cdot (1 - \frac{2}{n}).$$

Si n augmente, alors la fraction $\frac{2}{n}$ diminue (car, pour un même numérateur, un dénominateur plus grand donne une fraction plus petite).
Si la fraction $\frac{2}{n}$ diminue, alors $(1 - \frac{2}{n})$ augmente (car on retranche de 1 une quantité plus petite).
Si $(1 - \frac{2}{n})$ augmente, alors $180° \cdot (1 - \frac{2}{n})$ augmente (car on multiplie 180° par un nombre plus grand), donc α augmente.

Le professeur peut ensuite proposer aux élèves de déterminer eux-mêmes la formule à partir d'un autre découpage (figures 23 et 24). Il leur distribue la fiche 29.

Retrouve la formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier à partir de cette nouvelle décomposition.

Le professeur laisse les élèves travailler seuls en les guidant de temps en temps si nécessaire.

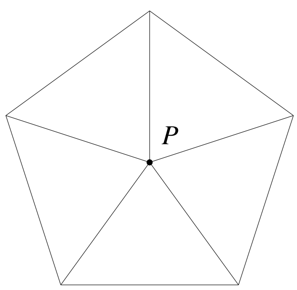


Fig. 23

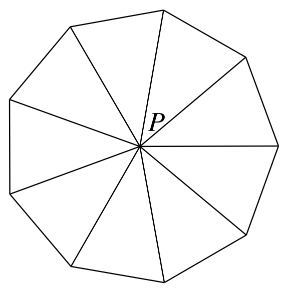


Fig. 24

Remarque. – Le point P est ici situé au centre des polygones afin de faciliter la visualisation. Il faut cependant être conscient du fait que le raisonnement est le même pour n'importe quel point P intérieur au polygone (figure 25).

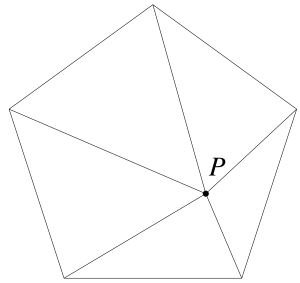


Fig. 25

Les élèves doivent commencer par compter le nombre de triangles obtenus au moyen de cette découpe. Cette fois, il y a autant de triangles que de côtés du polygone. Il y aura donc n triangles dans un polygone à n côtés.

Que vaut la somme des angles des triangles ? Correspond-elle encore à la somme des angles intérieurs du polygone ?

La somme des angles des triangles vaut $n \cdot 180°$.

Mais ici, la somme des angles des triangles ne correspond pas à celle des angles intérieurs du polygone. En effet, les angles autour du point P, dont la somme vaut 360° puisqu'il s'agit d'un tour complet, sont excédentaires.

Si on additionne tous les angles des triangles, puis qu'on retire les angles en P, on obtient la somme des angles du polygone. Cela veut dire que l'on doit multiplier 180° par le nombre de côtés, puis retrancher 360° pour obtenir la somme des angles du polygone

$$n \cdot 180° - 360°.$$

La valeur d'un seul angle intérieur du polygone vaut alors

$$\alpha = \frac{(n \cdot 180°) - 360°}{n}.$$

Cette formule est-elle équivalente à la première ?

Si les élèves n'y pensent pas, le professeur peut leur proposer de mettre 180° en évidence. Ils obtiennent alors la formule de départ

$$\alpha = \frac{(n \cdot 180°) - (2 \cdot 180°)}{n} = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}.$$

Prolongement possible

Il est intéressant de montrer aux élèves que la formule de la somme des angles des polygones régulier est valable pour tous les polygones convexes quelconques. Par exemple, si la somme des angles d'un hexagone régulier (figure 26) vaut 720°, c'est également le cas pour l'hexagone quelconque de la figure 27, puisque le découpage en triangles donne le même résultat.

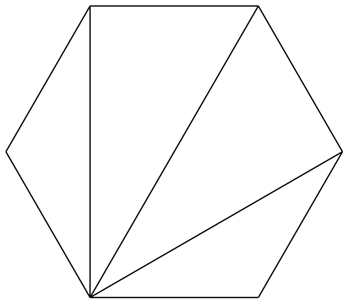


Fig. 26

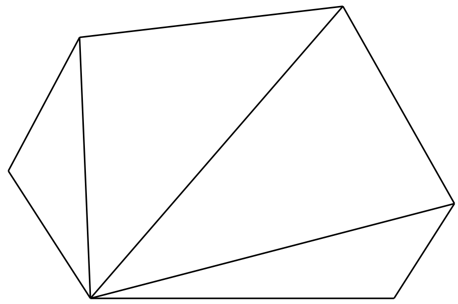


Fig. 27

Échos des classes

La deuxième partie de cette activité se révèle assez difficile pour les élèves. En effet, ils se focalisent sur la formule trouvée et essaient de l'adapter à la nouvelle décomposition. Il est alors extrêmement important que le professeur les amène à se poser les bonnes questions, c'est-à-dire celles qui permettent de mener une démarche semblable à la première.

Nous proposons donc une fiche détaillée (fiche 30, à la page 351), sur laquelle se trouve des questions intermédiaires. Une de ces questions est : « Que vaut la somme des angles des triangles ? Correspond-elle encore à la somme des angles intérieurs du polygone ? ». Cette question est très difficile pour les élèves et nécessite souvent une explication complémentaire. Voici une proposition qui peut débloquer la situation en permettant de la visualiser.

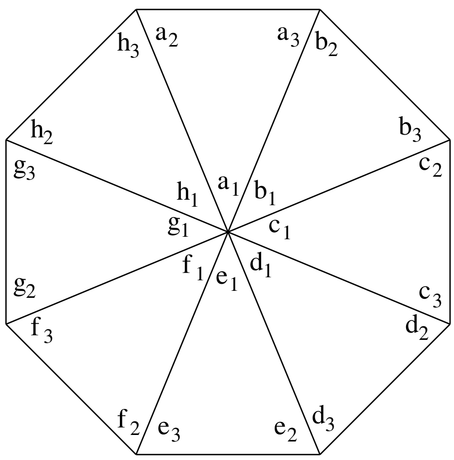


Fig. 28

On propose de numéroter (ou de symboliser) les angles de chaque triangle (figure 28). On demande aux élèves de dire ce qui va être additionné si on calcule la somme des angles de tous les triangles. Ici : $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + h_1 + h_2 + h_3$. On demande encore aux élèves si en effectuant ce calcul on obtient exactement la somme des angles du polygone. Les élèves se rendent compte qu' on a certains angles en trop, les angles situés au centre, additionnés $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1 + g_1 + h_1$ et dont la somme vaut 360°.

2.4 Exploration des pavages semi-réguliers

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les mêmes polygones en carton que pour la section 2.2 et éventuellement un logiciel de dessin. *Apprenti Géomètre*, par exemple, permet de disposer rapidement de tous les polygones nécessaires à cette activité.

Les fiches 31 et 32, aux pages 352 et 353.

Prérequis

Les acquis des sections 2.2 et 2.3.

Une familiarisation à un logiciel de dessin (initiation au kit standard pour *Apprenti Géomètre*), si on utilise ce type d'outil.

Comment s'y prendre ?

Le professeur récapitule les résultats des activités précédentes. Nous avons signalé que les pavages construits à l'aide d'une seule sorte de polygones réguliers étaient appelés *pavages réguliers*. Nous avons remarqué que l'on pouvait construire des pavages à l'aide de plusieurs sortes de polygones réguliers. Le professeur explique alors aux élèves que l'on ne donne habituellement à ces derniers le nom de *pavages semi-réguliers* que si la condition supplémentaire suivante est respectée : *en chaque nœud doit se répéter le même assemblage de polygones, dans le même ordre.*

Afin de bien faire comprendre cette condition, le professeur peut montrer un exemple de pavage (figure 29) utilisant trois types de polygones réguliers mais qui ne peut être appelé *pavage semi-régulier*, bien qu'il y ressemble fort. En effet, l'ordre des polygones autour des nœuds n'est pas toujours identique.

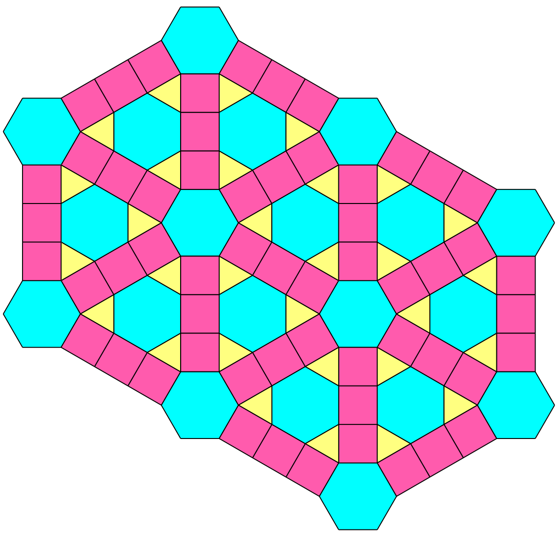


Fig. 29

Vers le « centre », on trouve un nœud constitué, dans l'ordre, des polygones suivants : hexagone - carré - triangle - carré. Si on remplace les noms des polygones par le nombre de leurs côtés, on peut coder l'ordre autour du nœud de cette manière : 6.4.3.4.

Mais on trouve aussi des nœuds de type 6.4.4.3.

On veillera à ce que les élèves soient bien conscients qu'il s'agit de deux situations tout à fait différentes. En effet, dans le deuxième cas, deux carrés se trouvent côte à côte.

Le professeur propose ensuite aux élèves d'utiliser les trois outils mis à leur disposition – les cartons, la formule donnant l'angle intérieur d'un polygone et le logiciel de dessin – afin de découvrir un maximum de pavages semi-réguliers.

Essaie maintenant de découvrir le plus grand nombre possible de pavages semi-réguliers. Travaille avec tous les outils mis à ta disposition.

Les élèves peuvent utiliser au choix les polygones en carton, la formule ainsi que le logiciel de dessin. Ils prennent note de leurs découvertes qui seront mises en commun par la suite, notamment pour réaliser le tableau ci-dessous.

Quelques pavages semi-réguliers peuvent être facilement trouvés à l'aide de la manipulation des cartons. Par contre, la motivation et la facilité qu'apporte le matériel informatique constituent un atout majeur pour la découverte de pavages semi-réguliers plus compliqués. En effet, il faut parfois pouvoir disposer d'un grand nombre de figures identiques pour se rendre compte de l'existence d'un pavage, et la découpe de nombreux polygones est un travail fastidieux que l'outil informatique permet d'éviter. La possibilité de créer de jolis dessins grâce aux couleurs et à la précision d'*Apprenti Géomètre* représente également une motivation supplémentaire pour explorer tous les pavages semi-réguliers.

Il faut signaler une difficulté supplémentaire : certaines combinaisons offrent deux pavages différents selon l'ordre dans lequel les polygones sont placés autour des nœuds. C'est le cas notamment de l'assemblage des carrés et des triangles. En effet, on obtient la figure 30 en plaçant deux triangles consécutifs, puis un carré suivi d'un triangle et d'un dernier carré. Par contre, on obtient la figure 31 en regroupant les trois triangles suivis des deux carrés.

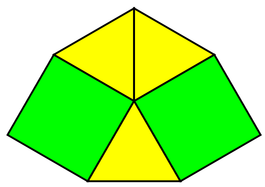


Fig. 30

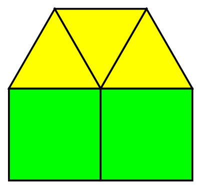


Fig. 31

Il sera donc opportun que le professeur rappelle aux élèves la condition supplémentaire pour avoir un pavage semi-régulier.

La formule trouvée à la section 2.3 permet de déterminer les valeurs des angles intérieurs de tous les polygones réguliers utilisés. Il est intéressant de récapituler toutes ces valeurs dans un tableau afin d'avoir une vue d'ensemble et de pouvoir envisager toutes les combinaisons possibles.

La fiche 31 à la page 352 contient un tableau vierge. Il pourra être complété avec les élèves en fin d'activité, pour élaborer une synthèse de toutes leurs découvertes. Il ressemblera sans doute à celui ci-dessous, qui reprend également le cas des pavages réguliers, indiqués par un astérisque (*). À chaque combinaison est associé un codage indiquant l'ordre dans lequel les polygones s'agencent autour de chaque nœud.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
α	60	90	108	120	128.57	135	140	144	147.27	150	Codage
	6*				////				////		3.3.3.3.3.3
	4			1	////				////		3.3.3.3.6
	3	2			////				////		3.3.3.4.4
	3	2			////				////		3.3.4.3.4
	2			2	////				////		3.6.3.6
	1	2		1	////				////		3.4.6.4
	1				////				////	2	3.12.12
		4*			////				////		4.4.4.4
		1			////	2			////		4.8.8
		1		1	////				////	1	4.6.12
				3*	////				////		6.6.6

Les deux premières lignes constituent un bon exercice d'application de la formule trouvée lors de l'activité 2.3. Les élèves complètent le tableau ligne par ligne.

– On essaie d'abord avec uniquement des triangles, il en faut 6, cela donne un pavage régulier dont le code du nœud est 3.3.3.3.3.3.

