Chapitre 11

Frises ornementales et groupes

« Les élèves doivent avoir toutes les occasions de se familiariser avec un matériel géométrique riche, d'acquérir une connaissance sensorielle multiple : visuelle, tactile, rythmique. »

P. Libois

Préambule

Les frises et les pavages font partie de notre environnement culturel. On en trouve dans toutes les civilisations. De tous temps, les hommes ont mis beaucoup d'imagination dans la création de motifs et la structuration des surfaces au moyen de figures géométriques qui se répètent ou s'organisent suivant un schéma régulier. Cette recherche procure à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. Pensons aux merveilleux pavages de l'Alhambra à Grenade, aux bandes décorées qui ornent les bords des plats et des vases en céramique un peu partout dans le monde. On trouve des frises dans les galons qui ornent les vêtements, les serviettes de bain, les tentures. Les tissus, les tapis, les papiers peints et les carrelages fournissent, quant à eux, des exemples de surfaces structurées.

Ces motifs géométriques qui se répètent peuvent être soumis à une analyse mathématique qui facilite leur compréhension. De nombreux ouvriers et artisans sont amenés à décoder les symétries des motifs dans l'exercice de leur profession. Que ce soit pour poser un papier peint, recouvrir un fauteuil, exécuter des garnitures de fenêtre, poser un carrelage, ciseler ou peindre une frise, une bonne analyse des structures des dessins est une aide précieuse à la réalisation d'un travail soigné.

L'étude des frises offre des intérêts variés. Pour les élèves des sections professionnelles, le concept est facile d'accès. L'apprentissage aiguise le sens de l'observation tout en présentant un attrait artistique ; la motivation est directement liée au travail dans les ateliers. Les frises se prêtent à la découverte de quelques propriétés de la composition des isométries et à un travail de classification. Pour les élèves de l'enseignement général, elles donnent accès à la structure de groupe, dans un contexte riche de sens.

C'est dans cette optique que nous proposons une séquence d'apprentissage qui peut être utilisée à deux niveaux.

Il peut s'agir d'abord d'une suite d'activités de découverte destinée aux élèves du premier degré des humanités générales et technologiques, ou à des élèves de l'enseignement professionnel. Elle est conçue pour amener ces élèves à reconnaître des translations, des symétries axiales et des symétries centrales (rotations d'un demi-tour) et leur fournir des outils pour analyser les structures des dessins géométriques. Dans ce cas il n'y a pas de prérequis, mais le travail devra être complété par une synthèse reprenant les caractéristiques de ces isométries, ainsi que les étapes de la construction de l'image d'une figure par chacune d'elles.

La séquence d'apprentissage débute par une activité d'observation et de création (section 1) qui met en place une série d'intuitions. Tout en produisant des frises à partir d'un matériel simple, les élèves sont amenés à associer un mouvement à l'isométrie du plan correspondante, à observer et identifier l'image d'une figure par une translation, une symétrie et une rotation. L'activité se poursuit par la découverte des types de frises (section 2) à partir des isométries qui les conservent globalement et se termine par l'élaboration d'une méthode de classement (section 3).

On peut aussi proposer ces activités à des élèves du second degré de l'enseignement général, qui ont déjà rencontré les isométries. Dans ce cas, notre but est de plonger les élèves dans le contexte des isométries du plan, par le biais d'une approche intuitive, avec l'objectif de les amener à découvrir la structure de groupe à partir des groupes de frises (section 4).

Il nous semble qu'il y a deux écueils à éviter. Le premier est de se limiter à des observations et à des productions artisanales, le second de se placer d'emblée dans un contexte théorique quelque peu rebutant. Nous tentons, dans cette suite d'activités, de proposer une démarche qui, à partir de manipulations très simples, accessibles à tous, amène progressivement les élèves à organiser des acquis dans une construction théorique.

1 Créer des frises

De quoi s'agit-il ?	Observer et prolonger des dessins de frises. En imaginer et en produire d'autres à partir d'un motif initial.
Enjeux	Aborder les translations, les symétries axiales, les rotations et les symétries centrales. Associer un mouvement à l'isométrie du plan correspondante. Observer l'image d'une figure par une isométrie et la reconnaître. ***Compétences transversales*** *Laisser s'exprimer son imagination dans des pratiques créatives.* *Agir et interagir sur des matériels divers (figures).* ***Compétences disciplinaires*** *Reconnaître, comparer des figures, les différencier et les classer sur base des éléments de symétrie.* *Dans un contexte de reproduction de dessins, relever la présence de régularités. Reconnaître et caractériser une translation, une symétrie axiale et une rotation.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Des frises en tous genres. On en trouve dans les livres d'art, les magazines de décoration ou de mode.

Les fiches 39 à 46, en annexe aux pages 360 à 367.

Des photocopies sur transparent des fiches 39 et 41.

Du papier quadrillé et du matériel de dessin, des épingles.

Éventuellement un logiciel de dessin comme *Apprenti Géomètre* ou *Cabri-Géomètre*.

Prérequis

Les translations, les symétries, les rotations de figures dans le plan.

Si l'activité vise à la découverte des isométries, celles-ci seront définies au fur et à mesure.

1.1 Frises et motifs

Comment s'y prendre ?

Le professeur montre aux élèves quelques frises pour expliquer de quoi il s'agit, frises de papier peint, galons de tissu, photos, illustrations extraites d'un livre d'art...

Cette première prise de contact avec les frises devrait mettre l'accent sur l'aspect multiculturel, mais aussi l'aspect esthétique de ces bandes décorées. Bien sûr, des frises choisies exclusivement pour leurs qualités artistiques ne sont pas toujours très faciles à analyser, mais il nous semble important de valoriser d'abord le contenu esthétique.

Par exemple, l'art hispano-musulman qui s'est développé en Andalousie à partir du IX^{e} siècle s'est largement inspiré de motifs géométriques. Les deux frises superposées de la figure 1 ornent les murs de l'Alcazar de Séville, celle de la figure 2 se trouve au palais de l'Alhambra de Grenade.

Fig. 1

Fig. 2

Une première phase d'observation révèle sans trop de peine qu'une frise est un décor sur bande et que ce décor est obtenu par reproduction d'un « motif de base » qui se répète régulièrement.

Pour illustrer ce que nous désignons par *motif de base*, reprenons l'une des frises de Séville (figure 3), et demandons aux élèves d'isoler un motif qui se répète tout au long de la bande.

Fig. 3

Les élèves désigneront sans doute le motif noir sur fond blanc (figure 4), ou le motif blanc sur fond noir (figure 5). Nous remarquons ainsi que le motif de base n'est pas unique ; on pourrait en imaginer une infinité d'autres, comme celui de la figure 6, par exemple. Les élèves s'en tiendront probablement aux deux premiers, il n'est certainement pas opportun d'attirer leur attention sur les autres possibilités s'ils ne les évoquent pas eux-mêmes.

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Le motif de base est parfois plus compliqué que ce qu'on perçoit à première vue. Ainsi, pour la frise de l'Alhambra, si on observe attentivement les dessins à l'intérieur d'un motif en zig-zag, on constate qu'il y en a de trois types, qui se répètent régulièrement et dans le même ordre. Il en faut donc trois pour constituer un motif de base, comme dans les figures 7, 8 et 9.

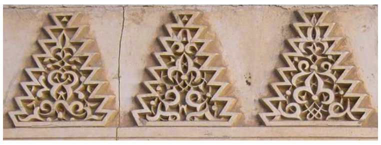


Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

C'est l'envie de mieux comprendre les frises pour les recopier ou en construire d'autres qui motivera le recours à une analyse mathématique de leur structure. D'autres frises, plus simples, plus faciles à décoder sont alors proposées pour faciliter ce travail d'analyse.

1.2 D'une goutte à l'autre

Le vocabulaire utilisé au début de l'activité est proche du langage quotidien, les termes spécifiques seront précisés en cours de travail au fur et à mesure des besoins.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève reçoit la fiche 39, comportant des frises de gouttes comme celle de la figure 10, ainsi qu'une photocopie de cette fiche sur transparent. La fiche et le transparent sont découpés en bandelettes ne comportant qu'une seule frise. Dans un premier temps, les élèves travaillent avec une seule bandelette de chaque type (papier et transparent). On leur demande de déposer la frise transparente sur la frise de papier de telle sorte que les deux frises de huit gouttes se superposent exactement.

Fig. 10

À partir de la position où la frise transparente est superposée exactement à la frise de papier, quels mouvements du transparent amènent une goutte de celui-ci sur une goutte de la frise de papier ?

On voit que si on fait glisser le transparent dans la direction de la bande, vers la gauche ou vers la droite, il est possible de faire coïncider une goutte du transparent avec une goutte de la frise de papier. Par exemple le mouvement vers la droite, représenté par la flèche qui détermine la direction, le sens et la longueur du déplacement, amène la première goutte du transparent sur la deuxième goutte de la feuille. Un tel déplacement est une *translation* déterminée par un *vecteur* (la flèche).

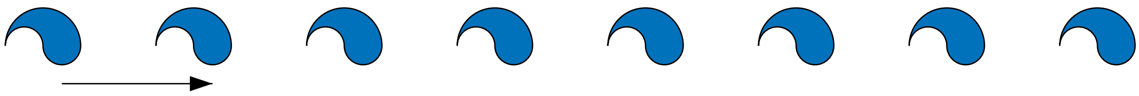


Fig. 11

D'autres translations répondent à la question. La figure 12 montre les vecteurs associés à quelques-unes d'entre elles.

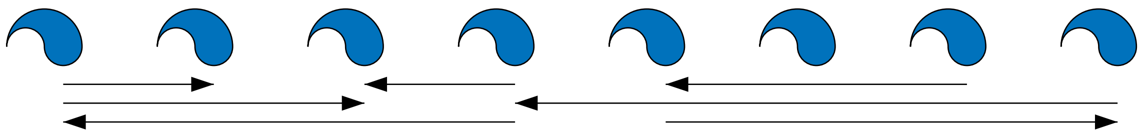


Fig. 12

Après avoir exécuté l'un ou l'autre de ces mouvements de translation, les élèves ont sous les yeux une frise de neuf, dix, onze, ... ou quinze gouttes. On convient de dire qu'il s'agit de la même frise, qui a été prolongée.

La translation qui amène une goutte sur la suivante, représentée à la figure 11, est la translation la plus courte qui amène une goutte de la frise sur une autre. Elle permet, si on la répète, de prolonger la frise vers la droite, chaque motif ajouté étant obtenu par translation du précédent. La translation de même longueur en sens inverse prolonge la frise vers la gauche.

L'activité se poursuit par des exercices où la consigne donnée aux élèves est de prolonger des frises amorcées, sur du papier quadrillé. Il conviendra de choisir des motifs de base qui peuvent être reproduits facilement à main levée. Des exemples sont proposés en annexe (fiches 43 à 46). Le même type d'exercices peut être proposé sur du papier pointé triangulaire, ou encore exécuté au moyen d'un logiciel de dessin.

Ce travail est destiné à amener progressivement les élèves à la notion de figure illimitée. Dans un premier temps, ils diront qu'une frise peut être prolongée aussi loin que l'on veut, vers la droite et vers la gauche et percevront sans doute l'analogie à cet égard avec l'ensemble des nombres entiers. L'étude des frises offre donc l'opportunité d'aborder la notion d'infini dans un contexte géométrique, en plus de l'approche numérique.

Il importe de proposer des frises à prolonger dans les deux sens (figure 13). Pour chacune d'elles, on demande aux élèves de déterminer un motif de base et la translation la plus courte qui permet de construire la frise.

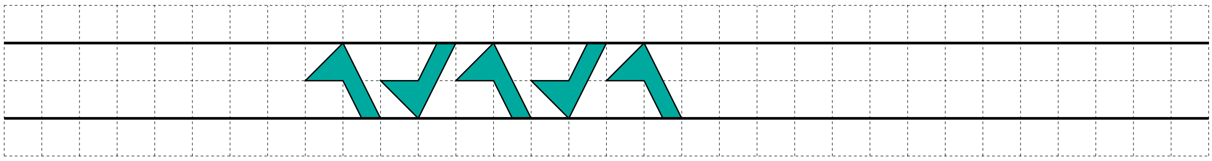


Fig. 13

Les figures 14 et 15 illustrent deux façons de percevoir un motif de base et les translations qui permettent de prolonger la frise dans les deux sens.

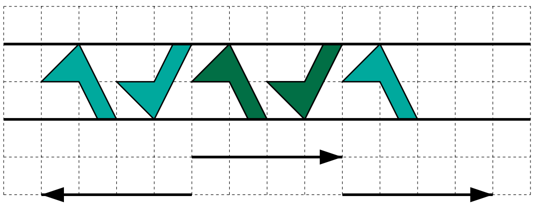


Fig. 14

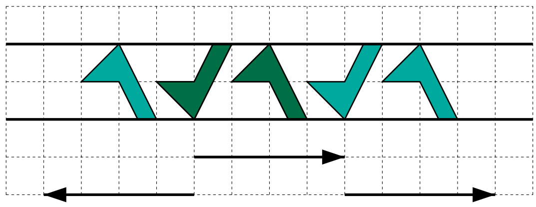


Fig. 15

Cette démarche conduit à l'élaboration progressive de définitions intuitives comme celles-ci.

*Une **frise** est une bande décorée dans laquelle un motif se répète régulièrement de telle sorte que chaque motif est l'image du précédent par une translation, toujours la même. Un motif qui permet de construire la frise de cette manière par la translation la plus courte, est appelé **motif de base** de la frise.*

1.3 La goutte dans tous ses états

Comment s'y prendre ?

En déplaçant le transparent par d'autres translations, créer de nouvelles frises et déterminer un motif de base pour chacune d'elles.

Des translations dans la direction de la bande produiront des frises comme celles des figures 16 et 17, par exemple.

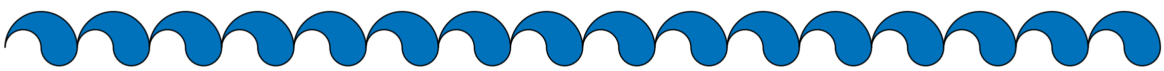


Fig. 16

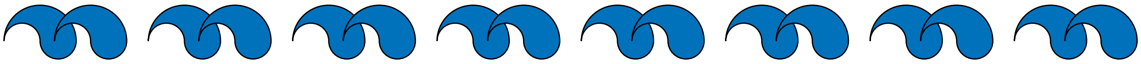


Fig. 17

On voit que les frises des figures 10 et 16 ont un même motif de base, la goutte de la figure 18. Elles diffèrent par la longueur de la translation qui permet de passer d'une goutte à la suivante. La frise de la figure 17 a un motif de base plus complexe, formé de deux gouttes partiellement superposées (figure 19).

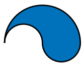


Fig. 18

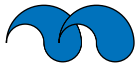


Fig. 19

Quant à la frise de la figure 20, elle est obtenue par la translation du transparent dans une direction autre que celle de la bande initiale.

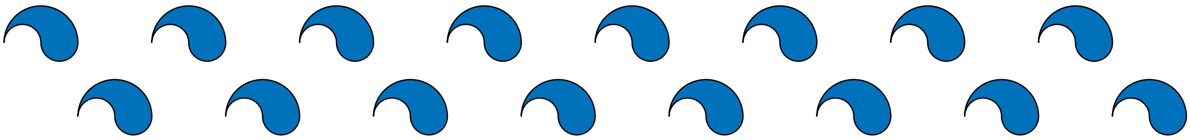


Fig. 20

Pour cette dernière frise, les élèves s'en tiendront probablement aux motifs de base formés de deux gouttes décalées, illustrés par les figures 21 et 22, mais on pourrait en imaginer d'autres, comme celui de la figure 23, par exemple.

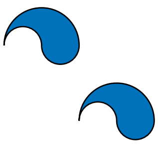


Fig. 21

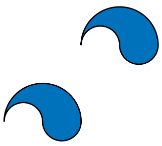


Fig. 22

Fig. 23

À partir de la frise de la figure 10 et de sa copie sur transparent, et en n'utilisant que des translations, nous avons fabriqué d'autres frises dont le *motif de base* est plus complexe, composé de plusieurs gouttes (deux dans les exemples proposés jusqu'ici).

La suite de l'activité a pour but d'explorer cette possibilité à partir d'autres mouvements des bandelettes de transparent.

Le professeur montre les deux frises ci-dessous.

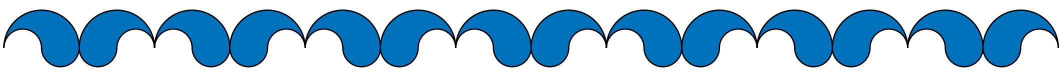


Fig. 24

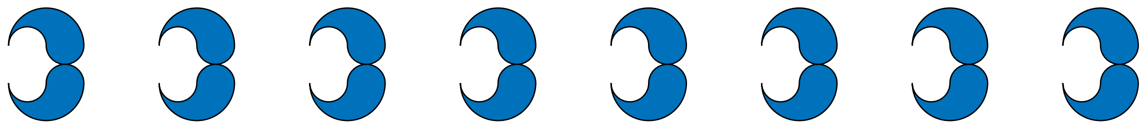


Fig. 25

> Isoler un motif de base pour chacune des frises des figures 24 et 25.
> Reproduire ces deux frises à l'aide des frises de papier et des bandelettes de transparent.
> En imaginer d'autres et, pour chacune d'elles, identifier un motif de base.
> Décrire à chaque fois le mouvement qui a été appliqué au(x) transparent(s) pour obtenir le résultat.

Retenons les motifs des figures 26 ou 27 pour la première de ces deux frises, et celui de la figure 28 pour la seconde. Chacun de ces motifs est composé de deux gouttes *symétriques*.

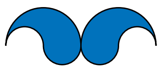


Fig. 26

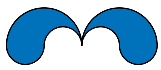


Fig. 27

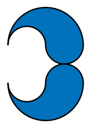


Fig. 28

Il est assez clair que ces deux frises n'ont pu être obtenues par une translation de la frise transparente. On y voit apparaître des gouttes « dans l'autre sens », qui ne sont pas superposables aux gouttes de départ par simple glissement. Cette observation amène l'idée de retourner le transparent.

Le professeur conseille alors aux élèves de disposer toutes les bandelettes transparentes de manière à pouvoir les superposer aux frises de la fiche 39, puis de coller des pastilles d'une même couleur sur la face qui se trouve alors au-dessus, et enfin de coller des pastilles d'une autre couleur sur l'autre face. Ces pastilles serviront de témoin pour indiquer si la bandelette transparente a été retournée ou non lors des manipulations.

Lorsque la frise est déposée dans la position représentée à la figure 29, convenons d'appeler la direction de la bande de papier *direction horizontale*, et la direction perpendiculaire dans le plan de la feuille *direction verticale*.

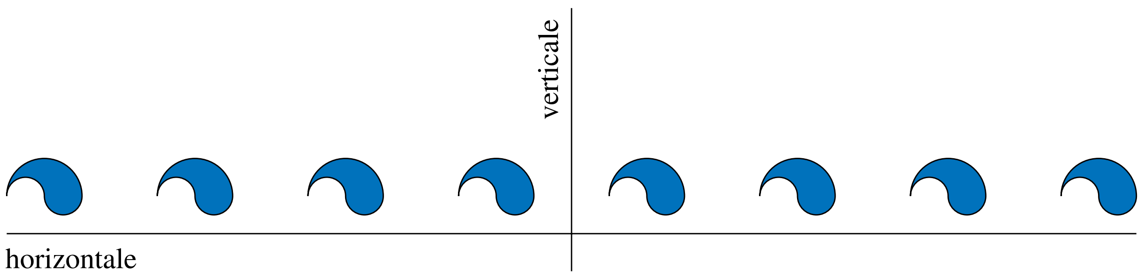


Fig. 29

Il semble bien que la frise de la figure 24 peut être obtenue en intercalant entre les gouttes de la frise initiale des gouttes « retournées ». Les élèves retournent le transparent, puis le déposent sur la frise de papier, en ajustant sa position, pour composer le dessin demandé. S'ils procèdent par essais et erreurs, c'est la couleur de la pastille témoin qui leur indiquera que le transparent a été retourné. Il leur restera alors à associer au mouvement de retournement l'isométrie qui lui correspond : dans ce cas, une *symétrie d'axe vertical.*

Le motif de base de la frise de la figure 25 est lui aussi composé de deux gouttes non superposables par translation. Cette frise est obtenue en retournant le transparent dans un mouvement qui correspond à une *symétrie d'axe horizontal*, mais suivant la position de cet axe, on peut obtenir quelques variantes (figures 30 et 31 par exemple).

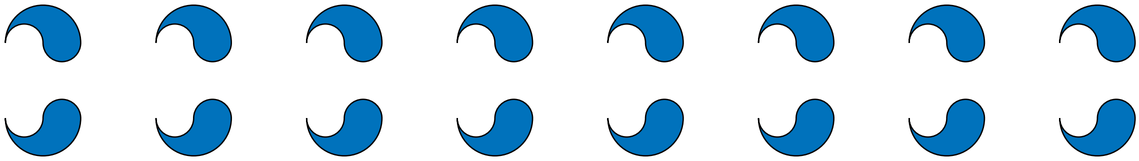


Fig. 30

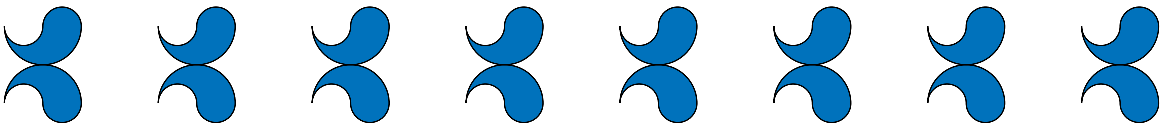


Fig. 31

Si on translate le transparent, dans la direction horizontale, après une symétrie d'axe horizontal, on peut encore obtenir la frise de la figure 32.

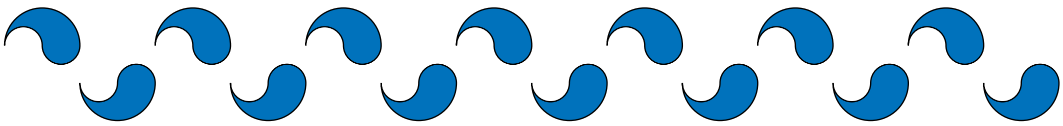


Fig. 32

Pour faire voir qu'on peut obtenir d'autres frises par un mouvement de rotation particulier, le professeur propose aux élèves d'utiliser une épingle. Après avoir superposé la frise et sa copie transparente, de telle manière que les motifs coïncident exactement, on plante l'épingle dans les deux épaisseurs, puis on fait tourner la bande transparente d'un demi-tour. On obtient une frise comme celles des figures 33 ou 34, selon la position de l'épingle. L'isométrie correspondant à ce mouvement est une *rotation d'un demi-tour* ou *symétrie centrale.*

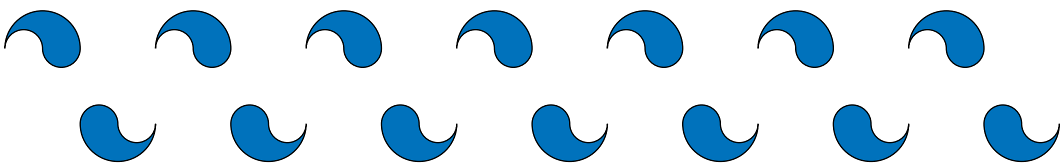


Fig. 33

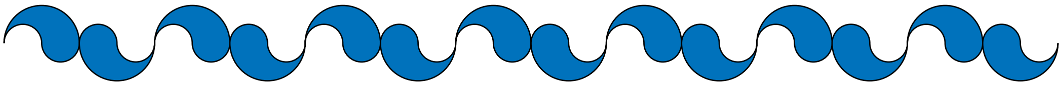


Fig. 34

Dès que les élèves ont bien perçu la différence entre le demi-tour et le retournement, ils peuvent se dispenser du recours à l'épingle. En ajustant le transparent après le demi-tour, ils peuvent encore obtenir la frise de la figure 35.

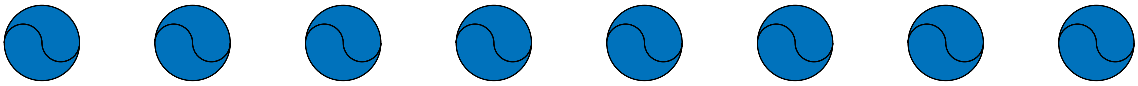


Fig. 35

Ils produiront certainement encore beaucoup d'autres frises, éventuellement en utilisant plusieurs transparents pour compléter la bande initiale, et en combinant plusieurs mouvements. Les motifs de base sont de plus en plus complexes et comportent davantage de gouttes. Nous en reproduisons quelques exemples à la fiche 40.

À la fin de cette phase de l'activité, le professeur procède à une mise en commun des réalisations des élèves. Après avoir éliminé les frises qui font double emploi, il demande d'assembler avec du papier collant les différentes bandelettes qui composent les frises sélectionnées et de noter pour chacune d'elles les mouvements utilisés et le nom des isométries correspondantes. Le document qui laissera une trace dans le cahier sera ensuite réalisé par photocopie.

1.4 Les « bons mouvements »

Comment s'y prendre ?

Le matériel mis à la disposition des élèves a ses limites. Il ne laisse pas une totale liberté de création. Il permet cependant d'obtenir une grande variété de frises en un minimum de temps, et il attire l'attention sur les différents mouvements qui amènent une bande horizontale sur une bande horizontale. La question suivante vise à s'assurer que les élèves ont bien identifié ces mouvements.

> À partir d'une position où la frise transparente est superposée exactement à la frise de papier, on a créé de nouvelles frises par des mouvements du transparent. Ces mouvements amènent la frise transparente dans une position où elle vient compléter la frise initiale pour composer une nouvelle frise. Quels sont ces mouvements ?

Les élèves devraient être capables, à ce stade de l'activité, d'établir la liste de ces mouvements « privilégiés » et des isométries correspondantes :

1. des translations,
2. des symétries d'axe horizontal (c'est-à-dire parallèle à la direction de la frise),
3. des symétries d'axe vertical (c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de la frise),
4. des symétries centrales ou rotations d'un demi-tour.

On peut distinguer les *retournements*, qui correspondent à un retournement du transparent, et les *déplacements*. Les translations et les demi-tours sont des déplacements, les symétries par rapport à un axe sont des retournements.

Plusieurs frises ont été obtenues par une succession de mouvements effectués l'un après l'autre. Par exemple, la frise de la figure 32 est réalisée en retournant le transparent dans un mouvement qui correspond à une symétrie d'axe horizontal, puis en le translatant dans la direction de cet axe. On dit que le mouvement du transparent est la *composée* d'une symétrie d'axe horizontal et d'une translation. Il s'agit d'un retournement, puisque le transparent a été retourné une fois.

Les pastilles de couleurs différentes collées sur les deux faces des transparents permettent de découvrir ces propriétés de la composition :

- la composée de deux déplacements est un déplacement,
- la composée d'un déplacement et d'un retournement est un retournement,
- la composée de deux retournements est un déplacement.

On en déduit que

- la composée d'un nombre pair de retournements est un déplacement,
- la composée d'un nombre impair de retournements est un retournement.

Ce travail de synthèse sur les mouvements « privilégiés » est destiné à préparer l'étude des isométries qui appliquent une frise sur elle-même.

Autres mouvements

Les élèves auront peut-être remarqué que les symétries qui viennent d'être répertoriées correspondent aux symétries des motifs de base des frises qui ont été créées par ces mouvements. Ils pourraient alors imaginer de fabriquer de nouveaux motifs de base à partir du motif initial (la goutte) en utilisant d'autres mouvements, par exemple des rotations. La figure 36 montre une frise dont un motif de base est constitué de quatre gouttes. Les deuxième, troisième et quatrième gouttes sont les images de la goutte initiale par des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour. La question suivante vise à montrer que les procédures qui ont été mises en œuvre avec les mouvements « privilégiés » ne fonctionnent plus avec les rotations quelconques. C'est une façon d'amener intuitivement l'idée qu'on peut percevoir dans un motif des isométries qui ne conservent pas la frise toute entière.

Peut-on obtenir la frise de la figure 36 au moyen du même matériel ? Pourquoi ?

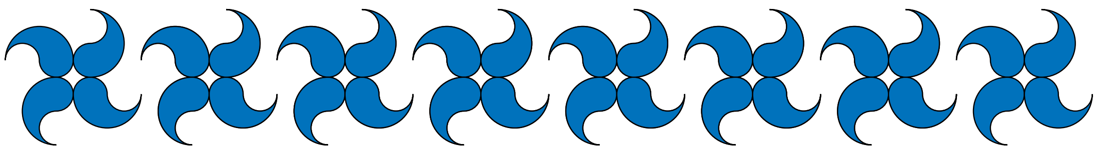


Fig. 36

Voici une procédure qui pourrait être imaginée :

– on superpose trois tranparents à la frise initiale,
– on plante une épingle en bas et à droite de la quatrième goutte (figure 37),
– on fait tourner les transparents respectivement d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour, dans le même sens.

