## Troisième partie

# Culture mathématique à partir de 15 ans

# Chapitre 12

# Construire une table à la manière de Ptolémée

## Préambule

La trigonométrie fait peu d'adeptes parmi les élèves du secondaire. Nous avons donc imaginé de l'aborder par le biais de l'histoire, qui ≪ justifie ≫ la trigonométrie comme support d'une science appliquée, l'astronomie. Cette dernière suscite, en effet, plus l'enthousiasme de tout un chacun... L'enseignant trouvera au chapitre 19 à la page 530 des informations – dans lesquelles il pourra opérer un choix – qui permettent une telle introduction de la matière.

De nombreux élèves – nous en avons tous été témoins – ne font guère preuve de rigueur dans l'approche des notions mathématiques. Dans le domaine de la trigonométrie, par exemple, l'une des confusions les plus courantes consiste à ne pas trop savoir si c'est le cosinus ou le sinus qui se mesure en abscisse.

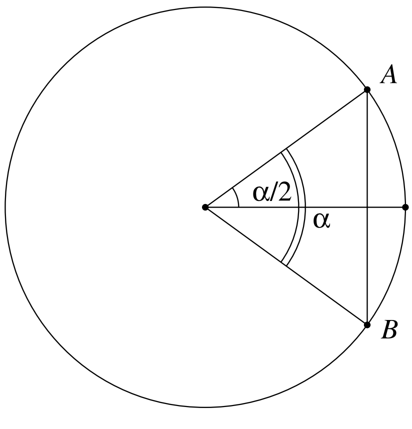



*Fig. 1*

Nous proposons une activité dans laquelle l'élève va construire, par calcul, une table de cordes à la manière de Ptolémée. De cette table, il déduira ensuite une table de sinus car, comme on peut le voir sur la figure ci-contre, la corde de l'angle $\alpha$, qui est la mesure du segment $[AB]$, n'est rien d'autre que le double du sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$, dans un cercle de rayon unité.

Nous espérons qu'après ces manipulations, l'élève, qui n'aura travaillé qu'avec la notion de sinus, en soit ≪ tellement imprégné ≫ qu'il ne la confondra plus avec celle de cosinus, dont on lui parlera juste après.

Pour établir sa table de cordes, Ptolémée a besoin de la mesure du côté du pentagone régulier. On peut la donner directement aux élèves, mais on peut aussi envisager une séquence d'apprentissage (conduisant à la construction du côté du pentagone régulier et au calcul de sa mesure) dans laquelle l'élève fournit une justification aux différentes étapes. Cela l'amène à utiliser les outils géométriques mis en place durant la troisième année du secondaire. Ce travail peut ainsi être envisagé comme une synthèse en fin de troisième ou une consolidation des acquis en début de quatrième.

## 1 L'*Almageste* de PTOLÉMÉE

*De quoi s'agit-il ?* Découvrir et comprendre le contenu d'un des chapitres de l'*Almageste* de PTOLÉMÉE.

*Enjeux* Aborder la trigonométrie dans un contexte historique et culturel.

***Compétence***

*Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.*

*De quoi a-t-on besoin ?* Les fiches 1 et 2, en annexe aux pages 471 et 472.

*Comment s'y prendre ?* L'enseignant annonce que l'on va construire une table de nombres trigonométriques, en suivant la méthode utilisée par PTOLÉMÉE dans le chapitre IX du premier livre de l'*Almageste*.

Il distribue d'abord la fiche 1, qui fournit aux élèves la définition de la corde d'un angle et une première définition du sinus d'un angle. On ne considérera ici que des cordes d'angles compris entre 0 et 180 degrés et des sinus d'angles compris entre 0 et 90 degrés. Par la suite, la définition du sinus sera étendue à tous les angles orientés.

Dans le repère orthonormé $Oxy$, on considère le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Les angles sont orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

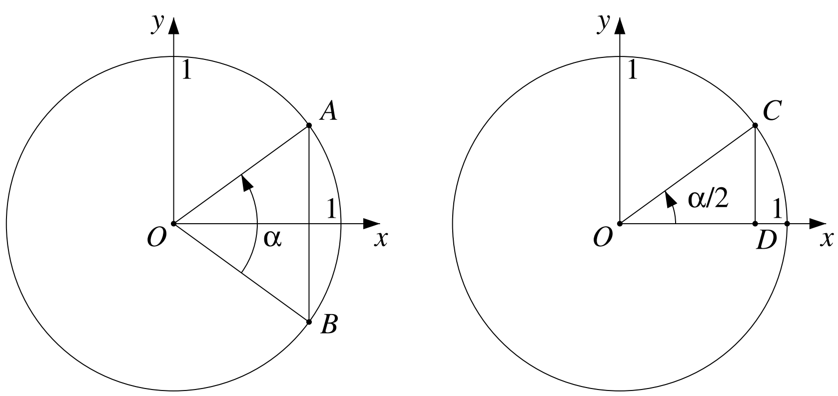



*Fig. 2*

Observons d'abord le cercle de gauche de la figure 2 et désignons par $\alpha$ l'angle $\widehat{BOA}$. Les anciens appelaient « corde de l'angle $\alpha$ » la mesure du segment $[AB]$. On note $\operatorname{crd}\alpha = |AB|$.

À cette notion de corde, les Arabes ont préféré celle de sinus, qui leur est venue de l'Inde et qui est fort voisine. Elle est illustrée sur le cercle de droite de la même figure 2. Dans ce cas, les angles ont tous pour demi-droite origine l'axe des $x$ du repère. On appelle « sinus de $\frac{\alpha}{2}$ »

la mesure du segment $[CD]$. On note $\sin\frac{\alpha}{2} = |CD|$. On peut encore dire que, puisque tous les angles ont pour demi-droite origine $Ox$, le sinus est aussi l'ordonnée du point $C$ dans le repère orthonormé $Oxy$.

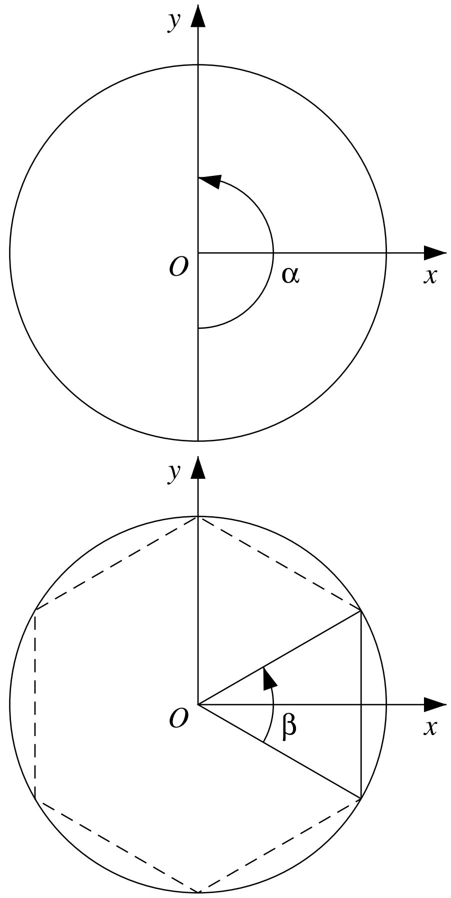
| |
|---|
| Quelle relation y a t-il entre la corde de l'angle $\alpha$ et le sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ de la figure 2 ? |

On observe, sans trop de peine, que $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{crd}\alpha$.

On conseillera aux élèves de garder à portée de vue la fiche 1 afin de répondre plus aisément aux questions des fiches suivantes.

On leur donne ensuite la fiche 2 reproduite ci-dessous. On vérifie ainsi qu'ils ont bien acquis les définitions et la propriété précédentes.

Les deux cercles de la figure 3 sont de rayon 1.




| |
|---|
| 1. Que vaut l'angle $\alpha$ ? |
| 2. Que vaut $\operatorname{crd}\alpha$ ? |
| 3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier. |

| |
|---|
| 1. Que vaut l'angle $\beta$ ? |
| 2. Que vaut $\operatorname{crd}\beta$ ? |
| 3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier. |

*Fig. 3*

L'angle $\alpha$ est égal à $180^o$ ; la figure montre que la corde de $180^o$ vaut la mesure de deux rayons, c'est-à-dire 2. De la relation $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{crd}\alpha$, on déduit que le sinus de $90^o$ vaut 1.

Dans le second cercle est inscrit un hexagone régulier. Ainsi, l'angle $\beta$ vaut $60^o$ ; la corde de $60^o$ est égale à la mesure du rayon, c'est-à-dire 1. La même relation que ci-dessus entraîne que le sinus de 30° vaut $\frac{1}{2}$.

Le professeur poursuit en décrivant les diverses étapes par lesquelles est passé PTOLÉMÉE, et cela afin de justifier les questions que l'on va se poser et résoudre pour élaborer un début de table de sinus. Il demande aux élèves d'en prendre bonne note.

PTOLÉMÉE part de la corde de l'angle de 72° et de celle de l'angle de 60°. Si, grâce au résultat obtenu à la fiche 2, on connaît la corde de 60°, il est utile de poser la question qui suit.

| De quel polygone la corde de 72° est-elle la mesure du côté ? |
|---|

Une brève discussion au sein de la classe aboutira sans doute à la conclusion qu'il faudra connaître **la mesure du côté du pentagone régulier.** On en prend note.

À partir des cordes de 72° et 60°, PTOLÉMÉE calcule la corde de 12°. Il nous semble intéressant de demander aux élèves s'ils pensent que, pour obtenir la corde de 12°, il suffit de faire la différence des cordes de 72° et de 60°. Ils peuvent tenter de vérifier sur une construction ou se poser la question ≪ à quoi cela correspondrait-il, en terme de sinus ? ≫ et tester, au moyen de leur calculatrice, que $\sin 6^\circ \neq \sin 36^\circ - \sin 30^\circ$. L'enseignant peut en profiter pour attirer leur attention sur le fait qu'il s'agit d'un phénomène non linéaire et mettre en évidence que $\sin(a-b) \neq \sin a - \sin b$. La non-linéarité a déjà été rencontrée : lors de l'élévation au carré, $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$, ou de l'extraction de la racine carrée, $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$, par exemple.