– On essaie ensuite avec 5 triangles, mais pour combler le trou on ne peut mettre qu'un triangle, cela revient donc au même que le premier cas.

– Puis on prend quatre triangles et on essaie de combler le trou. En calculant les valeurs des angles, on remarque que ≪ l'angle du trou ≫ vaut 120° et qu'il correspond donc à la valeur de l'angle intérieur de l'hexagone. Le pavage semi-régulier trouvé est codé par 3.3.3.3.6 (figure 34).

– On fait de même avec trois triangles, l'angle du trou à combler vaut alors 180°. Or, il n'existe pas de polygone régulier ayant un angle intérieur égal à 180°. Il faut donc chercher des amplitudes d'angles qui pourraient être additionnées pour obtenir 180°. Trois possibilités : $3 \cdot 60° = 180°$, $120° + 60° = 180°$ et $2 \cdot 90° = 180°$. Les deux premières possibilités ne peuvent pas être prises en compte car elles nous ramènent aux deux pavages déjà répertoriés. C'est donc la troisième qui nous intéresse : combler le trou à l'aide de deux carrés. On obtient alors le pavage 3.3.3.4.4 (figure 35) ou en mélangeant les triangles et carrés autrement, le pavage 3.3.4.3.4 (figure 36).

– ...

Les colonnes des heptagones et hendécagones peuvent être écartées dès le début car les valeurs décimales de leurs angles intérieurs ne conviennent pas pour constituer des pavages (la somme des angles autour de tout nœud doit valoir exactement 360°). Par contre, les colonnes des pentagones, ennéagones et décagones restent des candidats valables. Les élèves essaieront probablement de telles combinaisons, même si on sait que celles-ci resteront sans résultat.

Par cette méthode, avec de la patience et de l'organisation, on peut trouver les huit pavages semi-réguliers ainsi que les pavages réguliers. Mais il faut être très attentif aux exigences, car des intrus peuvent se glisser dans le tableau. Voici deux exemples de pavages pour lesquels les amplitudes des angles s'additionnent correctement mais dans lesquels on trouve différentes sortes de nœud (figures 32 et 33).

Voyons à quoi ressemblent ces pavages en utilisant le logiciel *Apprenti Géomètre*.

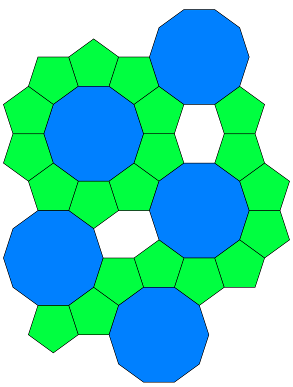


Fig. 32

Deux pentagones et un décagone en un nœud,

$$2 \cdot 108° + 144° = 360°.$$

Le code de cet assemblage est donc : 5.5.10.
Mais celui-ci n'est pas un pavage semi-régulier car les espaces blancs laissés par les pentagones et décagones ne peuvent être remplis par un de ces mêmes polygones réguliers. Cet espace doit être comblé par un hexagone non-régulier.

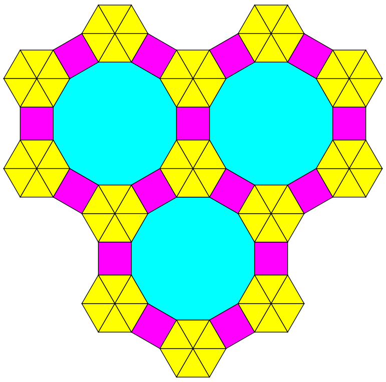


Fig. 33

Deux triangles, un carré et un dodécagone en un nœud,

$$2 \cdot 60^\circ + 90^\circ + 150^\circ = 360^\circ.$$

Le code de cet assemblage est donc : 3.3.4.12.
Celui-ci n'est pas un pavage semi-régulier car il est constitué de deux nœuds de types différents, puisqu'un nœud se trouve au centre des six triangles. Cet assemblage devient un pavage semi-régulier si on remplace les groupements de six triangles par des hexagones (figure 41).

Les huit pavages semi-réguliers à trouver sont les suivants (figures 34 à 41). Le professeur peut distribuer la fiche 32 sur laquelle se trouvent ces huit pavages. Les élèves complètent alors les codes des nœuds.

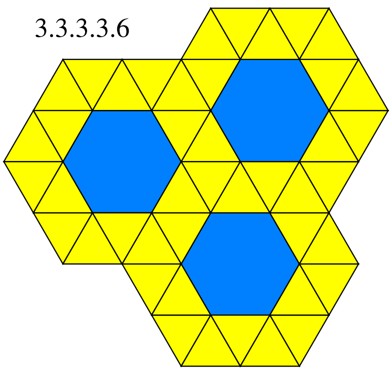


Fig. 34

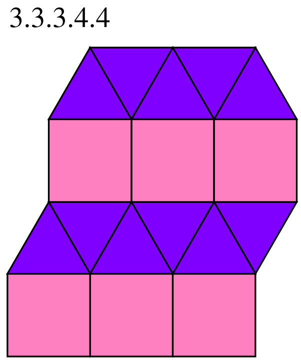


Fig. 35

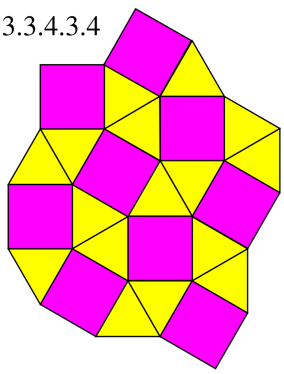


Fig. 36

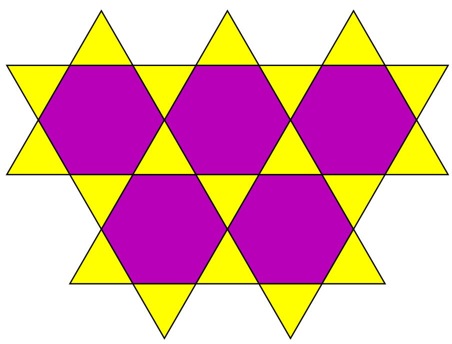


Fig. 37

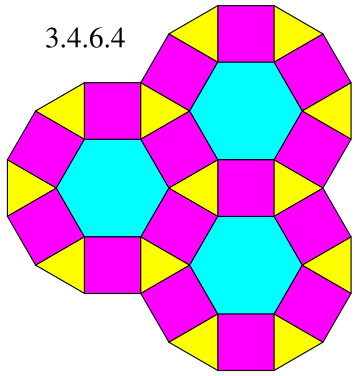


Fig. 38

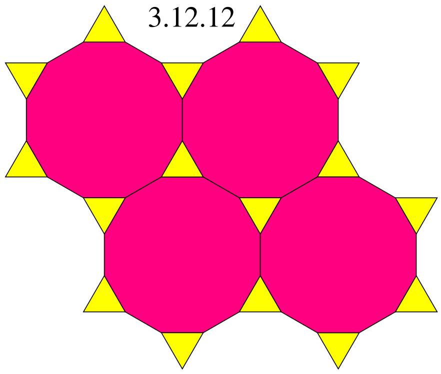


Fig. 39

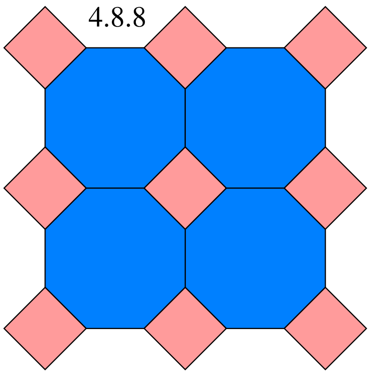


Fig. 40

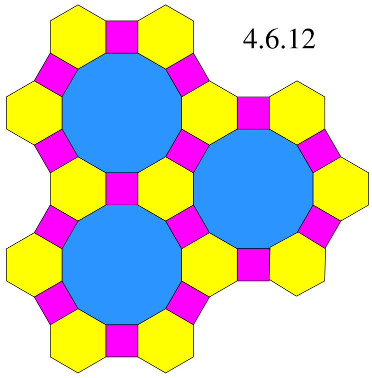


Fig. 41

3 Les polyèdres platoniciens

De quoi s'agit-il ? Les élèves découvrent les cinq polyèdres réguliers par une manipulation.

Contextualiser cette découverte par un extrait de Platon.

Enjeux Connaître les cinq polyèdres réguliers et leurs propriétés.

Lire et comprendre un texte écrit par Platon au quatrième siècle avant J.C., transcrire des parties de ce texte en langage plus actuel.

Compétences dans le domaine des mathématiques

Reconnaître, comparer des solides.

Construire des solides avec du matériel varié.

Compétences dans le domaine du français

Gérer la compréhension du document pour dégager les informations explicites, et pour vérifier des hypothèses émises personnellement ou proposées.

3.1 Activité de découverte

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une grande quantité de polygones réguliers en carton, tous à côtés égaux entre eux, et du papier collant ; ou bien les mallettes de *Polydron*.

Prérequis

La séquence 2.

Comment s'y prendre ?

Le professeur propose aux élèves de repartir d'une tentative de pavage régulier impossible, au moyen des pentagones.

> Comment faire pour assembler trois pentagones ? Comment ≪ supprimer le trou ≫ ?

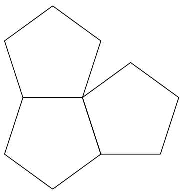


Fig. 42

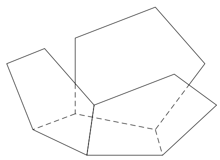


Fig. 43

La solution consiste à passer du plan à l'espace. En effet, si on relève les pentagones autour du nœud, celui-ci devient un sommet et les côtés coïncident alors parfaitement. La forme obtenue est une sorte de coupelle composée de trois pentagones autour d'un sommet. On peut alors ajouter un autre pentagone sur un des côtés (figure 43), et ainsi de suite.

> Est-il possible de continuer l'assemblage, de manière à avoir trois pentagones en chaque sommet ?

Les élèves ajustent les pentagones en tenant compte de la consigne. L'assemblage réalisé semble se refermer ; les élèves construisent en fait un solide dont toutes les faces sont des pentagones réguliers, qui se réunissent par trois autour de chaque sommet. Ce solide existe effectivement.

Le professeur demande aux élèves de décrire leur construction.

- ≪ Ce n'est pas un pavage car on ne travaille plus dans le plan, mais dans l'espace. ≫
- ≪ C'est un volume, un solide. ≫
- ≪ Il a des faces, des arêtes et des sommets. ≫
- ≪ Toutes ses faces sont identiques, ce sont des pentagones réguliers. ≫
- ...

Le professeur leur propose d'affiner leur description par une analyse précise des caractéristiques de ce solide. Il leur demande tout d'abord d'en compter les faces : il y en a douze. Il leur demande s'ils se souviennent du nom du polygone à douze côtés : le dodécagone. Il leur explique que le préfixe dodéca vient du grec *δεκα-δὺο* qui signifie douze. Il est alors naturel de l'utiliser pour nommer le solide étudié. Le professeur explique aux élèves que ce solide est particulier. En effet, il est composé de faces identiques qui sont des polygones réguliers, présentes en même nombre autour de chaque sommet. On appelle ce genre de solide un *polyèdre*[3] régulier. Celui-ci sera donc le *dodécaèdre* régulier (figures 44 et 45).

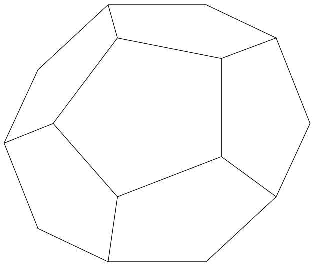


Fig. 44

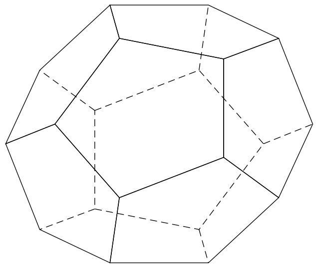


Fig. 45

Afin de poursuivre l'analyse, le professeur propose aux élèves de déterminer le nombre d'arêtes et de sommets du dodécaèdre. Pour cela, ils peuvent développer une stratégie de comptage afin de faciliter le calcul et d'être sûr de ne pas en oublier.

Pour compter le nombre de sommets : on sait que chaque face du dodécaèdre contient 5 sommets (figure 46) et il y a 12 faces. On obtient donc $12 \times 5 = 60$ sommets. Mais chaque sommet appartient à 3 faces (figure 47), nous en avons alors compté trois fois trop. Il faut donc diviser 60 par 3, ce qui nous fait 20 sommets.

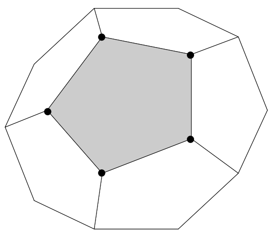


Fig. 46

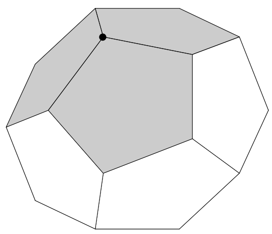


Fig. 47

Pour compter le nombre d'arêtes : par le même raisonnement, en chaque face, il y a 5 arêtes (figure 48), cela fait donc à nouveau 60 arêtes. Mais chaque arête est comptée deux fois car elle appartient à 2 faces (figure 49). On divise donc 60 par 2 et on obtient 30 arêtes.