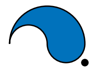


Fig. 37

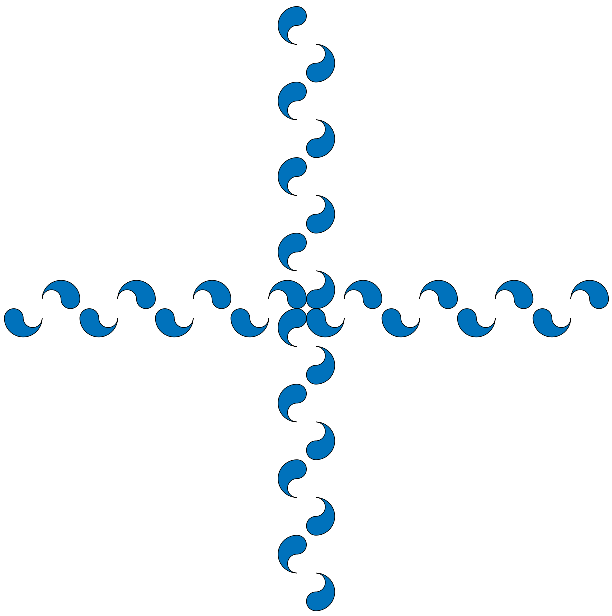


Fig. 38

La figure 38 illustre le résultat obtenu. Le motif de base de la frise de la figure 36 a bien été reconstitué, mais la frise basée sur ce motif n'apparaît pas pour autant. L'impossibilité de construire la frise de la figure 36 avec les transparents (utilisés jusqu'ici) résulte du fait qu'une rotation autre que celles d'un nombre entier de demi-tours n'amène pas une bande horizontale sur une bande horizontale. L'expérience qui vient d'être décrite le montre bien. L'exemple concerne les rotations d'un quart et de trois quarts de tour, mais la généralisation aux autres rotations est immédiate.

1.5 De la goutte à la feuille

Comment s'y prendre ? Le professeur distribue d'autres bandes de papier et de transparent obtenues en découpant la fiche 41 (figure 39).

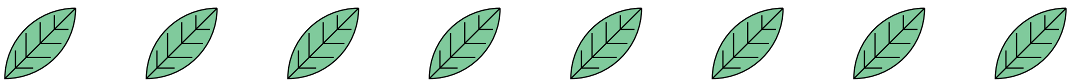


Fig. 39

À l'aide de ce matériel, construire des frises de feuilles en reproduisant des procédures identiques à celles qui ont été mises en œuvre pour fabriquer des frises de gouttes.

Commençons par les modèles les plus simples. Voici des résultats obtenus en retournant le transparent par une symétrie d'axe vertical (figure 40), par une symétrie d'axe horizontal (figure 41), par une symétrie d'axe horizontal suivie d'une translation (figure 42) et par une symétrie centrale ou rotation d'un demi-tour (figure 43).

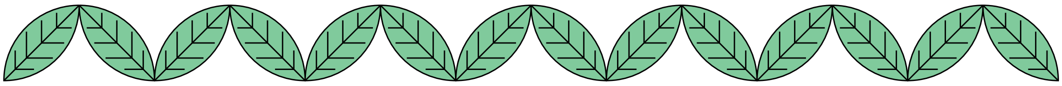


Fig. 40

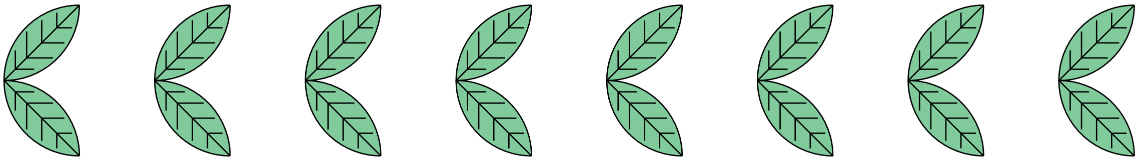


Fig. 41

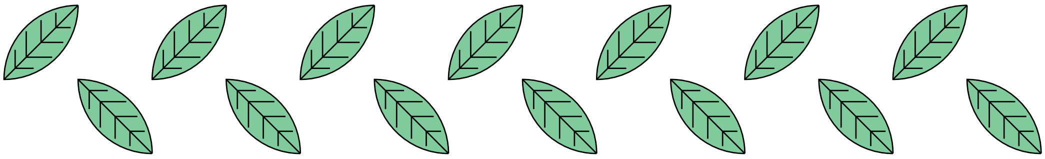


Fig. 42

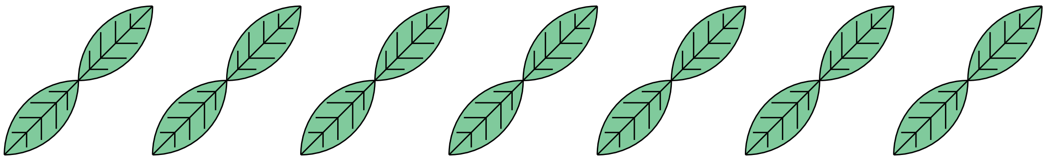


Fig. 43

On observe immédiatement que les frises de feuilles demandent une attention plus soutenue que les frises de gouttes. Seule l'orientation des nervures permet de distinguer la feuille initiale de son image par symétrie centrale, ou encore l'image de la feuille initiale par une symétrie d'axe vertical, de celle par une symétrie d'axe horizontal.

Ainsi, on pourrait confondre la frise de la figure 40 avec celle de la figure 44, obtenue par un retournement du transparent par une symétrie d'axe horizontal suivie d'une translation.

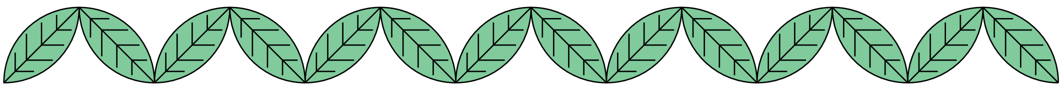


Fig. 44

Le professeur distribue la fiche 40, laisse quelques frises de gouttes (sur papier et sur transparent) à la disposition des élèves, et donne une consigne qui nécessite la mise en œuvre de toute une succession d'observations.

Composer des frises de feuilles par des procédures identiques à celles qui ont servi à construire les frises de gouttes de la fiche 40.

Ce travail se fait en plusieurs étapes :

- identifier à vue le mouvement du transparent qui a permis de réaliser la frise,
- si nécessaire, vérifier le mouvement avec le matériel,
- reproduire le même mouvement avec le transparent de la frise de feuilles.

Les frises ainsi obtenues dépendent de la position des axes et centres de symétrie, et des translations choisies. La fiche 42 illustre un résultat possible.

La comparaison des fiches 40 et 42 montre à nouveau que des procédures qui produisent des frises de gouttes très différentes donnent lieu à des frises de feuilles que seule la présence des nervures permet de distinguer. Les élèves auront sans doute l'intuition que c'est l'asymétrie de la goutte qui rend immédiatement discernables ses images par les différentes symétries.

Cette dernière activité attire aussi l'attention sur la « ressemblance de structure » entre des frises différentes qui ont été composées par des procédures analogues. Les frises des figures 45 et 46 en sont un exemple.

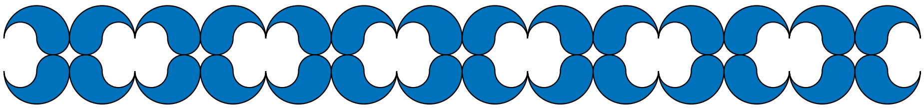


Fig. 45

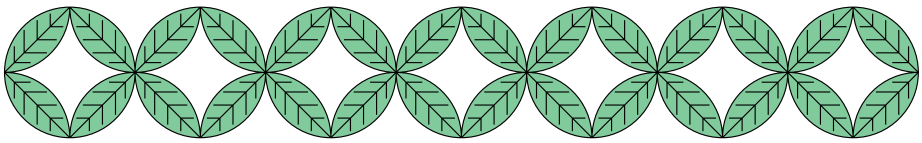


Fig. 46

2 Découvrir les types de frises

De quoi s'agit-il ? Étudier les isométries qui appliquent une frise sur elle-même.

Dégager les sept types de frises et analyser les caractéristiques de chaque type.

Enjeux Concevoir des figures infinies.

Reconnaître les isométries qui laissent invariante une figure, finie ou infinie.

Compétences transversales

Si l'activité est destinée à des élèves du premier degré, on se reporte aux compétences de la section 1. À partir du deuxième degré, le travail peut être davantage axé sur les justifications et viser à développer les compétences suivantes.

Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre.

Formuler une conjecture, dégager une méthode de travail.

Choisir une procédure adéquate et la mener à son terme.

Produire un dessin qui éclaire ou résume une situation.

Reconnaître une propriété commune à des situations différentes.

Compétences disciplinaires

Connaître les translations, les symétries, les rotations de figures dans le plan.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 47 à 51, en annexe aux pages 368 à 372.

Des photocopies sur transparent de la fiche 49.

Du matériel de dessin.

Éventuellement un logiciel de dessin comme *Apprenti Géomètre* ou *Cabri-Géomètre.*

Prérequis

Les activités de la section 1 ou toute autre activité qui met en place les mêmes intuitions géométriques concernant

- les frises et les motifs de base,
- les translations et les symétries des figures,
- les mouvements qui amènent une bande sur une bande de même direction.

Les axes et les centres de symétrie des figures planes.

2.1 Isométries laissant une figure invariante

Comment s'y prendre ?

Les activités développées dans la section 1 ont fait apparaître une grande variété de frises et de motifs. Cependant, la création de frises de feuilles analogues à des frises de gouttes (page 276) a aussi mis en évidence des « ressemblances de structure » entre des frises dont les motifs de base sont différents mais présentent des symétries analogues.

Le professeur commence par vérifier que les élèves comprennent l'affirmation « une figure est sa propre image par une isométrie ». Il rappelle que, pour qu'une figure soit sa propre image par une isométrie, il faut que tous les points de l'image coïncident avec des points de la figure initiale et réciproquement. Ensuite, il présente quelques figures simples, qui peuvent être des motifs de base des frises déjà rencontrées, et pose la question suivante.

Parmi les figures proposées, désigner celles qui sont leur propre image par

– une symétrie d'axe vertical,
– une symétrie d'axe horizontal,
– une symétrie d'axe horizontal et une symétrie d'axe vertical,
– une symétrie centrale (ou rotation d'un demi-tour),
– une rotation,
– une translation.

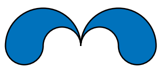


Fig. 47

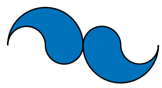


Fig. 48

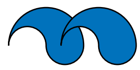


Fig. 49

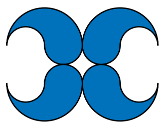


Fig. 50

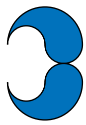


Fig. 51

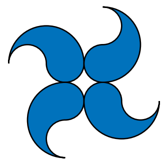


Fig. 52

Après ces mises au point, le professeur peut signaler différentes formulations pour exprimer la même idée. Par exemple, on peut dire que la figure 47

– a un axe de symétrie vertical,
– est symétrique par rapport à un axe vertical,
– est sa propre image par une symétrie d'axe vertical,
– est appliquée sur elle-même par une symétrie d'axe vertical,
– est conservée par une symétrie d'axe vertical,
– est invariante par une symétrie d'axe vertical.

Le vocabulaire sera adapté à l'âge et à la motivation des élèves. La mise en place du concept d'invariance peut être renforcée par des exercices où on demande de compléter une figure de telle manière qu'elle soit sa propre image pour une transformation donnée. La fiche 48 propose un exercice de ce genre.

Remarquons que la figure 49 pose le problème de l'invariance d'une figure par une translation et peut servir à introduire la section suivante.

2.2 Des petites gouttes jusqu'à l'infini

Comment s'y prendre ?

Les frises sont répertoriées en fonction des isométries qui les conservent globalement, et non en fonction des isométries d'un motif de base. Pour effectuer ce travail de classement, il convient tout d'abord de mettre en évidence la nécessité de considérer des frises infinies.

Lorsqu'on a sous les yeux une frise quelconque, ce qui frappe en premier, ce sont les translations : c'est par translation qu'on passe d'un motif à un autre, c'est par translation qu'on prolonge la frise. La question suivante se pose donc assez naturellement.

Existe-t-il une translation qui applique une frise sur elle-même, (par exemple celle de la figure 53) ?

Fig. 53

Les élèves seront probablement d'avis différents. Il est important de les laisser s'exprimer, car ceux qui répondent « oui » ont peut-être déjà l'image mentale de la frise infinie.

La translation qui applique une goutte sur la suivante sera sans doute évoquée.

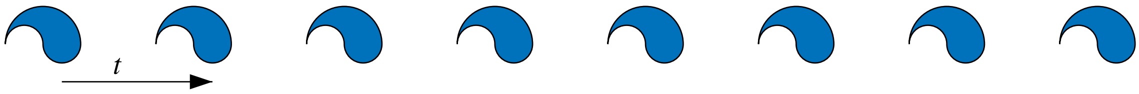


Fig. 54

Pour bien faire percevoir où est le problème, on rappelle que, pour qu'une frise soit sa propre image par une isométrie, il faut que tous les points de l'image coïncident avec des points de la frise initiale et réciproquement.

Si les élèves en éprouvent le besoin, on les invite à reprendre les frises de gouttes sur papier et sur transparent, déjà utilisées précédemment. La question est alors reformulée en termes plus concrets et décomposée en deux étapes.

Déplaçons le transparent par la translation qui amène une goutte sur la suivante. Toutes les gouttes de la frise de papier sont-elles recouvertes ? Sinon, que faudrait-il faire pour que ce soit le cas ?

En effectuant cette translation, les élèves constatent que la première goutte à gauche de la frise de papier n'est pas recouverte. Pour que toutes les gouttes de la frise soient recouvertes, il faudrait donc ajouter une goutte à gauche sur la frise transparente.

Toutes les gouttes de la frise transparente recouvrent-elles une goutte de la frise de papier ? Sinon, que faudrait-il faire pour que ce soit le cas ?

S'ils portent leur attention sur la droite, les élèves observent que la dernière goutte transparente ne recouvre rien et qu'il faudrait donc ajouter une goutte à droite sur la frise de papier.

La frise ainsi complétée est-elle invariante par la translation t ?

Si on répète l'opération avec le transparent un certain nombre de fois, il faudra ajouter à chaque fois une goutte à gauche sur la frise transparente et une goutte à droite sur la frise de papier. Aucune frise limitée n'est invariante par une translation.

Cependant, la frise peut être prolongée en répétant le motif indéfiniment dans les deux sens. Bien sûr, on ne peut observer que des frises limitées, mais on peut toujours imaginer les frises infinies qui les prolongent. Ce passage de la frise réelle, nécessairement finie, à la frise mathématique idéalisée est difficile pour la plupart des élèves. Concevoir une droite infinie comme extension d'un segment, et un plan infini à partir du rectangle ou du parallélogramme qu'on utilise généralement dans la représentation en perspective, relève du même processus d'abstraction.

Le professeur précise que c'est cette bande infinie qu'il désignera dorénavant par le terme de *frise* et repose la question de la coïncidence d'une frise et de son image par une translation sous une forme plus générale.

Existe-t-il une translation qui applique une frise sur elle-même ?

Une fois acquise la notion de frise infinie, on peut répondre par l'affirmative à cette question.

L'étape suivante consiste à faire sentir aux élèves qu'il y a aussi une infinité de translations qui appliquent la frise sur elle-même.

Combien y a-t-il de translations qui appliquent la frise sur elle-même ?

Le travail effectué devrait permettre d'arriver assez rapidement à la conclusion qu'il y a une infinité de telles translations dans la direction de la bande décorée. Il y a des translations qui vont de gauche à droite et d'autres qui vont de droite à gauche. Les longueurs de ces translations ne sont pas quelconques, ce sont des multiples de la longueur d'une *translation minimale*. Celle-ci est définie comme la plus petite translation qui applique la frise sur elle-même. Il y a une translation minimale dans chaque sens, chacune d'elles amène un motif de base sur l'un des deux motifs adjacents.

En conclusion, il y a une famille infinie de translations qui appliquent la frise sur elle-même ; elles sont de même direction, vont dans les deux sens et leurs longueurs sont des multiples de la longueur d'une translation minimale. On peut considérer que les translations de droite à gauche sont les multiples négatifs de la translation minimale de gauche à droite.

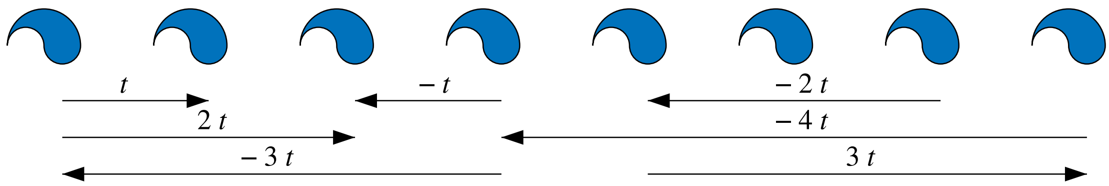


Fig. 55

Ce travail se termine par l'élaboration d'une nouvelle définition.

Une frise est une bande décorée, invariante par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples d'une translation minimale.

Remarque. – La propriété esssentielle d'une frise ornementale est qu'elle est conservée par une certaine *translation minimale*. Cette définition exclut des bandes composées exclusivement de droites parallèles (figure 56). Une telle bande est une figure invariante par translation, mais il n'y a pas de translation non nulle minimale qui la conserve ; la famille des translations qui la laissent invariante est non dénombrable.

Fig. 56

Par contre, les ≪ graduations ≫ ou ≪ échelles ≫ des figures 57 et 58 sont des frises, au sens de la définition précédente, qui peuvent être découvertes par les élèves.

Fig. 57

Fig. 58

2.3 Les sept types de frises

Comment s'y prendre ? Pour amener de manière naturelle les différents types de frises et les faire découvrir par les élèves, une question préliminaire s'avère très utile.

Quelles sont les isométries qui laissent invariante une ≪ bande de papier ≫ infinie, c'est-à-dire une figure délimitée par deux droites parallèles ?

Le travail effectué à la section 1.4 sur les ≪ mouvements privilégiés ≫ devrait permettre d'établir la liste de ces isométries :

1. des translations dans la direction de la bande,
2. une symétrie d'axe parallèle aux deux droites et situé à égale distance de celles-ci (axe médian),
3. des symétries d'axe perpendiculaire aux deux droites parallèles,
4. des symétries centrales (ou rotations d'un demi-tour) dont le centre est situé à égale distance des deux droites parallèles.

Il faut encore ajouter les composées des isométries ainsi répertoriées, puisque toute composée d'isométries qui conservent une figure laisse cette figure invariante.

Comme une frise est une bande décorée infinie, il est aisé de comprendre que les isométries qui laissent une frise invariante font obligatoirement partie de cette liste.

Lors de l'activité 1, les élèves se sont constitué une « bibliothèque de frises » dont ils connaissent le mode de création. Pour diversifier les exemples, ils apportent des objets décorés de frises ou des documents – dessins, photos – qui en présentent. Le professeur distribue la fiche 49 et sa photocopie sur transparent (à découper en bandelettes) ; le matériel est cette fois destiné à découvrir les isométries qui appliquent une frise sur elle-même, ou à effectuer des vérifications.

Trouver, parmi ces exemples, des frises invariantes pour

- uniquement des translations,
- des translations et un seul type de symétrie (verticale, horizontale ou centrale),
- des translations et plusieurs types de symétries.

Dans chacun des cas, quelles sont les isométries qui appliquent le motif de base sur lui-même ?

Cette exploration conduit à la découverte des différents types de frises. En fonction de l'intérêt de ses élèves, chaque professeur décidera jusqu'où il veut pousser l'analyse des différents types, et jugera de l'opportunité de demander des justifications. Le fait de se limiter à l'aspect purement descriptif n'exclut pas de poursuivre l'activité jusqu'à la section 3.

La frise T : des translations et rien d'autre

Toutes les frises, telles que nous les avons définies, sont invariantes par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples de la translation minimale.

Consultons notre « bibliothèque de frises » et cherchons des frises qui ne sont invariantes **que** par ces translations. Nous en trouvons quelques exemples : celles des figures 10, 16, 17, 20, 39... ou encore celle-ci. Nous les appellerons frises de type T.

Fig. 59

*Une **frise de type T** est une frise invariante uniquement par une infinité de translations, toutes multiples d'une translation minimale.*

Nous constatons que les motifs de base de ces frises n'ont pas d'axe de symétrie horizontal ou vertical, ni de centre de symétrie. La suite de nos investigations confirmera que les frises dont un motif de base est symétrique par rapport à un axe vertical ou horizontal ou par rapport à un centre ne peuvent appartenir au type T (car elles sont obligatoirement d'un autre type).

Cependant, d'autres types de symétries peuvent apparaître dans les motifs de base des frises de type T. Par exemple, la feuille, motif de base de la frise de la figure 39, est symétrique par rapport à un axe oblique, formant un angle de 45° avec l'horizontale. Un tel axe n'est jamais un axe de symétrie de la frise.

Le recours au matériel permet de s'en convaincre : on superpose à une frise de feuilles sa copie sur transparent, puis on retourne le transparent dans un mouvement de symétrie par rapport à l'axe de symétrie d'une feuille. La figure 60 illustre le résultat obtenu et montre clairement que la symétrie d'axe oblique n'applique pas la frise sur elle-même.

Pas plus que les rotations autres que celles d'un nombre entier de demi-tours, les symétries d'axe oblique ne sont pas à prendre en considération lors de la recherche des isométries laissant la frise invariante.

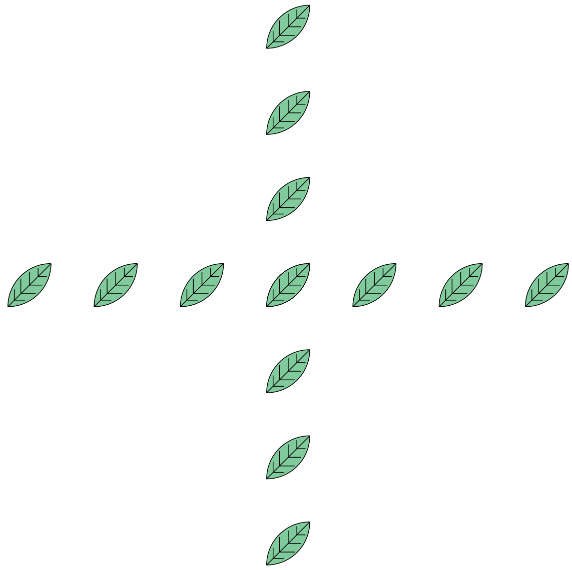


Fig. 60

De plus, il est clair que les translations minimales et ses multiples appliquent globalement la frise sur elle-même, mais n'appliquent aucun motif sur lui-même.

La frise H : translations et symétrie d'axe horizontal

Orientons nos recherches vers des frises dont un motif de base a lui-même un axe horizontal de symétrie, mais pas d'axe vertical. Les frises des figures 25, 30, 41 en sont des exemples. Sur la fiche, nous trouvons encore celle de la figure 61. Nous les appelons frises de type H.

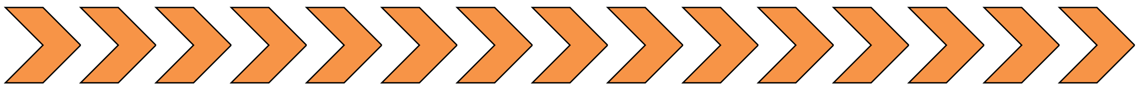


Fig. 61

La symétrie d'axe horizontal (axe médian) applique globalement la frise sur elle-même, mais aussi chaque motif sur lui-même.

Par composition des isométries qui conservent la frise, les élèves sont amenés à découvrir un autre mouvement qui applique la frise sur elle-même. En utilisant le transparent qui reproduit globalement la frise, ils peuvent effectuer le mouvement et le décrire, mais ils ne peuvent nommer l'isométrie car ils ne l'ont sans doute jamais rencontrée. Il s'agit d'une symétrie d'axe médian horizontal, suivie (ou précédée) d'une translation dans la direction de la frise, donc dans la direction parallèle à l'axe. Cette composée, appelée *symétrie glissée*, est un retournement, puisque le transparent a été retourné une fois.

Les symétries glissées, obtenues par composition de la symétrie d'axe médian et d'une des translations qui conservent la frise, laissent la frise invariante mais n'appliquent aucun motif sur lui-même.

Une ***symétrie glissée*** *est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation dans la* *direction de l'axe de symétrie.*

*Une **frise de type H** est une frise invariante par*
– une famille infinie de translations,
– la symétrie orthogonale d'axe médian,
– une famille infinie de symétries glissées.

La frise V : translations et symétries d'axe vertical

Nous pouvons exhiber quelques frises dont un motif de base est symétrique par rapport à un axe vertical, mais pas par rapport à un axe horizontal. Ainsi sont les frises des figures 24 et 40.

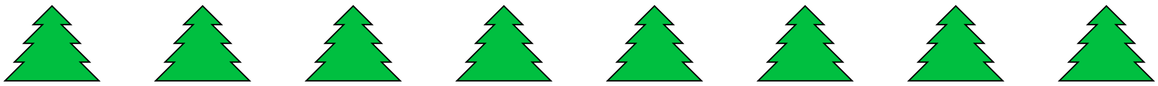


Fig. 62

Sur la fiche, on trouve celle de la figure 62. Le petit sapin, considéré comme motif de base, est symétrique par rapport à un axe vertical. En s'aidant du transparent, on constate que la frise est appliquée sur elle-même par n'importe quelle symétrie dont l'axe coïncide avec l'axe de symétrie d'un petit sapin (axes en trait plein sur la figure 63). Chacune de ces symétries applique un motif de base sur lui-même (le petit sapin dont l'axe coïncide avec l'axe de la symétrie), les autres motifs sont appliqués sur le motif situé symétriquement dans la frise. Il y a une famille infinie de symétries de ce type.

On s'aperçoit assez vite qu'il y a une autre famille infinie de symétries, dont les axes sont situés à mi-chemin entre deux petits sapins (axes en pointillé sur la figure 63). Les symétries de cette famille appliquent la frise sur elle-même, mais aucun des motifs de base que nous avons choisi sur lui-même. Si les élèves n'évoquent pas spontanément cette deuxième famille de symétries, le professeur relancera la recherche par une question.

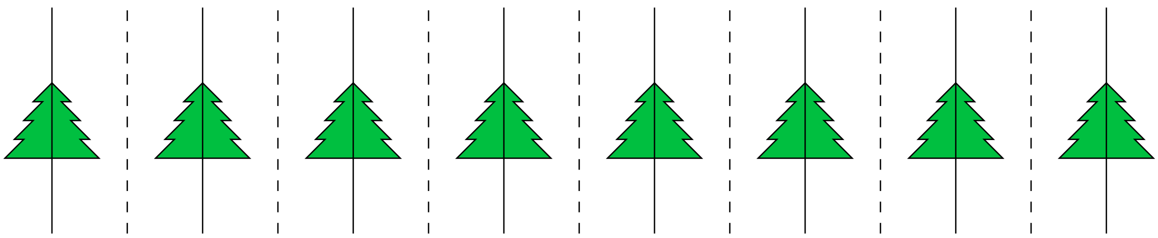


Fig. 63

Les élèves retrouvent les deux familles de symétries d'axe vertical dans les frises des figures 24 et 40.

Dans les frises de ce type, il n'y a aucun motif de base qui soit symétrique à la fois par une symétrie de chaque famille. Ceci montre bien que, si les symétries d'un motif de base peuvent servir de guide dans la recherche des isométries qui conservent la frise, elles ne suffisent pas à les identifier toutes.

*Une **frise de type V** est une frise invariante par*
– *une famille infinie de translations,*
– *deux familles infinies de symétries orthogonales d'axe perpendiculaire à la direction de la frise (axes de deux types).*

Remarque. – Dans les frises de type V, il est fréquent que deux motifs de base différents, tous deux symétriques par rapport à un axe vertical s'imposent à la perception. Ainsi, on peut interpréter la frise de la figure 64 comme une frise de champignons (sur fond blanc) ou comme une frise de flacons blancs (sur fond coloré).

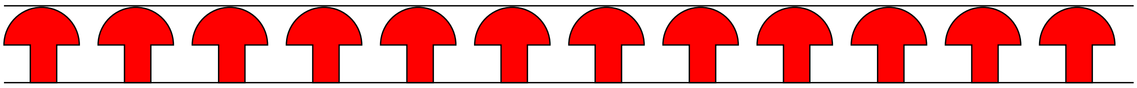


Fig. 64

La remarque s'applique aussi dans d'autres cas. Par exemple, la frise de la figure 61, de type H, peut être vue comme une frise de chevrons colorés sur fond blanc ou comme une frise de chevrons blancs sur fond coloré.

La frise G : translations et symétries glissées

Le professeur attire l'attention sur deux frises de la collection, qui ne sont pas très différentes de la frise de type H. Il s'agit des frises des figures 32 et 42. Les élèves savent comment ces deux frises ont été obtenues : en translatant la frise transparente (de gouttes ou de feuilles) après l'avoir retournée par une symétrie d'axe horizontal. Sur la fiche, on en trouve une troisième, qui semble construite de manière analogue (figure 65).

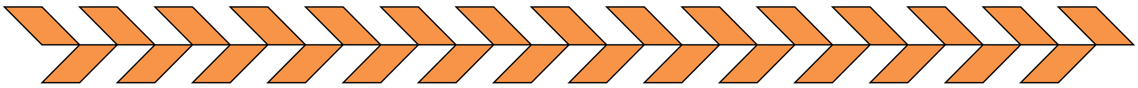


Fig. 65

Quel mouvement applique la frise de la figure 65 sur elle-même ? Quelle isométrie laisse cette frise invariante ?

En s'aidant du transparent, les élèves identifient le mouvement : une symétrie d'axe médian horizontal, suivie (ou précédée) d'une translation dans la direction de la frise, donc dans la direction parallèle à l'axe. Il s'agit donc d'une *symétrie glissée*. Mais contrairement à ce qui se passe dans la frise de type H, cette symétrie glissée n'est pas la composée de deux isométries qui conservent la frise, puisque celle-ci n'est pas symétrique par rapport à l'axe médian.

Analysons les symétries glissées qui conservent la frise, et intéressons-nous aux translations qui entrent dans leur composition. Pour cela, notons t_f la translation minimale, de gauche à droite, qui laisse la frise invariante et t_g la *translation de glissement minimale*, c'est-à-dire la plus petite translation, de gauche à droite, qui en composition avec la symétrie d'axe médian horizontal, produit une symétrie glissée laissant la frise invariante. Dessinons les translations t_f et t_g pour les frises des figures 65 et 42 (figures 66 et 67 ci-dessous).