On prend donc également note qu'il faudra pouvoir calculer **la corde de la différence de deux angles.**

Ensuite, PTOLÉMÉE recherche les cordes des angles de 6°, 3°, $1\frac{1}{2}^\circ$ et $\frac{3}{4}^\circ$. On inscrit, sur la liste des tâches, qu'il faudra être capable de calculer **la corde de l'angle moitié.**

Arrivé à ce stade, il obtient la corde de $\frac{1}{2}^\circ$, au moyen d'une interpolation assez fine, soutenue par une argumentation géométrique sur laquelle nous ne nous appesantirons pas. Enfin, PTOLÉMÉE met au point une formule permettant de calculer la corde de la somme de deux angles – ce qu'on fera peut-être en classe, si on en a encore le courage. Il est ainsi armé pour établir sa table pour des angles allant de $\frac{1}{2}^\circ$ à 180°, par pas de $\frac{1}{2}^\circ$.

PTOLÉMÉE calcule, sur trois positions, dans le système sexagésimal des Mésopotamiens, en considérant le rayon du cercle divisé en soixante parties – le système de numération littéral grec[1] est loin d'être adapté à la tâche qu'il s'est fixée. Mais il indique le résultat dans ce système littéral. Les trois positions sexagésimales correspondent, pour nous, à une précision de l'ordre de $10^{-4}$. Ainsi, pour la corde de 72°, sa table donne la valeur $o\ \ \lambda\beta\ \ \gamma$, c'est-à-dire, en l'écrivant avec nos chiffres, 70 32 3. Il faut comprendre cela comme $\frac{70}{60} + \frac{32}{3\,600} + \frac{3}{216\,000}$, ou $1,175569444\cdots$, dans notre système décimal et pour un cercle de rayon 1. Dans l'activité qui suit, nous obtiendrons $1,175570504\cdots$, pour un même cercle de rayon 1.

Les calculs, dans le système sexagésimal, se faisaient au moyen de tables (de multiplications, d'extractions de racines carrées, ...). On peut encore imaginer que les racines carrées étaient calculées au moyen d'un algorithme, tel que celui de HÉRON, par exemple[2], qui, itéré trois ou quatre fois, donne la précision désirée. Pour nous, l'activité sera l'occasion d'effectuer un travail avec la calculatrice.

En consultant la liste des tâches, nous voyons qu'il faut d'abord fixer notre attention sur le

[1] Voir à ce sujet le chapitre 3.
[2] Voir à ce propos la section 3.1 du chapitre 14.

pentagone régulier, ensuite sur la corde de la différence de deux angles, et enfin, sur la corde de l'angle moitié. Le professeur signale, qu'avant d'arriver à la mesure du côté du pentagone régulier, il faudra démontrer une série de résultats préliminaires.

# 2 Construction du pentagone régulier

*De quoi s'agit-il ?* Découvrir et justifier, étape après étape, la construction du pentagone régulier, au moyen de la règle et du compas.

*Enjeux* Calculer la mesure du côté du pentagone régulier en fonction de la mesure du rayon du cercle circonscrit.

***Compétences***

*Connaître les grands théorèmes de la géométrie classique relatifs aux longueurs, aux rapports de longueurs, aux angles.*

*Justifier les étapes d'une construction.*

*De quoi a-t-on besoin ?* Papier, crayon, règle et compas.

Les fiches 3 à 6, en annexe aux pages 473 à 476.

## 2.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

*Comment s'y prendre ?* L'enseignant distribue la fiche 3, qui contient la figure 4 et les consignes reprises dans les encadrés ci-dessous.

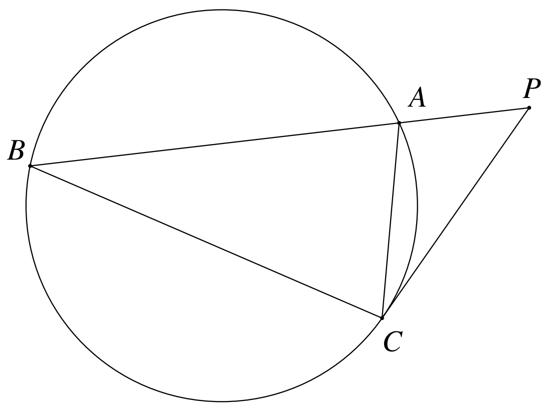



*Fig. 4*

Le point $P$ est quelconque à l'extérieur du cercle.

La droite $PAB$ est une sécante quelconque au cercle.

La droite $PC$ est tangente au cercle.

| |
|---|
| Comparer les angles des triangles $PCA$ et $PBC$. |

Les élèves devraient remarquer que

ces deux triangles ont l'angle $\widehat{P}$ en commun ;

l'angle $\widehat{C}$ du triangle $PCA$ est égal à l'angle $\widehat{B}$ du triangle $PBC$, puisque ce sont des angles respectivement tangentiel et inscrit qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{CA}$.

> Comment sont les triangles $PCA$ et $PBC$ ?
>
> En déduire une relation entre $|PA|$, $|PB|$ et $|PC|$.

Les triangles $PCA$ et $PBC$ sont semblables, ce qui permet notamment d'écrire

$$\frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PC|}, \quad \text{ou encore} \quad |PC|^2 = |PA| \times |PB|.$$

Une discussion au sein de la classe mettra en évidence le fait que la droite $PC$, tangente au cercle, est un cas limite de sécante, celui où les deux points $A$ et $B$ se confondent. Dans ce cas limite, la longueur du segment $[PC]$ et donc aussi $|PC|^2$ ne dépendent que du point $P$. Puisque la droite $PAB$ peut être une quelconque sécante, ce qui précède montre que, étant donné un cercle et un quelconque point $P$ extérieur, pour n'importe quelle sécante $AB$ passant par ce point $P$, le produit $|PA| \times |PB|$ est une constante. On l'appelle **puissance du point $P$ par rapport au cercle**.

Cette propriété de produit constant, pour n'importe quelle sécante, est encore vraie si le point $P$ est intérieur au cercle – évidemment la tangente issue de $P$ n'existe alors plus. Cette fois encore, la démonstration ne fait intervenir que des triangles semblables. Si la classe est particulièrement active, l'enseignant peut poser la question « Et si le point $P$ est intérieur au cercle ? » Mais, pour poursuivre l'activité, nous n'avons besoin que du cas où le point est extérieur, et à partir duquel on mène une sécante et une tangente.

## 2.2 Partage d'un segment en extrême et moyenne raison

*Comment s'y prendre ?* Le professeur distribue la fiche 4, qui contient la figure 5 et les consignes dans les différents encadrés.

On considère un segment $[CP]$.

Par le point $C$, on trace la droite $CD$ perpendiculaire à la droite $CP$ et on place le point $D$ de telle manière que $|CD| = |CP|$. On nomme $O$ le milieu de $[CD]$.

On trace le cercle de centre $O$ et de diamètre $[CD]$.

On trace la droite $PO$ et on note $A$ et $B$ ses points d'intersection avec le cercle.

On construit le point $M$ sur le segment $[CP]$, tel que $|PM| = |PA|$.

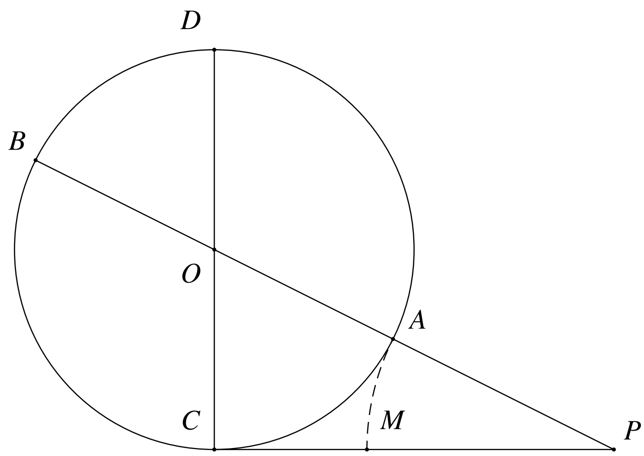


*Fig. 5*

Sachant que $|PB| = |PA| + |AB|$ et que $|CD| = |AB| = |CP|$, établir que

$$|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|.$$

En déduire que $|PM|^2 = |PC| \times |MC|$.

Si l'élève ne pense pas à comparer les figures 4 et 5, le professeur l'engagera à le faire.

De cette comparaison devrait émerger le fait que, sur les deux figures, on voit une sécante $PAB$ au cercle, issue de $P$ et une tangente $PC$ au cercle, également issue de $P$.

Grâce à la propriété justifiée à la section 2.1, on peut écrire

$$|PC|^2 = |PA| \times |PB|,$$

et, puisque $|PB| = |PA| + |AB|$, $|PC|^2 = |PA| \times (|PA| + |AB|) = |PA|^2 + |PA| \times |AB|$. Comme $|PC| = |CD| = |AB|$ et $|PM| = |PA|$, il vient

$$|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|.$$

Ensuite,

$$|PM|^2 = |PC|^2 - |PM| \times |PC| = |PC| \times (|PC| - |PM|),$$
$$|PM|^2 = |PC| \times |MC|.$$

Le professeur fait remarquer que cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$\frac{|PM|}{|MC|} = \frac{|PC|}{|PM|}.$$

On dit que le point $M$, tel que $\frac{|PM|}{|MC|} = \frac{|PC|}{|PM|}$, partage le segment $[PC]$ en extrême et moyenne raison. Cette construction ≪ fort ancienne ≫ est en fait la proposition 30 du chapitre VI des *Éléments* d'Euclide. Le lecteur intéressé trouvera une autre façon d'aborder ce problème à la section 2.2 du chapitre 13.

Si $a$ représente la mesure du segment $[PC]$, calculer $|PM|$ en fonction de $a$.

Une manière de procéder utilise le fait que $|PM| = |PA|$ et que le triangle $PCO$ est rectangle en $C$. Grâce au théorème dit de Pythagore, on trouve

$$|PO| = \sqrt{|PC|^2 + |CO|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Il suffit ensuite d'écrire

$$|PM| = |PA| = |PO| - |OA| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Une autre approche, algébrique celle-là, du problème consiste à considérer $|PM|$ comme un réel inconnu dans la relation $|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|$, rencontrée ci-dessus. En notant $|PM| = x$ et $|PC| = a$, il vient

$$a^2 = x^2 + ax \quad \text{ou encore} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

L'autre relation à laquelle on est arrivé, à savoir $|PM|^2 = |PC| \times |MC|$, se traduit par $x^2 = a(a - x)$, qui est la même équation du deuxième degré. En la résolvant, on obtient les deux solutions

$$x = \frac{a}{2}\left(-\sqrt{5} - 1\right) \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Puisque $x$ représente la mesure d'un segment, $x$ doit être positif, ce qui donne $|PM| = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

> Calculer le rapport $\dfrac{|PM|}{|MC|}$ dans lequel le point $M$ partage le segment $[PC]$.