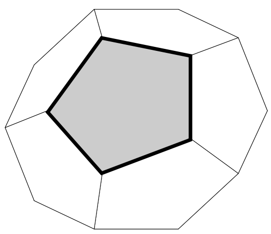


Fig. 48

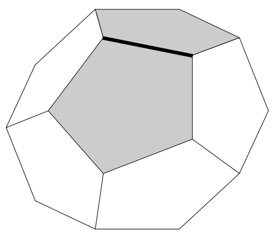


Fig. 49

[3] Polyèdre vient du grec *polis* ($\pi o\lambda\acute{\upsilon}\varsigma$) signifiant nombreux et *hedra* ($^{c}\acute{\epsilon}\delta\rho\alpha$) signifiant base.

On peut également déterminer le nombre d'arêtes en partant du nombre de sommets, plutôt que du nombre de faces. On sait qu'il y a 20 sommets. De chaque sommet partent 3 arêtes (figure 50), ce qui fait 60 arêtes. Or, les arêtes ont été comptées deux fois car celle qui part de A vers B est la même que celle qui part de B vers A (figure 51). On divise donc 60 par 2, ce qui nous donne bien 30 arêtes.

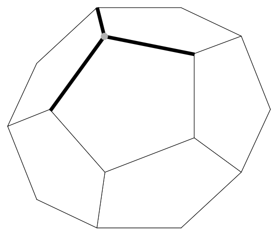


Fig. 50

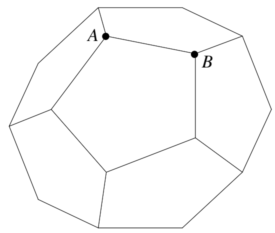


Fig. 51

Récapitulons : Le dodécaèdre a 12 faces (qui sont des pentagones), 20 sommets et 30 arêtes.

Remarque. – On peut également construire le dodécaèdre régulier en assemblant deux moitiés de celui-ci, comme le montre la figure 52. Chaque moitié est facilement obtenue en assemblant cinq pentagones tout autour d'une « base ».

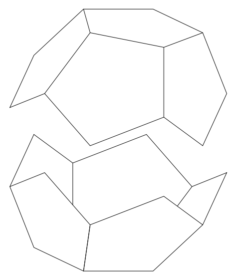


Fig. 52

Essayons de déterminer combien il existe de polyèdres réguliers, à l'aide de la méthode qui vient d'être mise au point.

Pour une meilleure systématisation de l'activité, le professeur propose aux élèves de commencer par utiliser des triangles équilatéraux, et d'envisager d'en disposer un certain nombre, le plus petit possible, en chaque sommet du futur solide. Les élèves se rendent vite compte qu'on ne peut obtenir un volume en n'ayant qu'un seul polygone en chaque sommet, ni même en n'en ayant que deux. Il faut donc minimum trois faces pour obtenir un sommet.

En disposant trois triangles équilatéraux autour d'un sommet, les élèves obtiennent une pyramide, dont ils n'ont plus qu'à refermer la base. Ce qui donne le polyèdre régulier ci-dessous (figures 53 et 54).

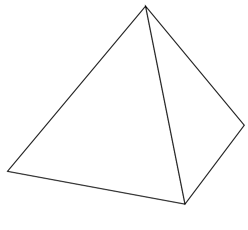


Fig. 53

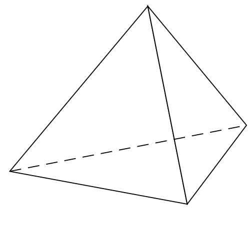


Fig. 54

On l'appelle *tétraèdre* régulier car il a 4 bases (le préfixe tétra vient du grec $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha$ qui signifie quatre). Le tétraèdre régulier possède 4 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 4 sommets et 6 arêtes.

Afin d'être systématique, le professeur demande aux élèves de réaliser, si possible, la construction suivante, en disposant non pas trois mais quatre triangles autour d'un sommet. Les élèves obtiennent à nouveau le « toit » d'une pyramide, à base carrée cette fois. En complétant les sommets afin qu'ils soient tous composés de quatres triangles équilatéraux, ils obtiennent un autre polyèdre régulier, qui a huit faces (figures 55 et 56). On l'appellera donc l'*octaèdre* régulier (du grec ʾοκτά qui signifie huit).

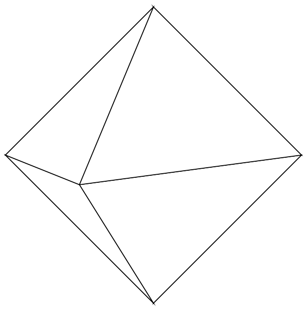


Fig. 55

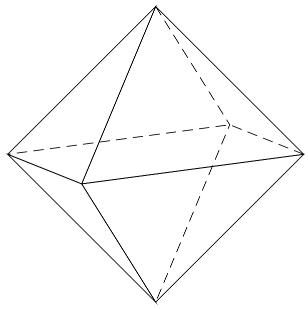


Fig. 56

L'octaèdre régulier possède 8 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 6 sommets et 12 arêtes.

En suivant la même démarche, les élèves assemblent 5 triangles équilatéraux autour de chaque sommet. Cette construction est plus fastidieuse, le professeur devra donc être bien attentif et guidera les élèves qui s'embrouillent. Une fois réussie, la construction donne lieu à un quatrième solide (figures 57 et 58). Celui-ci est constitué de 20 faces, on l'appellera donc *icosaèdre* régulier (le préfixe icosa vient du grec εἴκοσι qui signifie vingt).

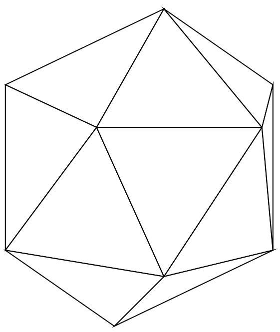


Fig. 57

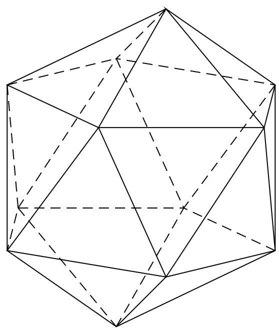


Fig. 58

Pour dénombrer les sommets et arêtes, il est à nouveau nécessaire de passer par une stratégie numérique car, vu la complexité du solide, il est assez difficile de les compter « à vue ».

Pour les sommets : chaque face possède 3 sommets (figure 59), ce qui donne $3 \times 20 = 60$ sommets. Or chaque sommet est entouré de 5 faces (figure 60), il faut donc diviser 60 par 5. On a donc 12 sommets.

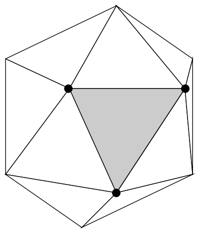


Fig. 59

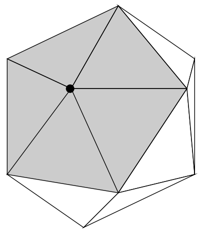


Fig. 60

Pour les arêtes : chaque face possède 3 arêtes (figure 61), ce qui fait à nouveau 60 arêtes. Mais chaque arête est comptée deux fois puisqu'elle est commune à deux faces (figure 62). On a donc 30 arêtes.

On peut également compter le nombre d'arêtes à partir du nombre de sommets. On sait qu'il y a 12 sommets, et qu'en chaque sommet il y a 5 arêtes (figure 63). Cela fait donc 60 arêtes. Or, chaque arête est comptée deux fois, comme expliqué pour le cas du dodécaèdre (figure 51). On obtient donc bien 30 arêtes.

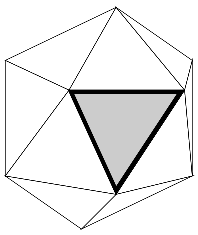


Fig. 61

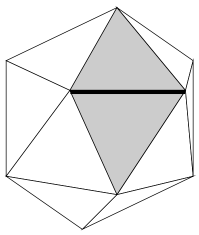


Fig. 62

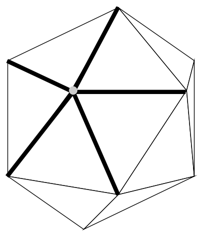


Fig. 63

L'icosaèdre régulier possède 20 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 12 sommets, et 30 arêtes.

Suivant la logique de l'activité, les élèves essaient de réaliser le prochain solide en assemblant 6 triangles équilatéraux en chaque sommet. Ils se rendent rapidement compte qu'ils retrouvent le pavage régulier de triangles. Ils essaient alors avec 7 triangles, mais ne peuvent y arriver car ils se superposent. On a épuisé toutes les possibilités avec des faces triangulaires. Le professeur propose alors aux élèves d'essayer avec le ≪ polygone suivant ≫, le carré.

Ils assemblent donc trois carrés en chaque sommet et réalisent le polyèdre régulier le plus connu, c'est le *cube* (figures 64 et 65).

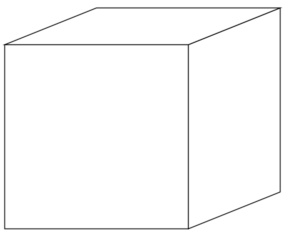


Fig. 64

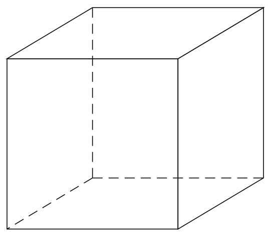


Fig. 65

Le cube possède 6 faces (qui sont des carrés), 8 sommets et 12 arêtes.

Essayer de disposer quatre carrés en chaque sommet mène au pavage régulier. Les élèves n'auront sans doute pas besoin de vérifier que la construction est impossible avec 5 carrés, car la superposition est immédiate. Il n'y a donc qu'un seul polyèdre régulier composé de carrés.

Pour poursuivre la démarche, les élèves doivent utiliser maintenant des pentagones. Or, le polyèdre régulier constitué par l'assemblage de trois pentagones en chaque sommet a déjà été découvert, tout au début de l'activité. Il s'agissait du dodécaèdre régulier. Ils essaient alors d'assembler quatre pentagones, mais la construction est impossible car les polygones se superposent. Ils tentent alors avec des hexagones, et retrouvent à nouveau le pavage régulier. Ils peuvent encore essayer d'utiliser des heptagones, mais il n'est même pas possible d'en disposer trois en chaque sommet sans qu'ils se superposent. À partir de ce moment, il est inutile de continuer, car les amplitudes des angles intérieurs des polygones réguliers augmentent avec le nombre de côtés. Il y aura donc toujours une superposition de trois polygones, à partir de l'heptagone.

On récapitule alors les résultats des constructions.

On a construit cinq polyèdres réguliers[4] qui sont : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre, et nous avons expliqué pourquoi il est impossible d'en trouver d'autres.

N'est-il pas impressionnant de ne trouver que cinq polyèdres réguliers, alors qu'il y a une infinité de polygones réguliers ?

3.2 Le *Timée* de Platon

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La fiche 38, à la page 359.

Comment s'y prendre ?

Le professeur annonce aux élèves que l'on va lire un texte, extrait du *Timée* [118], écrit par Platon (figure 66) au quatrième siècle avant J.-C., qui parle de l'existence de seulement cinq polyèdres réguliers.

Fig. 66

Le tout début du passage du *Timée* relatif aux polyèdres n'est guère simple à comprendre. Platon y décrit la construction des quatre premières espèces à partir de triangles ; il s'agit du tétraèdre, de l'octaèdre, du cube et de l'icosaèdre. Pour lui, toute face du cube est obtenue en accolant quatre triangles rectangles isocèles. Il ajoute alors « Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il a dessiné l'arrangement final. » Il fait ici allusion au dodécaèdre, qui est la cinquième et dernière « combinaison », affirme-t-il.

Dans la suite du texte, Platon associe les éléments (feu, eau, terre, air) aux quatre premières espèces qu'il a construites. C'est cette partie du texte qu'on va lire en classe. Le professeur distribue la fiche 38 qui contient l'extrait en question, ainsi que la consigne suivante.

[4]Les développements des cinq polyèdres réguliers sont repris sur les fiches 33 à 37, aux pages 354 à 358. Remarquons que les développements de quatre des cinq polyèdres réguliers (tous sauf celui du dodécaèdre) sont des parties d'un pavage régulier.

Lis attentivement le texte. Quelle association le philosophe fait-il entre les quatre premières espèces de polyèdres et les quatre éléments ?

Les élèves lisent le texte seuls. Ils essaient d'en comprendre les éléments importants. Voici une liste non exhaustive de ce qui peut apparaître lors de cette analyse. Nous donnons ci-dessous une présentation sur deux colonnes. Celle de gauche reprend des parties du texte de Platon, et celle de droite propose une explication en langage plus actuel.