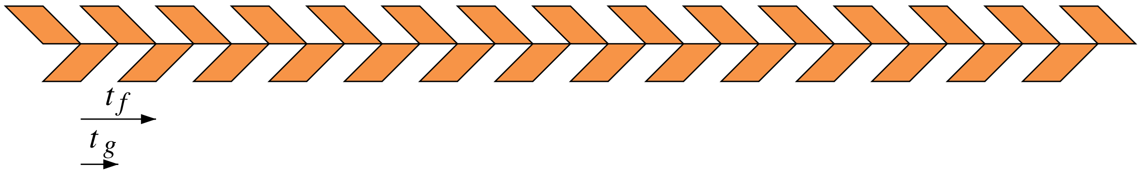


Fig. 66

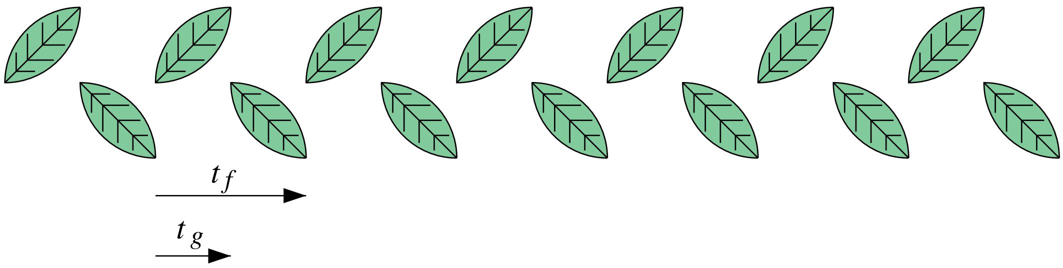


Fig. 67

On constate à chaque fois que la translation t_g, de même direction que t_f a pour longueur la moitié de la longueur de t_f. On voit aussi qu'une symétrie glissée laissant la frise invariante est toujours une composée de la symétrie d'axe médian horizontal avec une translation multiple *impair* de t_g. Aucune autre translation ne convient pour effectuer le glissement.

Contrastons à présent la frise de la figure 67 avec celle de la figure 68, où les « feuilles retournées » ne sont plus à mi-chemin entre les autres. Cette dernière est-elle également invariante par une symétrie glissée ?

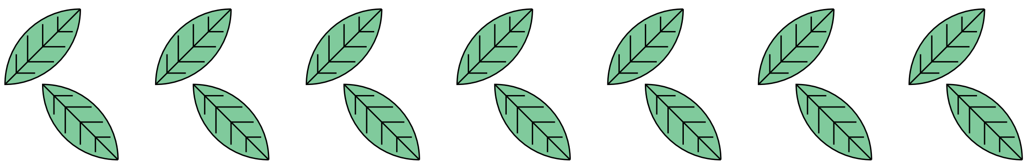


Fig. 68

Le recours au transparent lève le doute. On superpose à la frise sa copie sur transparent, on retourne celui-ci, puis on le fait glisser de manière à appliquer les unes sur les autres les « feuilles retournées » du dessous. Remarquons que, dans ce cas, la translation du glissement effectué n'est pas la moitié de la translation minimale qui conserve la frise. La figure 69 montre le résultat.

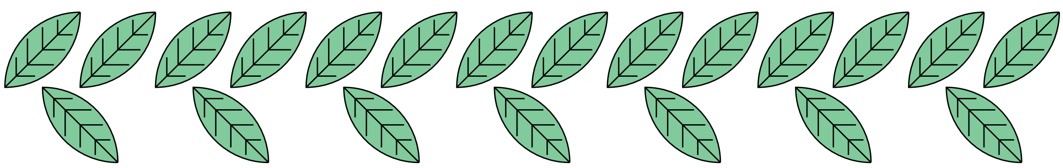


Fig. 69

Il n'existe pas de symétrie glissée qui appplique sur elle-même la frise de la figure 68. Il s'agit d'une frise de type T, invariante seulement par une famille de translations.

*Une **frise de type G** est une frise invariante par*
– une famille infinie de translations,
– une famille infinie de symétries glissées.
La longueur de la translation de glissement minimale vaut la moitié celle de la translation minimale qui conserve la frise.

On peut se convaincre de cette propriété par un raisonnement intuitif, en s'aidant du transparent. Si on effectue successsivement deux fois une même symétrie glissée, on compose deux retournements qui conservent la frise. On doit donc obtenir un déplacement qui laisse la frise invariante. Or, la composée de deux symétries glissées de même axe et de translation de glissement g est la translation $2g$. La longueur de la translation minimale t_f qui conserve la frise vaut donc le double de celle de la translation de glissement minimale t_g.

Remarque. – Les frises de types G sont parfois plus difficiles à reconnaître, notamment lorsque les « parties retournées » du motif sont intercalées entre les autres. En voici deux exemples (figures 70 et 71). La fiche 55, exploitée à la section 3 en présente de plus compliquées.

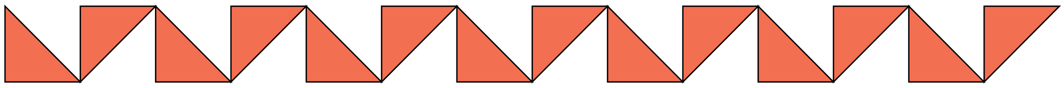


Fig. 70

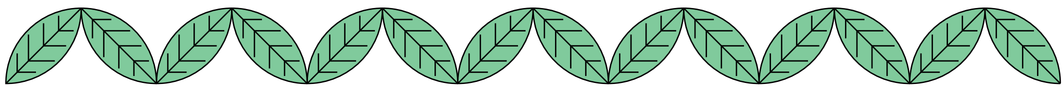


Fig. 71

La frise C : translations et symétries centrales

Nous avons déjà rencontré quelques frises dont un motif de base présente une symétrie centrale mais pas de symétrie d'axe vertical ni horizontal : celles des figures 33, 34, 35, 43, et aussi celle de la figure 36. Nous découvrons sur la fiche 49 la frise de la figure 72 qui jouit des mêmes propriétés.

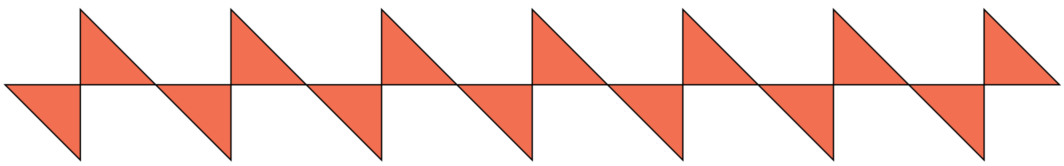


Fig. 72

Examinons-la de plus près. On y décèle deux motifs de base invariants par une symétrie centrale. Marquons les centres de ces motifs d'un petit cercle, plein ou vide selon le cas (figures 73 et 74).

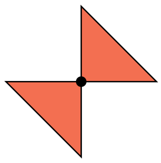


Fig. 73

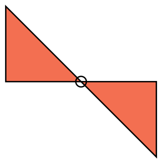


Fig. 74

Pour vérifier que ces points sont bien des centres de symétrie de la frise, on utilise à nouveau le transparent : on le superpose exactement à la frise de papier, on plante une épingle dans les deux épaisseurs à l'endroit d'un point marqué, puis on fait tourner le transparent d'un demi-tour. On constate alors que la frise est appliquée sur elle-même par chacun des demi-tours effectués.

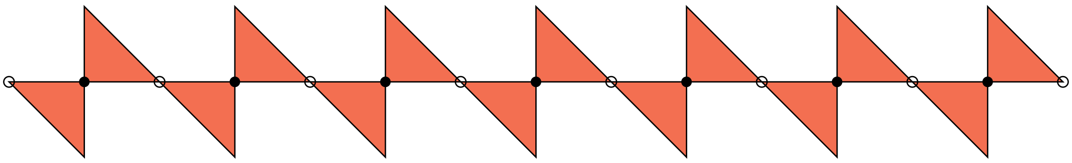


Fig. 75

On vérifie ainsi l'existence de deux sortes de centres de symétrie et donc de deux familles infinies de demi-tours.

Si le motif de base considéré est celui de la figure 73, les demi-tours dont le centre est marqué par un petit cercle plein appliquent le motif au centre duquel il se trouve sur lui-même. Les autres motifs sont appliqués sur le motif situé symétriquement dans la frise. Les demi-tours dont le centre est marqué par un petit cercle vide n'appliquent aucun motif sur lui-même. Les rôles des deux familles de symétries sont inversés si on convient que le motif de base est celui de la figure 74. Dans ce cas, ce sont les demi-tours dont le centre est marqué par un petit cercle vide qui appliquent un motif sur lui-même.

*Une **frise de type C** est une frise invariante par*
– une famille infinie de translations,
– deux familles infinies de symétries centrales ou demi-tours (centres de deux types).

La frise CHV : translations, symétries d'axe horizontal, d'axe vertical et... symétries centrales

Nous avons examiné jusqu'ici les frises qui présentent soit un axe de symétrie horizontal, soit des axes de symétries verticaux, soit des centres de symétrie. Fixons à présent notre attention sur celles qui présentent à la fois une symétrie d'axe horizontal et une symétrie d'axe vertical. Les frises des figures 45 et 46 sont de ce type, ainsi que celle de la figure 76.

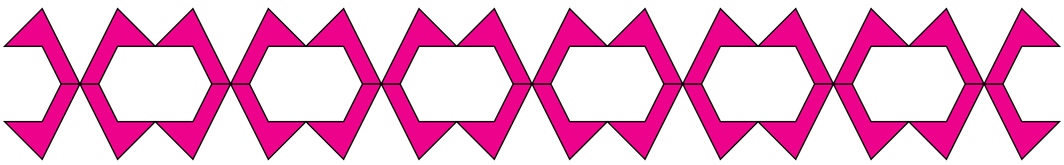


Fig. 76

On voit apparaître, outre la symétrie d'axe horizontal, deux familles de symétries d'axe vertical, comme dans les frises de type V. Mais de plus, on découvre deux familles de demi-tours, dont les centres se trouvent aux points d'intersection de l'axe horizontal avec les axes verticaux des deux familles.

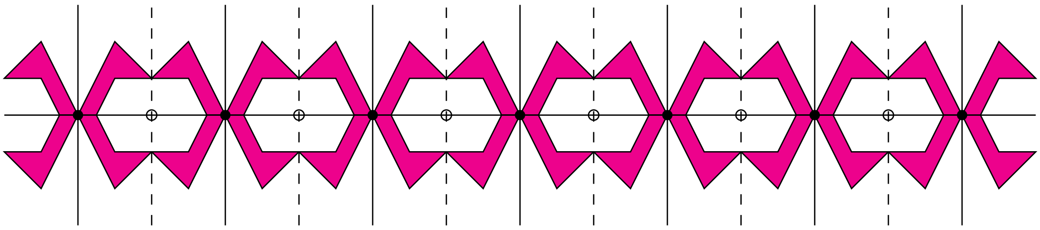


Fig. 77

Le fait que le point d'intersection de deux axes de symétrie soit un centre de symétrie est-il particulier à cette frise, ou bien s'agit-il d'une propriété générale ?

Existe-t-il une frise (ou une figure), symétrique par rapport à un axe horizontal et par rapport à un axe vertical, qui ne soit pas symétrique par rapport au point d'intersection des deux axes ?

Pour guider la réflexion, le professeur suggère de rechercher le(s) point(s) fixe(s) de la composée des deux symétries axiales. Voici un exemple de raisonnement accessible aux élèves.

Dans une symétrie axiale, les points de l'axe sont des points fixes. Le point d'intersection des deux axes est donc fixe pour la symétrie d'axe vertical et pour la symétrie d'axe horizontal. La composée des deux symétries axiales est donc une isométrie telle que le point d'intersection des deux axes est un point fixe. C'est un déplacement puisque c'est la composée de deux retournements. Il s'agit donc d'une rotation ayant ce point fixe comme centre et, dans le cas d'une frise, cette rotation ne peut être qu'un demi-tour, puisqu'il n'y a pas d'autre rotation qui applique une frise sur elle-même.

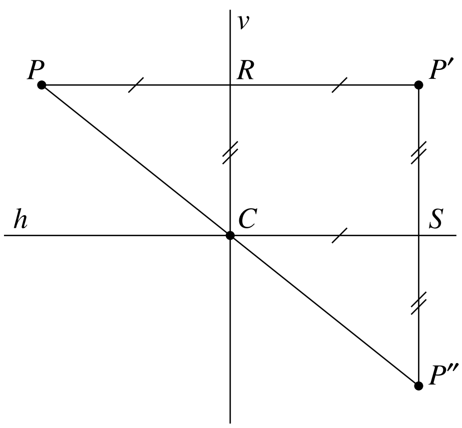


Fig. 78

Plus généralement, la figure 78 montre

- un point P quelconque du plan,
- son image P' par la symétrie d'axe ν,
- son image P'' par la composée de la symétrie d'axe ν et de la symétrie d'axe h (image de P' par la symétrie d'axe h).

Le point P'' est l'image de P par un déplacement du plan dont C est un point fixe.

De l'égalité des triangles PRC et CSP'', on peut déduire que $|PC| = |CP''|$ et que les points P, C et P'' sont alignés, ce qui démontre que P'' est l'image de P par le demi-tour de centre C.

La démonstration peut également s'appuyer sur la configuration de Thalès dans le triangle $PP'P$".

On peut donc énoncer les propriétés plus générales suivantes.

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est le demi-tour dont le centre se trouve à l'intersection des deux axes.

Toute figure symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires est symétrique par rapport au point d'intersection des deux axes.

Une frise qui présente les mêmes symétries orthogonales que celle de la figure 77 est toujours invariante par deux familles infinies de symétries centrales.

On y perçoit deux motifs de bases invariants par la symétrie d'axe horizontal, par une symétrie d'axe vertical et un demi-tour. Les figures 79 et 80 en donnent une illustation.

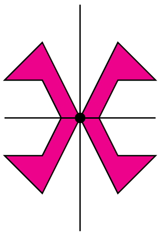


Fig. 79

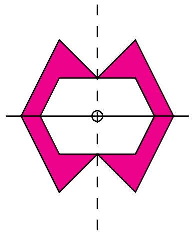


Fig. 80

Par composition de la symétrie d'axe médian et des translations, on trouve encore une famille infinie de symétries glissées qui conservent une frise de ce type.

*Une **frise de type CHV** est une frise invariante par*
- *une famille infinie de translations,*
- *la symétrie orthogonale d'axe médian,*
- *deux familles infinies de symétries orthogonales d'axe perpendiculaire à la direction de la frise (axes de deux types).*
- *deux familles infinies de symétries centrales ou demi-tours (centres de deux types, aux intersections de l'axe médian avec les axes perpendiculaires à la direction de la frise),*
- *une famille infinie de symétries glissées.*

La frise CV : translations, symétries d'axe vertical, symétries centrales et... symétries glissées

Il existe des frises qui ne sont pas symétriques par rapport à leur axe médian horizontal, mais qui présentent des symétries d'axes verticaux et des symétries centrales. La frise de la figure 81 en est un exemple, ainsi que la frise « grecque » de la figure 82.

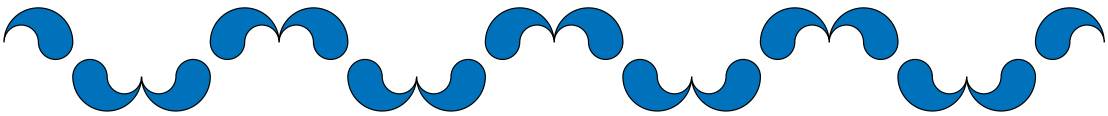


Fig. 81

Fig. 82

Fixons notre attention sur la première, dessinons les axes de symétries et marquons les centres.

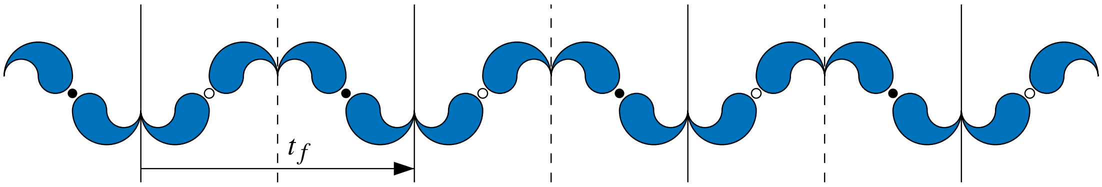


Fig. 83

On distingue deux familles de symétries d'axe vertical et deux familles de demi-tours, dont les centres sont situés sur l'axe médian de la frise, à mi-chemin entre deux axes verticaux successifs. Le recours au transparent permet de vérifier que la frise est également invariante par une symétrie glissée.

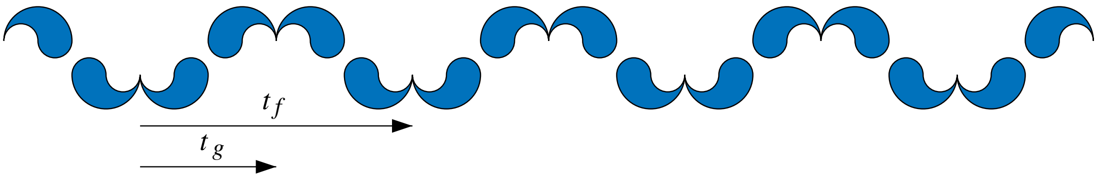


Fig. 84

Existe-t-il un motif de base symétrique par rapport à un axe vertical et par rapport à un centre ?

Les figures 85 à 88 illustrent quatre façons de percevoir un motif de base qui présente une symétrie : les deux premiers motifs sont symétriques par rapport à un axe, les deux derniers par rapport à un centre.

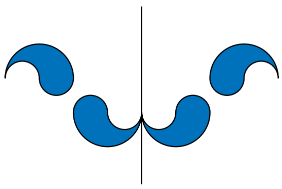


Fig. 85

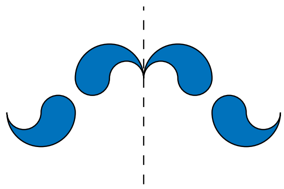


Fig. 86

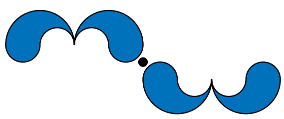


Fig. 87

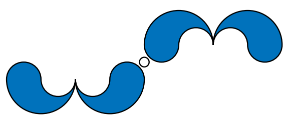


Fig. 88

Il n'existe aucun motif de base qui soit invariant pour plus d'une des isométries qui conservent la frise.

*Une **frise de type CV** est une frise invariante par*
- *une famille infinie de translations,*
- *deux familles infinies de symétries orthogonales d'axe perpendiculaire à la direction de la frise (axes de deux types),*
- *deux familles infinies de symétries centrales ou demi-tours (centres de deux types, sur l'axe médian, à mi-chemin entre des axes successifs, perpendiculaires à la direction de la frise),*
- *une famille infinie de symétries glissées.*

Remarque. – Une même frise peut être classée différemment selon qu'on tient compte ou non des couleurs.

Les frises des figures 89 et 90 sont-elles du même type ?

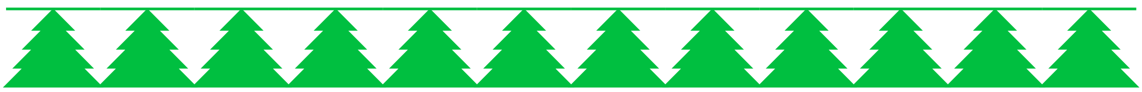


Fig. 89

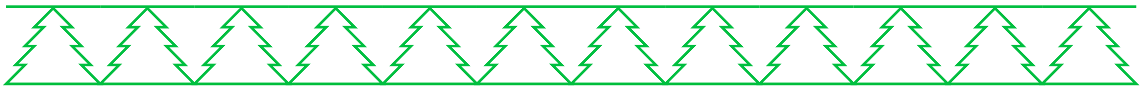


Fig. 90

Bien que le dessin de ces deux frises soit le même, l'absence de coloriage de la seconde en fait une frise du type CV, tandis que la première est du type V.

Synthèse

Les élèves complètent un tableau récapitulatif en indiquant les isométries qui conservent les frises de chaque type.

Type	Translations	Symétrie d'axe horizontal	Symétries d'axe vertical	Symétries centrales	Symétries glissées
T	×				
H	×	×			×
V	×		×		
G	×				×
C	×			×	
CHV	×	×	×	×	×
CV	×		×	×	×

La dernière partie de l'activité est destinée à montrer qu'il est possible de construire une frise de chaque type à partir d'un même motif initial (bien choisi).

> Produire une frise de chaque type à partir d'un motif au choix. Le motif de base de chacune de ces frises doit être composé exclusivement de ce motif initial et d'une ou plusieurs images de celui-ci par une symétrie axiale, ou centrale, ou glissée.

Les fiches 50 et 51 illustrent des réalisations effectuées à partir de gouttes et de feuilles, mais on peut démarrer avec un motif beaucoup plus simple. Ce travail est facilement réalisable avec le kit standard d'*Apprenti Géomètre*.

Une discussion au sein de la classe fera apparaître que, si le motif de départ présente certaines symétries, il est impossible de fabriquer les sept types (notamment le type T).

2.4 Sept types de frises et pas plus

Le but de cette section est de justifier, même de manière incomplète, qu'il n'y a que sept types de frises. Les raisonnements exposés ci-après ne sont pas accessibles à tous les élèves, et ne seront abordés que si la classe le permet. Les isométries y sont implicitement perçues comme des transformations du plan, ce qui est difficile à concevoir pour pas mal d'élèves. De plus, la compréhension de ce qui suit repose sur un classement des isométries du plan qui sera établi sans que son caractère exhaustif soit démontré. Voici ce classement.

1. Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.
   Une translation n'a pas de point fixe.
   Une rotation a un point fixe : le centre de la rotation.
2. Tout retournement du plan est soit une symétrie axiale, soit une symétrie glissée.
   Une symétrie axiale a une droite de points fixes : l'axe de symétrie.
   Une symétrie glissée n'a pas de point fixe, mais une droite globalement fixe, qui « glisse » sur elle-même : l'axe de la symétrie glissée.

L'analyse des frises du type CHV a montré qu'une frise symétrique par rapport à un axe vertical et par rapport à un axe horizontal est invariante pour le demi-tour dont le centre se trouve à l'intersection des deux axes. On pourrait penser qu'une figure conservée par deux des isométries évoquées ci-dessus est nécessairement invariante pour la troisième. Cette intuition peut être vérifiée pour les figures finies, mais se révèle fausse en ce qui concerne les frises. En effet, nous avons exhibé plusieurs frises de type CV, invariantes pour des symétries d'axe vertical et pour des demi-tours mais qui n'ont pas d'axe de symétrie horizontal. On pourrait dès lors imaginer que, comme il y a des frises CV, il pourrait exister des frises CH, avec des centres de symétrie et un axe horizontal de symétrie, mais pas d'axe vertical. Or, on n'en trouve pas. Dans notre bibliothèque de frises, toutes les frises symétriques par rapport à leur axe médian et qui sont invariantes pour des demi-tours sont du type CHV. Cette constatation ne suffit pas à prouver que le type CH n'existe pas. C'est pourquoi, nous engageons les élèves à s'en assurer.

> Une frise, symétrique par rapport à un axe horizontal et par rapport à un centre a-t-elle nécessairement un axe de symétrie vertical ?

Cette question peut être précisée par d'autres, destinées à guider la réflexion.

Où est situé le centre de symétrie par rapport à l'axe de symétrie horizontal ?

Si une frise est appliquée sur elle-même par une symétrie d'axe horizontal et par un demi-tour, le centre de rotation se trouve obligatoirement sur l'axe médian de la frise, donc sur son axe de symétrie horizontal. La frise est appliquée sur elle-même par la composée de ces deux isométries. Il s'agit d'un retournement, puisque c'est la composée d'un retournement et d'un déplacement.

Quelle est l'image par cette composée de la droite verticale passant par le centre ?

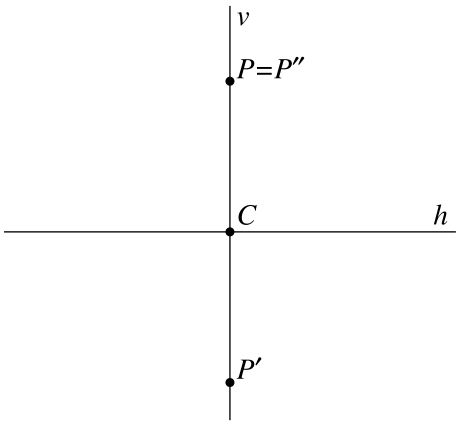


Fig. 91

La figure 91 montre

- un point P quelconque de la droite verticale ν,
- son image P' par la symétrie d'axe h (ou par la symétrie de centre C),
- son image P'' par la composée de la symétrie d'axe h et de la symétrie de centre C.

La composée est donc un retournement qui fixe chaque point de la droite ν, il ne peut s'agir que de la symétrie d'axe ν. Par conséquent, toute frise symétrique par rapport à un axe horizontal et par rapport à un demi-tour est aussi symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le centre.

Les frises CHV des figures 45, 46 et 76 illustrent ce cas.

Une frise, symétrique par rapport à un axe vertical et par rapport à un centre est-elle nécessairement invariante par une symétrie d'axe horizontal ou par une symétrie glissée ?

La situation est différente de celle de la question précédente. En effet, si une frise est appliquée sur elle-même par une symétrie d'axe vertical et par un demi-tour, le centre du demi-tour ne se trouve pas obligatoirement sur l'axe vertical. La frise est appliquée sur elle-même par la composée – un retournement – de ces deux isométries.

Quelle est l'image par cette composée de la droite horizontale passant par le centre ?

Lorsque le centre appartient à l'axe vertical, un raisonnement similaire au précédent indique que cette droite est fixe et dans ce cas, la frise est symétrique par rapport à son axe médian horizontal ; est du type CHV.

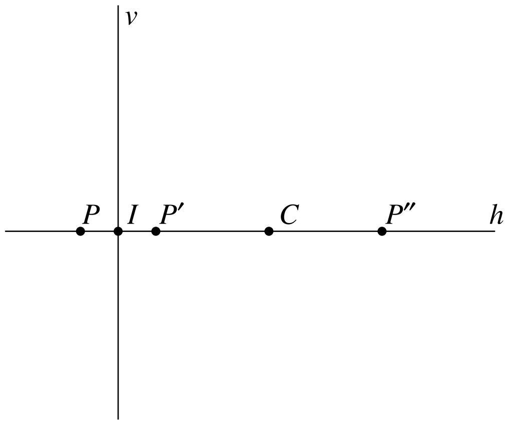


Fig. 92

La figure 92 montre ce qui se passe dans le cas contraire. On y voit

- le point I, point d'intersection de la droite horizontale h et de la droite verticale ν,
- un point P quelconque de la droite horizontale h,
- son image P' par la symétrie d'axe ν,
- l'image P'' de P' par la symétrie de centre C, ou encore l'image de P par la composée de la symétrie d'axe ν et de la symétrie de centre C.

Ceci montre que les points de la droite h ne sont pas fixes par cette composée. Il ne s'agit donc pas d'une symétrie d'axe h.

Montrer que la composée de la symétrie d'axe ν et de la symétrie de centre C est une symétrie glissée.

Comme $|PI| = |IP'|$ et que $|P'C| = |CP"|$, on a $|PP"| = 2|IC|$ pour tout point P de la droite h. La composée est un retournement tel que la droite h subit une translation de longueur $2|IP|$ dans sa propre direction. Il ne peut s'agir que de la symétrie glissée d'axe h.

Les frises CV des figures 81 et 82 illustrent ce cas.

Pour compléter les justifications, il faudrait encore établir que toute frise invariante par une symétrie d'axe vertical et une symétrie glissée est aussi invariante par une symétrie centrale ; et que toute frise invariante par une symétrie centrale et une symétrie glissée est aussi invariante par une symétrie d'axe vertical. Ce point est abordé à la page 316.

Remarque. – Dans une figure finie, cette situation ne peut jamais se produire, car l'axe de symétrie passe toujours par le centre de la figure. D'ailleurs, aucune figure finie n'est appliquée sur elle-même par une symétrie glissée.

On peut énoncer la propriété suivante.

Toute figure finie invariante par une symétrie axiale et par un demi-tour est symétrique par rapport à la droite passant par le centre et perpendiculaire à l'axe de la première symétrie.

3 Classer des frises

De quoi s'agit-il ? Classer des frises en fonction des isométries qui les laissent invariantes.

Enjeux Dégager une méthode de classement.

Approfondir l'analyse des frises invariantes par des symétries centrales.

Affiner la perception des frises invariantes par des symétries glissées.

Compétences transversales

On se reportera aux compétences de la section 1 ou 2 selon que l'activité est destinée à des élèves du premier ou du deuxième degré.

Compétences disciplinaires

Reconnaître, comparer des figures, les différencier et les classer sur base des éléments de symétrie.

Connaître les translations, les symétries, les rotations de figures dans le plan.

De quoi a-t-on besoin ? ***Matériel***

Les fiches 52 à 55, en annexe aux pages 373 à 376.

Des dessins de frises de différents types.

Des photocopies sur transparent des fiches 52 et 55.

Du matériel de dessin, des épingles.

Prérequis

Le classement des frises en sept types sur base des isométries qui les laissent invariantes.

3.1 Élaborer une méthode de classement

Comment s'y prendre ? Le professeur distribue la fiche 52, avec la consigne de classer les frises qui y sont représentées. Les élèves auront sans doute quelques difficultés à organiser une démarche efficace pour déterminer à quel type appartient une frise.

Bien sûr, on peut établir pour chacune la liste des isométries qui la conservent et retrouver à quel type cette liste correspond ; mais cette méthode n'est pas très performante.