On sait que $\dfrac{|PM|}{|MC|} = \dfrac{|PC|}{|PM|}$ ; il vient donc

$$\frac{|PM|}{|MC|} = \frac{|PC|}{|PM|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{1}{2}\cdot 4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

La valeur numérique de ce rapport dans lequel $M$ partage le segment $[PC]$ en extrême et moyenne raison a fait « fantasmer » pas mal de personnes ; elle est connue sous le nom de *nombre d'or*. Le lecteur trouvera quelques commentaires sur celui-ci à la page 423 du chapitre 13.

## 2.3 Le décagone régulier

*Comment s'y prendre ?*

Le professeur annonce que le travail qui vient d'être accompli va permettre de construire un décagone régulier, et par conséquent, un pentagone régulier. L'élève reçoit la fiche 5, qui contient les informations qui suivent.

Le segment $[AB]$ est un côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de centre $O$ et de rayon $[OA]$.

La droite $AM$ est une bissectrice de l'angle en $A$ du triangle $ABO$.

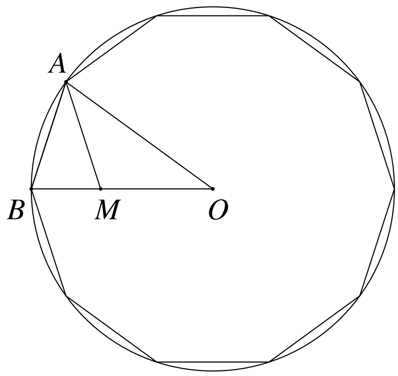



*Fig. 6*

> En calculant les mesures des angles des triangles $MAB$ et $AMO$, justifier que ces triangles sont isocèles. On a alors $|AB| = |AM| = |OM|$.

Puisque la figure représente un décagone régulier inscrit dans un cercle, l'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut 36°. Les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons du cercle ; ainsi, le triangle $AOB$ est isocèle et, en vertu de ce qu'on vient de constater, les angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{OBA}$ valent 72°.

La droite $AM$ est bissectrice de l'angle $\widehat{BAO}$, ce qui implique que l'angle $\widehat{MAO}$ vaut 36°, tout comme l'angle $\widehat{AOB}$ ; cela entraîne que le triangle $AMO$ est isocèle. On en déduit immédiatement que l'angle $\widehat{AMO}$ est égal à 108°, ce qui implique que l'angle $\widehat{AMB}$ vaut 72°, tout comme $\widehat{ABM}$. Ainsi, le triangle $MAB$ est lui aussi isocèle et de tout ce qui vient d'être dit, on tire $|AB| = |AM| = |OM|$. De plus, les deux triangles $AOB$ et $BAM$ sont semblables, puisque leurs angles sont égaux deux à deux.

> En utilisant la similitude des triangles $AOB$ et $BAM$ et l'égalité trouvée précédemment, établir une relation entre les mesures des segments $[OB]$, $[OM]$ et $[MB]$.

On a $\dfrac{|OB|}{|AM|} = \dfrac{|AB|}{|MB|}$, et, en tenant compte de l'égalité obtenue plus haut, il vient

$$\frac{|OB|}{|OM|} = \frac{|OM|}{|MB|} \quad \text{ou encore} \quad |OM|^2 = |OB| \times |MB|.$$

> En comparant cette relation avec celle obtenue dans l'activité de la fiche 4 entre les mesures des segments $[PC]$, $[PM]$ et $[MC]$, que peut-on en conclure pour le point $M$ de la figure ci-dessus ?

La comparaison demandée fait apparaître que le point $M$ divise le rayon $[OB]$ du cercle circonscrit au décagone régulier en extrême et moyenne raison.

> En se référant encore à l'activité de la fiche 4, que vaut la mesure de la longueur du côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $r$ ?

Si $c_{10}$ désigne le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon $r$, on a assez directement

$$c_{10} = |AB| = |OM| = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

***Construction du décagone régulier***

L'enseignant donne alors la consigne ci-dessous.

> En utilisant la configuration de la fiche 4, construire un décagone régulier.

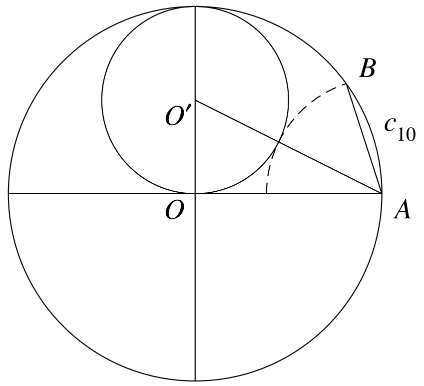



*Fig. 7*

On reporte évidemment le côté $c_{10}$ tout le long du cercle, ce qui permet de tracer le décagone régulier inscrit dans ce cercle. En joignant un point sur deux, on peut aussi dessiner le pentagone régulier inscrit dont il reste à calculer la mesure du côté. Après ce calcul, nous montrerons que cette construction du pentagone régulier n'est rien d'autre que celle qui était ou est encore classiquement enseignée.

La figure 8 ci-contre montre le décagone régulier et le pentagone régulier inscrits dans le cercle de centre $O$. L'angle $\beta = 72^\circ$ est le double de l'angle $\alpha = 36^\circ$. On vient de calculer la corde de l'angle $\alpha$, qui vaut $\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = 0,618033988\cdots r$. Si on met au point une formule donnant la corde de l'angle double d'un angle dont la corde est connue, on aura atteint le premier but, à savoir la connaissance de la mesure du côté du pentagone ce qui équivaut à celle de la corde de l'angle de $72^\circ$.

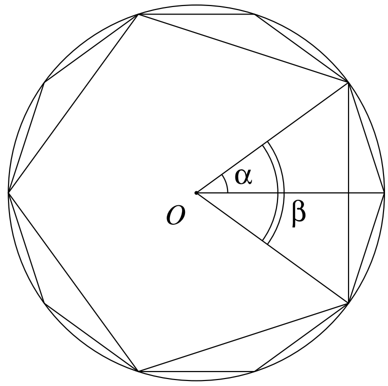



*Fig. 8*

## 2.4 Corde d'un angle double d'un angle donné

*Comment s'y prendre ?* L'enseignant distribue la fiche 6, qui contient la figure 9 et les questions qui suivent.

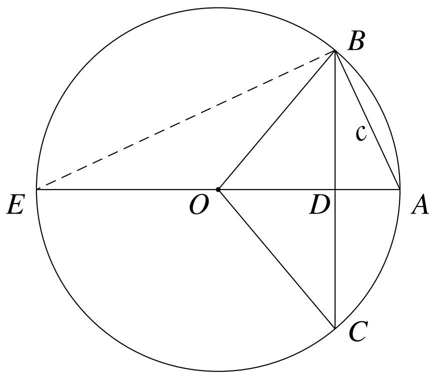



*Fig. 9*

L'angle $\widehat{COB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{AOB}$.

La mesure de la corde $[AB]$ est notée $c$.

La mesure du rayon du cercle est notée $r$.

Le rayon $[AO]$ est prolongé jusqu'en $E$ et on trace le triangle $ABE$.

| Que vaut l'angle en $B$ du triangle $ABE$ ? |
|---|

Cet angle vaut 90° et le triangle $ABE$, inscrit dans un demi-cercle, est un triangle rectangle.

| En calculant de deux manières le double de l'aire du triangle $ABE$, exprimer la mesure de la corde $[BC]$ en fonction de la mesure $c$ de la corde $[AB]$. |
|---|

Le double de l'aire du triangle $ABE$ vaut $|AB| \times |BE| = |BD| \times |AE|$. On sait que $|AE| = 2r$ et que $|AB| = c$.

Le théorème dit de PYTHAGORE nous permet de calculer $|BE| = \sqrt{4r^2 - c^2}$.

La première égalité peut donc s'écrire $c \times \sqrt{4r^2 - c^2} = |BD| \times 2r$.

Ainsi,

$$|BD| = \frac{c \times \sqrt{4r^2 - c^2}}{2r} \quad \text{et donc} \quad |BC| = \frac{c \times \sqrt{4r^2 - c^2}}{r}.$$

| En utilisant une calculatrice, en déduire la mesure du côté du pentagone régulier à partir de celle du décagone régulier. |
|---|

Pour calculer la mesure du côté du pentagone régulier, nous l'identifions à $|BC|$, que nous notons $c_5$ dans la formule ci-dessus, tandis que la quantité $c$ mesure le côté du décagone régulier, à savoir $c_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0,618033988 \cdots r$. On a alors

$$c_5 = |BC| = \frac{c \times \sqrt{4r^2 - c^2}}{r} = \frac{c_{10} \times \sqrt{4r^2 - c_{10}^2}}{r}.$$

L'élève calcule ainsi $c_5 = \dfrac{0,618033988 \cdots r \times \sqrt{4r^2 - (0,618033988 \cdots)^2\, r^2}}{r}$,

$$c_5 = 0,618033988 \cdots \times \sqrt{4 - (0,618033988 \cdots)^2}\; r = 1,175570504 \cdots r.$$

L'enseignant conviendra avec les élèves de la précision désirée. Une valeur approchée à 7 décimales près, par exemple, suffit pour entreprendre l'activité suivante. Si le professeur envisage de faire effectuer le calcul exact par les élèves, il devra sans doute donner un « très gros coup de pouce ». Nous indiquons ci-dessous quelques étapes de ce travail. Il vient

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \times \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{r}, \\
&= \frac{\left(\sqrt{5}-1\right) \times \sqrt{16r^2 - r^2\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right)}}{4}, \\
&= \frac{r\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\
&= \frac{r}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2\left(10+2\sqrt{5}\right)} = \frac{r}{4}\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)}, \\
&= \frac{r}{4}\sqrt{60 - 20 - 20\sqrt{5} + 12\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{40 - 8\sqrt{5}} = \frac{2r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
c_5 &= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

***Construction « classique » du pentagone régulier***

Cette construction n'est nullement indispensable à la poursuite de l'activité. Nous la donnons simplement à titre indicatif, pour montrer que ce nous avons fait, dans ce qui précède, n'est rien d'autre que la justification de cette construction classique, si on y ajoute le complément ci-dessous.

Maintenant que l'on connaît la mesure du côté du décagone régulier et celle du côté du pentagone régulier, il n'est pas difficile de démontrer la relation qui lie ces deux mesures à celle du côté de l'hexagone régulier. En fait, on a $c_5^2 = c_{10}^2 + c_6^2$.