Et les espèces qui viennent de naître par la vertu de notre raisonnement, divisons-les en feu, terre, eau et air.	On peut associer les quatres polyèdres réguliers découverts par cette démarche aux quatres éléments : feu, terre, eau et air.
À la terre attribuons certes la figure cubique. Car la terre est la plus difficile à mouvoir des quatre espèces et c'est de tous les corps le plus tenace. Et il est très nécessaire que ce qui a de telles propriétés ait reçu, en naissant, les bases les plus solides. [...]	Le cube est associé à la terre car c'est le polyèdre régulier le plus stable.
De même en attribuant à l'eau la figure la moins mobile, au feu la plus mobile, et la figure intermédiaire à l'air. Et le corps le plus petit au feu, le plus grand à l'eau, l'intermédiaire à l'air. Et le plus aigu au feu, le second par ce caractère à l'air, et le troisième à l'eau.	On associera le feu au polyèdre respectant le mieux trois critères, ensuite, en deuxième position, l'air et enfin l'eau. On tiendra compte du critère de la mobilité, de celui de la petitesse, et de l'acuité.
Ainsi, entre toutes ces figures, celle qui a les bases les plus petites doit avoir forcément la nature la plus mobile : c'est toujours la plus coupante, la plus aiguë de toutes, et en outre la plus légère, puisqu'elle est composée du plus petit nombre des mêmes parties. Et la seconde doit tenir le second rang en ce qui touche ces mêmes propriétés, et la troisième, le troisième rang.	Le solide qui sera le plus mobile, sera également le plus petit et le plus aigu.
En conséquence, à la fois selon la droite logique et selon la vraisemblance, la figure solide de la pyramide est l'élément et le germe du feu ; la seconde selon l'ordre de la naissance, disons que c'est l'élément de l'air et la troisième, celui de l'eau.	Selon ce principe, le feu est associé au tétraèdre, l'air à l'octaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

Le professeur fait remarquer aux élèves que Platon ne parle ici que des quatres premiers polyèdres réguliers et omet donc le dodécaèdre, mais on y trouve une allusion ailleurs dans le texte.

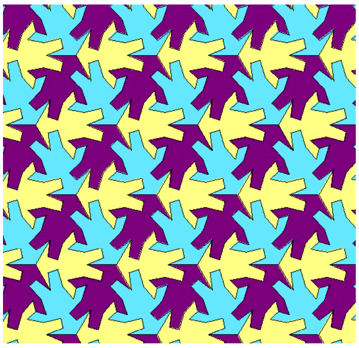
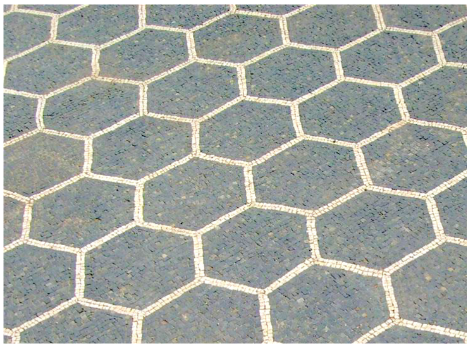
Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.	Le dernier polyèdre est associé au monde. C'est le dodécaèdre.

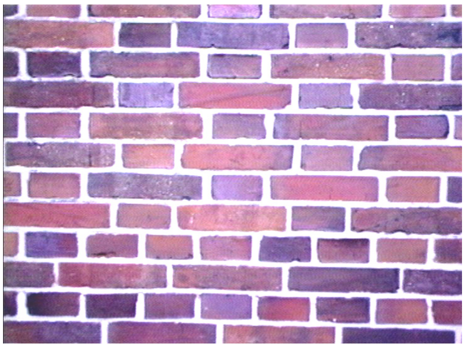
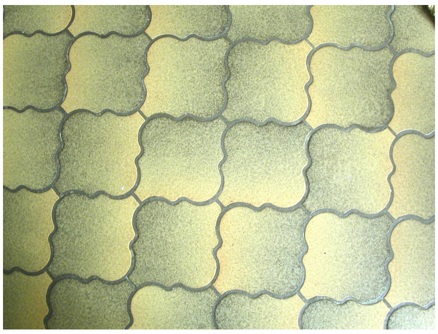
Annexe II

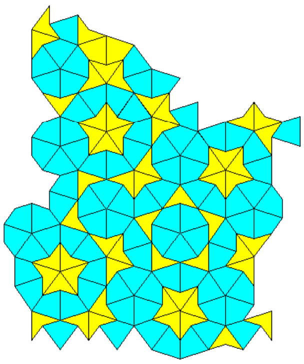
Fiches à photocopier

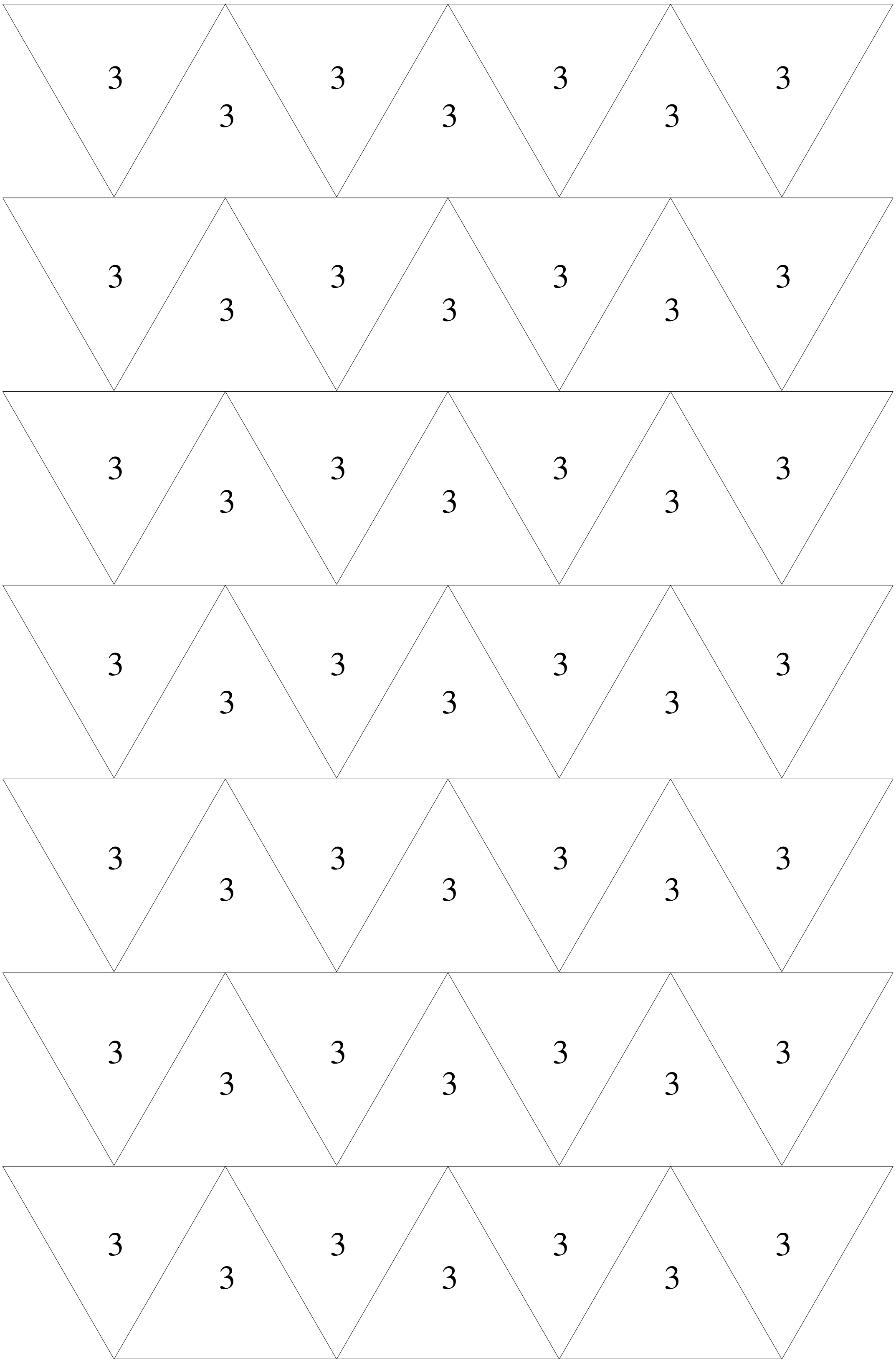
Des photos familières

Quel est le lien entre toutes ces images ? Comment pourrait-on les appeler ? Quelles en sont les caractéristiques communes ?