On peut remarquer qu'il est possible de poser dès le départ une question qui restreint le champ des investigations à trois ou quatre types. Ainsi, si on commence par s'interroger sur l'invariance de la frise par une symétrie centrale, une réponse positive indique que la frise est de type C, CV ou CHV ; sinon, elle est de type H, V, G ou T. On s'arrange ensuite pour poser des questions telles que la réponse ≪ oui ≫ débouche sur un seul type, et la réponse ≪ non ≫ sur la poursuite de la recherche, et ce jusqu'au moment où il ne reste qu'une possibilité.

Suite à ces quelques remarques, on demande aux élèves d'établir un algorithme de classement.

Établir un organigramme de classement pour les frises.

Le résultat attendu est un graphe comme celui de la figure 93, par exemple.

Les questions à poser sont ici symbolisées de la manière suivante :
S_c ? signifie « La frise est-elle invariante par une symétrie centrale ? »,
S_h ? signifie « La frise est-elle invariante par la symétrie d'axe horizontal (axe médian) ? »,
S_v ? signifie « La frise est-elle invariante par une symétrie d'axe vertical (perpendiculaire à l'axe médian ? »,
S_g ? signifie « La frise est-elle invariante par une symétrie glissée ? ».

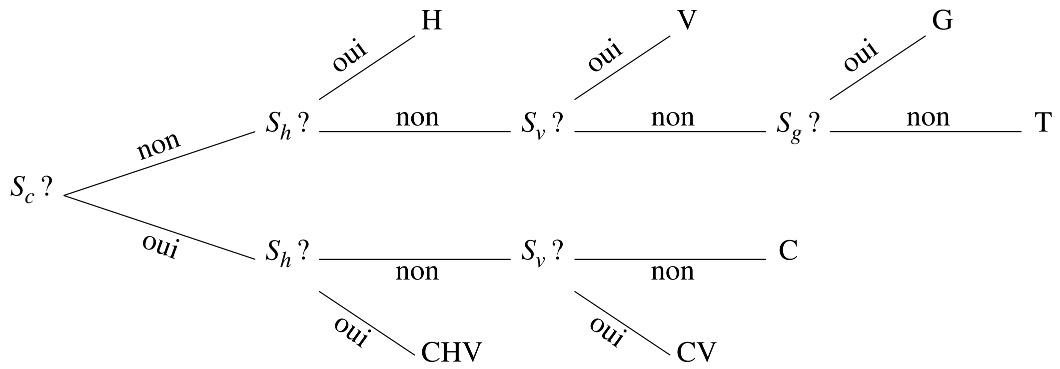


Fig. 93

Une autre procédure consiste à poser d'abord la question de la présence d'un axe de symétrie vertical. Si la frise est invariante par une symétrie d'axe vertical, elle est de type V, CV ou CHV ; sinon elle est de type H, C, G ou T. On obtient alors l'organigramme de la figure 94.

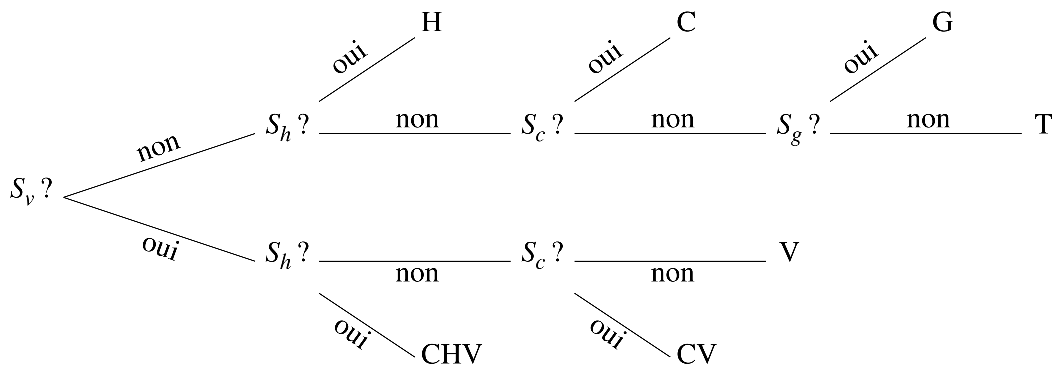


Fig. 94

L'activité se termine par la détermination du type des frises des fiches 52 à 54, en utilisant l'un ou l'autre de ces deux algorithmes de classement. D'autres frises apportées par les élèves fourniront des exercices supplémentaires.

3.2 Déterminer les centres de symétrie

Comment s'y prendre ?

Si les élèves perçoivent assez facilement la position des axes de symétries d'une frise, il n'en va pas de même pour les centres. Sauf pour les frises de type CHV dont les centres se trouvent aux points d'intersection de l'axe médian horizontal avec les axes verticaux, la détermination des centres des frises invariantes par une symétrie centrale peut poser problème.

L'utilisation du transparent permet de s'assurer qu'une frise est de type C ou CV sans connaître la position des centres. On fait tourner le transparent d'un demi-tour, puis on ajuste sa position pour vérifier la coïncidence de la frise de papier et de sa copie sur transparent. La détermination du centre peut se faire par tâtonnements en utilisant une épingle qui marque le centre de rotation. Pour se dégager de cette méthode empirique, on propose un problème préliminaire.

Comment déterminer le centre de symétrie d'une figure.

On peut rappeler la construction de l'image d'un point par une symétrie centrale ou rotation d'un demi-tour.

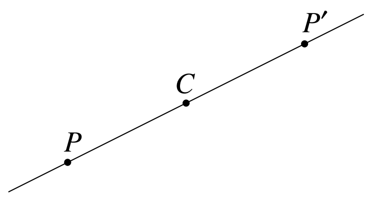


Fig. 95

Si P est un point quelconque du plan et C le centre de symétrie, l'image P' de P par la symétrie centrale de centre C est situé sur la droite PC, à la même distance de C que P mais de l'autre côté. Le centre C se trouve donc au milieu du segment $[PP']$.

Cette dernière observation permet de dégager une méthode pour déterminer un centre de symétrie éventuel ; on repère un point caractéristique de la figure et le point qui serait son image. Le centre de symétrie, s'il existe, se trouve au milieu du segment qui joint ces deux points. Il reste alors à vérifier que la figure toute entière est bien symétrique par rapport à ce milieu.

Appliquer cette méthode pour découvrir les centres de symétrie de la frise de la figure 96.

Fig. 96

En marquant les milieux des segments joignant des sommets correspondants des petits carrés, comme à la figure 97, on fait apparaître les centres des deux familles, marqués respectivement par des petits cercles pleins et des petits cercles vides.

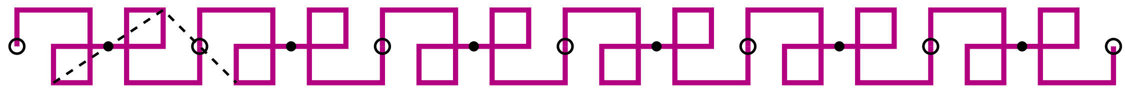


Fig. 97

Prolongement possible Le professeur qui le souhaite peut consolider les acquis et affiner la perception des frises du type G en proposant la fiche 55 à titre d'exercice.

> Parmi les frises de la fiche 55, déterminer à vue celles qui sont invariantes par une symétrie glissée. Utiliser ensuite le transparent pour vérifier.

Après discussions éventuelles, le recours aux transparents ne laisse aucun doute : les frises F1, F3, F4 et F7 sont invariantes par une symétrie glissée. Pour chacune d'entre elles, notons t_f la translation minimale, de gauche à droite, qui laisse la frise invariante et t_g la *translation du glissement* (c'est-à-dire, rappelons-le, la plus petite translation, de gauche à droite, qui en composition avec la symétrie d'axe médian horizontal, produit une symétrie glissée laissant la frise invariante).

> Encadrer un motif de base pour chaque frise.
> Tracer et comparer les vecteurs des translations t_f et t_g des frises F1, F3, F4 et F7.
> Préciser le type de chacune des frises.
> Marquer les centres de symétrie éventuels.

Analysons tout d'abord les trois premières frises stables par une symétrie glissée : F1 (figure 98), F3 (figure 99) et F4 (figure 100).

Fig. 98

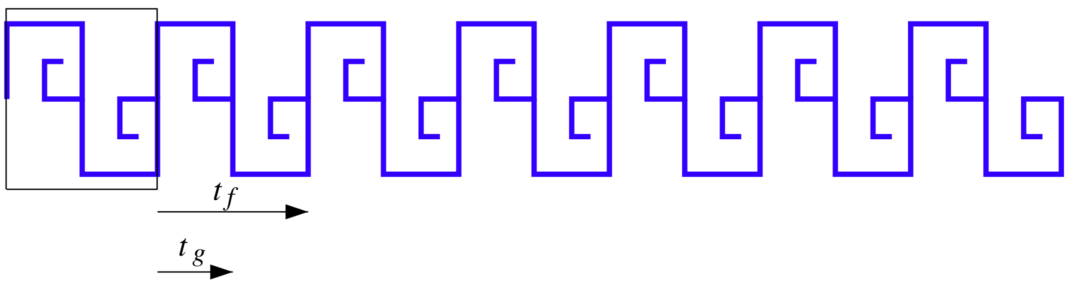


Fig. 99

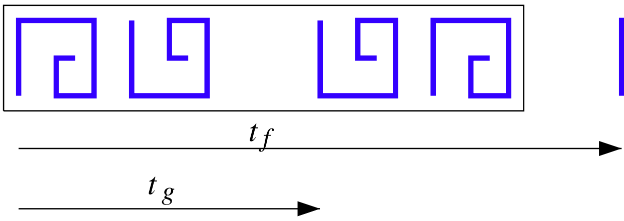


Fig. 100

On retrouve deux propriétés déjà évoquées auparavant :
– la translation t_g a pour longueur la moitié de la longueur de t_f,
– une symétrie glissée laissant la frise invariante est une composée de la symétrie d'axe médian horizontal avec une translation multiple impair de t_g.
Le matériel permet également de découvrir que la composée de deux symétries glissées laissant la frise invariante est une translation multiple de t_f ; les propriétés précédentes fournissent des arguments pour s'en convaincre.

Ces trois frises sont conservées par une famille de translations et par une famille de symétries glissées, aucune autre isométrie ne les laisse invariantes : elles sont du type G.

Quant à la frise F7 (figure 101), elle est conservée par une symétrie glissée, mais aussi par des symétries d'axe vertical et des demi-tours. Elle est de type CV.

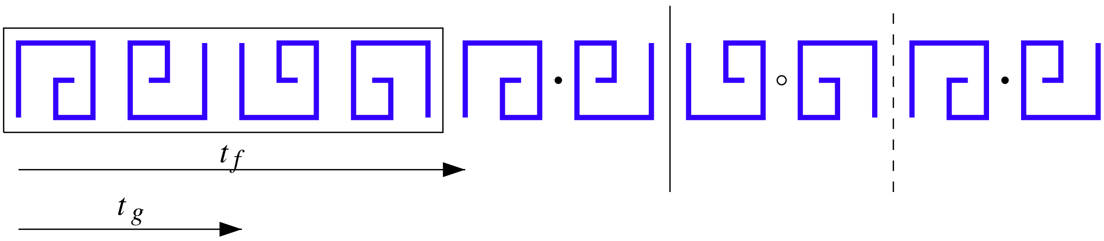


Fig. 101

La frise F2 est invariante par des symétries d'axe vertical, elle est du type V.

La frise F5 n'est pas invariante par une symétrie glissée, et pourtant, outre sa ressemblance (apparente !) avec la frise F4, on y voit un motif de base identique à celui de la frise F1 (le motif encadré dans les figures 98 et 102). On constate que la translation g de la symétrie glissée qui applique la première spirale de ce motif de base sur la seconde n'a pas pour longueur la moitié de la longueur de t_f (comme c'est le cas pour la frise F1).

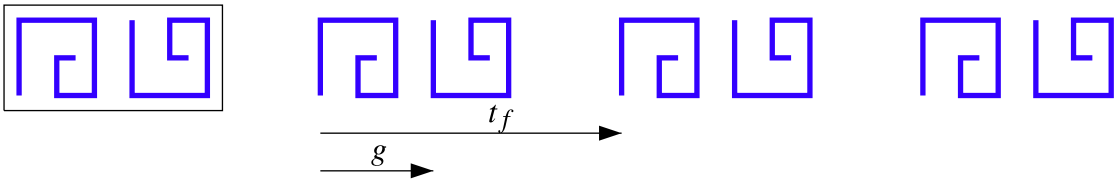


Fig. 102

La comparaison des longueurs de la translation minimale t_f et d'une « éventuelle » translation de glissement g (il faut que $g = \frac{1}{2}t_f$) constitue ainsi un moyen d'éviter le recours au transparent. Une autre méthode consiste à vérifier si la composée de la symétrie d'axe médian avec la translation $\frac{1}{2}t_f$ laisse la frise invariante. Ce n'est pas le cas pour la frise F5, aucune symétrie glissée ne l'applique sur elle-même. Comme elle n'a ni axe ni centre de symétrie, elle est de type T.

Quant à la frise F6, elle est du type C. En marquant les milieux des segments joignant les points extrêmes de deux spirales successives, comme à la figure 103, on fait apparaître les deux familles de centres.

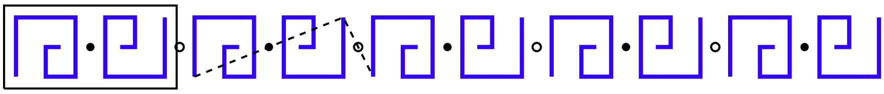


Fig. 103

4 Les sept groupes de frises

De quoi s'agit-il ? Découvrir le concept de groupe dans un contexte géométrique.

Enjeux Découvrir et démontrer quelques propriétés de la composition des isométries du plan.

Compétences transversales

Rédiger une explication, une démonstration.

Généraliser, structurer, synthétiser : reconnaître une propriété commune à des situations différentes ; formuler des généralisations et en contrôler la validité ; organiser des acquis dans une construction théorique.

Compétences disciplinaires

Organiser des propriétés d'un ensemble de figures en termes de structure de groupe.

Cette activité répond à ce qui est préconisé dans le texte qui introduit les compétences terminales en géométrie [2]. Voici l'extrait concerné.

Les translations, les symétries, les rotations sont utilisées pour décrire et organiser les propriétés des figures et aussi pour illustrer la notion de groupe à titre d'exemples et de contre-exemple.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Les fiches 56 à 60, en annexe aux pages 377 à 381.

Du matériel de dessin.

Prérequis

Le classement des frises en sept types sur base des isométries qui les laissent invariantes.

4.1 La structure de groupe

Comment s'y prendre ?

Le type d'une frise est déterminé par la liste des isométries qui la laissent invariante. Pour chaque type, cette liste a été établie par l'observation des axes et des centres de symétries, mais aussi par composition d'isométries déjà répertoriées. C'est le cas de la symétrie glissée qui a été découverte, pour les frises de type H, par la composée de la symétrie d'axe médian et d'une translation qui conserve la frise.

En effet, quand on effectue successivement deux mouvements qui appliquent une figure sur elle-même, le mouvement composé applique aussi la figure sur elle-même. En termes d'isométries, on peut formuler l'énoncé suivant (encore valable si on remplace *frise* par *figure*).

La composée de deux isométries laissant une frise invariante est une isométrie laissant cette frise invariante.

Ceci signifie que si, par composition, on découvre une isométrie qu'on n'avait pas encore identifiée, il faut l'ajouter à la liste.

La composition des isométries d'une frise est associative.

Autrement dit, quand on effectue successivement trois isométries d'une figure (ou plus), on peut les associer de différentes manières. En réalité, quand on effectue plusieurs isométries à la suite, on ne se préoccupe pas d'identifier les étapes intermédiaires. On compare la position initiale et la position finale de la figure, le résultat de la composition est l'isométrie qui applique l'une sur l'autre. Si on remplace deux isométries de la suite par leur composée, cela ne change évidemment rien au résultat final.

Pour chaque frise, nous avons identifié la translation minimale qui applique la frise sur elle-même. Il y en a une dans chaque sens : comme précédemment, notons t celle qui va de gauche à droite et $(-t)$ celle qui va de droite à gauche.

Quelle est la composée des deux translations t et $(-t)$?

Cette question permet d'introduire de manière naturelle la *transformation identique*, que l'on appelle encore *identité* et que nous noterons I. Elle apparaît ici comme la composée des deux translations minimales de sens contraires. Cette tranformation ramène chaque point de la frise dans sa position initiale. Si on ne considère que l'état initial et l'état final de la figure, elle consiste donc à ne pas bouger. Mais elle doit être prise en compte pour que la composée de deux isométries laissant la frise invariante soit toujours une isométrie laissant cette frise invariante (que nous nommerons plus simplement « isométrie de la frise »). On dit alors que l'ensemble des isométries de la frise (ou de toute autre figure) est *stable pour la composition.*

Notons $(-t) \circ t$ le mouvement composé de la translation $(-t)$ effectuée après la translation t. D'une manière générale, le symbole « $\circ$ » est celui de la composition de deux transformations, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ (« $\mathcal{T}_2$ après $\mathcal{T}_1$ ») étant le résultat de la composition[1] de la transformation $\mathcal{T}_1$ suivie de la transformation $\mathcal{T}_2$. En général, la composition n'est pas commutative, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ n'est pas forcément égale à $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$.

[1]Les raisons qui font écrire la composition des transformations dans cet ordre sont analogues à celles qui dictent l'écriture de la composition des fonctions : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

On peut alors écrire

$$t \circ (-t) = I = (-t) \circ t,$$

et comme, en général la composée de deux translations est une translation, on peut percevoir la transformation identique comme la translation *nulle*. Elle vient alors s'intégrer dans l'ensemble des translations qui appliquent la frise sur elle-même, toutes multiples de la translation minimale, en tant que translation $0\,t$.

Cette transformation identique joue un rôle particulier dans la composition, puiqu'en la composant avec une isométrie q quelconque, on a toujours

$$q \circ I = q = I \circ q.$$

On dit qu'elle est *neutre* pour la composition.

Il semble assez naturel de dire que la translation $(-t)$ est l'*inverse* de la translation t. Elle correspond au mouvement inverse, elle ramène la frise dans sa position initiale. D'une manière générale, la transformation inverse d'une transformation q, notée q^{-1}, est définie par la relation

$$q \circ q^{-1} = I = q^{-1} \circ q.$$

Avec cette nouvelle notation, on a $t^{-1} = -t$, ce qui signifie que la transformation inverse t^{-1} de la translation t est la translation $-t$, de même direction et de même longueur que la translation t, mais de sens contraire.

On peut dès lors se demander si les autres isométries laissant une frise invariante ont également une inverse.

Après avoir effectué une isométrie, peut-on en trouver une autre, appelée l'*inverse* de la première, qui ramène la frise dans sa position initiale ?

Il est facile de voir que l'identité, les symétries axiales et les symétries centrales (ou rotations d'un demi-tour) sont leur propre inverse.

Quelle est l'inverse d'une symétrie glissée ?

Introduisons quelques notations pour en parler plus facilement. Notons

h l'axe médian (horizontal) de la frise,

s_h la symétrie d'axe h,

g une translation de direction parallèle à h.

On vérifie qu'on a toujours

$$s_h \circ g = g \circ s_h,$$

cette composée est la symétrie glissée d'axe h et de glissement g ; notons-la s_g. Le problème est donc de trouver une isométrie, notée s_g^{-1} telle que

$$s_g \circ s_g^{-1} = I.$$

En imaginant le mouvement inverse, les élèves proposeront sans doute la symétrie glissée d'axe h et de glissement $(-g)$ c'est-à-dire $s_h \circ (-g) = (-g) \circ s_h$. Il reste à vérifier que

$$(s_h \circ g) \circ ((-g) \circ s_h) = I.$$

Comme $(-g) = g^{-1}$, et que la composition est associative, on peut écrire

$$s_h \circ (g \circ g^{-1}) \circ s_h = s_h \circ I \circ s_h = s_h \circ s_h = I,$$

puisque s_h est sa propre inverse.

L'inverse d'une symétrie glissée est donc la symétrie glissée de même axe et de glissement de translation inverse.

Propriétés de la composition des isométries des frises

1. La composée de deux isométries d'une frise est une isométrie de cette frise.
2. La composition des isométries d'une frise est associative. Cela signifie que, si on souhaite composer trois isométries, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat. En général, pour trois transformations p, q et r :

$$(r \circ q) \circ p = r \circ (q \circ p).$$

3. Il existe un neutre pour la composition, à savoir l'identité I. Cela signifie que si on la compose avec n'importe quelle isométrie, le résultat est cette même isométrie :

$$q \circ I = q = I \circ q.$$

4. Chaque isométrie d'une frise possède une inverse (notée q^{-1}), c'est l'isométrie avec laquelle il faut la composer pour obtenir l'identité :

$$q \circ q^{-1} = I = q^{-1} \circ q.$$

Ces quatre propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des isométries laissant une frise invariante forme un *groupe* pour la composition.

Chaque frise est caractérisée par l'ensemble des isométries qui la laissent invariante. Comme cet ensemble forme groupe pour la composition, on peut encore dire qu'une frise est caractérisée par son groupe d'isométries. On distingue donc sept *groupes de frises*.

$\mathcal{T}$ est le groupe d'une frise de type T, il ne contient que des translations.

$\mathcal{H}$ est le groupe d'une frise de type H, il ne contient que des translations, une symétrie d'axe médian et des symétries glissées.

$\mathcal{V}$ est le groupe d'une frise de type V, il ne contient que des translations, et des symétries d'axe perpendiculaire à l'axe médian.

$\mathcal{G}$ est le groupe d'une frise de type G, il ne contient que des translations et des symétries glissées.

$\mathcal{C}$ est le groupe d'une frise de type C, il ne contient que des translations et des symétries centrales.

$\mathcal{CHV}$ est le groupe d'une frise de type CHV, il ne contient que des translations, une symétrie d'axe médian, des symétries d'axe perpendiculaire à l'axe médian, des symétries centrales et des symétries glissées.

$\mathcal{CV}$ est le groupe d'une frise de type CV, il ne contient que des translations, des symétries d'axe perpendiculaire à l'axe médian, des symétries centrales et des symétries glissées.

4.2 Les générateurs du groupe

Comment s'y prendre ?

Le professeur distribue successivement les fiches 56 à 58, qui comportent des exercices où on demande de compléter une figure de telle manière qu'elle soit invariante par une ou plusieurs isométrie(s) donnée(s). La figure de départ est un motif en forme de triangle rectangle facile à reproduire à main levée sur du papier quadrillé.

Le groupe $\mathcal{T}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t.

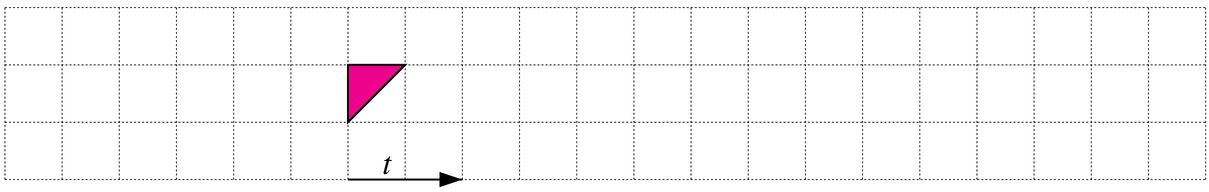


Fig. 104

Il faut ajouter l'image par t de l'unique motif de départ, qui lui-même doit être l'image par t d'un motif identique situé à sa gauche (en fait l'image du motif par t^{-1}). La figure ainsi complétée (figure 105) n'est cependant pas encore invariante par translation.

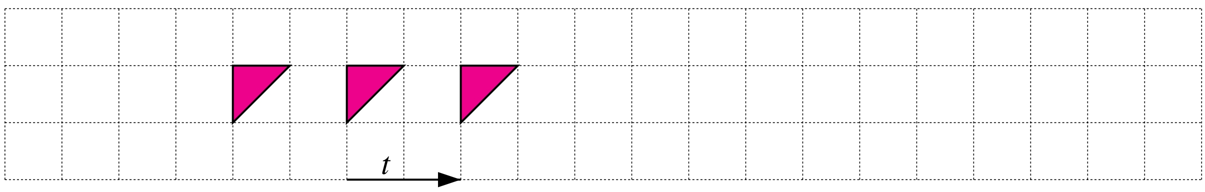


Fig. 105

En recommençant le raisonnement, on complète la figure indéfiniment vers la droite et vers la gauche. On obtient ainsi la frise de groupe $\mathcal{T}$ illustrée à la figure 106.

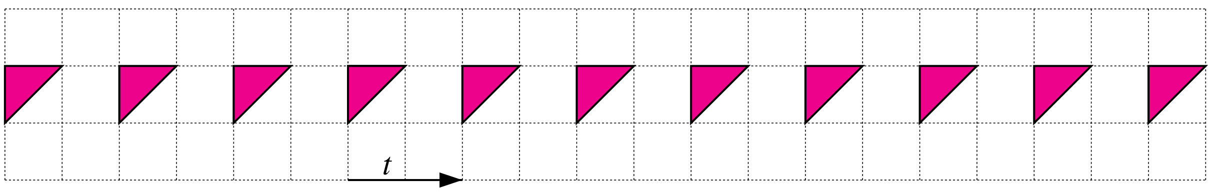


Fig. 106

Comme la frise a pu être construite à partir du motif et de la seule translation t, qui correspond à la translation minimale de gauche à droite laissant la frise invariante, on peut se demander si toutes les translations du groupe ne peuvent pas être obtenues à partir de t, par composition.

En effet, si le groupe contient t, il doit contenir t^{-1} et toute les composées que l'on peut obtenir à partir de ces deux translations inverses. On retrouve évidemment l'identité par la composée

$t \circ t^{-1}$. Notons

$$t \circ t = t^2, \quad t \circ t \circ t = t^3, \quad t \circ t \circ t \circ t = t^4, \ldots$$
$$t^{-1} \circ t^{-1} = t^{-2}, \quad t^{-1} \circ t^{-1} \circ t^{-1} = t^{-3}, \quad t^{-1} \circ t^{-1} \circ t^{-1} \circ t^{-1} = t^{-4}, \ldots$$

Les élèves découvriront et établiront sans peine que

$$t^2 = 2\,t, \quad t^3 = 3\,t, \quad t^4 = 4\,t, \ldots$$
$$t^{-2} = -2\,t, \quad t^{-3} = -3\,t, \quad t^{-4} = -4\,t, \ldots$$

et d'une manière générale,

$$t^i \circ t^j = t^j \circ t^i = t^{i+j} = (i+j)\,t,$$

pour toute valeur entière, positive ou négative de i et j. L'identité correspond à $t^i \circ t^{-i} = t^0 = 0\,t$.

Toutes les isométries laissant invariante la frise T ont été ainsi retrouvées, on dit que le groupe $\mathcal{T}$ des isométries qui la conservent est engendré par la translation t, ce qui est noté $\mathcal{T} = < t >$.

Précisons les notations et le vocabulaire.
$< t >$ est la notation désignant le *groupe engendré* par la translation t,
t est un *générateur* du groupe $< t >$.
Plus généralement,
$< p_1, p_2, p_3, \ldots >$ désigne le *groupe engendré* par les transformations p_1, p_2, p_3, … ;
p_1, p_2, p_3, … sont des *générateurs* du groupe $< p_1, p_2, p_3, \ldots >$.

Le groupe $\mathcal{H}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_h d'axe h.

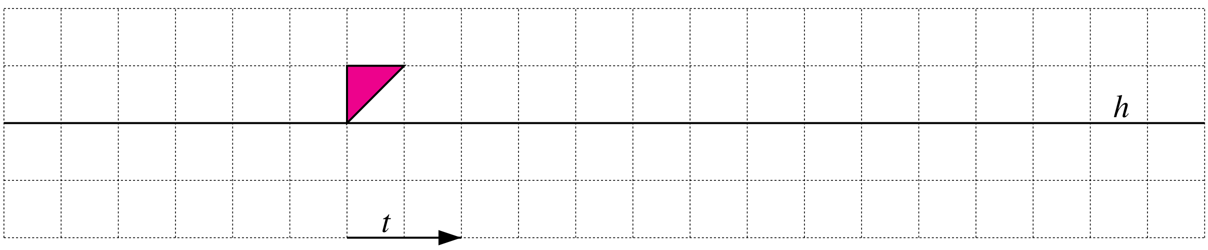


Fig. 107

On complète d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie d'axe h, puis par la translation t (figures 108 et 109).

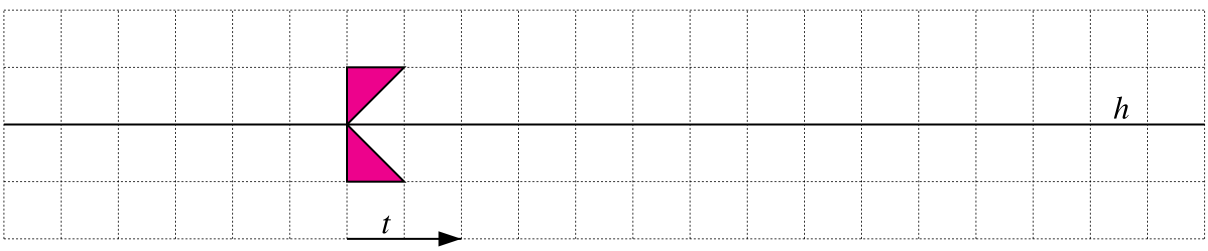


Fig. 108

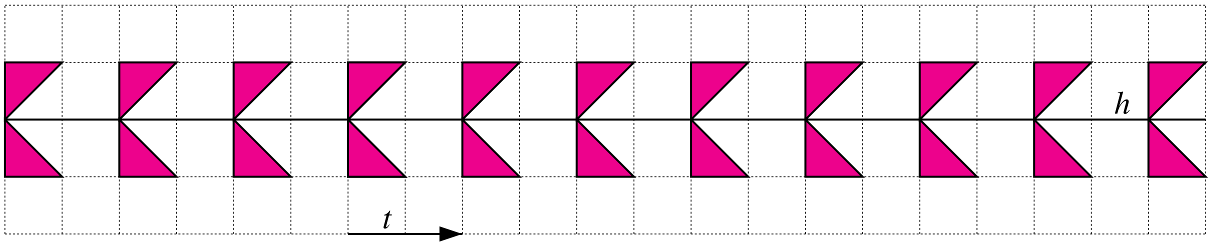


Fig. 109

On obtient finalement la frise de groupe $\mathcal{H}$, illustrée à la figure 109.