La vérification est immédiate. Nous savons que

$$c_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad c_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \qquad c_6 = r.$$

Il vient

$$c_5^2 = \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right),$$

$$c_{10}^2 + c_6^2 = \frac{r^2}{4}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) + r^2 = \frac{r^2}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) + 4\frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right).$$

Il suffit alors de modifier légèrement la construction du côté du décagone régulier vue précédemment pour obtenir une construction directe du côté du pentagone régulier.

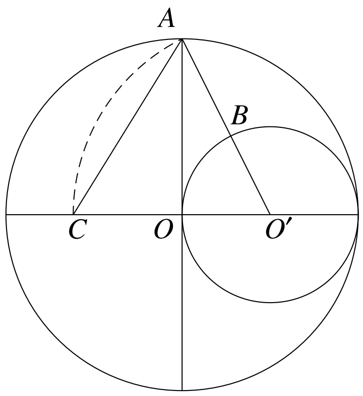



*Fig. 10*

On voit, sur la figure ci-contre, que $|AB|$ représente la mesure du côté du décagone régulier. Au moyen du compas, on reporte cette longueur $|AB|$ de manière à obtenir le segment $[OC]$. La longueur $|AC|$ est alors la mesure du côté du pentagone régulier, puisque, dans le triangle rectangle $OAC$, on a bien

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |OC|^2 + |OA|^2, \\ &= c_{10}^2 + c_6^2. \end{aligned}$$

# 3 Élaboration d'une table de cordes

*De quoi s'agit-il ?* Élaborer une table de cordes et de sinus, par des moyens géométriques et en s'aidant de la calculatrice.

*Enjeux* S'imprégner fortement de la notion de sinus.

***Compétences***

*Connaître les grands théorèmes de la géométrie classique et de la trigonométrie relatifs aux longueurs, aux rapports de longueurs, aux angles.*

*Justifier les étapes d'une démonstration.*

*Observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre.*

*De quoi a-t-on besoin ?*

Papier, crayon, règle, compas, calculatrice.

Les fiches 7 à 11, en annexe aux pages 477 à 481.

## 3.1 Quelques cordes et sinus connus

*Comment s'y prendre ?*

Le professeur demande aux élèves de consigner sur une feuille de papier les cordes et sinus déjà connus (pour un cercle de rayon 1) ; cette feuille sera complétée au fur et à mesure de l'activité qui suit, de manière à pouvoir comparer les résultats obtenus par voie géométrique à ceux fournis directement par la touche de la calculatrice.

Ils devraient obtenir une table du type

| Angle | Corde | Angle | Sinus |
|---|---|---|---|
| $36^o$ | $0,618033988\cdots$ | $18^o$ | $0,309016994\cdots$ |
| $60^o$ | $1,000000000\cdots$ | $30^o$ | $0,500000000\cdots$ |
| $72^o$ | $1,175570504\cdots$ | $36^o$ | $0,587785252\cdots$ |
| $180^o$ | $2,000000000\cdots$ | $90^o$ | $1,000000000\cdots$ |

En consultant la liste des tâches, nous constatons qu'il faut maintenant établir une formule donnant la corde de la différence de deux angles. Nous pourrons ainsi, comme Ptolémée l'a fait, calculer la corde de $12^o$ à partir de celles de $72^o$ et de $60^o$. Nous allons suivre les traces du grand astronome, qui recourt à un théorème qu'on a coutume de lui attribuer.

## 3.2 Le théorème dit de Ptolémée

*Comment s'y prendre ?*

Les élèves reçoivent la fiche 7, comprenant deux figures et l'énoncé du théorème « dit » de Ptolémée. Nous la reproduisons ci-après.

On trace un cercle, dans lequel on inscrit un quadrilatère quelconque $ABGD$.

On trace également les deux diagonales de ce quadrilatère, à savoir $AG$ et $BD$.

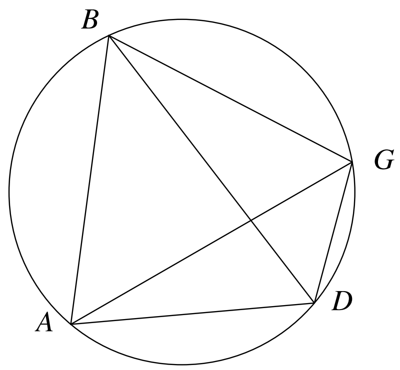



*Fig. 11*

Le théorème s'énonce

*Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des mesures des diagonales est égal à la somme des produits des mesures des côtés opposés.*

$$|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| = |BD| \times |AG|.$$

Pour faire sa démonstration, PTOLÉMÉE construit alors la droite $BE$, telle que $\widehat{ABE} = \widehat{DBG}$.

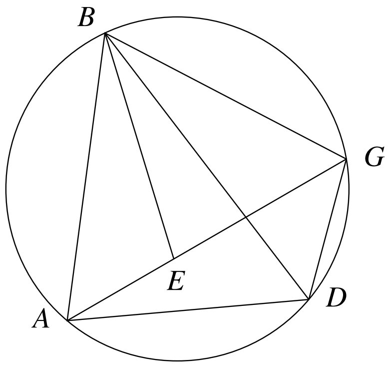



*Fig. 12*

Si les élèves éprouvent trop de problèmes pour entamer la démonstration, le professeur leur suggérera de repérer, dans la figure 12, des triangles semblables ayant pour côtés certains éléments qui interviennent dans le résultat formalisé plus haut.

Si la situation est tout à fait bloquée, les élèves reçoivent la fiche 8, reprenant les deux précédentes figures et les questions ci-dessous.

| |
|---|
| Comparer les angles des triangles $ABE$ et $DBG$. |

Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{DBG}$ sont égaux par construction de la droite $BE$.

Les angles $\widehat{GAB}$ et $\widehat{GDB}$ sont égaux, car ils sont inscrits et interceptent le même arc.

| |
|---|
| Comment sont les deux triangles $ABE$ et $DBG$ ?<br>En déduire une relation entre $|AE|$, $|AB|$, $|BD|$ et $|DG|$. |

Les triangles sont semblables, ce qui permet d'écrire

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|DG|} \quad \text{ou encore} \quad |AB| \times |DG| = |BD| \times |AE|.$$

| |
|---|
| Comparer les angles des triangles $ABD$ et $EBG$. |

Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{EBG}$ sont égaux par construction de la droite $BE$.

Les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BGE}$ sont égaux, car ils sont inscrits et interceptent le même arc.

| |
|---|
| Comment sont les deux triangles $ABD$ et $EBG$ ?<br>En déduire une relation entre $|AD|$, $|BD|$, $|BG|$ et $|GE|$. |

Les triangles sont semblables, ce qui permet d'écrire

$$\frac{|AD|}{|GE|} = \frac{|BD|}{|BG|} \quad \text{ou encore} \quad |AD| \times |BG| = |GE| \times |BD|.$$

En utilisant les deux relations trouvées plus haut, que vaut $|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD|$ ?

$$\begin{aligned} |BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| &= |GE| \times |BD| + |BD| \times |AE| \\ &= |BD| \times (|GE| + |EA|) \\ &= |BD| \times |AG|. \end{aligned}$$

## 3.3 Corde de la différence de deux angles

L'application du théorème précédent au cas particulier où l'un des côtés du quadrilatère inscrit dans le cercle est un diamètre, permet de calculer la corde de la différence de deux angles de cordes connues, et notamment la corde de 12°, à partir des cordes de 72° et 60°.

Remarquons que, dans la foulée, on aura évidemment établi la formule du sinus de la différence de deux angles.

*Comment s'y prendre ?* Les élèves reçoivent la fiche 9, contenant la figure 13 et les questions reprises ci-dessous.

On considère le quadrilatère $ABGD$ inscrit dans un demi-cercle de centre $O$. L'un de ses côtés $AD$ est un diamètre du cercle.

On note $\alpha$ l'angle $\widehat{GOA}$ et $\beta$ l'angle $\widehat{BOA}$.

Exprimer les mesures des côtés et des diagonales du quadrilatère comme cordes d'angles faisant intervenir $\alpha$ et/ou $\beta$.

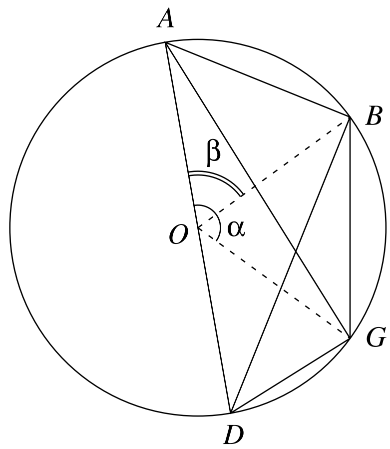



*Fig. 13*

Il vient

$$|AB| = \operatorname{crd}\beta \qquad |AG| = \operatorname{crd}\alpha$$

$$|AD| = 2 \qquad |BG| = \operatorname{crd}(\alpha - \beta)$$

$$|BD| = \operatorname{crd}(180^\circ - \beta) \qquad |GD| = \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)$$

Appliquer le théorème de Ptolémée au quadrilatère $ABGD$.

En déduire $\operatorname{crd}(\alpha - \beta)$ en fonction des autres cordes.

Le théorème de Ptolémée s'écrit

$$|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| = |BD| \times |AG|.$$

Cela se traduit par

$$2\,\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)+\mathrm{crd}\,(\beta)\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)=\mathrm{crd}\,\alpha\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\beta).$$

On a encore

$$\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{crd}\,\alpha\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\beta)-\mathrm{crd}\,\beta\,\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)\right].$$

Pour obtenir $\mathrm{crd}\,(\alpha-\beta)$, rien qu'en fonction de $\mathrm{crd}\,\alpha$ et de $\mathrm{crd}\,\beta$ à partir de cette formule, il faut exprimer $\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)$ en fonction de $\mathrm{crd}\,\alpha$ et $\mathrm{crd}\,(180^\circ-\beta)$ en fonction de $\mathrm{crd}\,\beta$. Ce calcul fait l'objet de la section suivante.

## 3.4 Corde de l'angle supplémentaire

*Comment s'y prendre ?*

Le professeur distribue la fiche 10, dont voici le contenu.

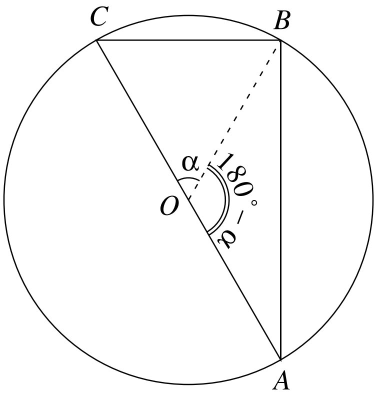



*Fig. 14*

La droite $AC$ est un diamètre du cercle de centre $O$.