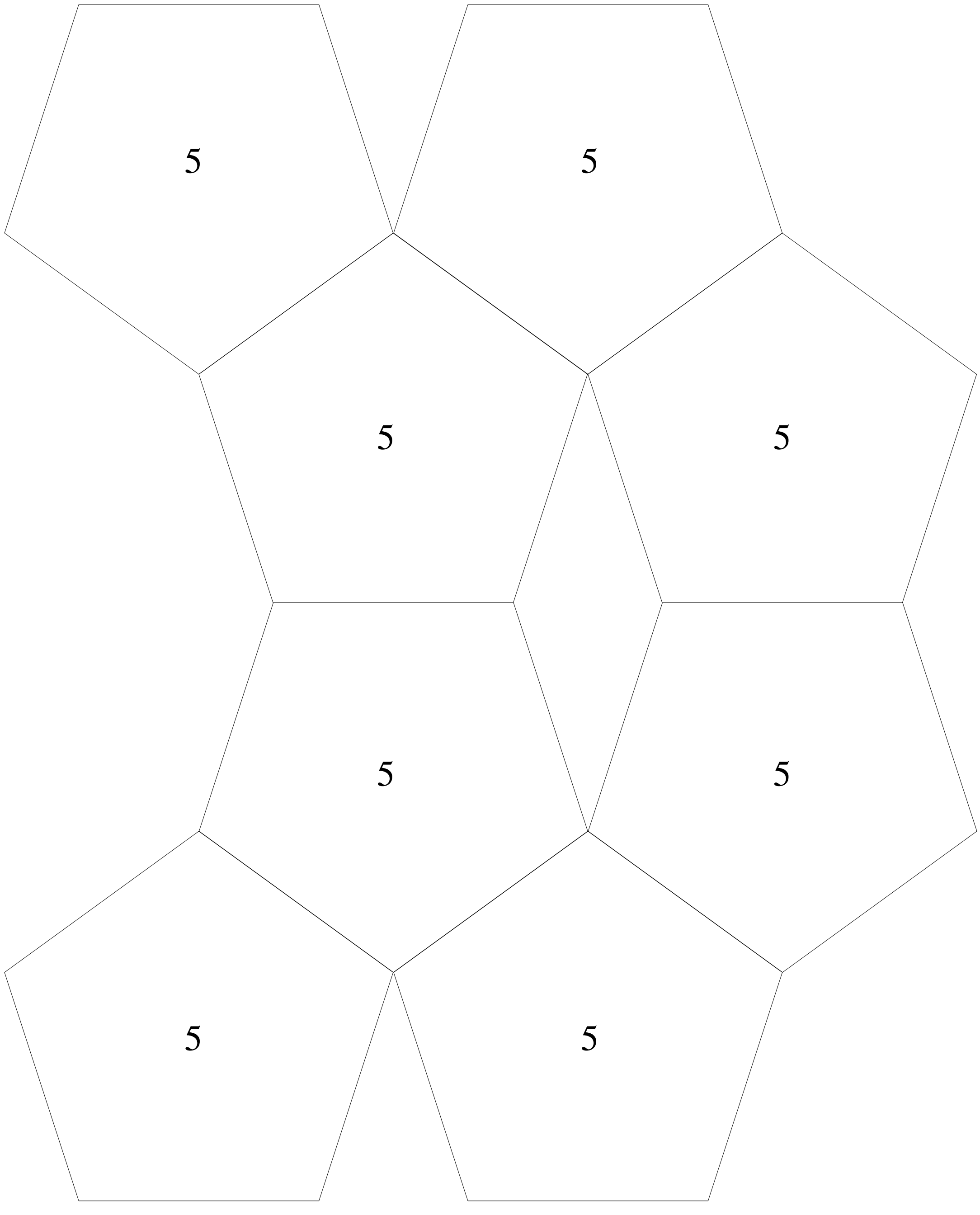



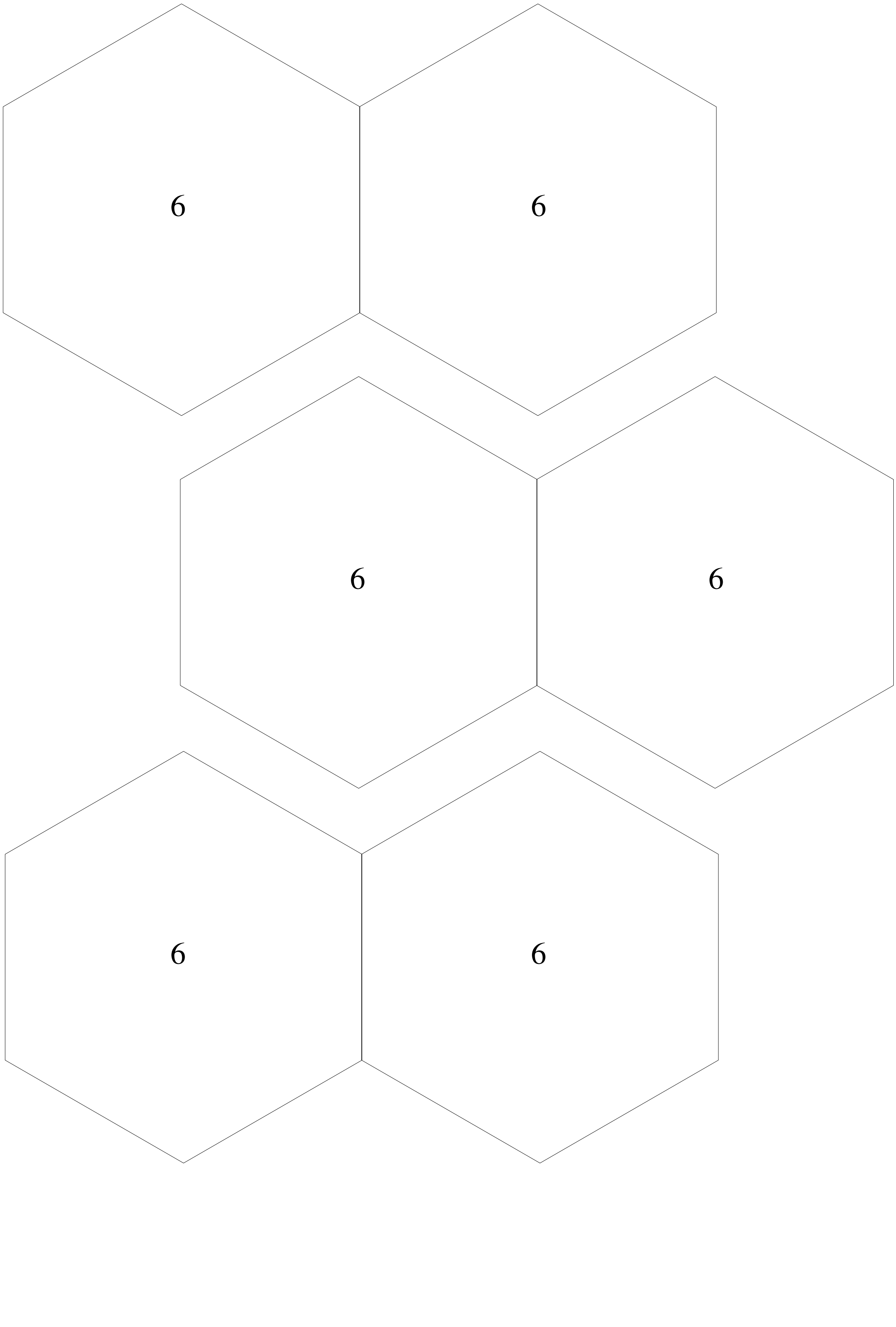



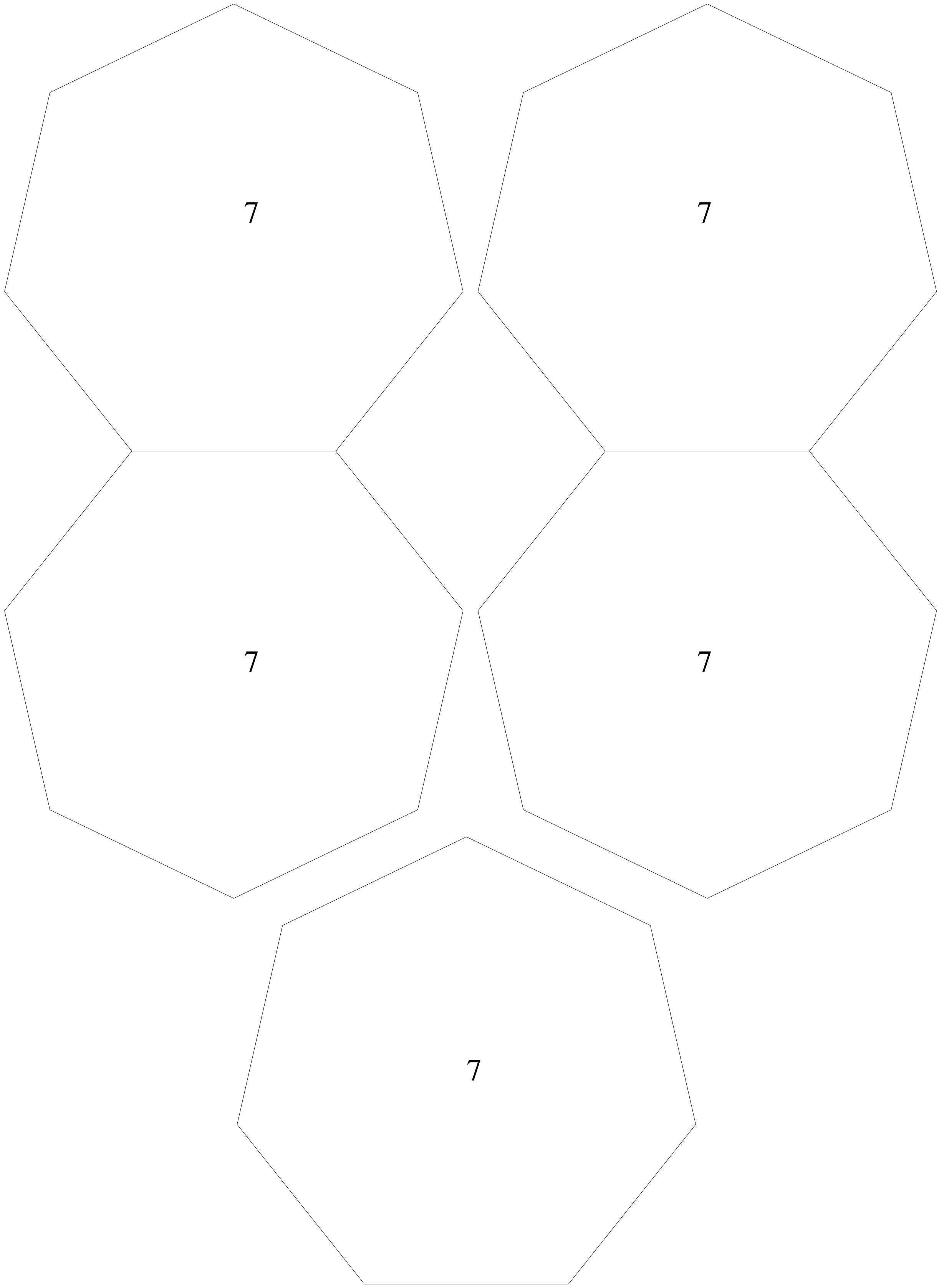



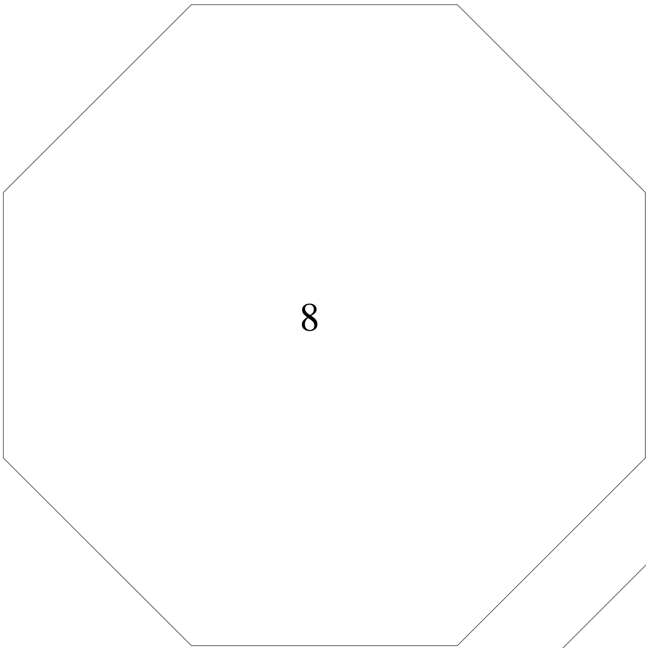


3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3

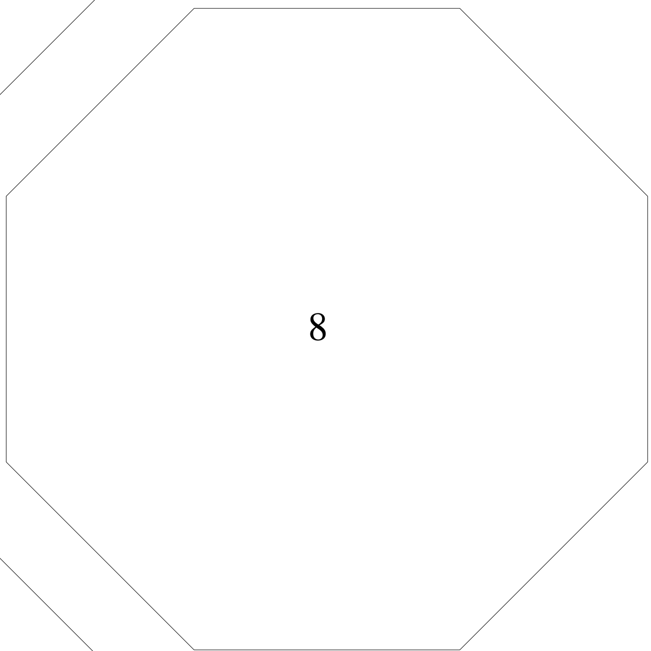
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4