Si on procède dans l'ordre inverse, en complétant d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t, l'étape intermédiaire est illustrée à la figure 106.

Par quelles isométries le groupe $\mathcal{H}$ peut-il être engendré ?

La translation t engendre toutes les translations multiples de t ; en composant celles-ci avec la symétrie s_h, on obtient toute la famille des symétries glissées d'axe h et de glissement kt (k entier). Les générateurs du groupe sont donc t et s_h, on a $\mathcal{H} = < t, s_h >$

Le groupe $\mathcal{V}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par les symétries s_a et s_b, respectivement d'axes a et b.

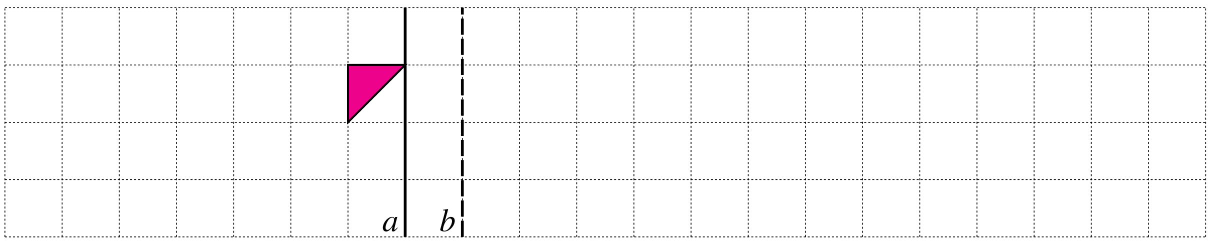


Fig. 110

On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie s_a,

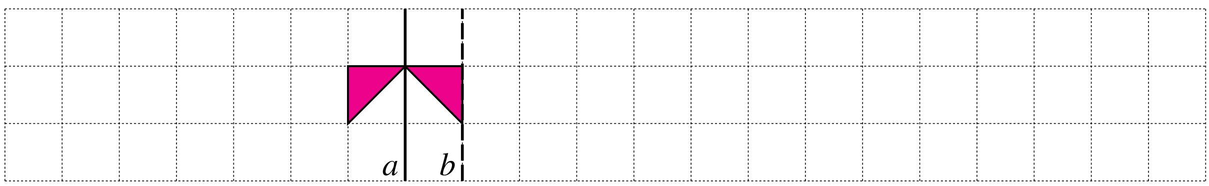


Fig. 111

puis par la symétrie s_b,

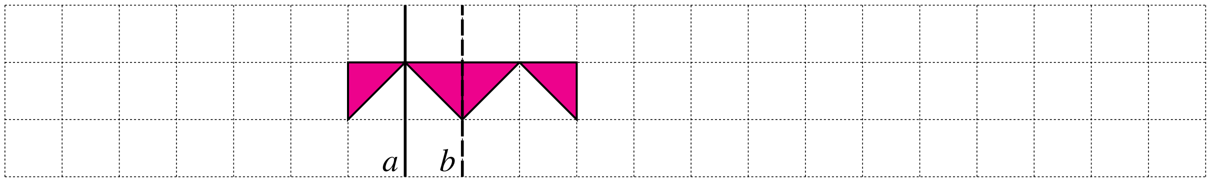


Fig. 112

et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_a et s_b.

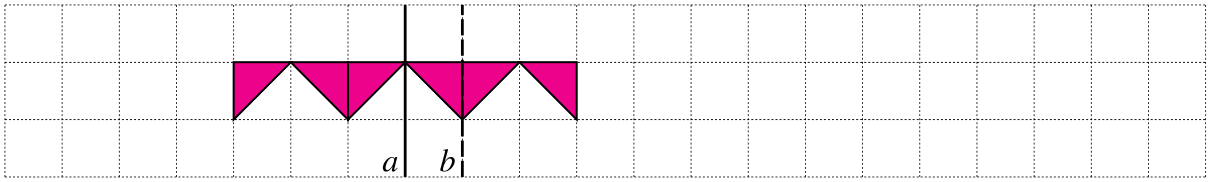


Fig. 113

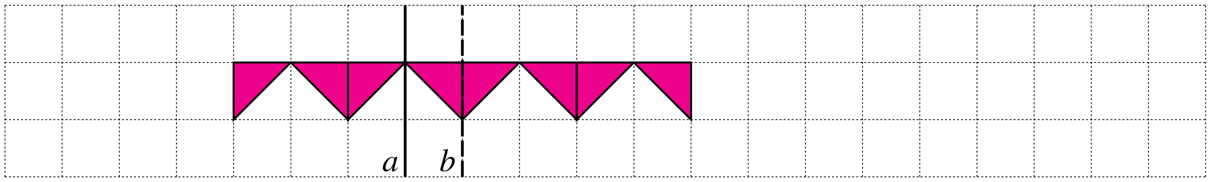


Fig. 114

On obtient finalement la frise de groupe $\mathcal{V}$, illustrée à la figure 115. Traçons sur la même figure la translation minimale t qui applique la frise sur elle-même. On observe que l'image du motif initial par la composée $s_b \circ s_a$ coïncide avec son image par la translation t.

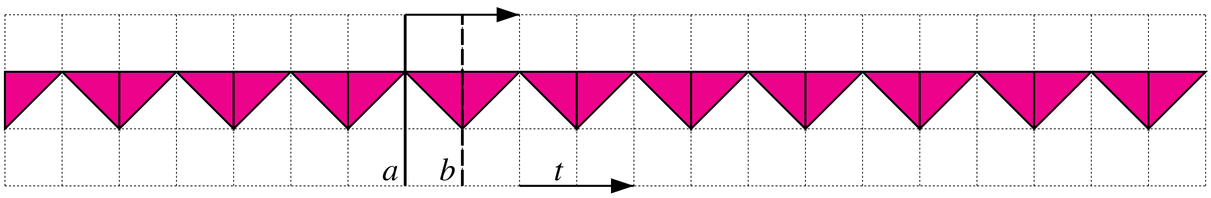


Fig. 115

C'est l'occasion d'étudier de manière plus générale la composition de deux symétries d'axes parallèles.

Montrer que la composée des symétries d'axes parallèles a et b est une translation. Préciser de quelle translation il s'agit.

Construisons, comme le montre la figure 116, l'image d'un point P quelconque du plan, par la composée $s_b \circ s_a$. Sur cette figure,

- P' est l'image de P par la symétrie s_a d'axe a,
- P'' est l'image de P' par la la symétrie s_b d'axe b, ou encore l'image de P par la composée $s_b \circ s_a$ de la symétrie d'axe a suivie de la symétrie d'axe b,

– les points A et B sont les points d'intersection de la droite PP'' avec les axes a et b.

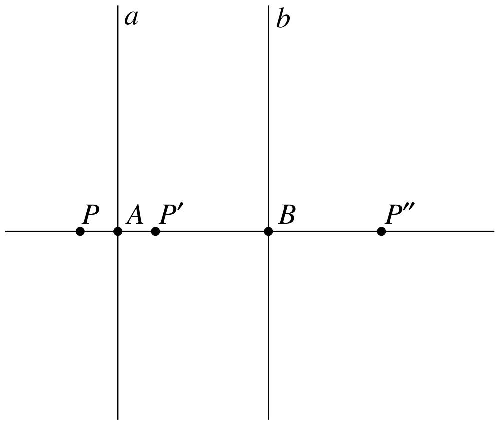


Fig. 116

Puisque la droite PP'' est perpendiculaire aux axes a et b, la longueur $|AB|$ est la distance qui sépare ces deux axes de symétrie. Comme $|PA| = |AP'|$ et que $|P'B| = |BP"|$, on a $|PP"| = 2|AB|$ pour tout point P du plan. Ainsi la composée $s_b \circ s_a$ est un déplacement tel que $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$. Il s'agit donc de la translation dont le vecteur est perpendiculaire aux axes a et b, de longueur double de la distance entre les axes et dont le sens va de a vers b. Notons que la composée $s_a \circ s_b$ est la translation inverse de la précédente, de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

Pour la frise de la figure 115, on a donc

$$s_b \circ s_a = t \quad \text{et} \quad s_a \circ s_b = t^{-1}.$$

La composition de deux symétries d'axes parallèles n'est donc pas commutative. On a aussi

$$s_b \circ s_a \circ s_a = t \circ s_a \quad \text{et donc} \quad s_b = t \circ s_a,$$

puisque s_a est sa propre inverse. De même,

$$s_b \circ s_b \circ s_a = s_b \circ t \quad \text{et donc} \quad s_a = s_b \circ t.$$

Le groupe $\mathcal{V}$ peut être engendré par deux symétries d'axe vertical : $\mathcal{V} = < s_a, s_b >$, ou par une symétrie d'axe vertical et une translation : $\mathcal{V} = < s_a, t >$. Les symétries du groupe sont obtenues par composition de s_a avec les translations engendrées par t.

Le groupe $\mathcal{CHV}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par les symétries s_a et s_h, respectivement d'axe a et h.

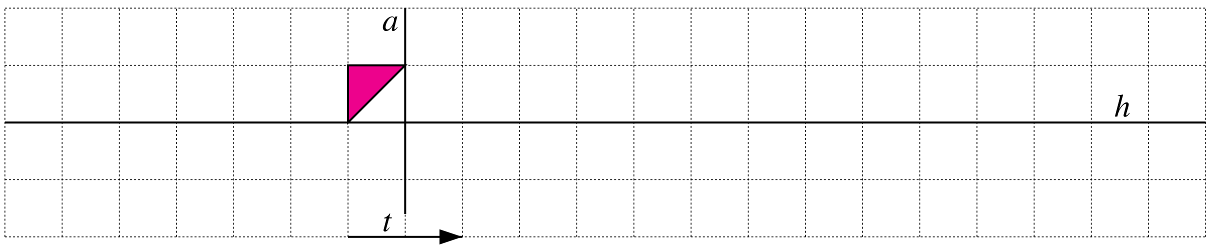


Fig. 117

Nous illustrons une des démarches possibles. Quel que soit l'ordre dans lequel on procède pour compléter la figure, on obtient toujours finalement la frise de type $\mathcal{CHV}$ de la figure 120.

Complétons tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie s_a,

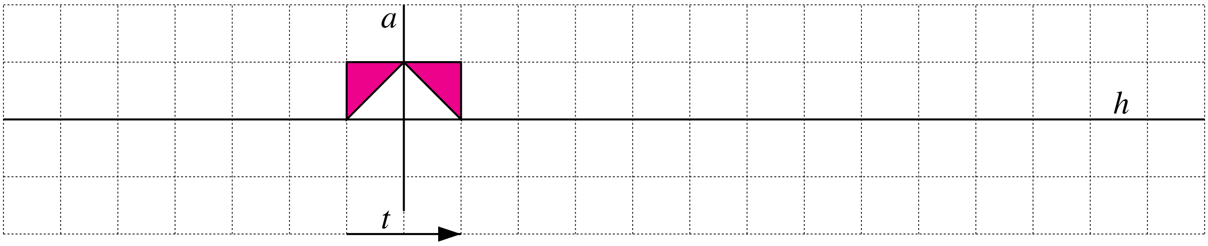


Fig. 118

puis par la symétrie s_h,

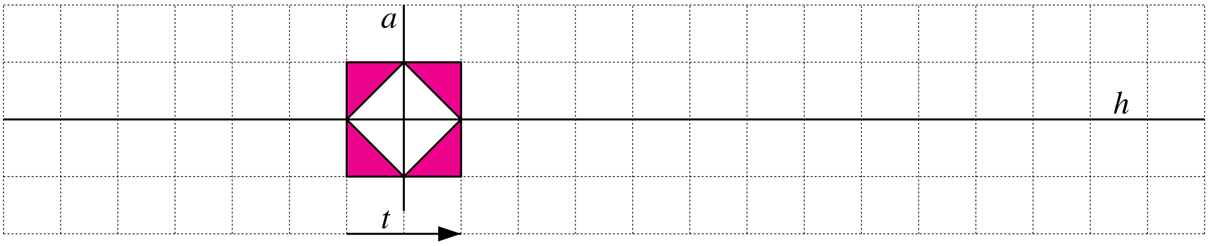


Fig. 119

et finalement par la translation t.

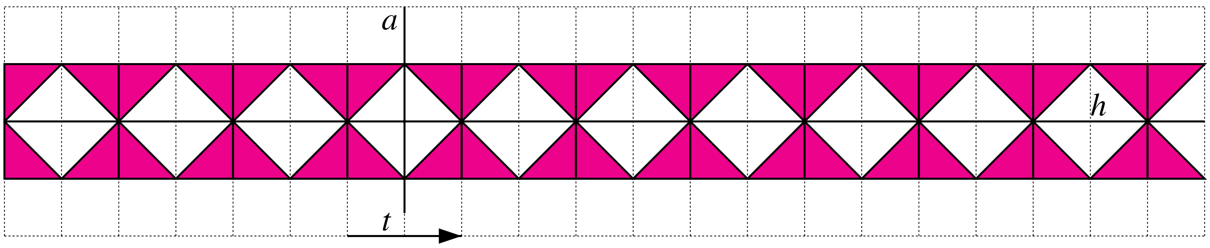


Fig. 120

Les élèves disposent de tous les éléments pour justifier que $\mathcal{CHV} = < t, s_a, s_h >$:

– la translation t engendre toutes les translations du groupe, les translations kt multiples de t,
– les symétries glissées sont obtenues par composition de s_h avec les translations du groupe,
– les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations du groupe,
– les symétries centrales sont obtenues par composition de s_h avec les symétries d'axe vertical.

Le groupe $\mathcal{G}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g d'axe h et de glissement g.

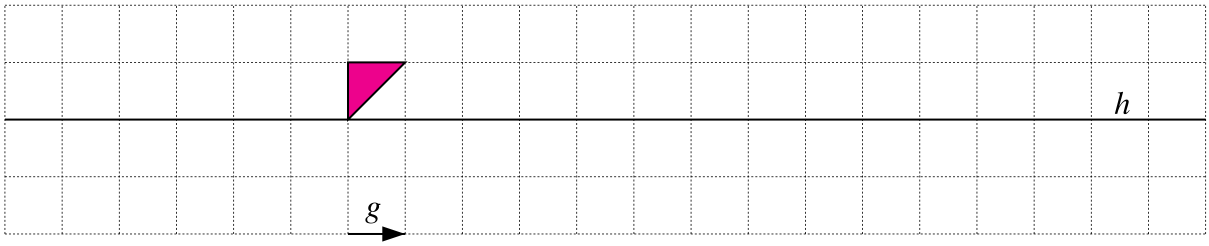


Fig. 121

Complétons tout d'abord la figure en ajoutant un triangle « retourné » à gauche (celui dont le motif initial est l'image par la symétrie glissée s_g), et un autre à droite (l'image du motif initial par s_g).

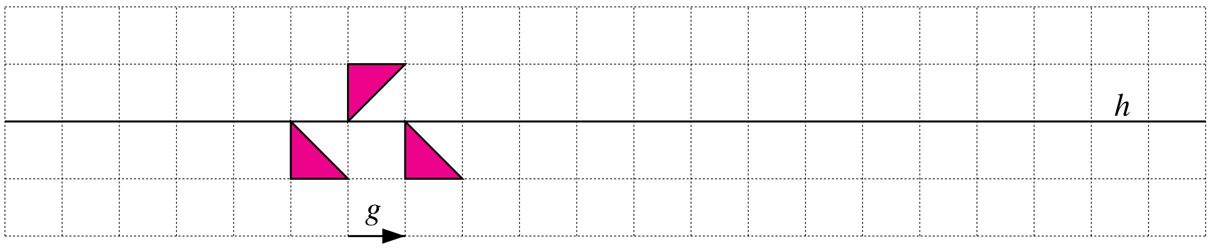


Fig. 122

Pour obtenir une figure invariante par la symétrie glissée, il faut prolonger indéfiniment dans les deux sens jusqu'à l'obtention de la frise de la figure 124.

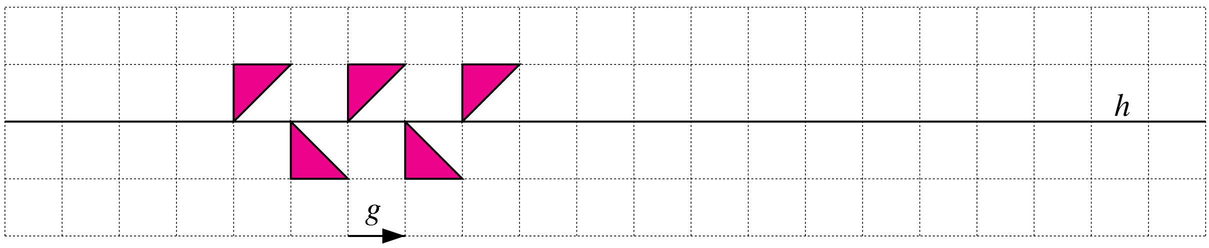


Fig. 123

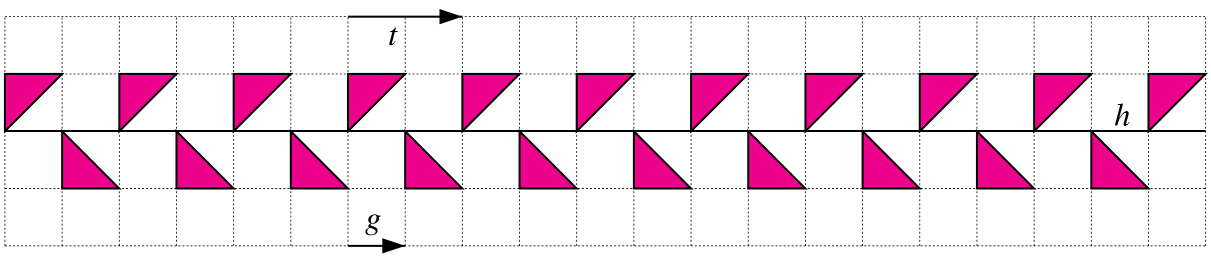


Fig. 124

On a

$$s_g^2 = s_g \circ s_g = g \circ s_h \circ s_h \circ g = g^2 = 2g,$$

c'est la translation minimale t qui applique la frise sur elle-même. Les translations du groupe sont les puissances d'exposants pairs de s_g, les symétries glissées sont les puissances d'exposants impairs. On conclut que $\mathcal{G} = < s_g >$.

Le groupe $\mathcal{C}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_C de centre C.

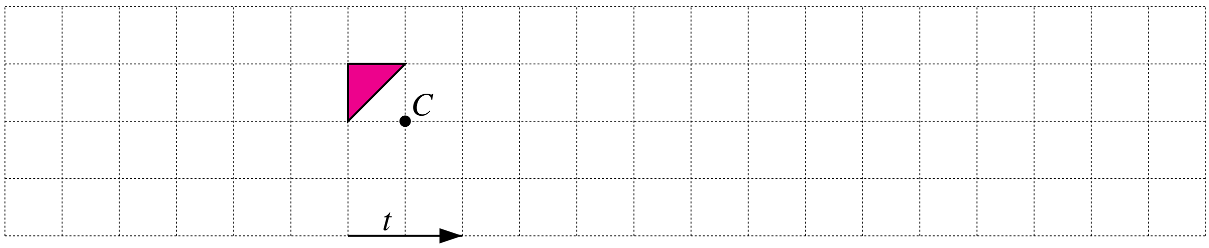


Fig. 125

On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C,

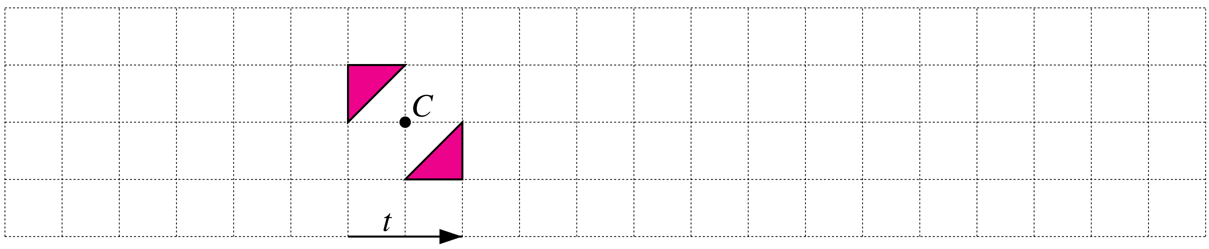


Fig. 126

puis par la translation t.

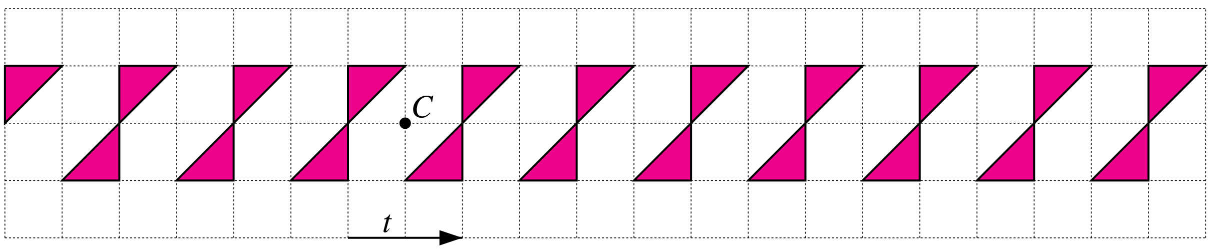


Fig. 127

La composée $s_D \circ s_C$ de deux symétries centrales de centres C et D est la translation t de vecteur $2\overrightarrow{CD}$. On peut demander aux élèves d'établir cette propriété et d'en déduire que les symétries centrales sont obtenues par composition de la symétrie s_C avec les translations du groupe.

Les élèves disposent alors de tous les éléments pour justifier que $\mathcal{C} = < t, s_C >$.

Le groupe $\mathcal{CV}$

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.

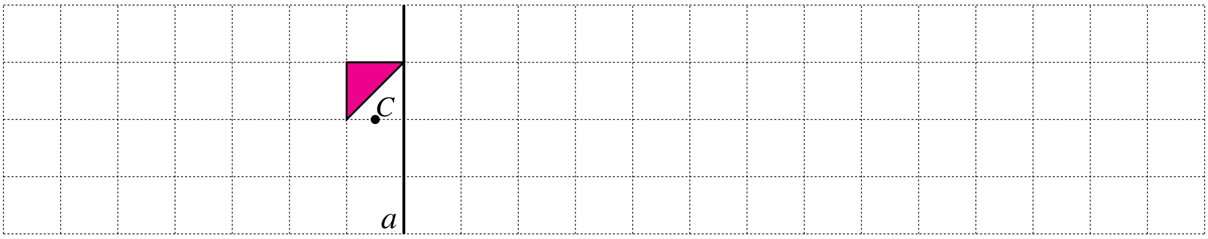


Fig. 128

On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C, puis par la symétrie s_a d'axe a,

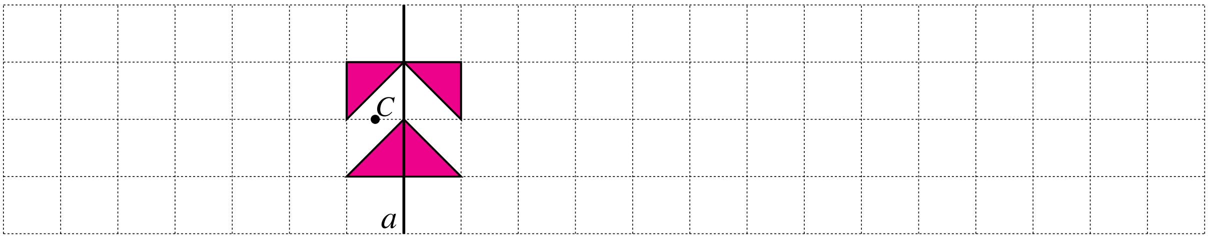


Fig. 129

et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_C et s_a, jusqu'à l'obtention de la frise de la figure 132.

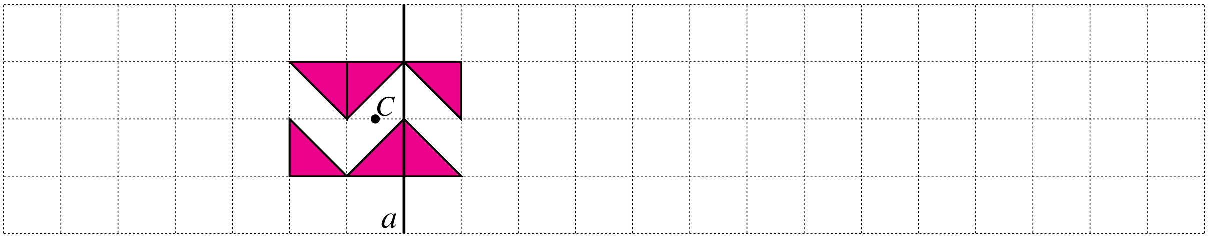


Fig. 130

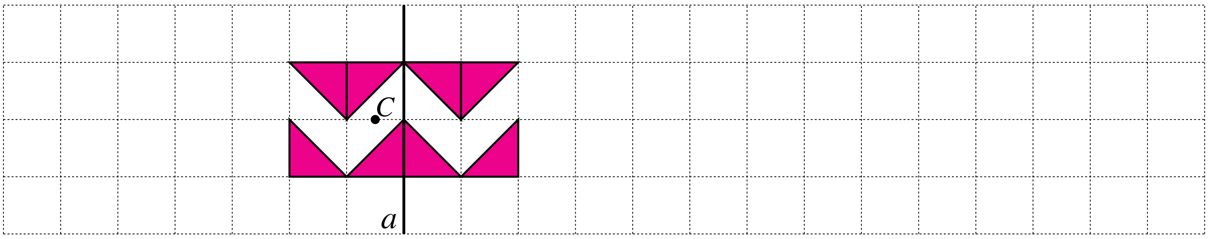


Fig. 131

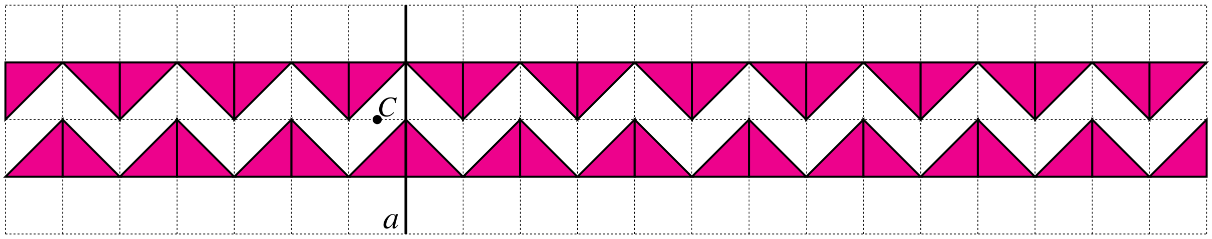


Fig. 132

Ajoutons sur la figure l'axe médian h, la translation de glissement g et la translation t. La symétrie glissée $s_g = s_h \circ g = g \circ s_h$ applique la frise sur elle-même, ainsi que la translation $t = s_g^2$.

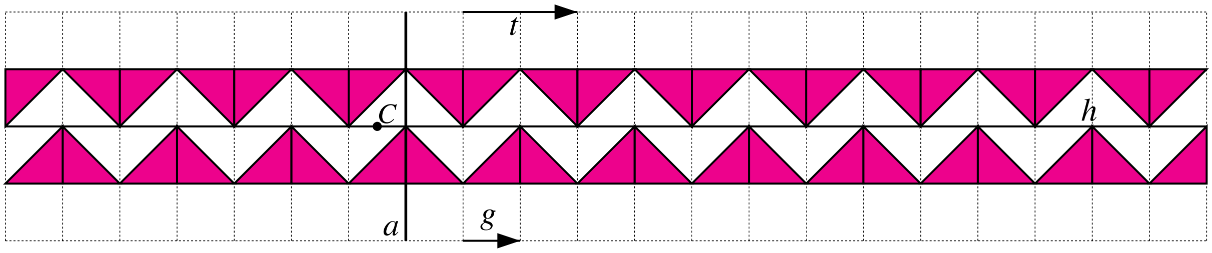


Fig. 133

On a $s_g = s_a \circ s_C$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{CV} = < s_C, s_a >$:
– par la composition de s_a et s_C, on obtient la symétrie glissée s_g,
– les symétries glissées sont obtenues comme puissances à exposant impair de s_g,
– les translations kt sont obtenues comme puissances à exposant pair de s_g,
– les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations,
– les symétries centrales sont obtenues par composition de s_C avec les translations.

Prolongement possible

La fiche 58 (page 379) montre qu'on obtient la même frise à partir du même triangle initial, soit en complétant la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g et par la symétrie s_C de centre C, soit en la complétant pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g et par la symétrie s_a d'axe a.