Le point $B$ est un point de la circonférence distinct de $A$ et de $C$.

Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires. On les note respectivement $\alpha$ et $180^\circ-\alpha$.

| |
|---|
| Calculer $\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)$ en fonction de $\mathrm{crd}\,\alpha$. |

Le triangle $ABC$ est rectangle, puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle.

La relation de PYTHAGORE, appliquée à ce triangle rectangle, permet d'écrire

$$|AB|^2=|AC|^2-|BC|^2,$$

ou encore, en terme de cordes,

$$[\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)]^2=4-[\mathrm{crd}\,\alpha]^2.$$

On a ainsi

$$\mathrm{crd}\,(180^\circ-\alpha)=\sqrt{4-[\mathrm{crd}\,\alpha]^2}.$$

| |
|---|
| En utilisant cette relation conjointement avec celle de la fiche précédente, calculer $\mathrm{crd}\,12^\circ$ à partir de $\mathrm{crd}\,72^\circ$ et $\mathrm{crd}\,60^\circ$. En déduire la valeur de $\sin 6^\circ$. |

De ce qui précède, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{crd} 12^\circ &= \operatorname{crd}(72^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{crd} 72^\circ \operatorname{crd}(180^\circ - 60^\circ) - \operatorname{crd} 60^\circ \operatorname{crd}(180^\circ - 72^\circ)\right], \\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{crd} 72^\circ \sqrt{4 - (\operatorname{crd} 60^\circ)^2} - \operatorname{crd} 60^\circ \sqrt{4 - (\operatorname{crd} 72^\circ)^2}\right], \\
&= 0,209056926\cdots .
\end{aligned}$$

On a encore

$$\sin 6^\circ = 0,104528463\cdots .$$

La consultation de la liste des tâches nous engage maintenant à établir une formule donnant la corde de l'angle moitié d'un angle de corde connue, puisque c'est par ce moyen, nous l'avons dit, que Ptolémée poursuit son travail.

## 3.5 Corde de l'angle moitié d'un angle donné

*Comment s'y prendre ?*

Le professeur distribue la fiche 11, dont voici le contenu.

On considère le demi-cercle $ABG$.

L'angle $\widehat{GOB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{GOD}$, ce qui s'exprime encore par l'égalité $|BD| = |DG|$.

On trace $DZ$ perpendiculaire à $AG$.

Sur $AG$, on porte le segment $[AE]$ tel que $|AE| = |AB|$.

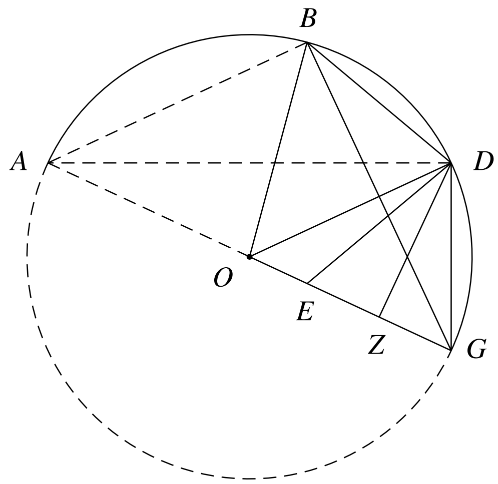



*Fig. 15*

| |
|---|
| Montrer que $\lvert BD\rvert = \lvert DE\rvert$, en exhibant deux triangles égaux dont ils sont un des côtés. |

Considérons les triangles $ABD$ et $AED$.

Ils ont un côté $[AD]$ commun.

Par construction, la mesure du côté $[AB]$ de l'un est égale à la mesure du côté $[AE]$ de l'autre.

L'angle $\widehat{DAB}$ de l'un est égal à l'angle $\widehat{EAD}$ de l'autre (angles inscrits interceptant des arcs égaux par hypothèse).

Les deux triangles $ABD$ et $AED$ sont donc égaux (cas d'un angle égal compris entre deux côtés égaux), et ainsi, $|BD| = |DE|$.

Puisque $|BD| = |DG|$, par hypothèse, justifier que $Z$ est au milieu de $[EG]$.

En déduire que

$$|ZG| = \frac{1}{2}\,(|AG| - |AB|).$$

On vient de montrer que $|BD| = |DE|$ ; on sait aussi, par hypothèse, que $|BD| = |DG|$. Il vient donc $|DE| = |DG|$, ce qui implique que le triangle $EDG$ est isocèle. La droite $DZ$ qui est hauteur relative à la base $[EG]$ (puisque, par hypothèse, $DZ \perp AG$) est alors également médiane, ce qui entraîne $|EZ| = |ZG|$. Le point $Z$ est milieu de $[EG]$.

On a

$$|ZG| = \frac{1}{2}\,|EG| = \frac{1}{2}\,(|AG| - |AE|) = \frac{1}{2}\,(|AG| - |AB|).$$

Montrer que les triangles $ADG$ et $DZG$ sont semblables et en déduire que

$$|DG|^2 = |AG| \times |ZG| = |AG| \times \frac{1}{2}\,(|AG| - |AB|).$$

Le triangle $ADG$ est rectangle car il est inscrit dans un demi-cercle.

Le triangle $DZG$ est également rectangle, puisque, par hypothèse, $DZ$ est perpendiculaire à $AG$.

Ces deux triangles rectangles ont l'angle $\widehat{DGA}$ en commun et ils sont ainsi semblables.

Certains élèves pourraient se souvenir de la propriété qui s'énonce

*la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle (encore appelée hauteur relative à l'hypoténuse) partage l'hypoténuse en deux triangles rectangles semblables à celui de départ.*

Si ce n'est pas le cas, l'enseignant attirera l'attention sur ce fait.

Dans les triangles semblables $ADG$ et $DZG$, on a alors

$$\frac{|DG|}{|ZG|} = \frac{|AG|}{|DG|} \quad \text{ou encore} \quad |DG|^2 = |AG| \times |ZG| = |AG| \times \frac{1}{2}\,(|AG| - |AB|),$$

puisqu'on vient de voir que $|ZG| = \frac{1}{2}\,(|AG| - |AB|)$.

La corde $|BG|$ est celle d'un certain angle que nous appelons $\alpha$, on note $|BG| = \operatorname{crd}\alpha$. Avec cette notation, transcrire la dernière égalité en terme de cordes.

Pour transcrire l'égalité en terme de cordes, il faut d'abord remarquer que, avec la notation proposée, $|DG| = \operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$, $|AB| = \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)$ et $|AG| = 2$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= 2 \times \frac{1}{2}\,(2 - \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)),\\
&= 2 - \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha),\\
\left(\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= 2 - \sqrt{4 - [\operatorname{crd}\alpha]^2} \qquad \text{(cf. fiche 10)}\,;
\end{aligned}$$

et il vient

$$\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}\alpha]^2}}.$$

Si les élèves connaissent la résolution de l'équation du deuxième degré au moment où on leur propose cette activité, ils peuvent établir cette dernière formule algébriquement, à partir des résultats obtenus à la fiche 6. La prudence s'imposera toutefois dans le choix du signe de l'expression, lors de l'extraction de certaines racines carrées...

Le professeur demande alors aux élèves d'utiliser cette formule pour rechercher, au moyen de la calculatrice, les cordes des angles de $6^\text{o}$, $3^\text{o}$, $1\frac{1}{2}^\text{o}$, $\frac{3}{4}^\text{o}$, ainsi que les valeurs correspondantes des sinus. Les élèves garderont une trace de ces calculs en complétant la table de cordes et sinus déjà élaborée précédemment.

On part évidemment de la valeur $\operatorname{crd}12^\text{o} = 0,209056926\cdots$, obtenue à la fiche 10. En appliquant la dernière formule établie, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{crd}\frac{12^\text{o}}{2} = \operatorname{crd}6^\text{o} &= \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}12^\text{o}]^2}}\\
&= 0,104671912\cdots,\\
\text{et ainsi, } \sin 3^\text{o} &= 0,052335956\cdots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{crd}\frac{6^\text{o}}{2} = \operatorname{crd}3^\text{o} &= \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}6^\text{o}]^2}}\\
&= 0,052353897\cdots,\\
\text{et ainsi, } \sin 1\frac{1}{2}^\text{o} &= 0,026176949\cdots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{crd}\frac{3^\text{o}}{2} = \operatorname{crd}1\frac{1}{2}^\text{o} &= \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}3^\text{o}]^2}}\\
&= 0,026179191\cdots,\\
\text{et ainsi, } \sin \frac{3}{4}^\text{o} &= 0,013089596\cdots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{crd}\frac{1\frac{1}{2}^\text{o}}{2} = \operatorname{crd}\frac{3}{4}^\text{o} &= \sqrt{2-\sqrt{4-\left[\operatorname{crd}1\frac{1}{2}^\text{o}\right]^2}}\\
&= 0,013089876\cdots,\\
\text{et ainsi, } \sin \frac{3}{8}^\text{o} &= 0,006544938\cdots.
\end{aligned}$$

et ainsi de suite...

## Commentaires

Les onze fiches de travail proposées offrent un assez large éventail d'activités où l'élève a l'occasion d'argumenter, de justifier, de travailler avec la calculatrice, ... dans un contexte historique qui motive la tâche qui lui est demandée. Les modalités d'exploitation des fiches, de même que le nombre de fiches qui seront réellement travaillées, sont des paramètres laissés au contrôle de l'enseignant qui les adaptera à ses besoins et au niveau de sa classe.

Nous avons déjà signalé, qu'arrivé aux résultats qui précèdent, PTOLÉMÉE estime la corde de l'angle d'un demi-degré au moyen d'une interpolation de nature géométrique. Ensuite, par une formule « d'addition », il remplit sa table de demi-degré en demi-degré.

Nous pensons, qu'avec les élèves, le travail s'arrête ici. Néanmoins, nous ajoutons quelques remarques, à l'intention de l'enseignant.

Les résultats obtenus au cours des activités qui précèdent peuvent, à peu de frais, être utilisés pour établir les formules dites « d'addition », des « angles doubles », ...