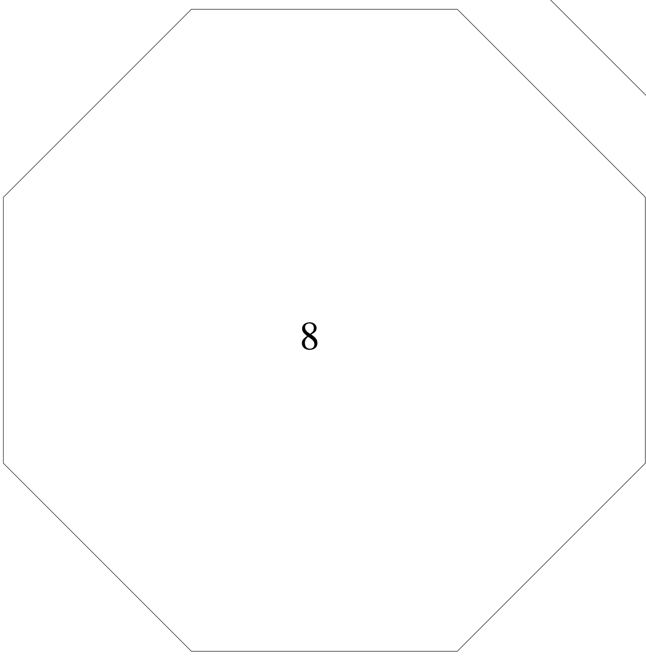

5
5
5
5
5
5
5
5

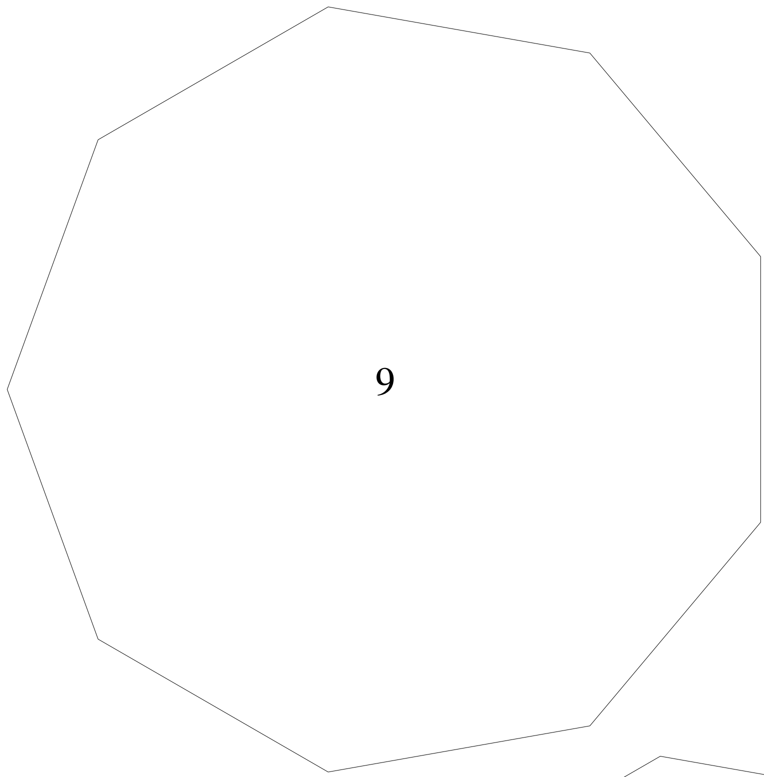

6
6
6
6
6
6

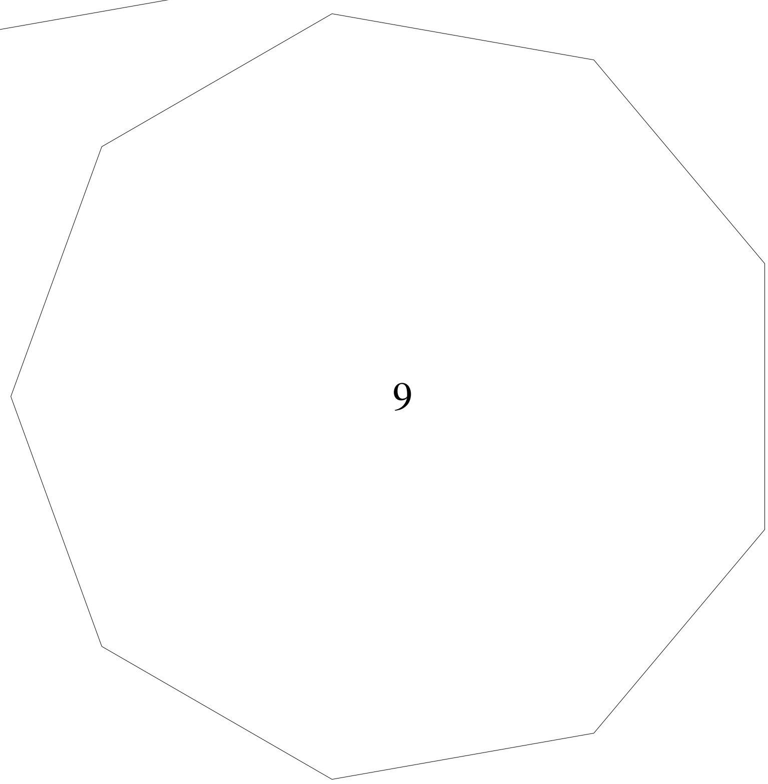

7
7
7
7
7

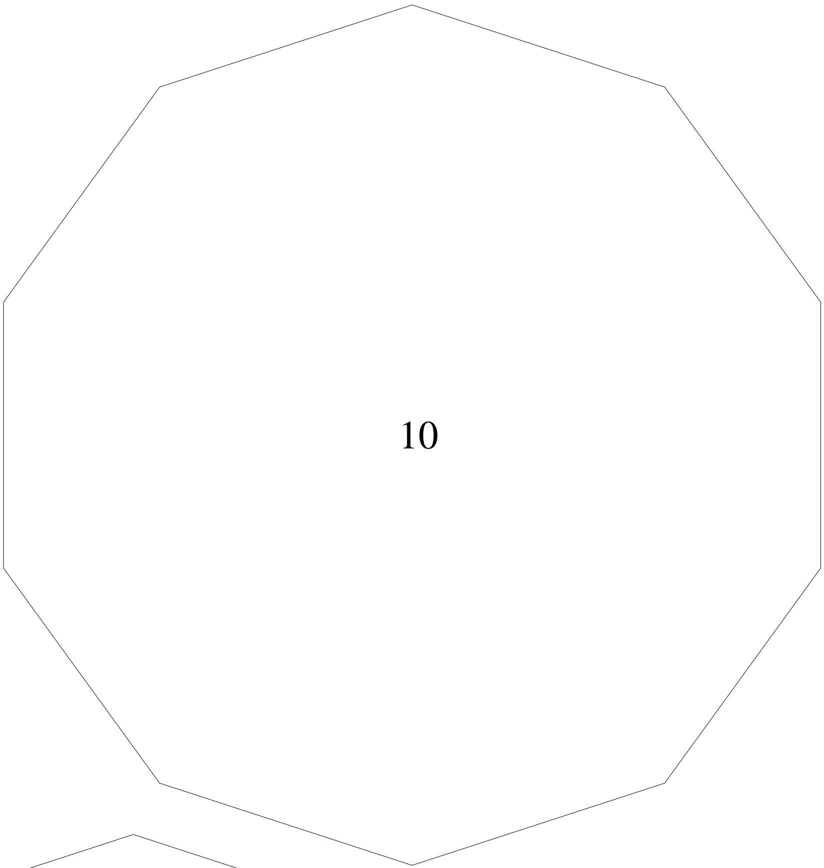

8

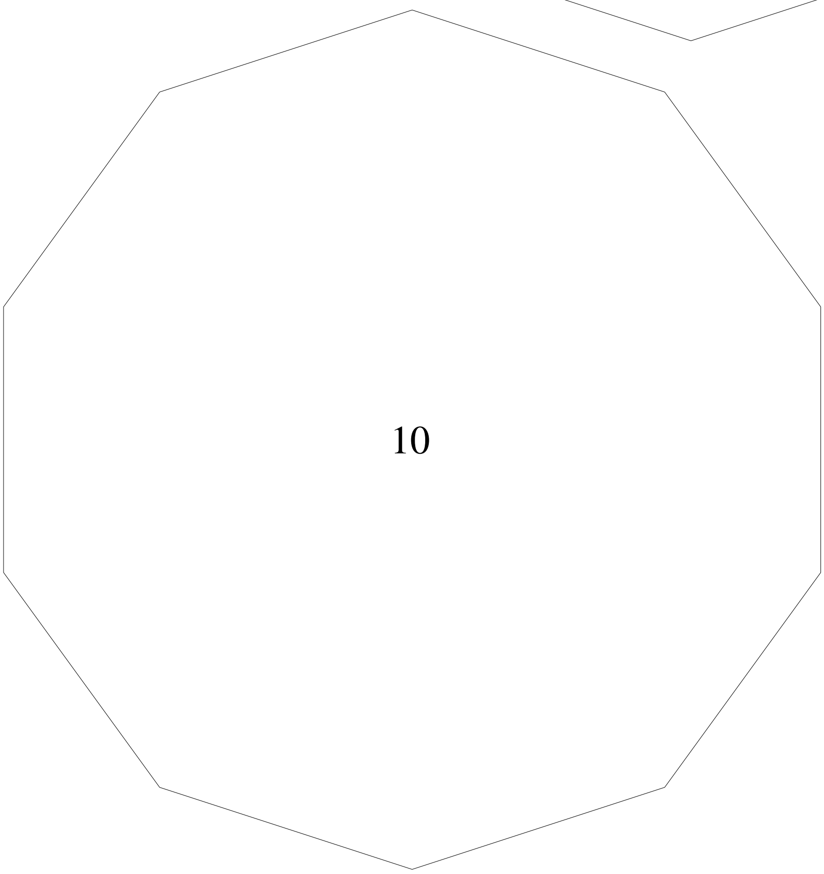

8

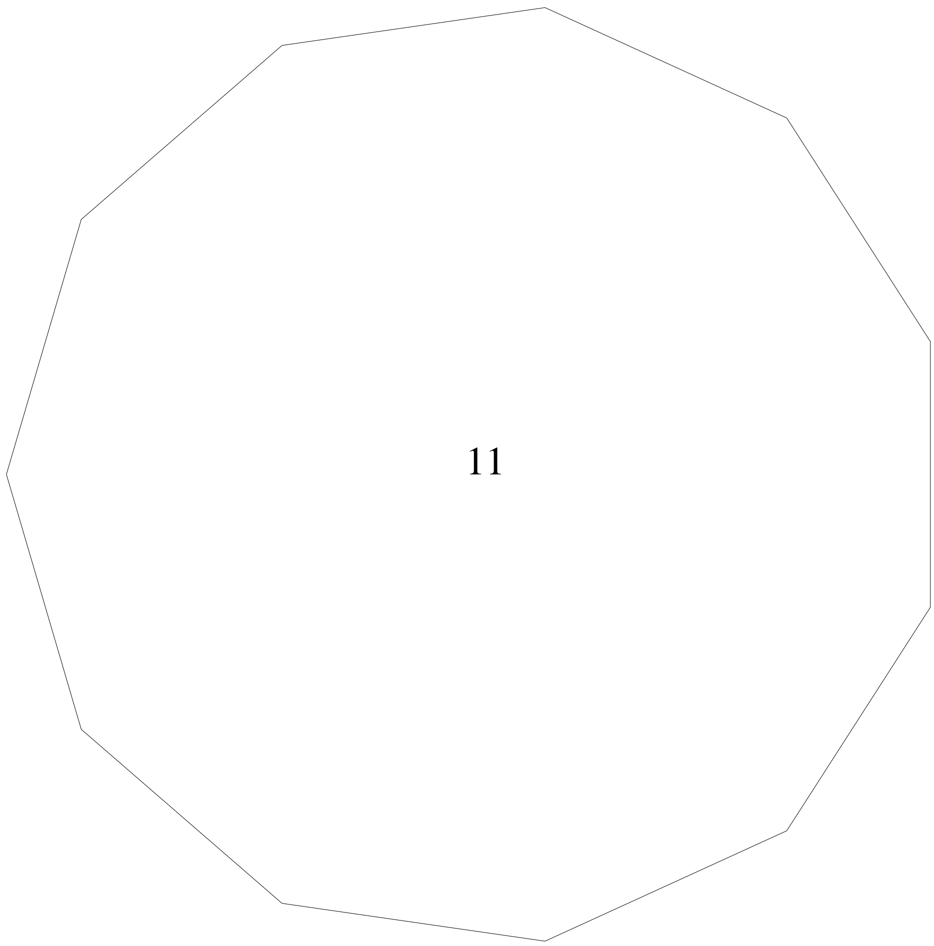

8

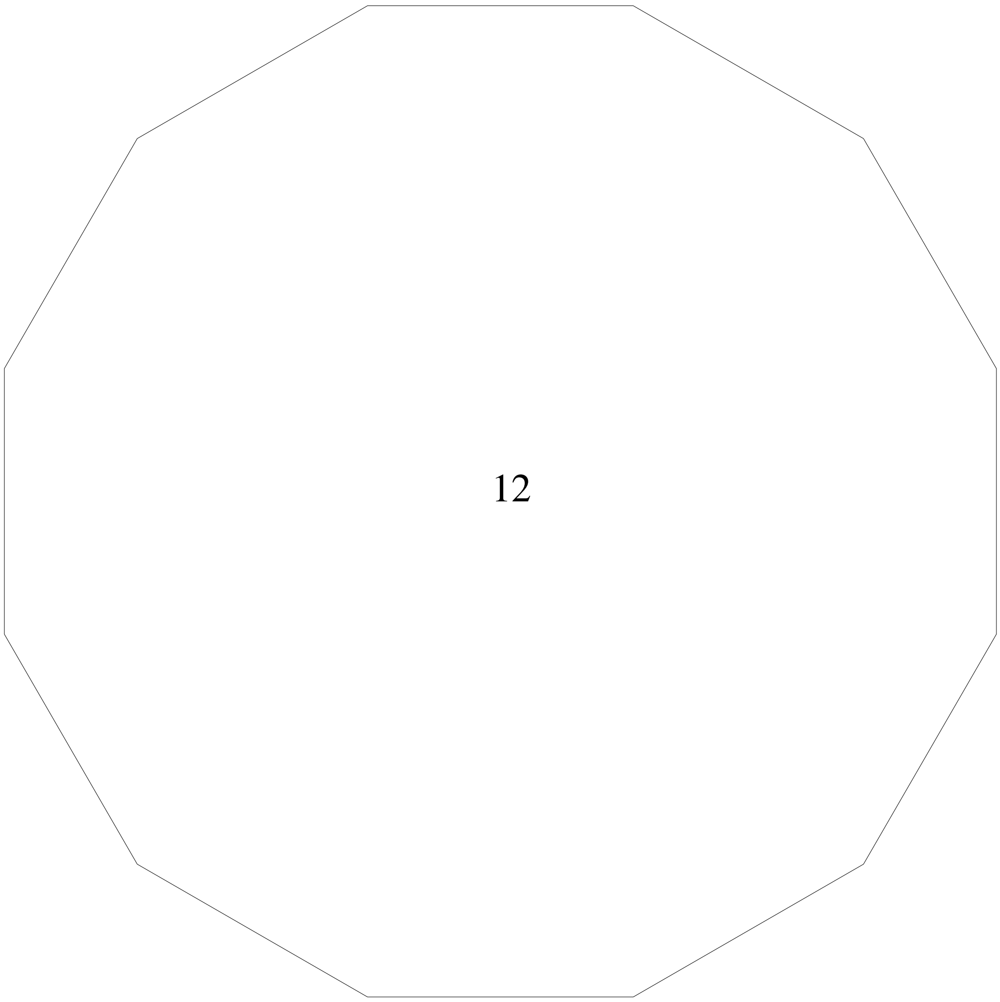

9


9


10

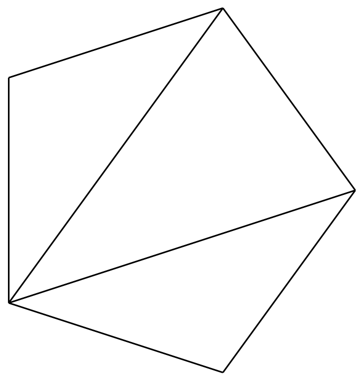

10

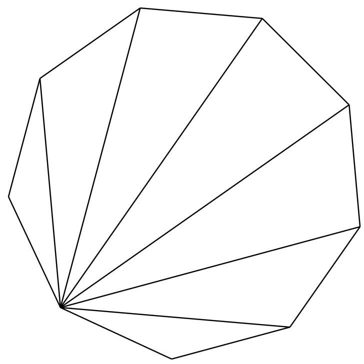

11


12

Formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier (1)

Trouvons ensemble une formule qui permettra de déterminer la valeur de l'angle intérieur de n'importe quel polygone régulier. Aidons-nous d'une décomposition en triangles, illustrée ci-dessous pour le pentagone et l'ennéagone.