Le groupe $\mathcal{CV}$ peut aussi être engendré par s_g et s_C ou par s_g et s_a. En effet, comme $s_a \circ s_C = s_g$, on a aussi :

$$s_a \circ s_a \circ s_C = s_a \circ s_g \quad \text{et donc} \quad s_C = s_a \circ s_g,$$

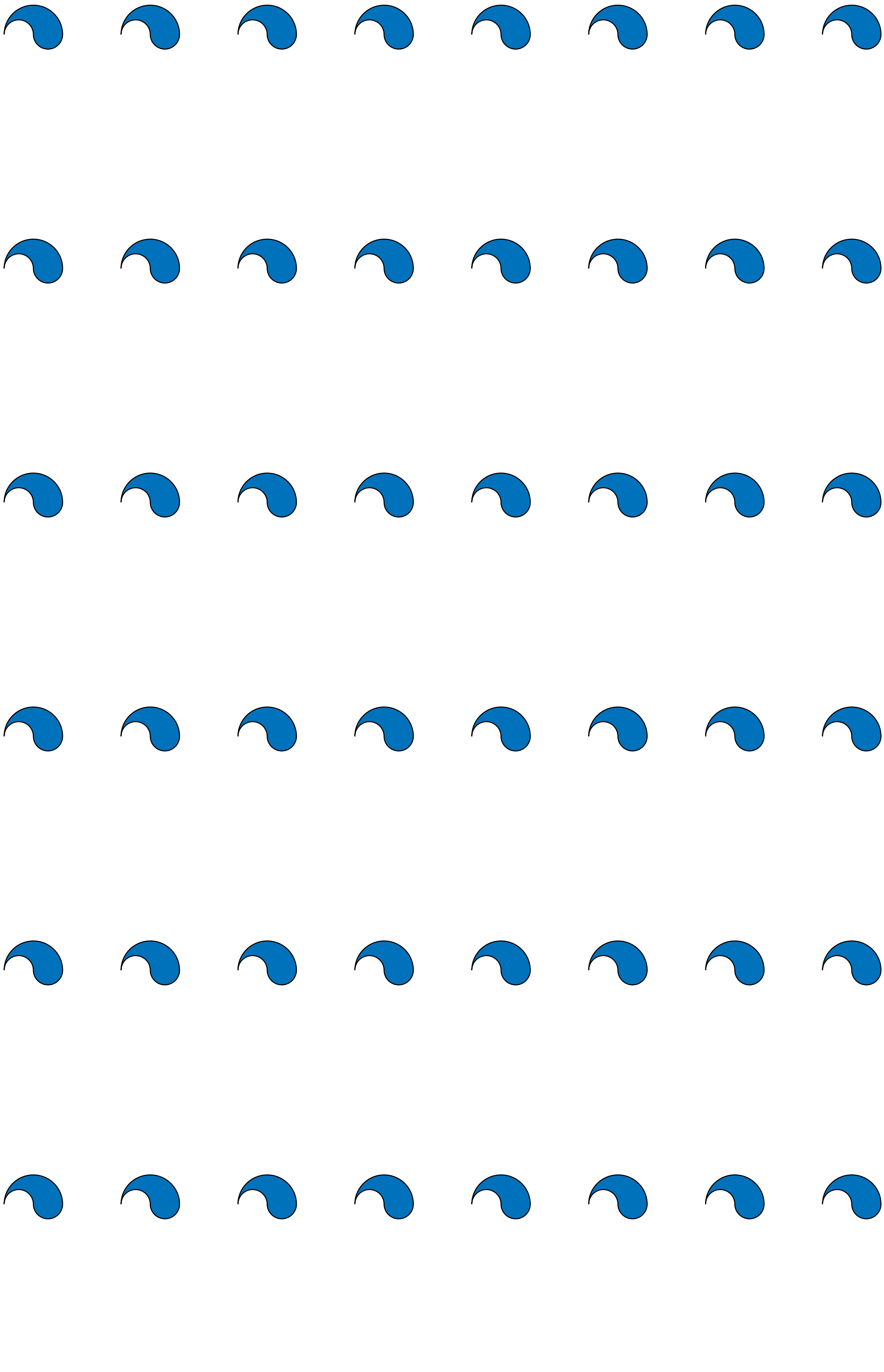
$$s_a \circ s_C \circ s_C = s_g \circ s_C \quad \text{et donc} \quad s_a = s_g \circ s_C.$$

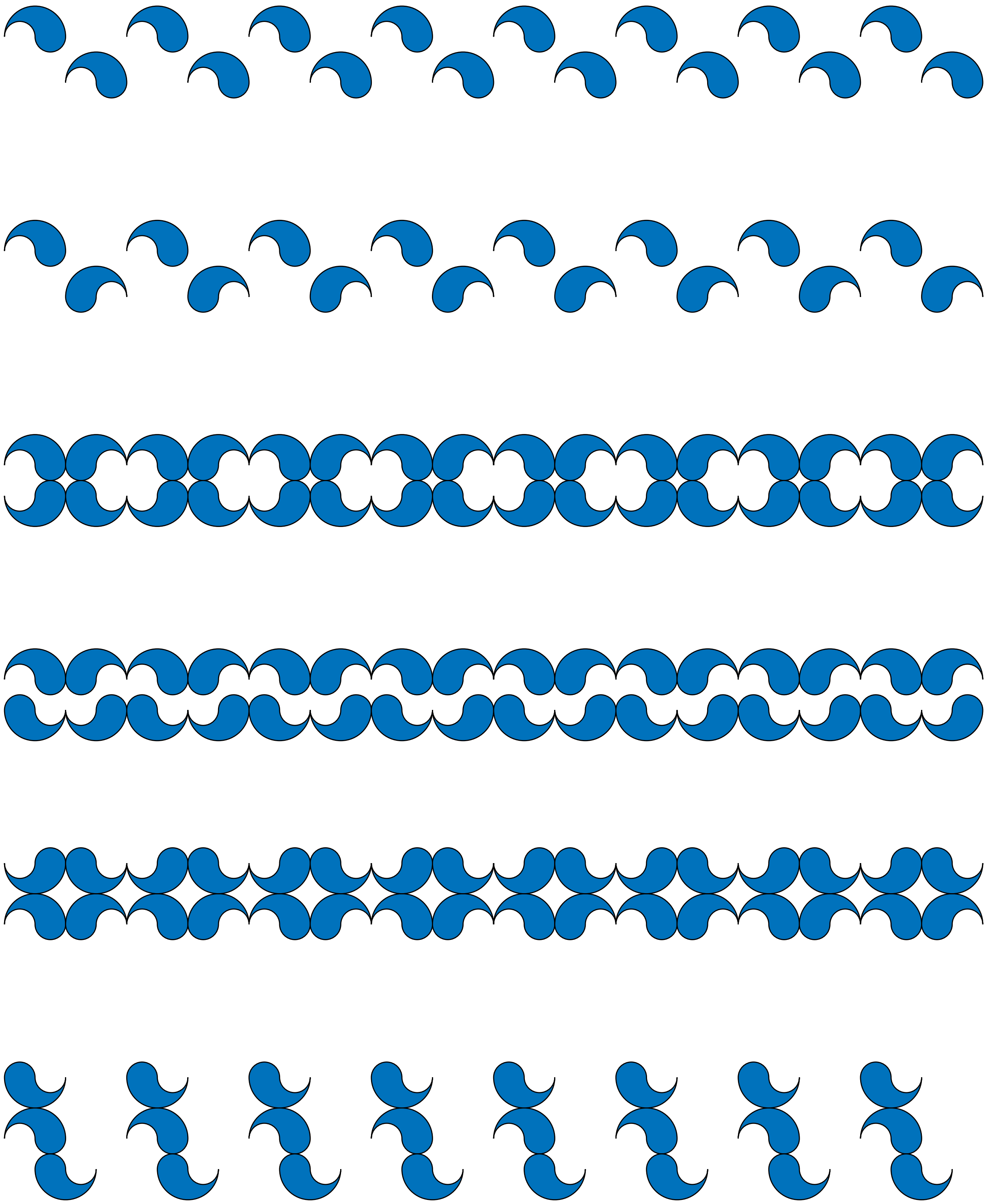
Le dernier exercice de la fiche montre qu'en modifiant la position du centre de symétrie, on obtient une autre frise assez différente d'aspect, mais également de type CV.

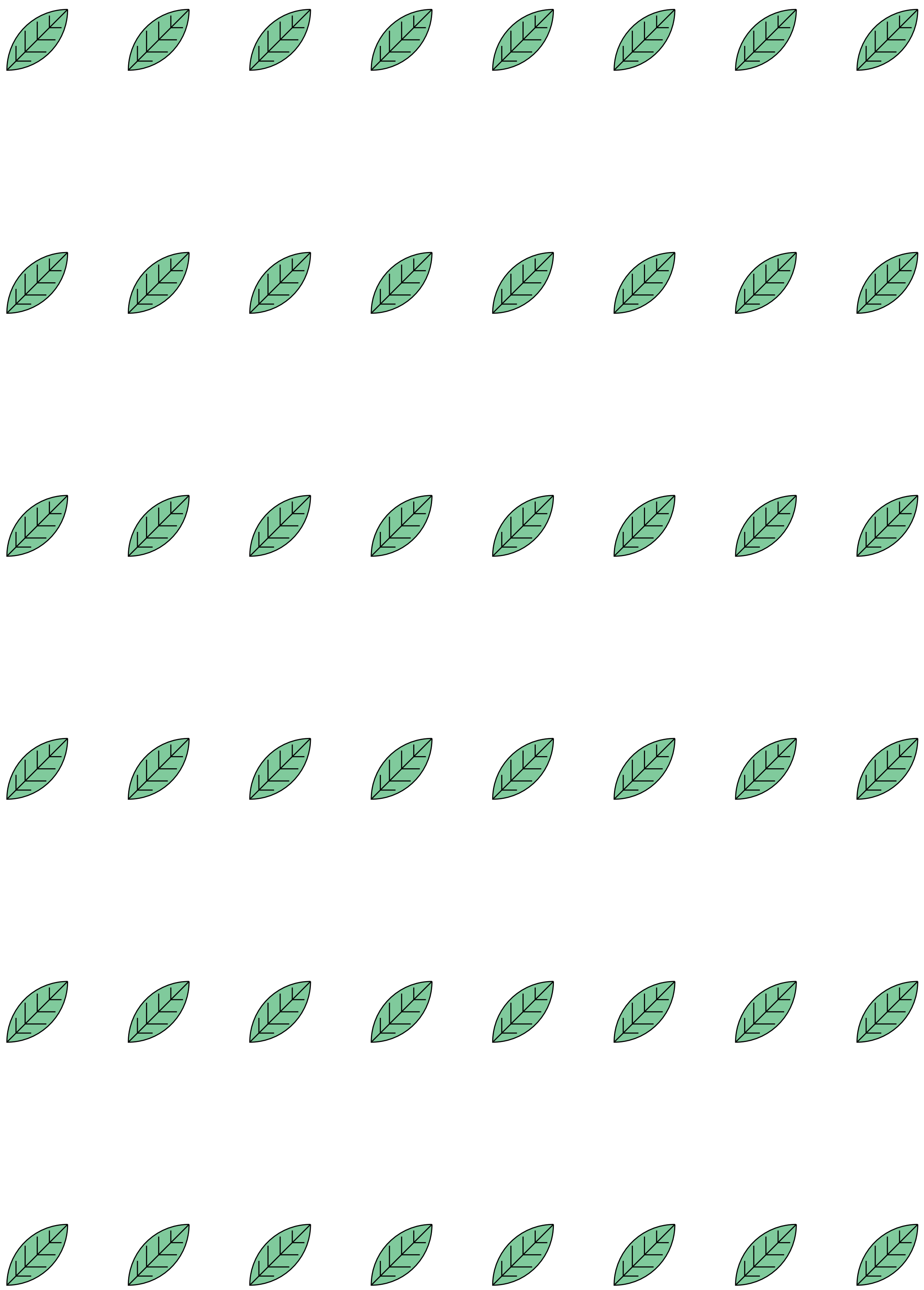
La fiche 59 récapitule les sept frises construites à partir du triangle rectangle. Quant aux fiches 60 et 61, elles proposent d'autres exercices de construction et leur solution.

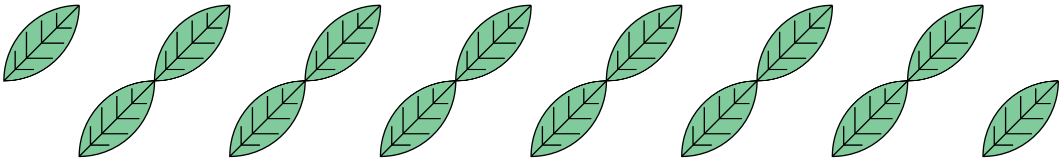
Annexe II

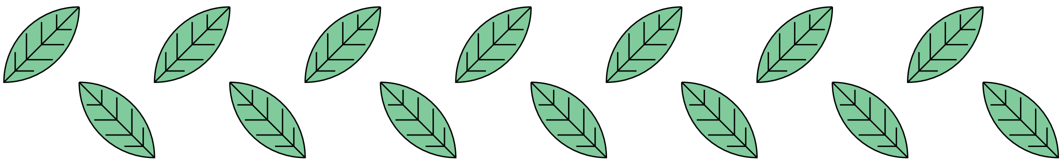
Fiches à photocopier

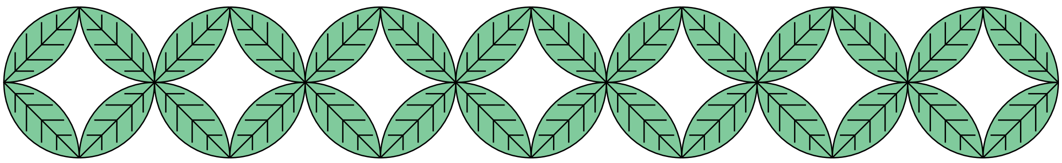


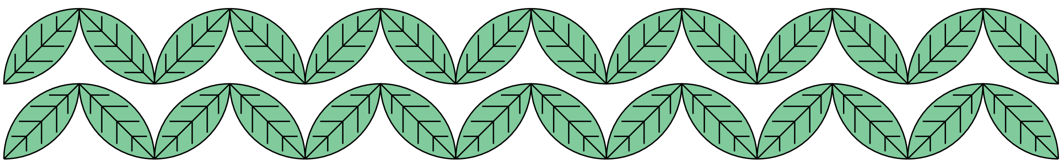


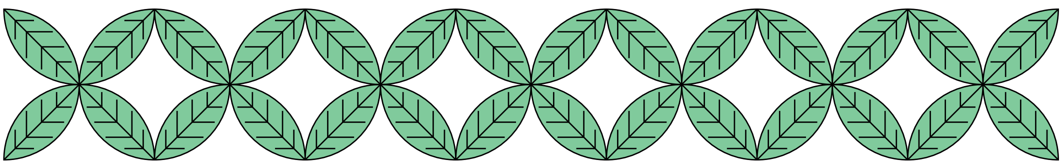


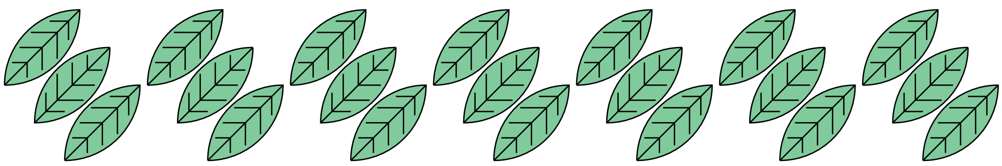




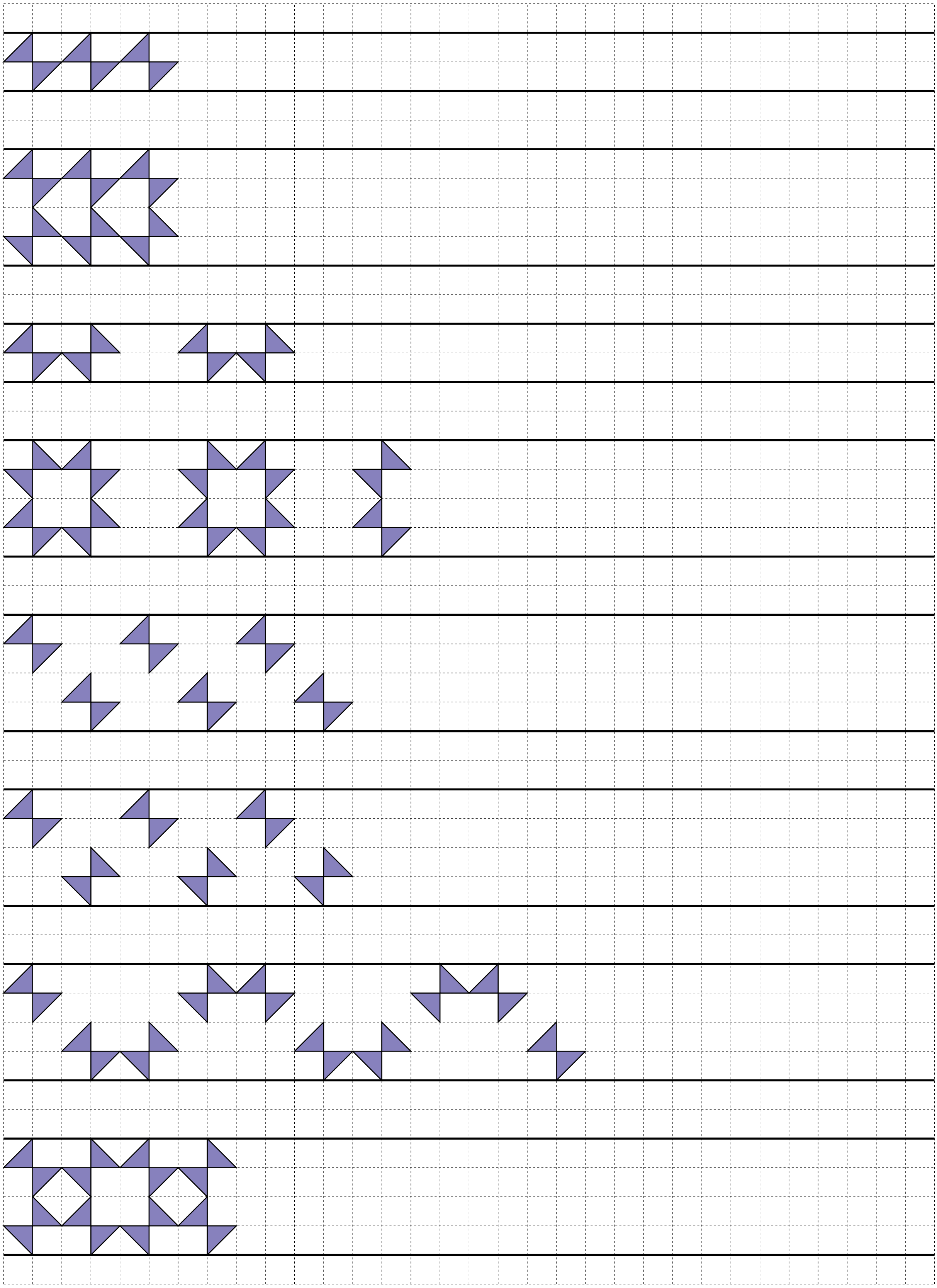




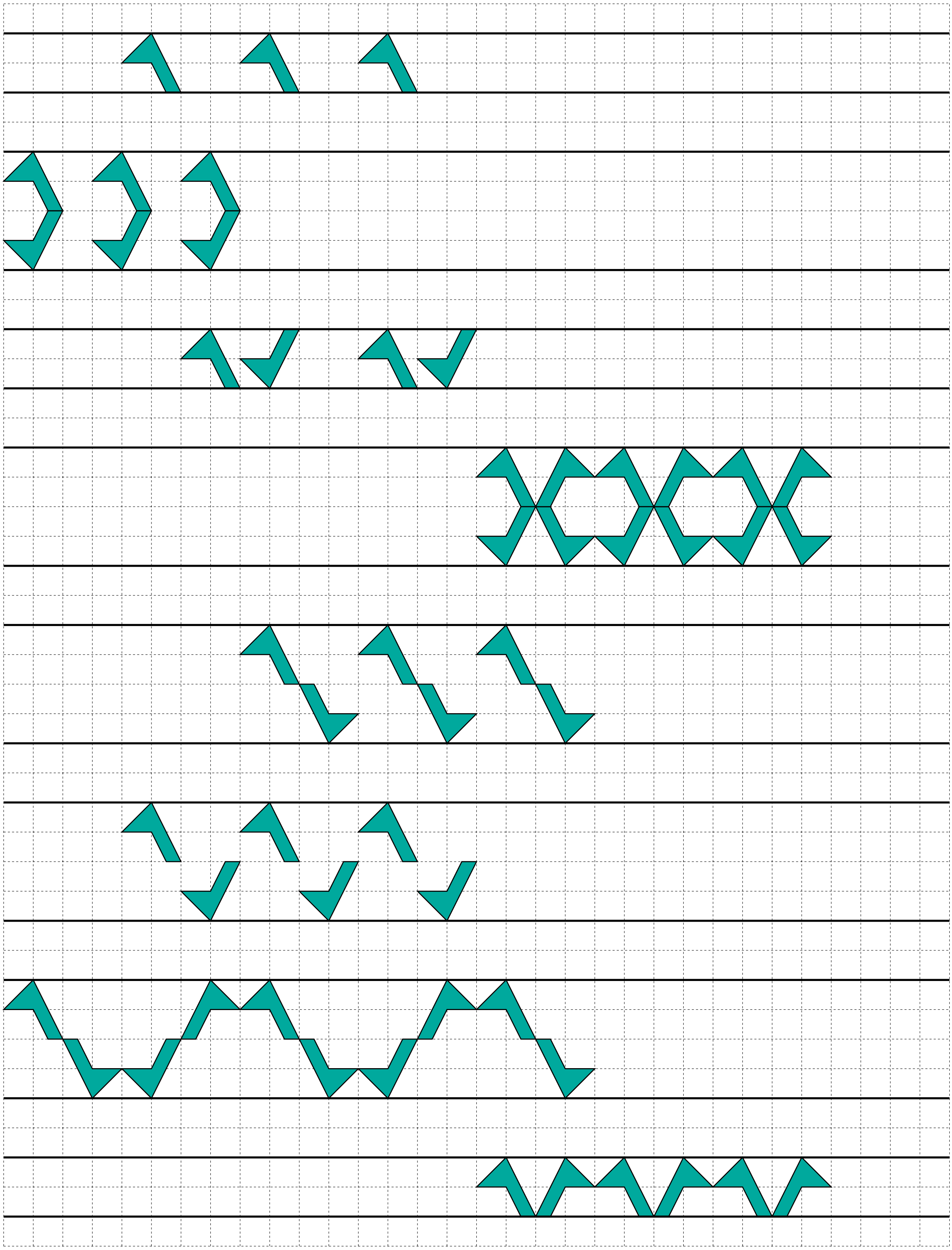




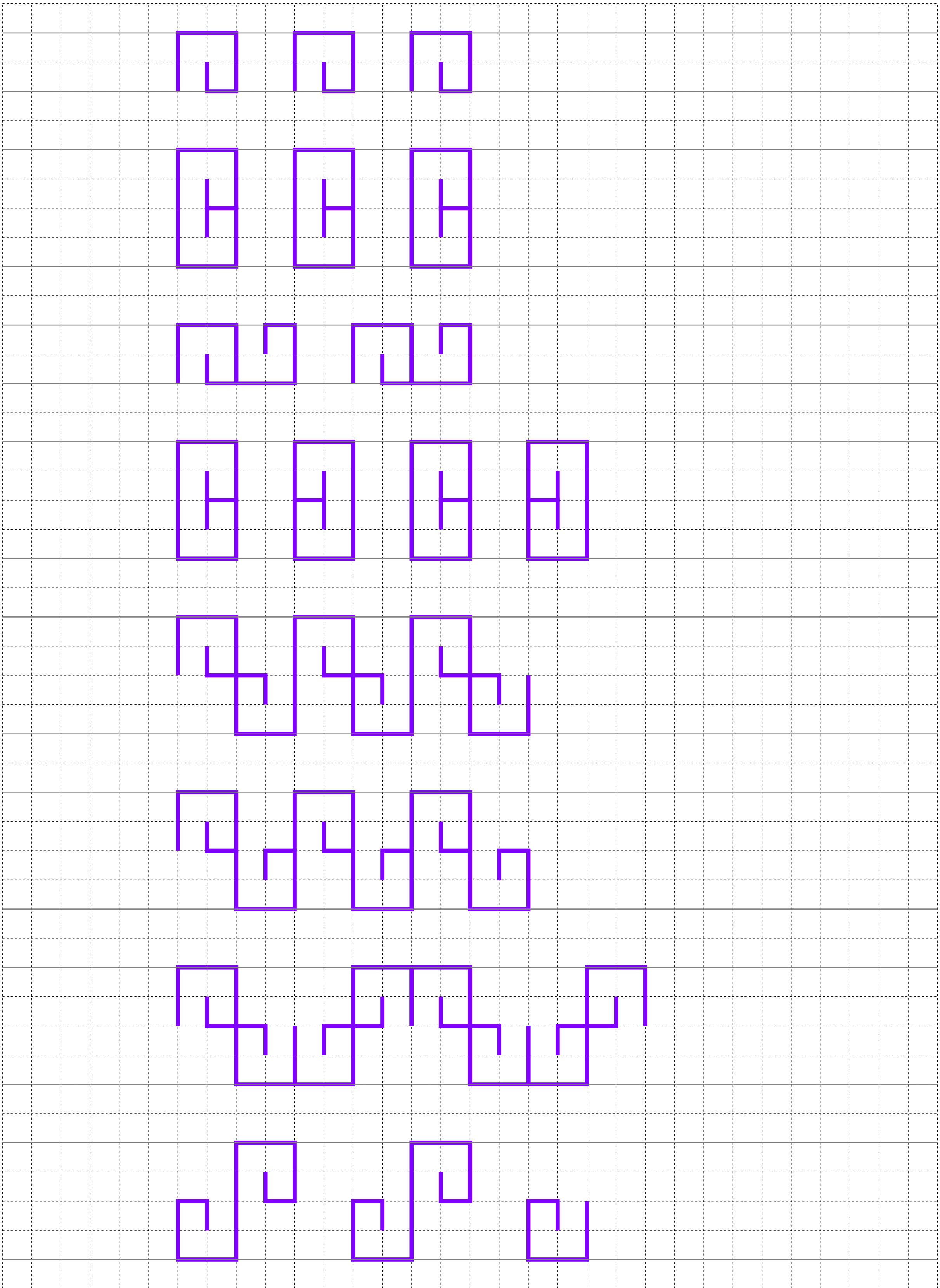
Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et la translation la plus courte qui permet cette construction.



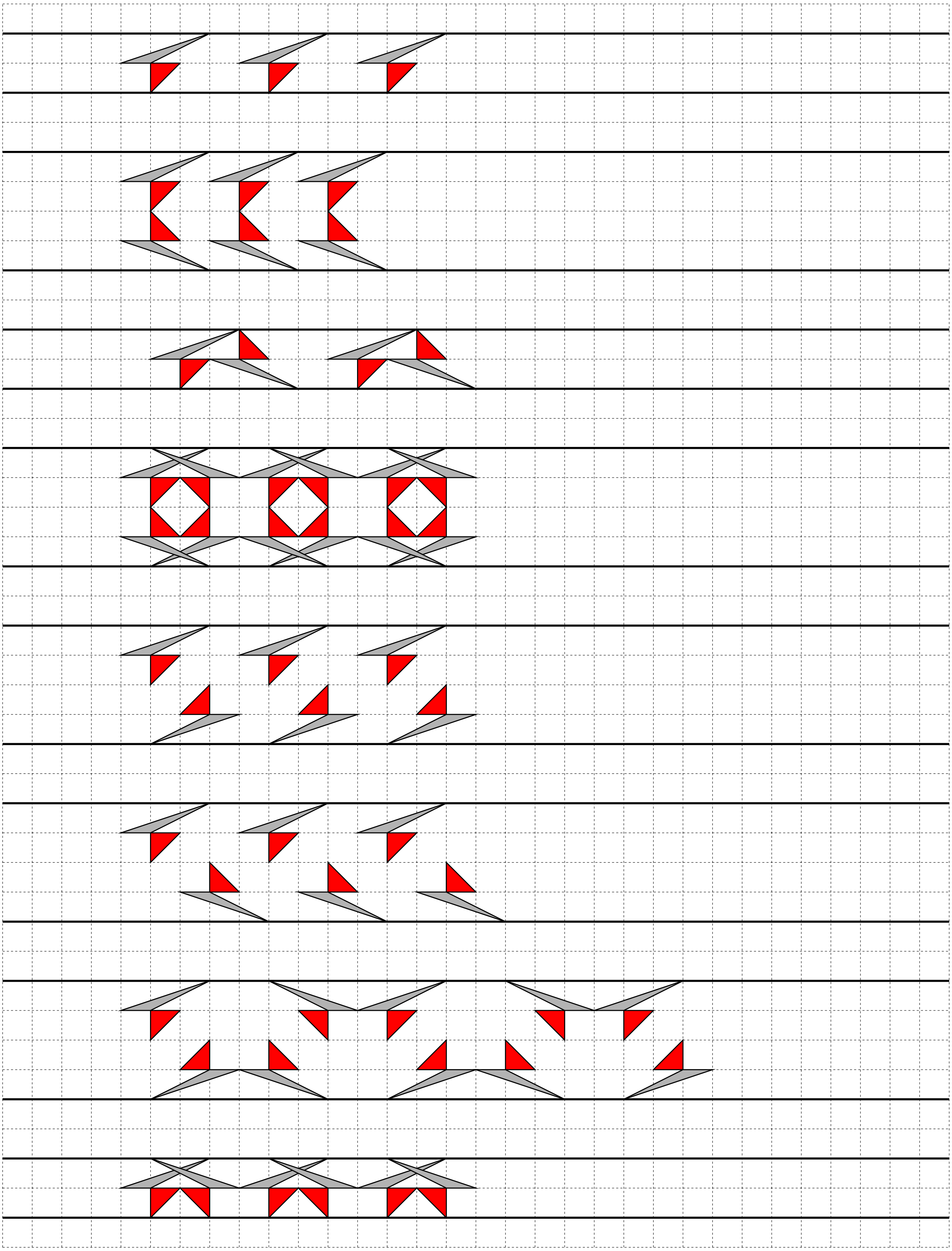
Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et les translations les plus courtes qui permettent cette construction.



Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et les translations les plus courtes qui permettent cette construction.

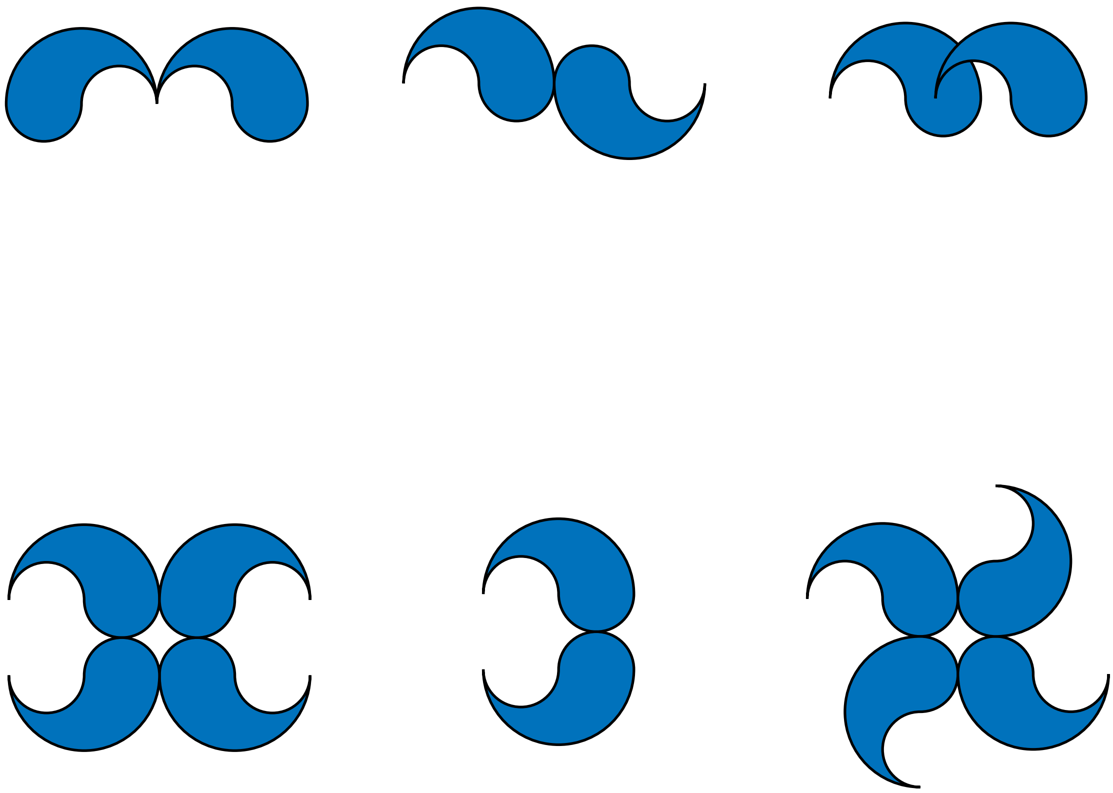


Prolonger les frises suivantes sur toute la largeur du quadrillage. Pour chacune d'elles, indiquer un motif de base et les translations les plus courtes qui permettent cette construction.



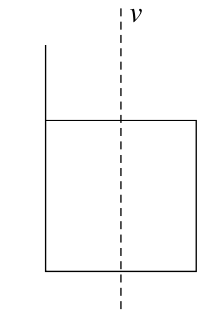
Parmi les figures proposées, désigner celles qui sont leur propre image par une des isométries suivantes. Préciser chaque fois de quelle isométrie il s'agit.

- une symétrie d'axe vertical,
- une symétrie d'axe horizontal,
- une symétrie d'axe horizontal et une symétrie d'axe vertical,
- une symétrie centrale (ou rotation d'un demi-tour),
- une rotation,
- une translation.

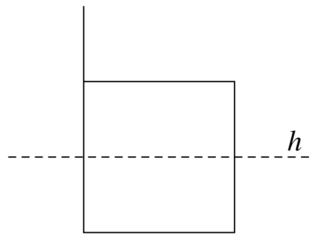


Compléter la figure de telle manière qu'elle soit invariante par l'isométrie indiquée (ou les isométries indiquées).

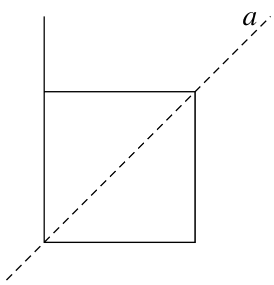
La symétrie orthogonale d'axe ν.



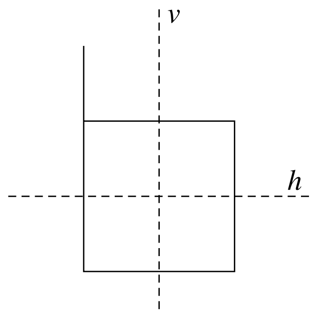
La symétrie orthogonale d'axe h.



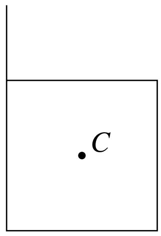
La symétrie orthogonale d'axe a.



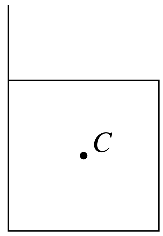
Les symétries orthogonales d'axes ν et h.

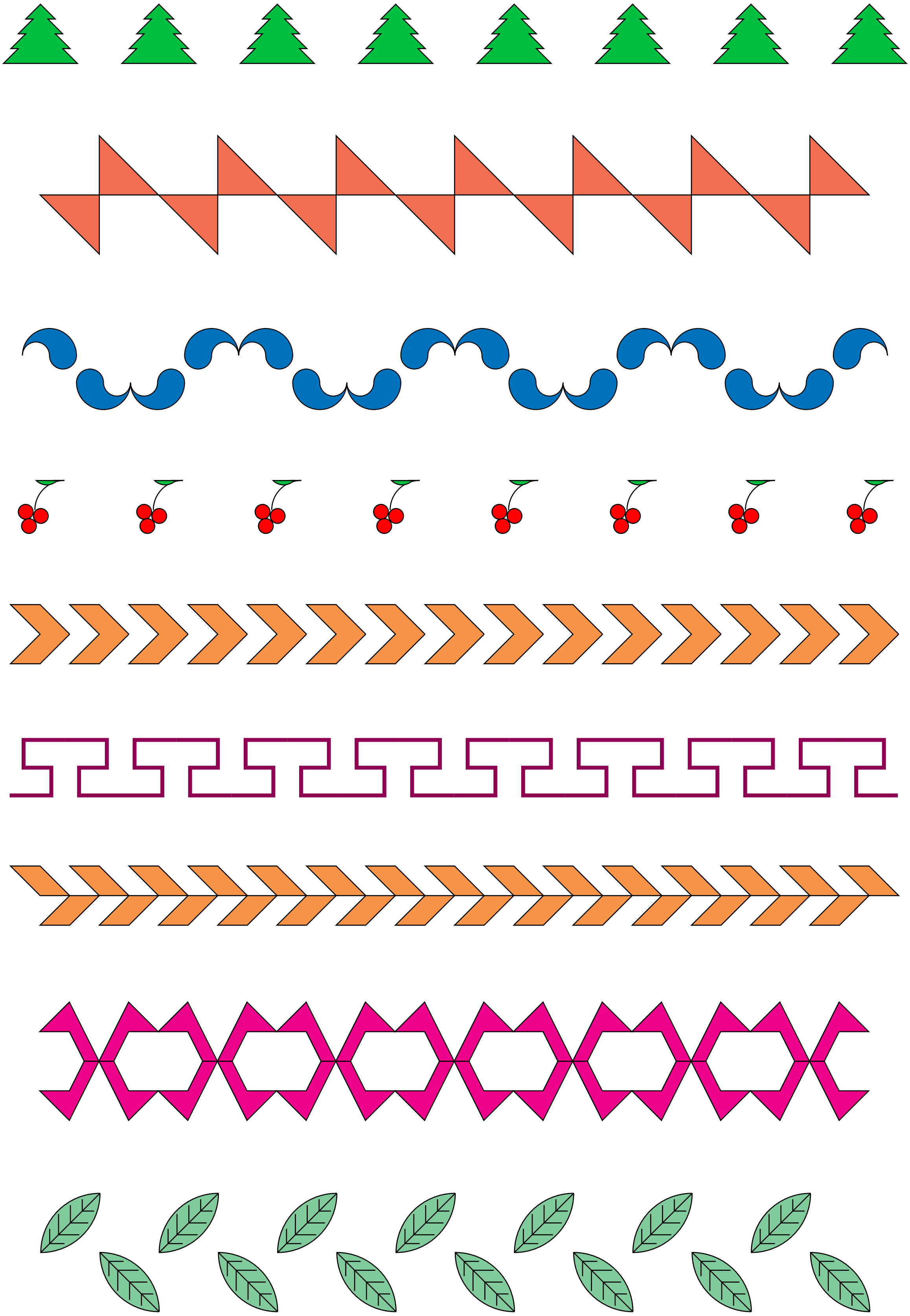


La symétrie centrale de centre C.

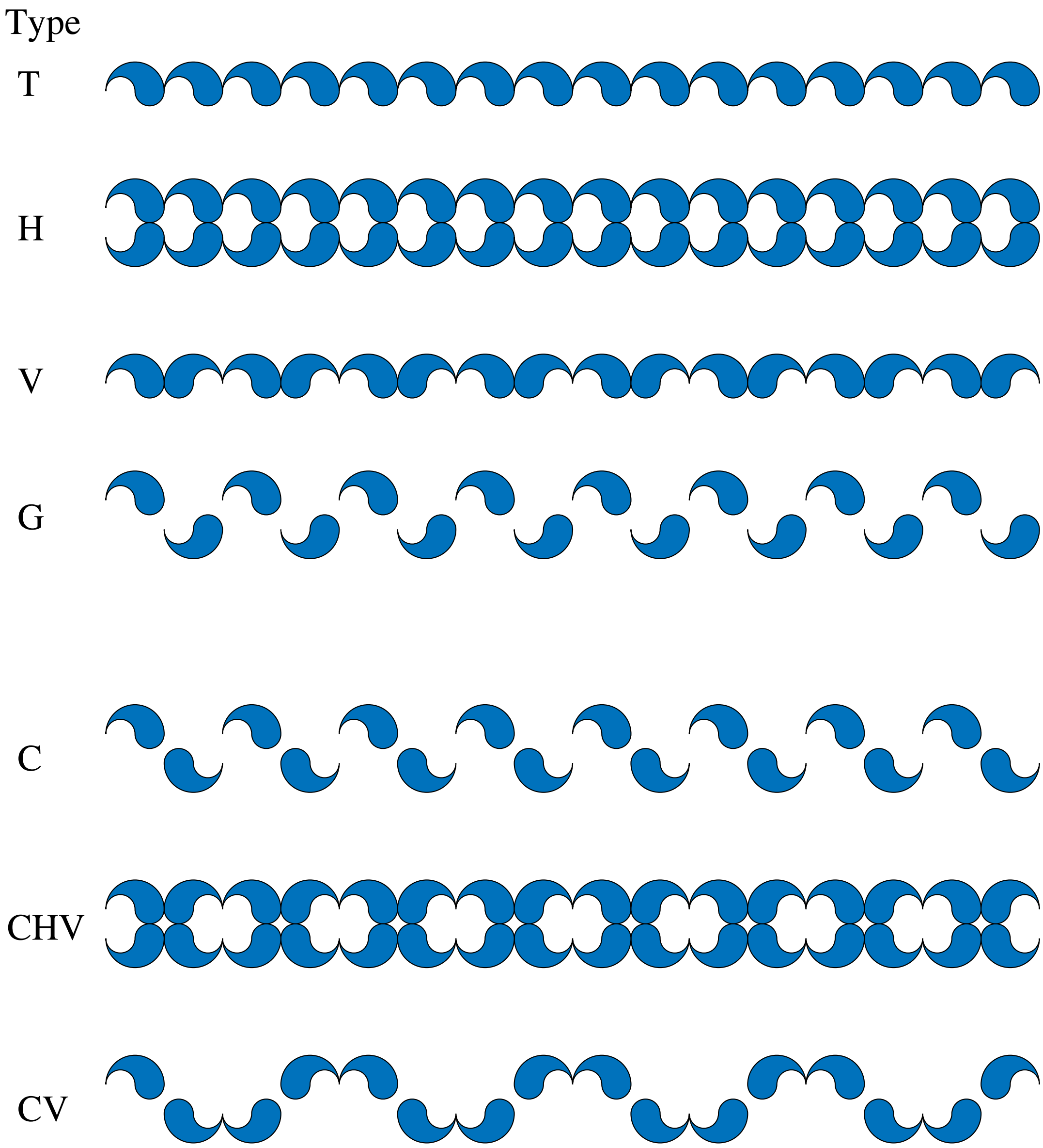


La rotation d'un quart de tour, de centre C.

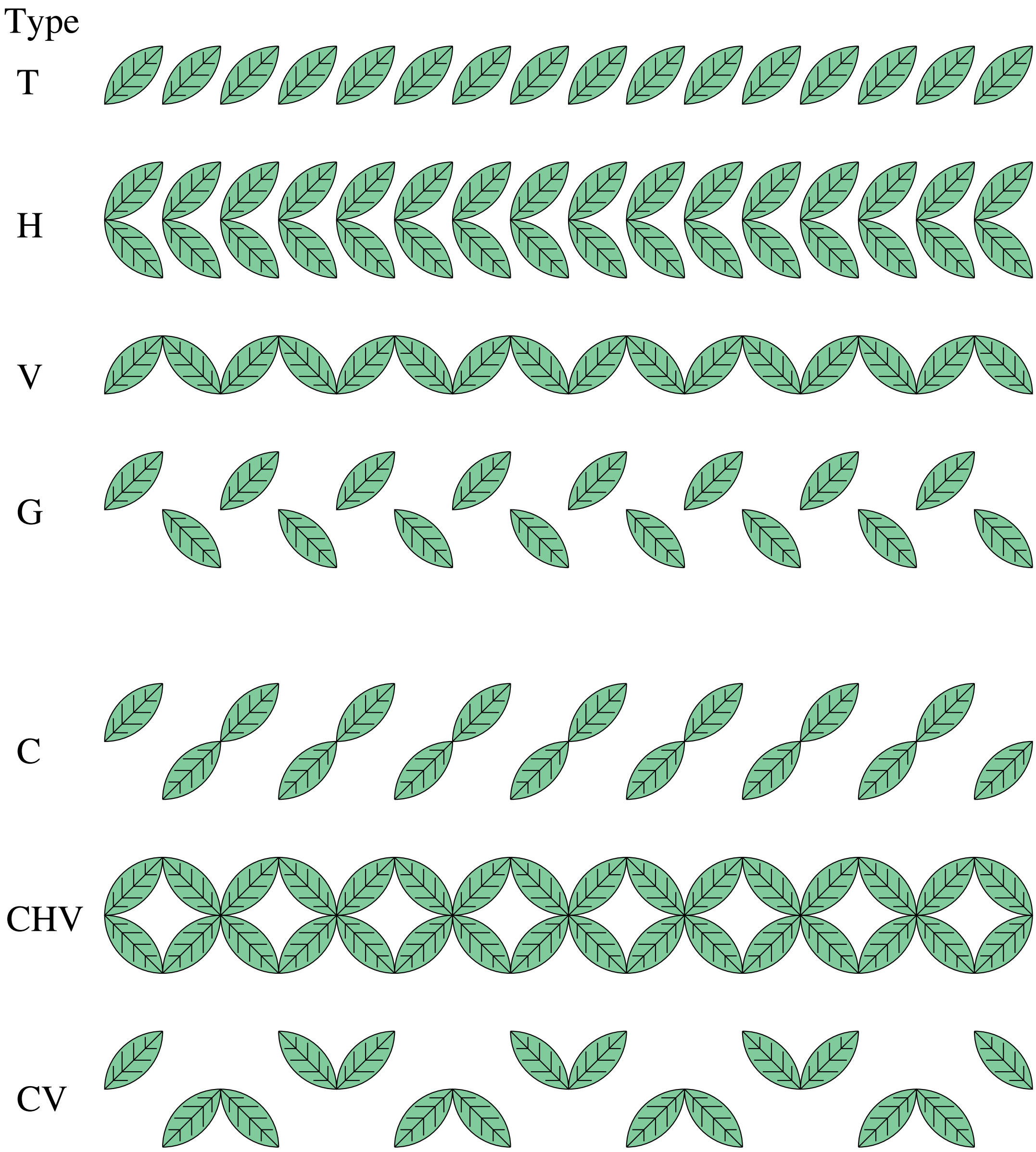




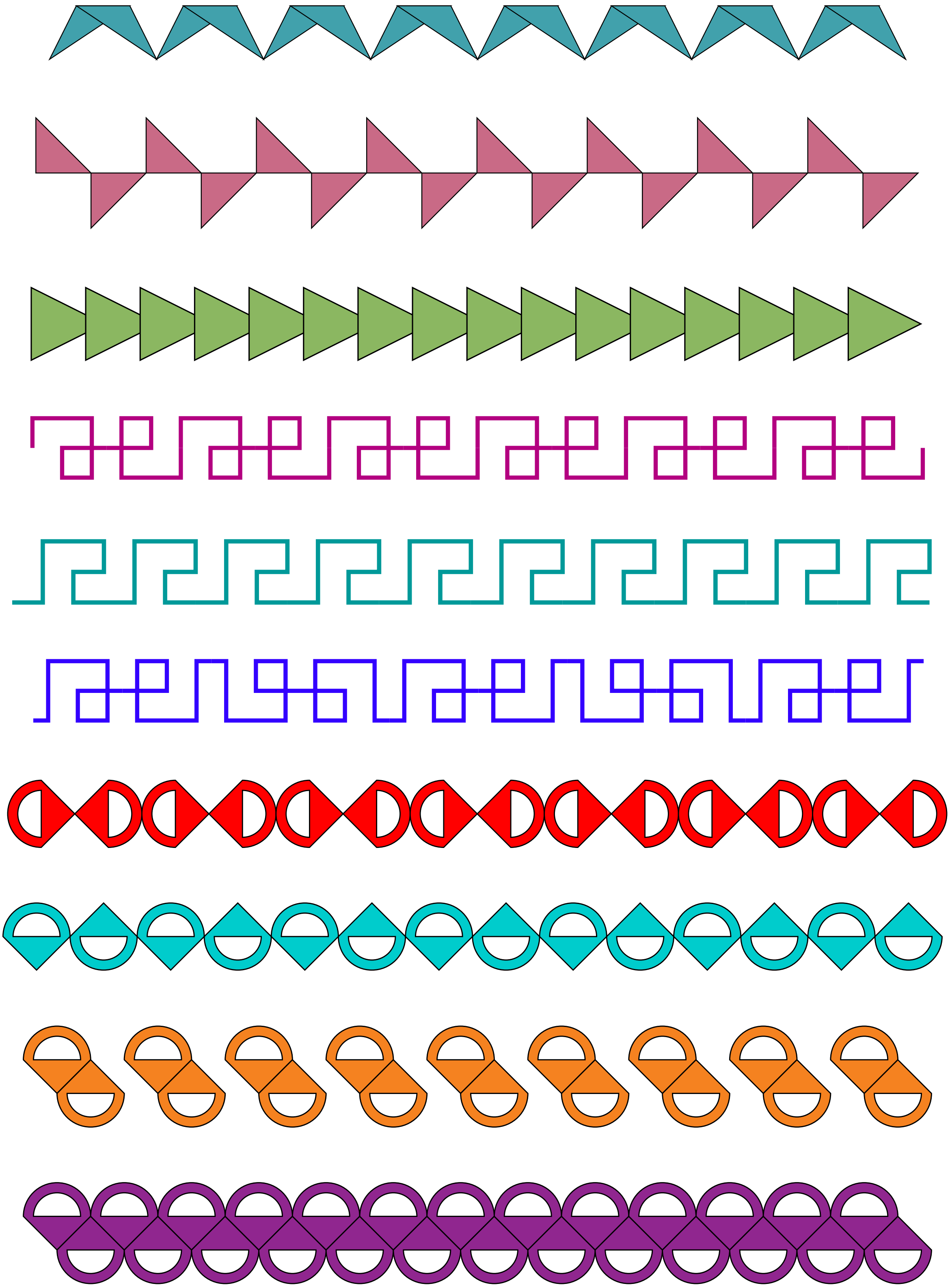
Sept types de frises



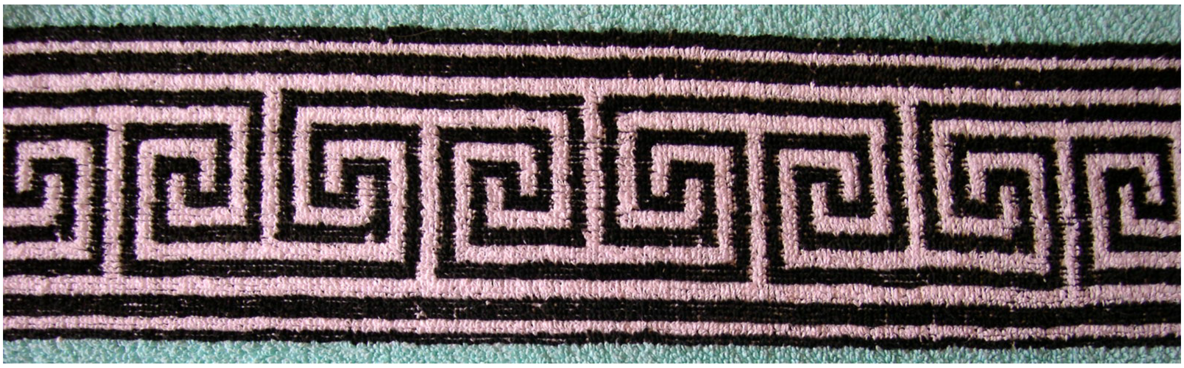
Sept types de frises

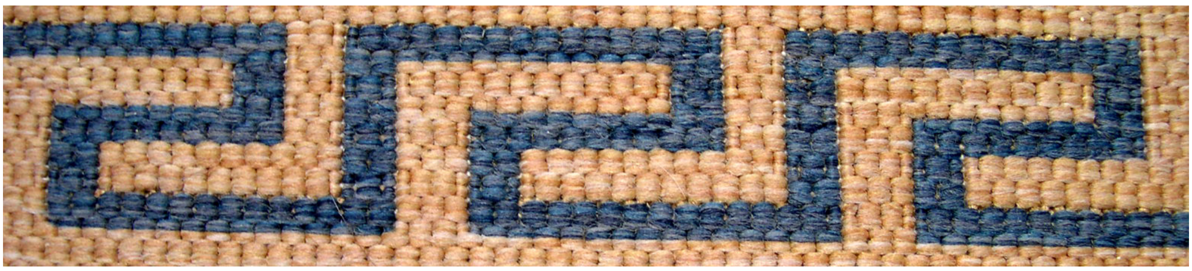


Déterminer le type des frises ci-dessous.



Déterminer le type des frises ci-dessous. Il s'agit de deux bordures de draps de lit, d'un essuie de salle de bain et d'une carpette.



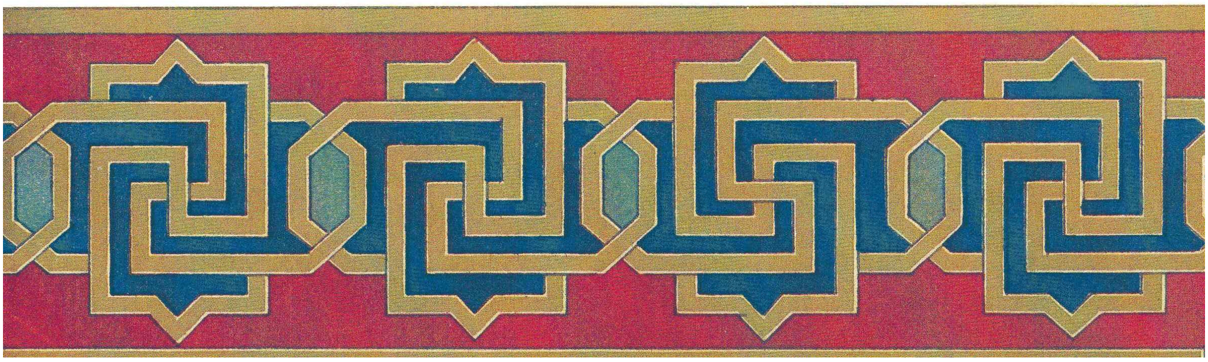


Déterminer le type des frises ci-dessous.

Mosaïque d'Ampurias

Alhambra de Grenade

Alcazar de Séville



Boukhara

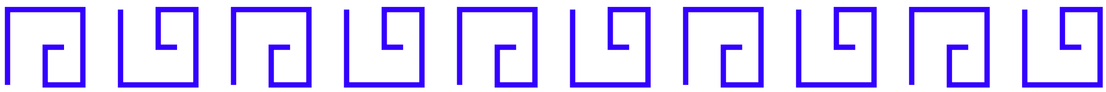
Parmi les frises ci-dessous, déterminer à vue celles qui sont invariantes par une symétrie glissée. Utiliser ensuite le transparent pour vérifier.

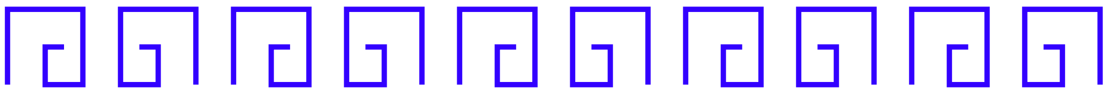
Encadrer un motif de base pour chaque frise.

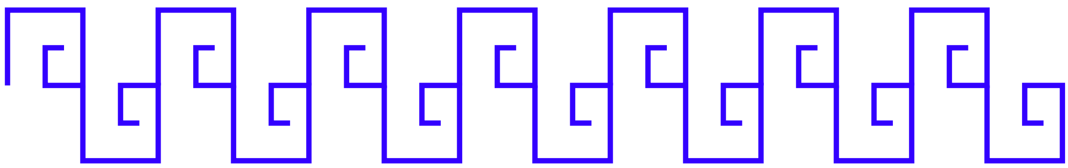
Tracer et comparer les vecteurs des translations t_f et t_g des frises invariantes pour une symétrie glissée.

Préciser le type de chacune des frises.

Marquer les centres de symétries éventuels.

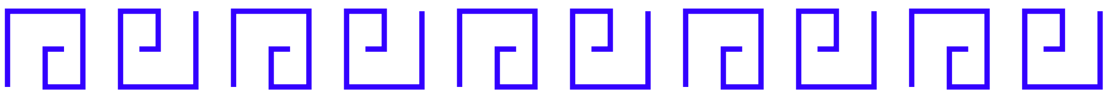

F1

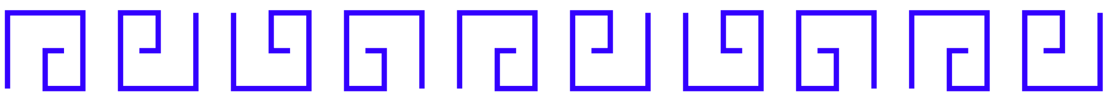

F2


F3


F4

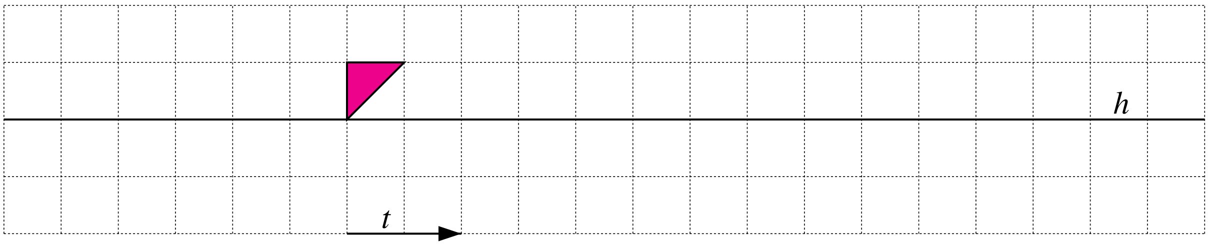

F5


F6

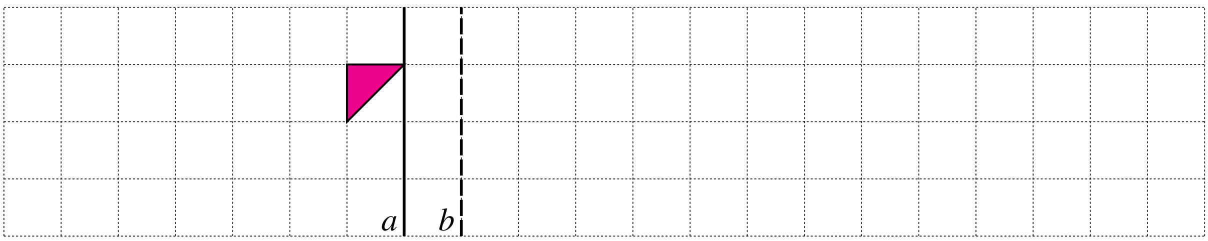

F7

Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t.

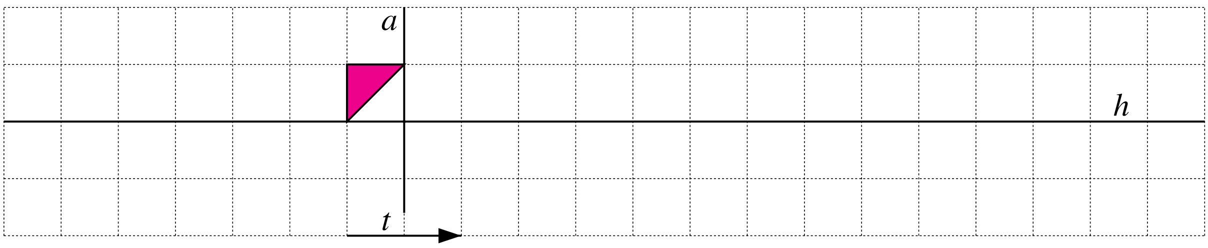
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_h d'axe h.