La fiche 1 nous a fait découvrir la relation

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{crd}\alpha,$$

qui équivaut à

$$\operatorname{crd}\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Si nous injectons cette dernière égalité dans la formule démontrée dans la fiche 9, à savoir

$$\operatorname{crd}(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{crd}\alpha\operatorname{crd}(180^\circ-\beta) - \operatorname{crd}\beta\operatorname{crd}(180^\circ-\alpha)\right],$$

il vient

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\times 2\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right) - 2\sin\frac{\beta}{2}\times 2\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\\
&= \frac{1}{2}\times 4\left[\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right) - \sin\frac{\beta}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\\
&= 2\left[\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right) - \sin\frac{\beta}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right],\\
&= 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right),\\
\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) &= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

De même, le résultat obtenu dans la fiche 11, à savoir

$$\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2-\sqrt{4-[\operatorname{crd}\alpha]^2}}$$

s'écrit

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\alpha}{4} &= \sqrt{2-\sqrt{4-\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}},\\
&= \sqrt{2-\sqrt{4-4\left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}},\\
&= \sqrt{2-\sqrt{4\left[1-\left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2\right]}},\\
&= \sqrt{2-2\sqrt{1-\left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}},\\
&= \sqrt{2-2\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2}.
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
4\left[\sin\frac{\alpha}{4}\right]^2 &= 2-2\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2,\\
2\left[\sin\frac{\alpha}{4}\right]^2 &= 1-\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2,\\
\left[\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2 &= 1-2\left[\sin\frac{\alpha}{4}\right]^2.
\end{aligned}$$

Enfin, pour terminer, nous montrons comment PTOLÉMÉE obtient sa formule « d'addition » et à quoi elle correspond dans le cours de trigonométrie que nous avons l'habitude d'enseigner.

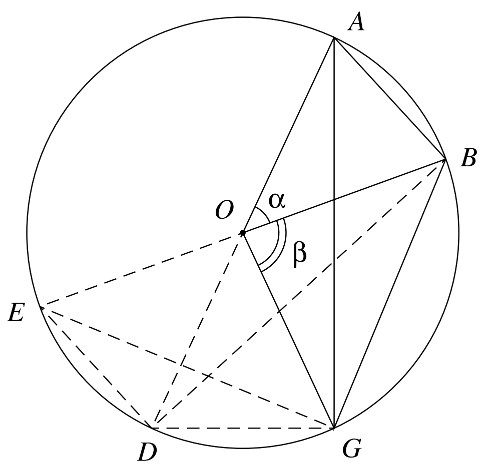



*Fig. 16*

Dans le cercle de centre $O$, désignons par $\alpha$ l'angle $\widehat{BOA}$ et par $\beta$ l'angle $\widehat{GOB}$.

Les droites $AOD$ et $BOE$ sont des diamètres du cercle.

Si on applique le théorème dit de PTOLÉMÉE au quadrilatère inscrit $BGDE$, il vient

$$|BD| \times |EG| = |BG| \times |DE| + |BE| \times |DG|.$$

On transcrit alors chacune de ces six longueurs en terme de cordes ; il vient

$$\begin{aligned}
|BD| &= \operatorname{crd}(180^o-\alpha),\\
|EG| &= \operatorname{crd}(180^o-\beta),\\
|BG| &= \operatorname{crd}\beta,\\
|DE| &= |AB| = \operatorname{crd}\alpha,\\
|BE| &= 2,\\
|DG| &= \operatorname{crd}[180^o-(\alpha+\beta)].
\end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\operatorname{crd}(180^o - \alpha)\operatorname{crd}(180^o - \beta) = \operatorname{crd}\beta\operatorname{crd}\alpha + 2\operatorname{crd}[180^o - (\alpha+\beta)].$$

En terme de sinus, cette égalité devient

$$2\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right) \times 2\sin\left(90^o - \frac{\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2} \times 2\sin\frac{\beta}{2} + 2 \times 2\sin\left(90^o - \frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

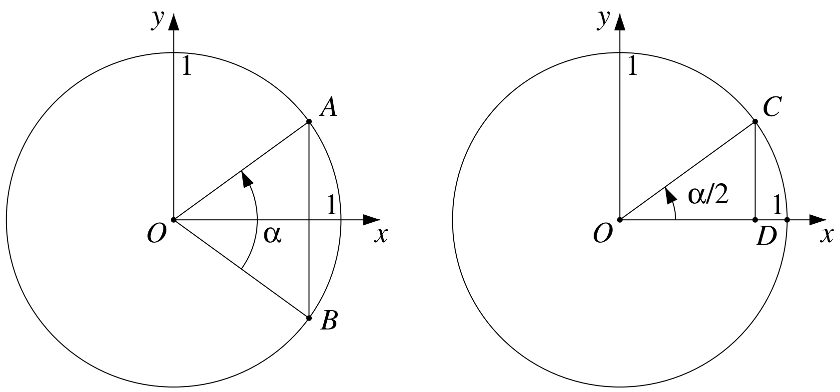
on a encore

$$\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} &= \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

## Annexe III

# Fiches à photocopier

# Définition de la corde et du sinus d'un angle




Dans le repère orthonormé $Oxy$, on considère le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Les angles sont orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

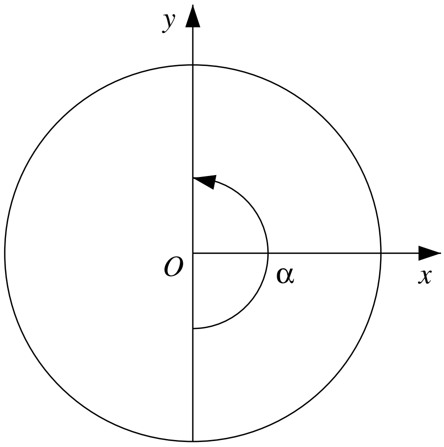
Observons d'abord le cercle de gauche de la figure et désignons par $\alpha$ l'angle $\widehat{BOA}$. Les anciens appelaient « corde de l'angle $\alpha$ » la mesure du segment $[AB]$. On note $\operatorname{crd}\alpha = |AB|$.

À cette notion de corde, les Arabes ont préféré celle de sinus, qui leur est venue de l'Inde et qui est fort voisine. Elle est illustrée sur le cercle de droite de la même figure. Les angles ont tous pour demi-droite origine l'axe des $x$ du repère. On appelle « sinus de $\frac{\alpha}{2}$ » la mesure du segment $[CD]$. On note $\sin\frac{\alpha}{2} = |CD|$. On peut encore dire que, puisque tous les angles ont pour demi-droite origine $Ox$, le sinus est aussi l'ordonnée du point $C$ dans le repère orthonormé $Oxy$.

> Quelle relation y a t-il entre la corde de l'angle $\alpha$ et le sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ de la figure ci-dessus ?

# Cordes et sinus d'angles particuliers

Les deux cercles représentés ci-dessous sont de rayon 1.

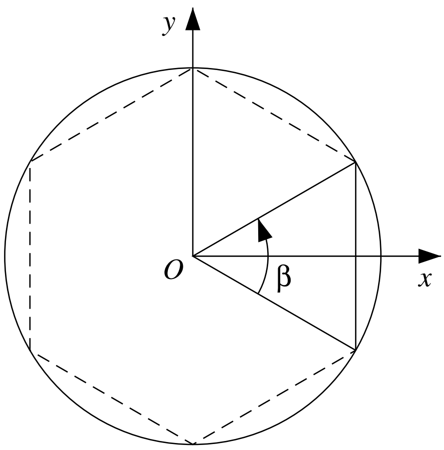



1. Que vaut l'angle $\alpha$ ? $\quad \alpha = \ldots\ldots$

2. Que vaut $\operatorname{crd}\alpha$ ? $\quad \operatorname{crd}\alpha = \ldots\ldots$

3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier.

$$\sin\ldots\ldots = \ldots\ldots$$



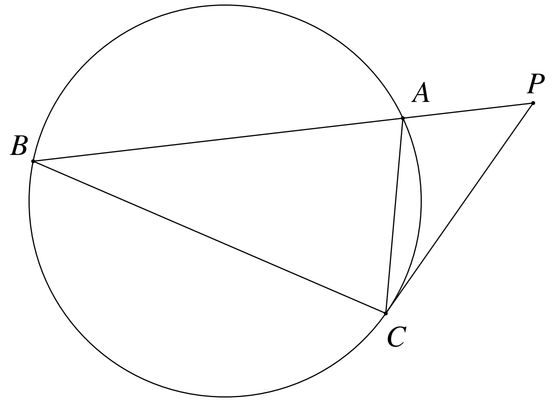

1. Que vaut l'angle $\beta$ ? $\quad \beta = \ldots\ldots$

2. Que vaut $\operatorname{crd}\beta$ ? $\quad \operatorname{crd}\beta = \ldots\ldots$

3. En utilisant le résultat obtenu à la fiche 1, en déduire la valeur du sinus d'un angle particulier.

$$\sin\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

# Puissance d'un point par rapport à un cercle
# Cas particulier




Le point $P$ est quelconque à l'extérieur du cercle.

La droite $PAB$ est une sécante quelconque au cercle.

La droite $PC$ est tangente au cercle.

| |
|---|
| Comparer les angles des triangles $PCA$ et $PBC$. |

| |
|---|
| Comment sont les triangles $PCA$ et $PBC$ ?<br>En déduire une relation entre $\lvert PA\rvert$, $\lvert PB\rvert$ et $\lvert PC\rvert$. |

# Partage d'un segment en extrême et moyenne raison

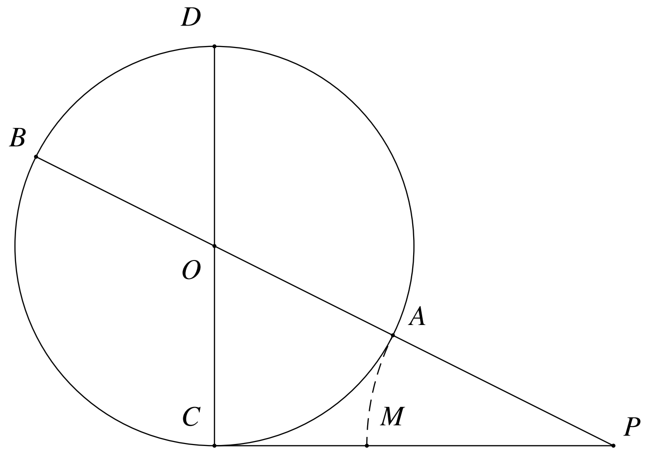
On considère un segment $[CP]$.

Par le point $C$, on trace la droite $CD$ perpendiculaire à la droite $CP$ et on place le point $D$ de telle manière que $|CD| = |CP|$.On nomme $O$ le milieu de $[CD]$.

On trace le cercle de centre $O$ et de diamètre $[CD]$.