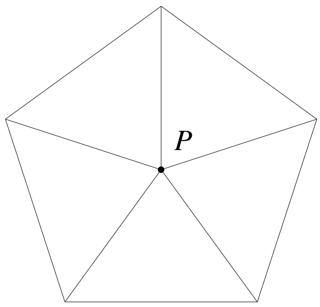
Combien de triangles peut-on ainsi former dans un polygone à n côtés ?

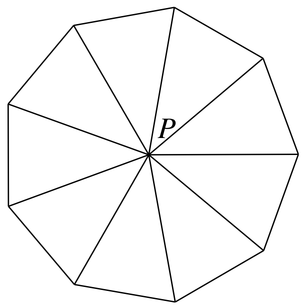
Quel lien existe-t-il entre les angles des triangles et les angles du polygone régulier ?

Quelle est alors la valeur d'un seul angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés ?

Formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier (2)

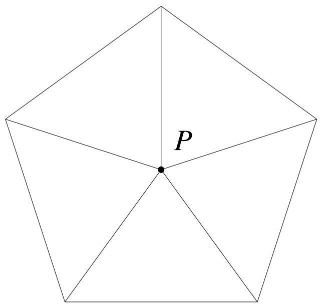
Retrouve la formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés, à partir de cette nouvelle décomposition.

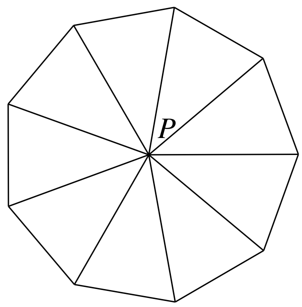




Formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier (3)

Retrouve la formule de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés, à partir de cette nouvelle décomposition.





Combien de triangles peut-on ainsi former dans un polygone à n côtés ?

Que vaut la somme des angles des triangles ? Correspond-elle encore à la somme des angles intérieurs du polygone ?

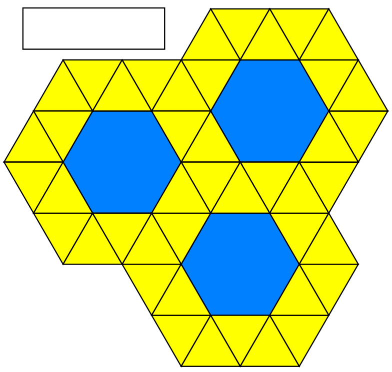
Quelle est alors la valeur d'un seul angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés ?

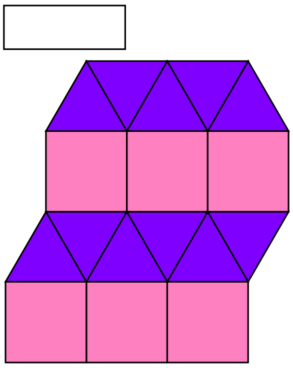
Les pavages semi-réguliers (1)

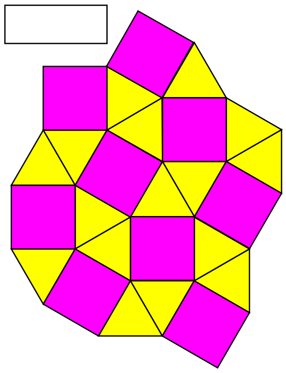
Complète le tableau suivant afin de répertorier les pavages semi-réguliers.

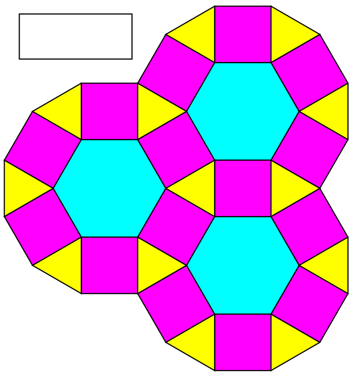
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Codage
α											

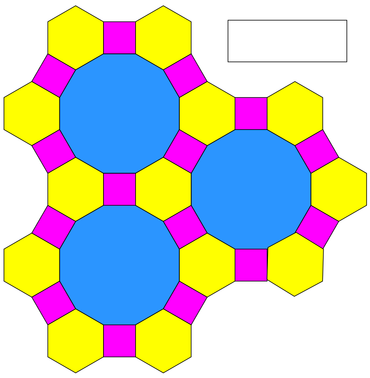
Les pavages semi-réguliers (2)