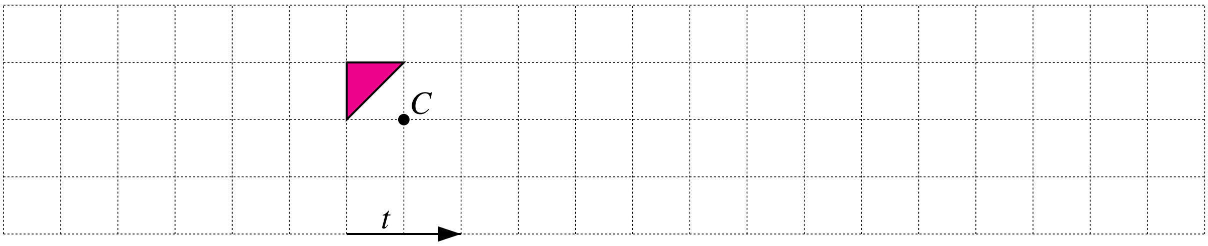
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par les symétries s_a et s_b, respectivement d'axes a et b.



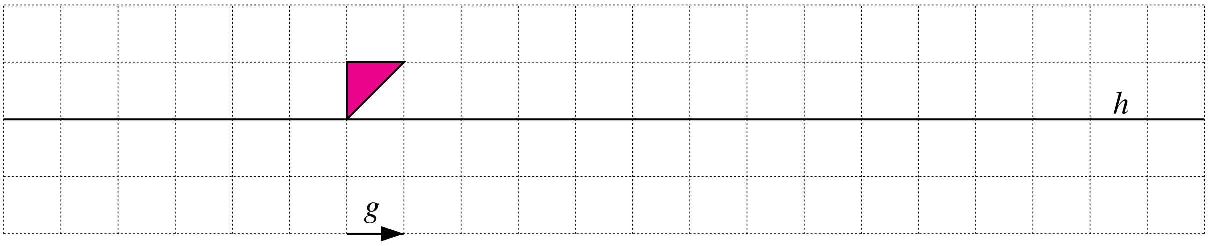
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par les symétries s_a et s_h, respectivement d'axe a et h.



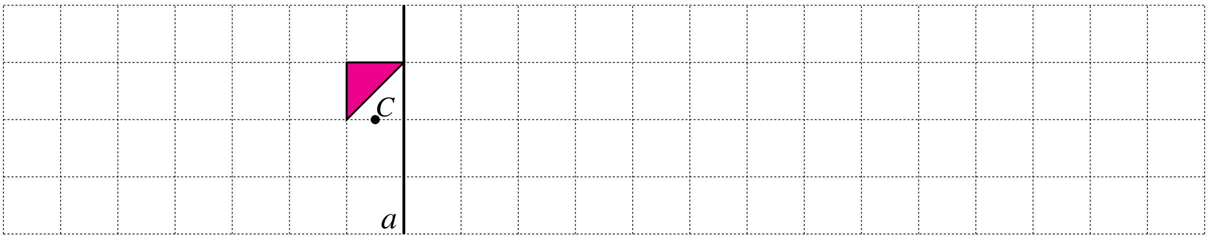
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_C de centre C.



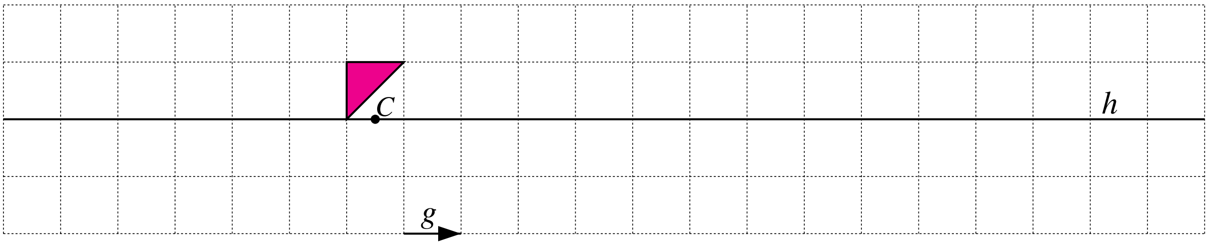
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie glissée s_g d'axe h et de glissement g.



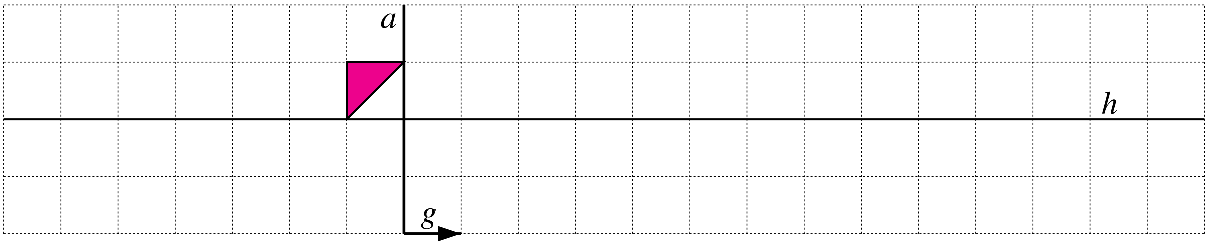
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.



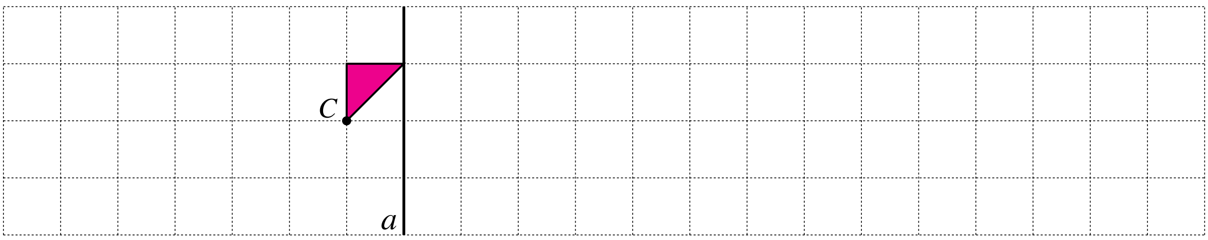
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie glissée d'axe h et de glissement g.



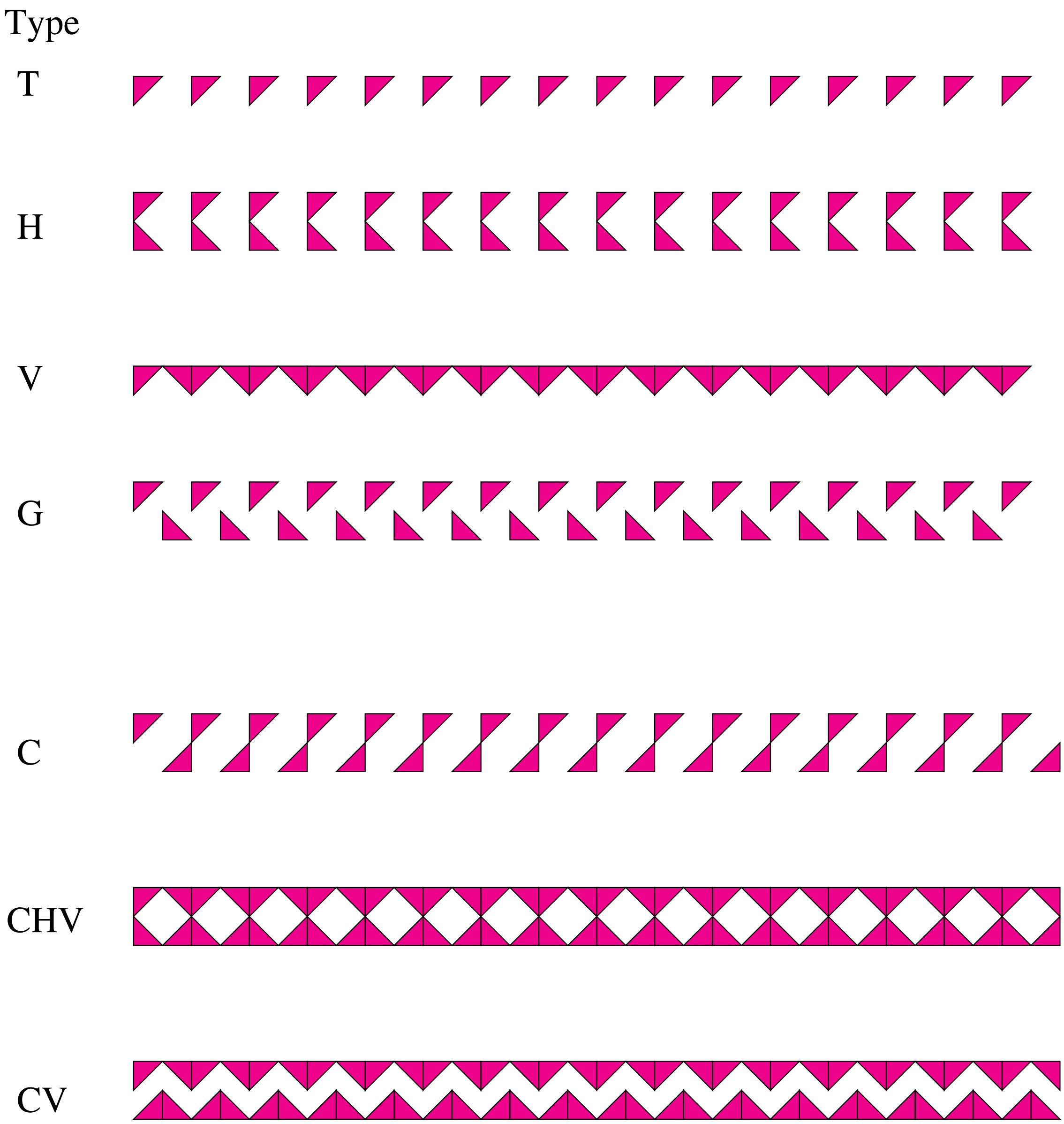
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie d'axe a et par la symétrie glissée d'axe h et de glissement g.



Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.

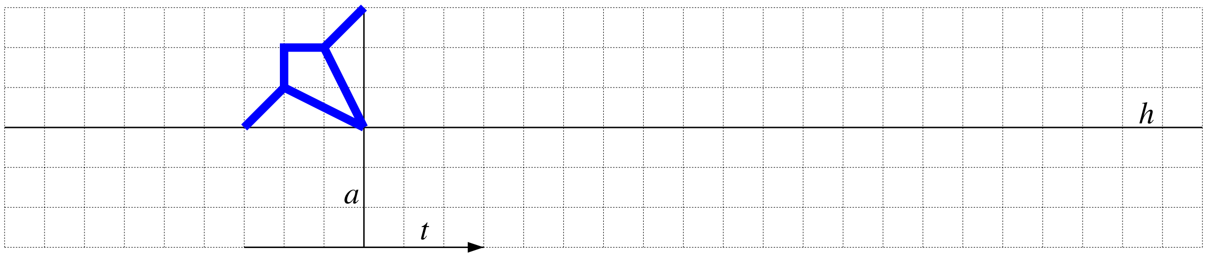


Sept types de frises

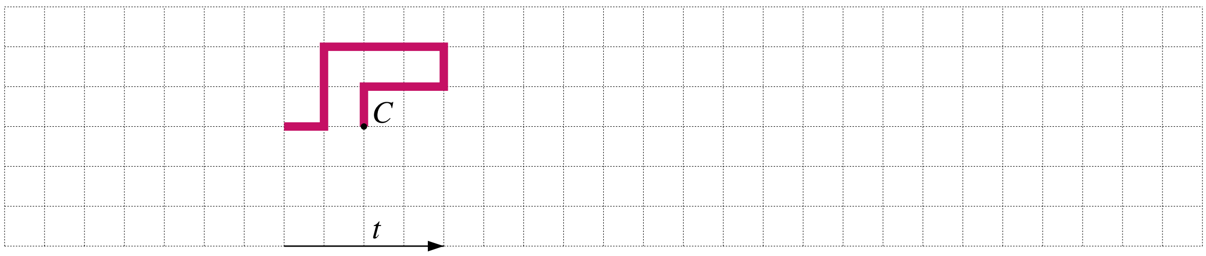


Construire des frises

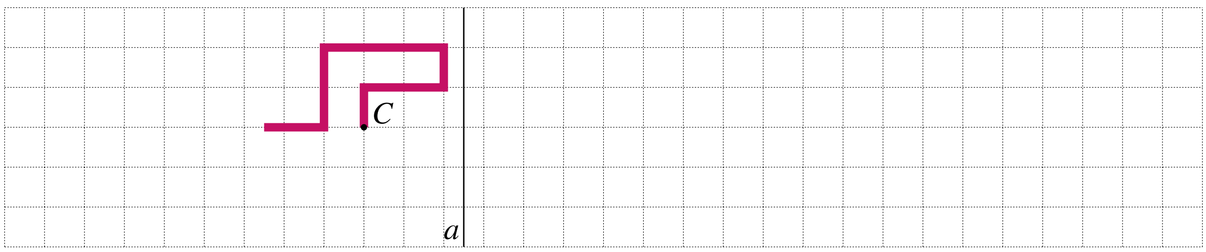
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par les symétries s_a et s_h, respectivement d'axes a et h.



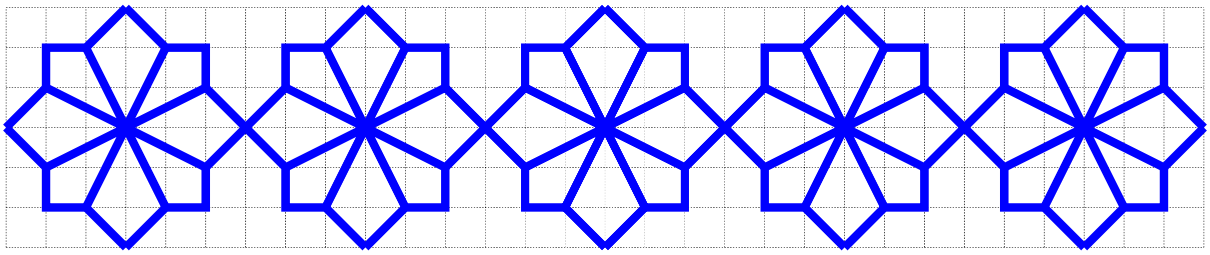
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la translation t et par la symétrie s_C de centre C.

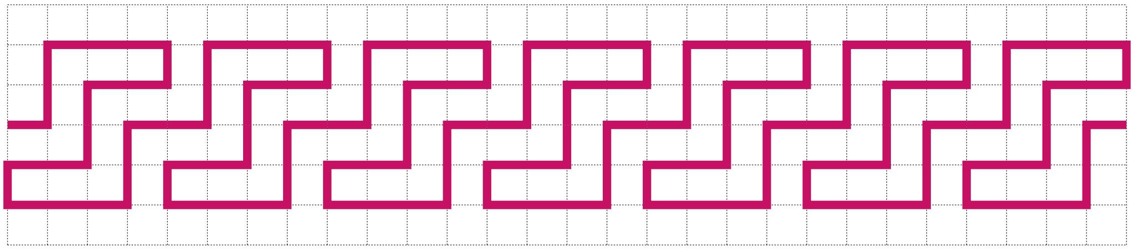


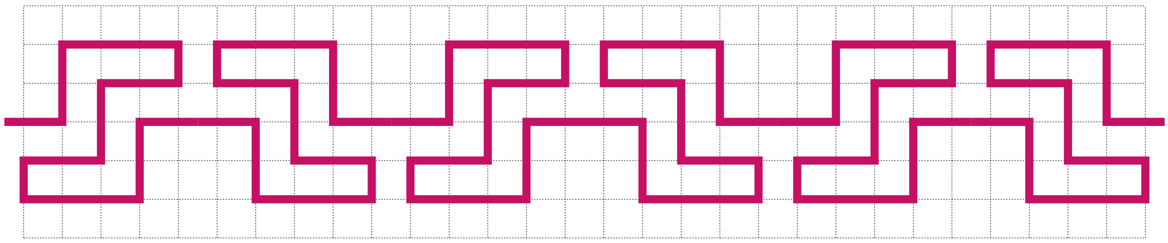
Compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie s_a d'axe a et par la symétrie s_C de centre C.



Solution de la fiche 60







Chapitre 18

L'évolution de la pensée géométrique, des problèmes d'arpentage à l'étude des espaces

Préambule

Ce chapitre n'a nullement l'intention d'esquisser une histoire – même modeste – de la géométrie. Il veut simplement poser quelques jalons qui permettent d'appréhender plus aisément cet aspect des mathématiques et de mieux s'imprégner de l'évolution de la pensée géométrique. Ces jalons vont marquer une période qui s'étend des premiers essais de représentation de l'espace, des problèmes d'arpentage, en passant par les différents apports des mondes grec et hellénistique, jusqu'à la géométrie qui se pratique aujourd'hui, géométrie qui étudie non plus les figures de l'espace mais les espaces eux-mêmes et leur structure, par le biais de la théorie des groupes.

1 Les débuts de la géométrie

On trouve, par exemple à Lascaux, dans le sud de la France, et à Altamira, dans le nord de l'Espagne, des centaines de peintures remarquables datant d'environ quinze mille années. Le bon niveau artistique de ces peintures rupestres témoigne d'une certaine compréhension de l'espace et des formes ; il ne s'agit pas encore vraiment de géométrie, mais plutôt de protogéométrie, une première étape dans la représentation non abstraite des grandeurs, de l'espace et du temps.

Les mathématiques et en particulier la géométrie qui nous sont familières, sont fort probablement le résultat d'un besoin, besoin sans doute créé par des sociétés qui évoluent vers une vie sédentaire. L'homme va, petit à petit, acquérir des biens qu'il voudra gérer, pratiquer l'agriculture qui nécessitera le creusement de canaux ou la construction de digues, ... C'est ce phénomène qui se produit dans les civilisations qui se sont développées dans les vallées de l'Indus et du Gange, du Tigre et de l'Euphrate et du Nil.

Rappelons un extrait du livre II des *Histoires* [92] [83] de l'historien grec HÉRODOTE, qui a vécu au V^{e} siècle av. J.-C., extrait que nous avons déjà évoqué dans le chapitre 17.

Ce fut *Min*[1] qui a fait élever la digue pour créer Memphis.
[...]
Sesostris[2] a partagé le pays entre tous les Égyptiens en donnant à chacun une égale parcelle de terre, pour laquelle il exigeait une taxe annuelle. Tout homme dont la propriété subirait des dommages par le débordement du fleuve irait le déclarer devant le roi, qui enverrait des inspecteurs pour mesurer l'étendue de la perte, de manière qu'à l'avenir, chacun ne paie qu'une taxe proportionnelle à la dimension à laquelle sa terre a été estimée.
[...]
C'est à partir de là que la géométrie[3] fut inventée et passa ensuite en Grèce.

Outre ces problèmes d'arpentage, les Égyptiens vont développer d'autres aspects de la géométrie et acquérir ainsi les connaissances nécessaires pour bâtir des pyramides et des temples à l'architecture complexe.

En Mésopotamie, on trouve également très tôt des traces d'une activité géométrique. Plusieurs tablettes d'argile témoignent de la connaissance de ce que nous appelons le théorème de Pythagore. Nous donnons une description complète de la tablette YBC 7289[4] dans le chapitre 20.

En Inde, la construction des temples et des autels sacrificiels engendrera aussi une réflexion géométrique peu connue en Occident, mais pourtant bien réelle.

2 La géométrie dans le monde grec

Les sources concernant les débuts des mathématiques grecques sont rares. Néanmoins, les historiens s'accordent à dire que Thalès de Milet (Θαλῆς), ionien, né en 624 av. J.-C., fut l'un des fondateurs de la science grecque et de la philosophie. Il a voyagé de nombreuses années en Égypte et était familier de l'astronomie et des mathématiques de la vallée du Nil. Sur la base de connaissances égyptiennes empiriques, il a initié la géométrie abstraite. On lui attribue divers résultats géométriques, même s'il ne reste de lui aucun écrit.

On dit d'un de ses élèves, Anaximandre de Milet (Ἀναξίμανδρος), né vers 610 et mort vers 545, qu'il a introduit l'usage du gnomon. On lui attribue un abrégé de géométrie.

Pythagore de Samos (Πυθαγόρας) a vécu dans les années 530 av. J.-C. et est mort à Métaponte vers 497. Selon Iamblique, il aurait lui aussi visité l'Égypte et y serait resté assez longtemps pour assimiler les coutumes, l'astrologie et la géométrie égyptiennes. Plus tard, il serait retourné à Samos où son enseignement, inspiré de celui des Égyptiens, trop abstrait et symbolique, n'aurait pas été accepté. Il serait alors parti pour Crotone, dans le sud de l'Italie où il aurait fondé une espèce de « secte » qui se développera en école scientifique.

[1] Une légende raconte que *Min*, originaire de Nubie, est venu vers 3100 av. J.-C. en Égypte, où il va fonder une lignée de pharaons, en fait, trente-deux dynasties.

[2] Plus connu sous le nom de *Ramses II* (environ 1300 av. J.-C.).

[3] Le vocable géométrie vient des mots grecs γαῖα (terre) et μέτρον (mesure), qui ont donné γεωμετρία, signifiant arpentage, mesure de la terre.

[4] Il s'agit de la tablette répertoriée 7289 dans la *Yale Babylonian Collection*.

Il est très difficile de distinguer ses propres théories de celles de son école. On lui attribue de nombreuses découvertes géométriques, bien qu'il ne reste de lui aucun écrit. Les premiers pythagoriciens ont attaché une grande importance aux mathématiques et les ont élevées au rang de science. Ils sont considérés comme les fondateurs de la théorie des nombres, de l'étude mathématique de l'acoustique et de la musique. Ils se sont intéressés aux constructions à la règle et au compas et à la résolution de problèmes algébriques par des moyens géométriques. Ils connaissaient l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du pentagone.

C'est à la même époque qu'Eupalinos de Megara (Εύπαλῖνος), ingénieur grec qui travaillait à Samos, a construit l'aqueduc dont on a retrouvé les ruines en 1882. Il s'agit d'un tunnel d'environ mille mètres de long, un mètre septante-cinq de haut et de large, qui a été creusé à partir de chacune de ses deux extrémités. Une ≪ stratégie ≫ avait été développée pour assurer la rencontre des deux équipes au milieu de la colline.

Platon (Πλάτων), né vers 428 et mort à Athènes vers 348, est un disciple de Socrate. Philosophe et mathématicien, il a fondé l'*Académie* dont la fameuse devise était ≪ Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ≫. Il prônait la valeur éducative des mathématiques et a introduit des définitions rigoureuses pour la ligne droite, la surface plane, le solide, ... Il a commencé l'étude de ce que nous appelons, de nos jours, le nombre d'or et a établi de nouvelles règles pour trouver des nombres carrés qui sont la somme de deux carrés.

Aristote (Ἀριστοτέλης), né en 384 et mort vers 322, est disciple de Platon et devient le précepteur d'Alexandre. Il fonde le *Lycée* d'Athènes vers 335 (école péripatéticienne). Il fut l'un des très grands philosophes et scientifiques de son temps ; il a préparé la systématisation de la géométrie par des investigations de ses aspects les plus fondamentaux et philosophiques – en particulier, par l'introduction de meilleures définitions – et par des discussions de concepts de continuité et d'infinité.

Euclide (Εὐκλείδης) a vécu à Alexandrie, probablement sous Ptolémée I, roi d'Égypte, entre les années 323 et 285. Mathématicien et physicien, il a sans doute étudié à l'*Académie*. Il a collecté et systématisé le corpus entier des mathématiques connues en son temps (et pas seulement la géométrie) dans les treize livres des *Éléments* (στοιχεῖα), qui sont restés, jusqu'à nos jours, la base de l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Son œuvre n'est pas qu'une compilation, mais une synthèse, au plus haut niveau, dans l'élaboration de laquelle il a fait preuve d'un très grand génie. Elle est basée sur une idée fondamentale, qui est l'une des plus importantes en mathématiques : la méthode hypothético-déductive. Toutes les propriétés géométriques et les théorèmes connus doivent être déduits à partir d'un ensemble de vérités initiales évidentes par elles-mêmes, appelées *postulats*, par le biais de lois logiques de raisonnement. Le nombre de postulats doit être le plus petit possible. La géométrie d'Euclide est basée sur cinq ≪ notions communes ≫ et cinq postulats. Les nombreuses tentatives infructueuses pour démontrer le cinquième postulat (celui des parallèles) à partir des précédents, d'une part, et le développement des géométries non euclidiennes, d'autre part, rendent hommage à sa clairvoyance.

3 Les géométries non euclidiennes et le programme d'Erlangen

L'œuvre d'Euclide figure parmi celles qui ont réellement marqué les mathématiques. En matière de géométrie, elle reste une référence. Chez les savants du monde arabe, c'est le traité qui sera le plus souvent traduit. Comme on l'a déjà dit, de nombreux mathématiciens, même de tout grands, vont s'attaquer au cinquième postulat, persuadés de pouvoir le déduire des précédents, mais sans succès... et pour cause !

Au XVII^e siècle, grâce aux travaux de René Descartes et Pierre de Fermat, la géométrie s'« algébrise ». Qualifiée d'analytique, elle résout des problèmes de géométrie en utilisant des procédés de type algébrique ; elle est bien adaptée au traitement de certaines catégories de questions. L'un des grands inconvénients cependant réside dans le fait qu'il est souvent pratiquement impossible de saisir le sens géométrique des expressions algébriques utilisées. Dès 1679, Leibniz recherchait un nouveau type de calcul qui opérerait directement sur les figures afin de pallier cet inconvénient. L'entreprise fut longue, puisque les vecteurs n'apparaîtront que dans la seconde moitié du XIX^e siècle.

C'est encore au XIX^e siècle, que des changements très importants se profilent, non seulement en géométrie, mais au sein même de toute la mathématique.

Les règles de la perspective en peinture, apparues au début du XV^e siècle en Italie (Alberti, Piero della Francesca), ont intéressé des mathématiciens comme Pascal et Desargues. Les bases de la géométrie projective sont dès lors jetées. L'habitude de voir, de contempler des peintures ou des dessins respectant les règles de la perspective à point de fuite, ont sans doute engendré un certain penchant à considérer comme identiques la figure primitive et toutes les images qui peuvent s'en déduire par projection, à énoncer certaines propriétés ne dépendant pas des modifications apportées par la projection, ... C'est ainsi que s'installe la géométrie projective, qui obtient son statut de « corps de doctrine » grâce à Poncelet (1822).

Parallèlement, et suite aux travaux de Lambert et Gauss, entre autres, Lobatchevski (à partir de 1829) et Bolyai (en 1832) imaginent une géométrie où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits[5] et montrent qu'elle est logiquement cohérente. La première géométrie non euclidienne est née.

En 1854, Riemann élabore une géométrie où la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits[6]. Il semble que ce soit Beltrami qui, en 1868, a le premier mis en évidence la nature commune des géométries de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann. Et c'est Klein, pense-t-on, qui a le premier remarqué la nature projective des géométries non euclidiennes de Bolyai-Lobatchevski et de Riemann, ainsi que de la géométrie euclidienne, en établissant qu'il s'agit de trois cas particuliers d'un modèle plus général imaginé par Cayley.

Dans cette géométrie en mutation, il faut encore citer bien d'autres grands mathématiciens, parmi lesquels Chasles, Grassmann, Staudt, Helmholtz, Jordan, Lie, sans oublier Galois, le « père » de la théorie des groupes, ...

On ne se focalise plus sur l'étude des figures de l'espace, mais plutôt sur l'étude de l'espace lui-même ; la notion de dimension va se généraliser à plus de trois, notamment grâce aux travaux de Cayley.

C'est tout cet ensemble de faits qui constitue la genèse de ce qu'on a appelé *Le programme d'Erlangen* [102], dont le titre complet est *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Il s'agit d'une dissertation présentée en 1872, par le mathématicien allemand Felix Klein, alors âgé de 23 ans, lors de la rentrée académique à l'université d'Erlangen.

[5]Signalons que ceci est encore équivalent à « Par un point extérieur à une droite donnée, on peut mener une infinité de parallèles à cette droite ».

[6]Comme dans le cas des triangles sphériques sur une sphère.

Klein défend l'idée d'un principe général qui permet d'engendrer non seulement la géométrie euclidienne et la géométrie projective, mais encore, les autres géométries (non euclidiennes) auxquelles, dit-il, il faut accorder les mêmes droits. Les notions essentielles sur lesquelles il se base sont, d'une part, celle de *groupe de transformations de l'espace*, issue des travaux de Galois (1830), et, d'autre part, celle d'*invariant*, introduite par Cayley et Sylvester dans les années 1850-1860.

Klein en arrive ainsi à caractériser une géométrie par un groupe de transformations de l'espace. Le problème qu'il propose d'étudier est le suivant,

> Étant donnés une multiplicité, c'est-à-dire un ensemble de points, et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.

Selon le groupe de transformations qui agit sur la multiplicité, on obtient les géométries euclidienne, projective, de Bolyai-Lobatchevski, de Riemann, ...

On voit donc apparaître le rôle fondamental de la notion de groupe. Klein inaugure ainsi la domination que la théorie des groupes va petit à petit exercer sur l'ensemble de toutes les mathématiques ainsi que la fusion de plus en plus étroite des concepts issus de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse, qui constitue l'une des principales caractéristiques de la mathématique d'aujourd'hui.

Retenons que la mutation profonde, qui s'exerce au XIX^{e} siècle, est que la géométrie n'est plus considérée comme science des figures de l'espace, mais bien comme la science qui étudie les espaces (par le biais de leur groupe de transformations).