On trace la droite $PO$ et on note $A$ et $B$ ses points d'intersection avec le cercle.

On construit le point $M$ sur le segment $[CP]$, tel que $|PM| = |PA|$.




Sachant que $|PB| = |PA| + |AB|$ et que $|CD| = |AB| = |CP|$, établir que

$$|PC|^2 = |PM|^2 + |PM| \times |PC|.$$

En déduire que $|PM|^2 = |PC| \times |MC|$.

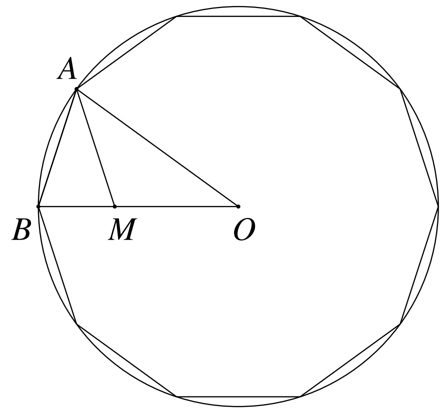
Si $a$ représente la mesure du segment $[PC]$, calculer $|PM|$ en fonction de $a$.

Calculer le rapport $\dfrac{|PM|}{|MC|}$ dans lequel le point $M$ partage le segment $[PC]$.

# Le décagone régulier

Le segment $[AB]$ est un côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de centre $O$ et de rayon $[OA]$.

La droite $AM$ est une bissectrice de l'angle en $A$ du triangle $ABO$.




En calculant les mesures des angles des triangles $MAB$ et $AMO$, justifier que ces triangles sont isocèles. On a alors $|AB| = |AM| = |OM|$.

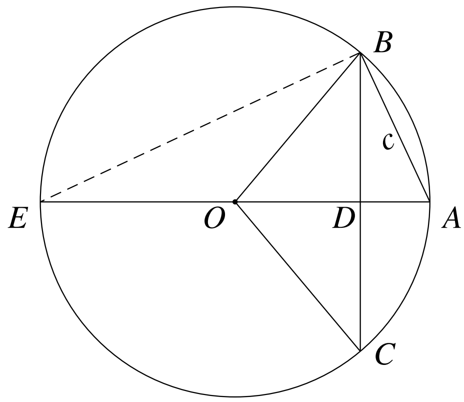
Justifier que les triangles isocèles $AOB$ et $BAM$ sont semblables.

En utilisant cette propriété et l'égalité trouvée précédemment, établir une relation entre les mesures des segments $[OB]$, $[OM]$ et $[MB]$.

En comparant cette relation avec celle obtenue dans l'activité de la fiche 4 entre les mesures des segments $[PC]$, $[PM]$ et $[MC]$, que peut-on en conclure pour le point $M$ de la figure ci-dessus ?

En se référant encore à l'activité de la fiche 4, que vaut la mesure de la longueur du côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $r$ ?

## Corde d'un angle double d'un angle donné




L'angle $\widehat{COB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{AOB}$.

La mesure de la corde $[AB]$ est notée $c$.

La mesure du rayon du cercle est notée $r$.

Le rayon $[AO]$ est prolongé jusqu'en $E$ et on trace le triangle $ABE$.

Que vaut l'angle en $B$ du triangle $ABE$ ?

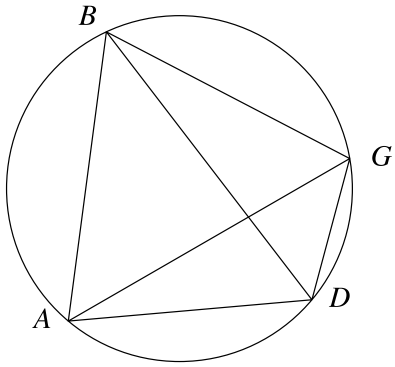
En calculant de deux manières le double de l'aire du triangle $ABE$, exprimer la mesure de la corde $[BC]$ en fonction de la mesure $c$ de la corde $[AB]$.

En utilisant une calculatrice, en déduire la mesure du côté du pentagone régulier à partir de celle du décagone régulier.

# Le théorème dit de Ptolémée (1)

On trace un cercle, dans lequel on inscrit un quadrilatère quelconque $ABGD$.

On trace également les deux diagonales de ce quadrilatère, à savoir $AG$ et $BD$.

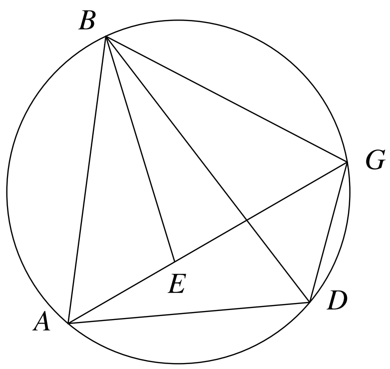



Le théorème s'énonce

*Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des mesures des diagonales est égal à la somme des produits des mesures des côtés opposés.*

$$|BG| \times |AD| + |AB| \times |GD| = |BD| \times |AG|.$$

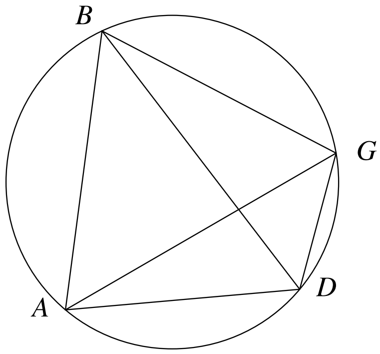
Pour faire sa démonstration, Ptolémée construit alors la droite $BE$, telle que $\widehat{ABE} = \widehat{DBG}$.

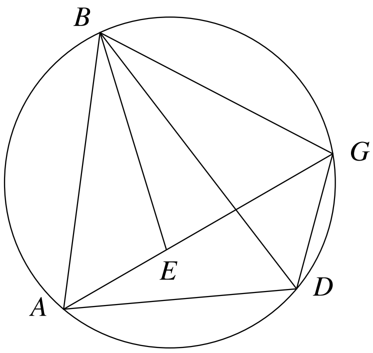


# Le théorème dit de Ptolémée (2)

On trace un cercle, dans lequel on inscrit un quadrilatère quelconque $ABGD$.

On trace également les deux diagonales de ce quadrilatère, à savoir $AG$ et $BD$.




Ptolémée construit alors la droite $BE$, telle que $\widehat{ABE} = \widehat{DBG}$.

| |
|---|
| Comparer les angles des triangles $ABE$ et $DBG$. |

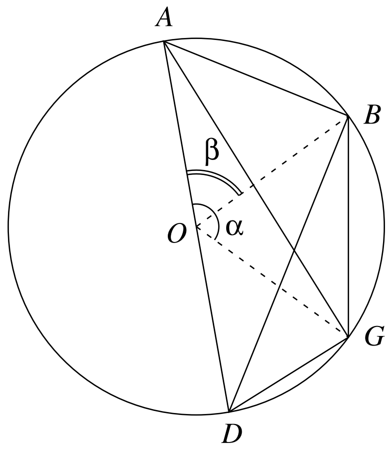
| |
|---|
| Comment sont les deux triangles $ABE$ et $DBG$ ?<br>En déduire une relation entre $\|AE\|$, $\|AB\|$, $\|BD\|$ et $\|DG\|$. |

| |
|---|
| Comparer les angles des triangles $ABD$ et $EBG$. |

| |
|---|
| Comment sont les deux triangles $ABD$ et $EBG$ ?<br>En déduire une relation entre $\|AD\|$, $\|BD\|$, $\|BG\|$ et $\|GE\|$. |

| |
|---|
| En utilisant les deux relations trouvées plus haut, que vaut $\|BG\| \times \|AD\| + \|AB\| \times \|GD\|$ ? |

# Corde de la différence de deux angles




On considère le quadrilatère $ABGD$ inscrit dans un demi-cercle de centre $O$. L'un de ses côtés $AD$ est un diamètre du cercle.

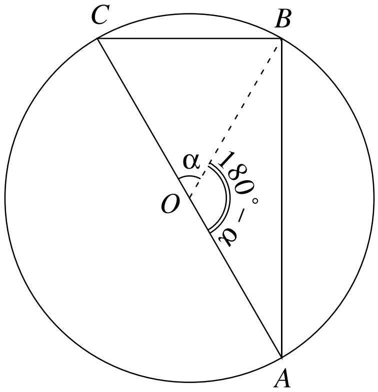
On note $\alpha$ l'angle $\widehat{GOA}$ et $\beta$, l'angle $\widehat{BOA}$.

> Exprimer les mesures des côtés et des diagonales du quadrilatère comme cordes d'angles faisant intervenir $\alpha$ et/ou $\beta$.

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert AB\rvert =$ | $\lvert AG\rvert =$ | $\lvert AD\rvert =$ |
| $\lvert BG\rvert =$ | $\lvert BD\rvert =$ | $\lvert GD\rvert =$ |

> Appliquer le théorème de PTOLÉMÉE au quadrilatère $ABGD$.
>
> En déduire $\mathrm{crd}\,(\alpha - \beta)$ en fonction des autres cordes.

# Corde de l'angle supplémentaire




La droite $AC$ est un diamètre du cercle de centre $O$.

Le point $B$ est un point de la circonférence distinct de $A$ et de $C$.

Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires. On les note respectivement $\alpha$ et $180^\circ - \alpha$.

Calculer $\operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)$ en fonction de $\operatorname{crd}\alpha$.

En utilisant cette relation conjointement avec celle de la fiche précédente, calculer $\operatorname{crd} 12^\circ$ à partir de $\operatorname{crd} 72^\circ$ et $\operatorname{crd} 60^\circ$. En déduire la valeur de $\sin 6^\circ$.

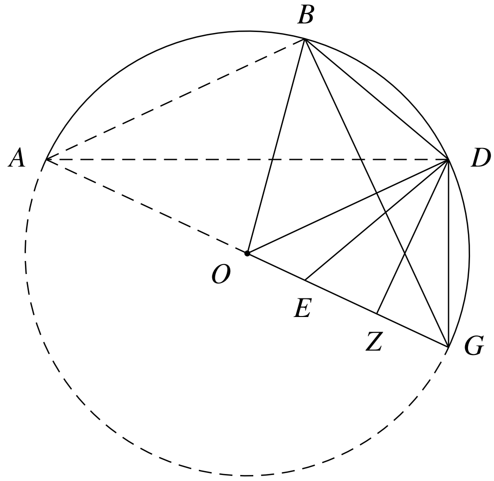
# Corde de l'angle moitié d'un angle donné

On considère le demi-cercle $ABG$.