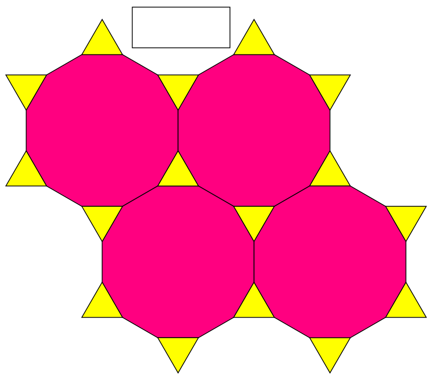


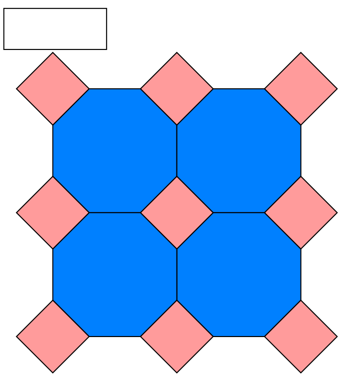


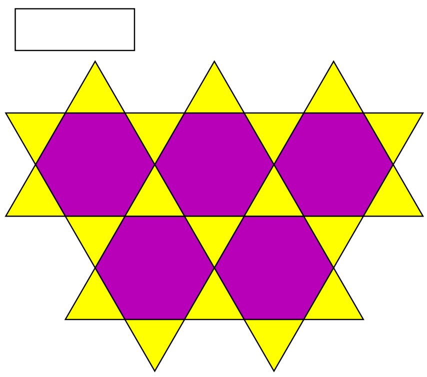




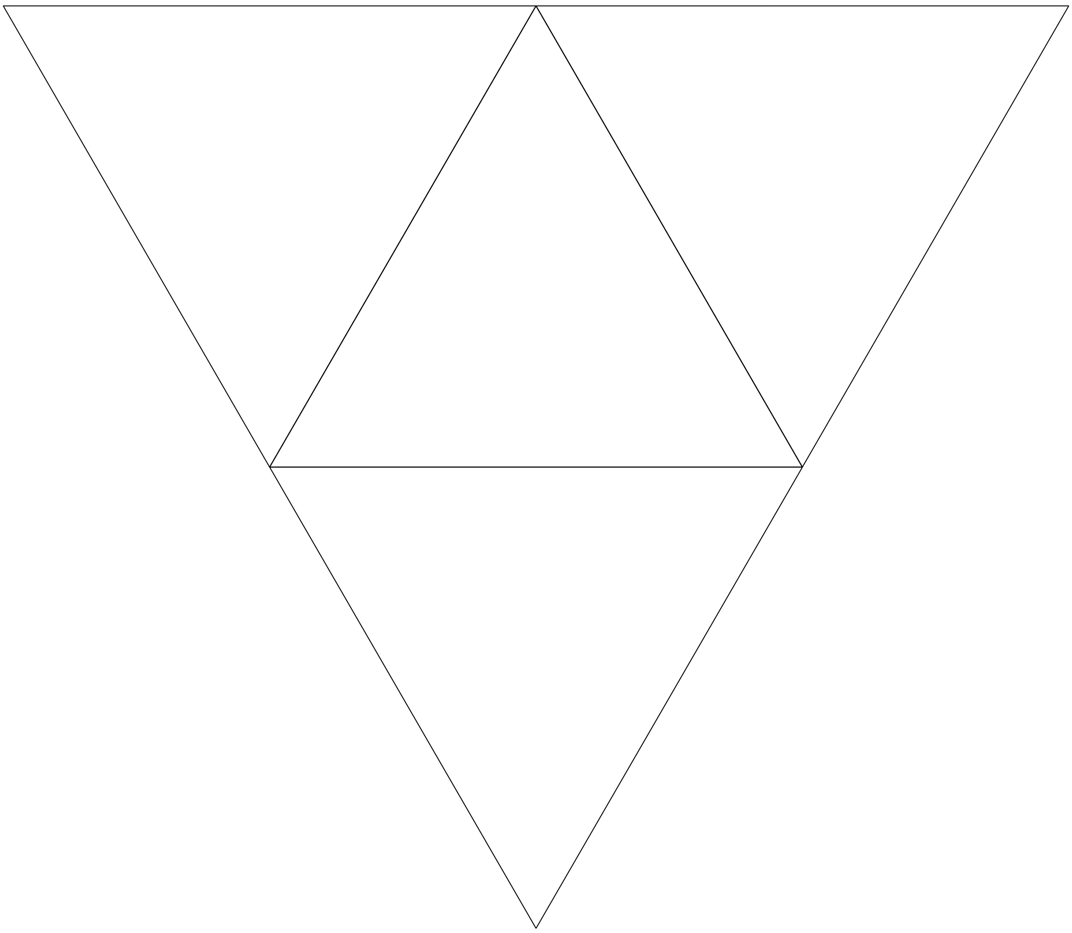




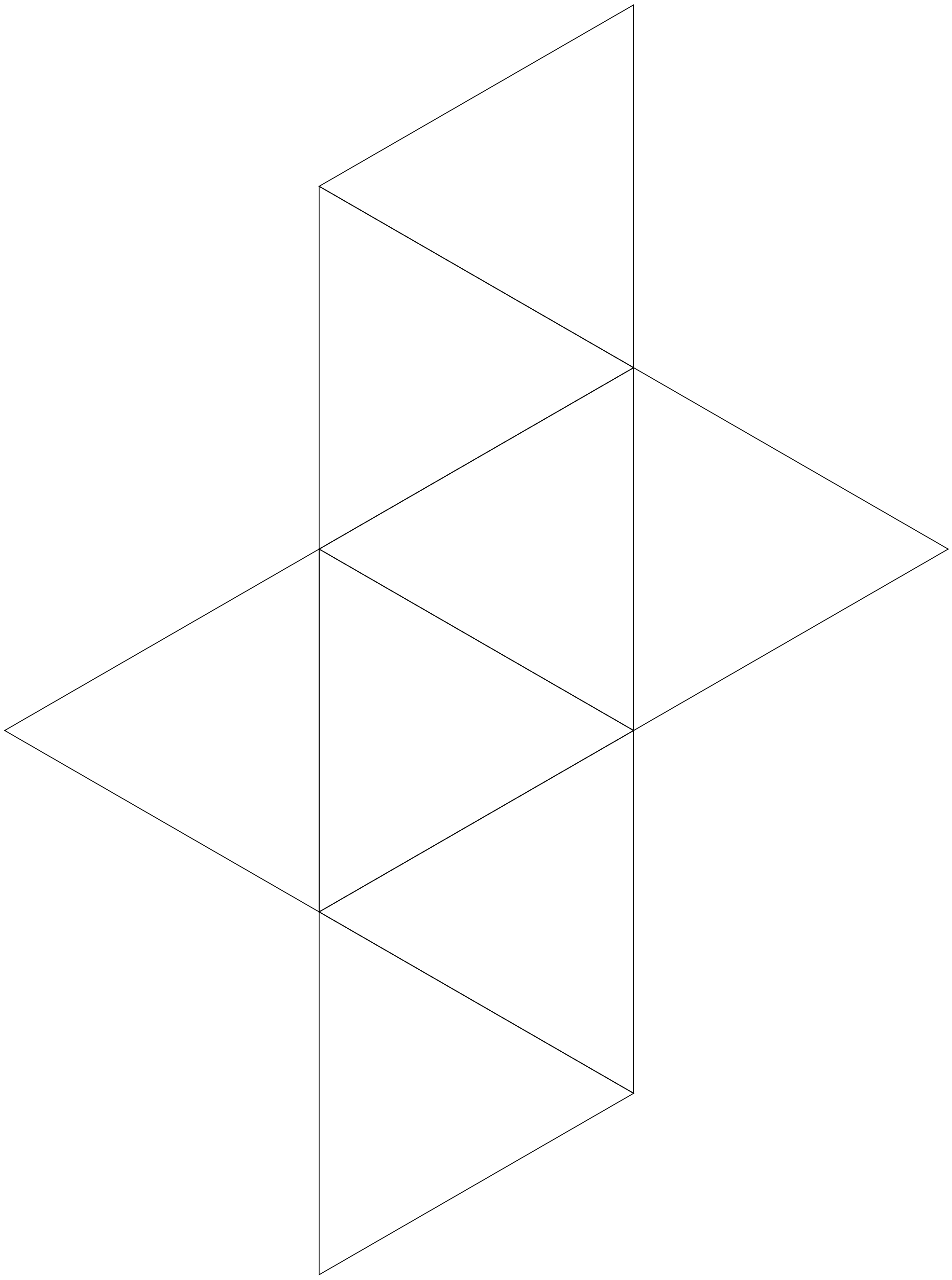




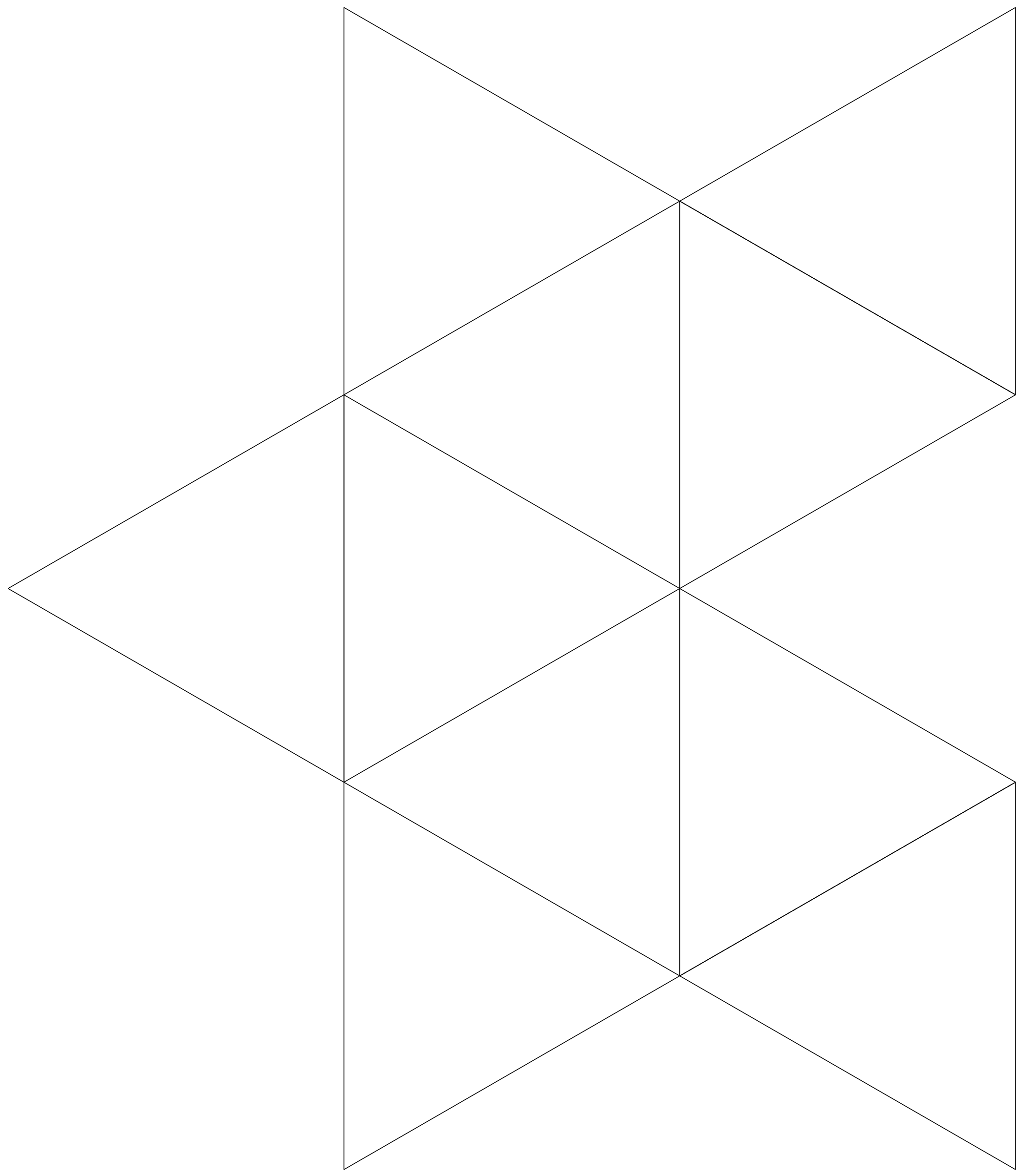
Développement du tétraèdre régulier



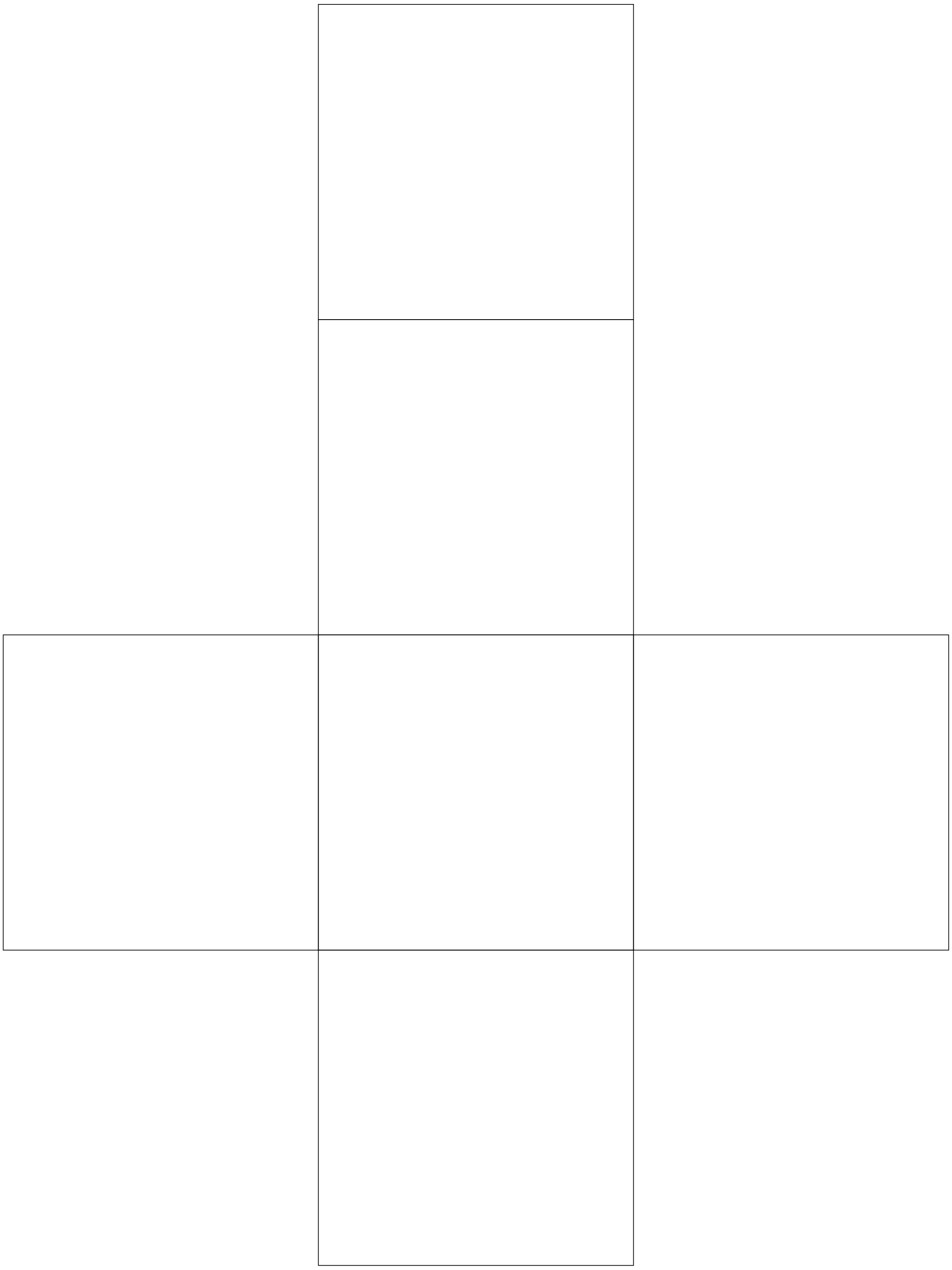
Développement de l'octaèdre régulier



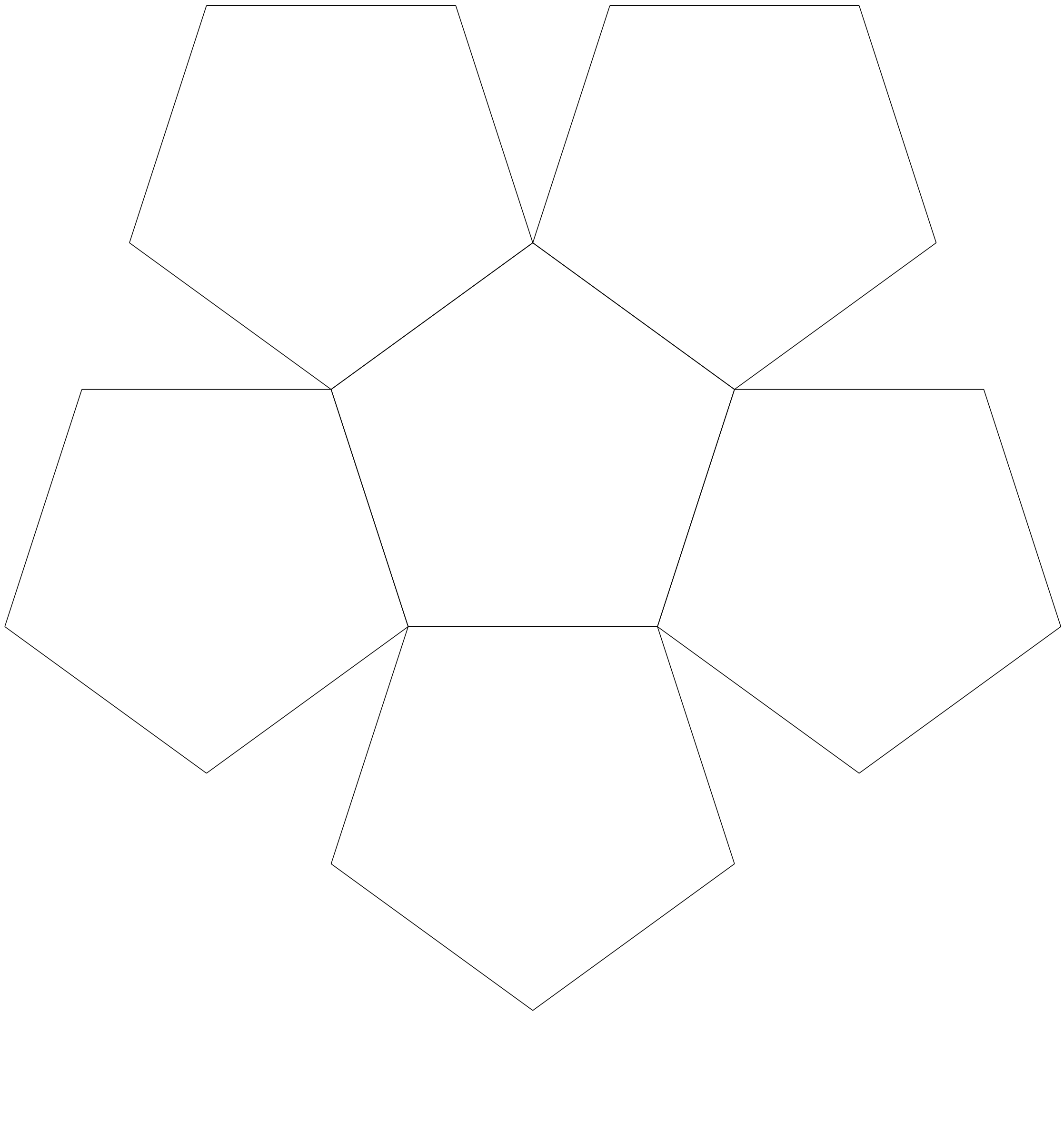
Développement du demi-icosaèdre régulier



Développement du cube



Développement du demi-dodécaèdre régulier



Le *Timée* de Platon

Lis attentivement le texte ci-dessous. Quelle association le philosophe fait-il entre les quatre premières espèces de polyèdres et les quatre éléments ?

Et les espèces qui viennent de naître par la vertu de notre raisonnement, divisons-les en feu, terre, eau et air. À la terre attribuons certes la figure cubique. Car la terre est la plus difficile à mouvoir des quatre espèces et c'est de tous les corps le plus tenace. Et il est très nécessaire que ce qui a de telles propriétés ait reçu, en naissant, les bases les plus solides.

[...]

De même en attribuant à l'eau la figure la moins mobile, au feu la plus mobile, et la figure intermédiaire à l'air. Et le corps le plus petit au feu, le plus grand à l'eau, l'intermédiaire à l'air. Et le plus aigu au feu, le second par ce caractère à l'air, et le troisième à l'eau. Ainsi, entre toutes ces figures, celle qui a les bases les plus petites doit avoir forcément la nature la plus mobile : c'est toujours la plus coupante, la plus aiguë de toutes, et en outre la plus légère, puisqu'elle est composée du plus petit nombre des mêmes parties. Et la seconde doit tenir le second rang en ce qui touche ces mêmes propriétés, et la troisième, le troisième rang. En conséquence, à la fois selon la droite logique et selon la vraisemblance, la figure solide de la pyramide est l'élément et le germe du feu ; la seconde selon l'ordre de la naissance, disons que c'est l'élément de l'air et la troisième, celui de l'eau.

Ailleurs dans le texte on trouve une allusion au dodécaèdre.

Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.