L'angle $\widehat{GOB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{GOD}$, ce qui s'exprime encore, $|BD| = |DG|$.

On trace $DZ$ perpendiculaire à $AG$.

Sur $AG$, on porte le segment $[AE]$ tel que $|AE| = |AB|$.




Montrer que $|BD| = |DE|$, en exhibant deux triangles égaux dont ils sont un des côtés.

Puisque $|BD| = |DG|$, par hypothèse, justifier que $Z$ est au milieu de $[EG]$.

En déduire que

$$|ZG| = \frac{1}{2}(|AG| - |AB|).$$

Montrer que les triangles $ADG$ et $DZG$ sont semblables et en déduire que

$$|DG|^2 = |AG| \times |ZG| = |AG| \times \frac{1}{2}(|AG| - |AB|).$$

La corde $|BG|$ est celle d'un certain angle que nous appelons $\alpha$ ($|BG| = \operatorname{crd}\alpha$). Avec cette notation, transcrire la dernière égalité en terme de cordes.

# Chapitre 19

# Le développement de la trigonométrie

## Préambule

Selon Edward S. KENNEDY[1] [100] [101], la trigonométrie, sans doute plus que toute autre branche des mathématiques, s'est développée grâce à un va-et-vient continuel et fertile. Il s'agit en fait d'une offre et d'une demande – offre de théories mathématiques et de techniques utilisables en toutes circonstances et demande pressante d'une science appliquée, l'astronomie. La relation trigonométrie – astronomie fut tellement intime que, jusqu'au treizième siècle, les deux sujets ne formeront qu'une seule entité.

KENNEDY perçoit le même type d'interactions diverses entre théorie et application au sein même de la trigonométrie, si bien que, pour lui, l'histoire de la trigonométrie exhibe, en elle-même, la croissance embryonnaire de trois divisions classiques des mathématiques : l'algèbre, l'analyse et la géométrie.

Les débuts du développement de la trigonométrie se perdent dans la nuit des temps ; on peut considérer qu'au départ, elle a produit les premières suites numériques faisant correspondre une longueur d'ombre à un moment de la journée. Ces concepts, qui ont vu le jour dans des contrées à l'est de la Méditerranée, ont été rapportés par des gens écrivant en grec et se sont bien implantés dans des régions plus occidentales au deuxième siècle de notre ère. Nous verrons que le pôle de l'activité va alors se déplacer en Inde – la fonction ≪ corde ≫ y sera remplacée par plusieurs espèces de fonctions ≪ sinus ≫ – et de là, il retournera en partie vers son lieu d'origine. Entre le neuvième et le quinzième siècle, dans la région s'étendant de la Syrie à l'Asie centrale, la nouvelle fonction sinus et les vieilles fonctions ombres vont être tabulées en sexagésimal. C'est de ce développement qu'émerge vraiment la trigonométrie, en ce sens que l'objet d'étude devient le triangle sphérique ou plan, ses côtés et ses angles. Lorsque le centre d'activité de l'astronomie se déplace en Europe, il en va de même de la nouvelle trigonométrie et les scientifiques européens poursuivent le travail de leurs prédécesseurs orientaux, à savoir le calcul de tables et la découverte de relations fonctionnelles entre les éléments du triangle.

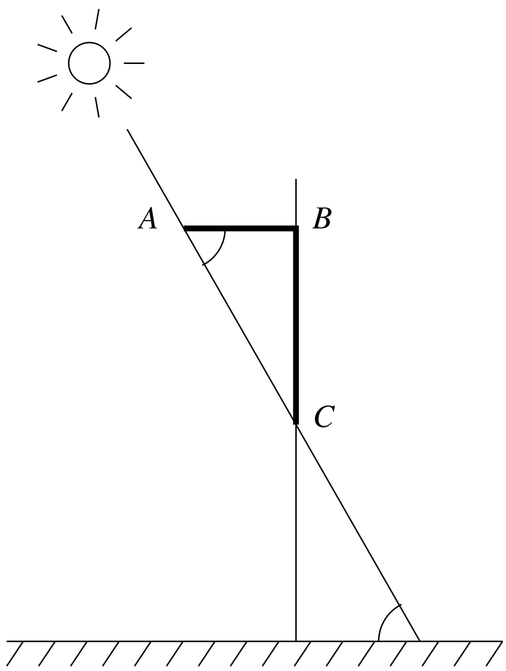
L'invention du calcul infinitésimal, qui n'arrive que plus tard, précipite la fin rapide de la trigonométrie – considérée comme branche indépendante des mathématiques. Avec la naissance et l'exploitation des nombres complexes, la plus grande partie de la théorie est engloutie dans l'analyse. À la fin du dix-huitième siècle, Léonard EULER et d'autres mathématiciens présentent

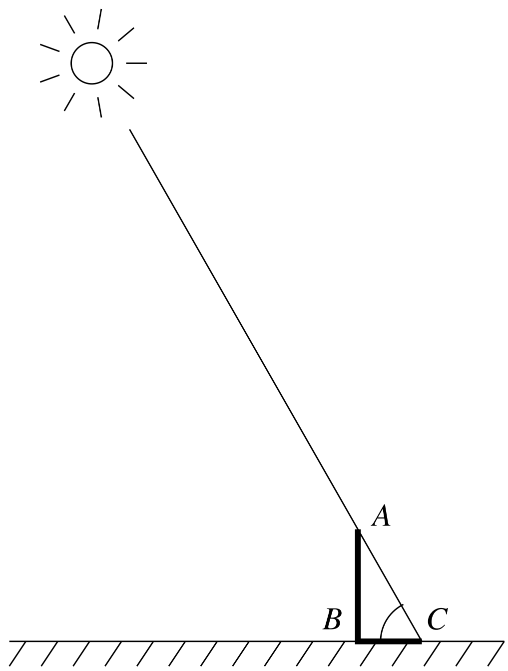
[1] Edward S. KENNEDY est professeur émérite de l'Université américaine de Bayrūt ; il est considéré comme l'un des tout grands spécialistes de l'histoire de l'astronomie en pays d'Islam.

tous les théorèmes de la trigonométrie comme corollaires de la théorie des fonctions complexes. La trigonométrie ne conserve son identité séparée que comme sujet scolaire et comme utilitaire particulièrement apprécié des arpenteurs et navigateurs.

## 1 Les balbutiements

Très tôt, on trouve les ancêtres légitimes des fonctions « tangente » et « cotangente ». Il s'agit en fait de la mesure de l'ombre d'un bâton ou *gnomon*.




Si le gnomon $AB$ est fixé horizontalement sur un mur vertical, alors son ombre $BC$ (sur le mur) est la tangente de l'angle de visée du soleil, si on prend la longueur du bâton $AB$ pour unité. Dans ces mêmes conditions, si le gnomon est fixé verticalement dans le sol, son ombre $BC$ (sur le sol) est la cotangente de l'angle de visée du soleil.

Otto Neugebauer et Richard Parker signalent, par exemple, l'existence d'une table dont on peut voir une transcription « en notation moderne » ci-contre. Il s'agit d'une inscription datant du treizième siècle avant Jésus-Christ, découverte à Abydos, en Haute-Égypte. On trouve des documents du même type en Perse, en Inde, en Chine, en Mésopotamie, en Grèce, ... à différentes époques de l'histoire. Ces schémas sont bien sûr naïfs – les longueurs des « heures » qu'ils indiquent sont inégales, la longueur des ombres varie avec la latitude géographique et avec les saisons – mais ils sont cependant les témoins que l'homme utilise explicitement la notion de fonction au moins depuis trois mille ans.

| Fin de l'heure | Ombre |
|---|---|
| 2 | 30 |
| 3 | 18 |
| 4 | 9 |
| 5 | 3 |
| Midi | 0 |

Dans le long cheminement qui mène à la trigonométrie, l'outil de base ne sera pourtant pas l'ombre du gnomon qui débouche plus tard sur la notion de tangente, mais plutôt la fonction « corde », qui s'apparente, comme on le verra, à notre sinus. Son calcul est facilité par un bon système de numération positionnel ; depuis le deuxième millénaire avant Jésus-Christ, les Mésopotamiens ont développé un tel type de système, qui mélange les bases dix et soixante.

Comme on va le voir, le développement de la trigonométrie est intimement lié aux besoins de l'astronomie, qui fut l'un des sujets d'étude de prédilection en Mésopotamie. C'est là que de nombreuses tables d'observations astronomiques ont été dressées en utilisant le système sexagésimal. On peut raisonnablement conjecturer que ce sont les Grecs de l'époque hellénistique[2] qui, les premiers, ont calculé des « rapports trigonométriques » mais ils ne disposaient que d'un mauvais système littéral de numération. Ils ont donc effectué les calculs en sexagésimal.

## 2 D'Aristarque à Ptolémée

Aristarque de Samos (Ἀρίσταρχος) vivait à l'époque d'Euclide (Εὐκλείδης), époque que l'on peut vraisemblablement situer sous Ptolémée I, roi d'Égypte[3] de 323 à 285. Il est astronome et mathématicien. Selon Th. Heath [80] et G. Sarton [125], on peut, sans nul doute, le considérer comme le premier à défendre l'hypothèse héliocentrique. Il a écrit *Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*, traité intéressant du point de vue mathématique car il y calcule des rapports qui sont en fait des rapports trigonométriques.

L'astronome, mathématicien, géographe Hipparque (Ἵππαρχος) exerce l'essentiel de son activité à Rhodes et à Alexandrie, entre les années 160 et 125 av. J.-C. Selon Sarton, il a probablement inventé ou utilisé la projection stéréographique ainsi que certains instruments habituellement attribués à Ptolémée. Il est en tout cas le premier observateur grec à diviser en 360 degrés les cercles des instruments qu'il utilise[4]. Il réalise un grand nombre d'observations astronomiques très précises, ce qui lui permet de construire le premier globe céleste. Malheureusement il est très conservateur et c'est essentiellement à cause de lui que le système géocentrique continuera à être le plus utilisé. Hipparque peut être considéré comme le fondateur de la trigonométrie, tant sphérique que plane ; il établit une table de la fonction « corde[5] », ce qui pourrait impliquer qu'il connaissait le théorème dit de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, ou... une proposition équivalente. Il critique la géographie d'Ératosthène (Ἐρατοσθένης) et tente de fixer astronomiquement les positions des lieux sur le globe terrestre par leurs latitudes et longitudes, longitudes qu'il détermine par l'observation des éclipses.

C'est à Rome, vers 98 – à l'époque de Pline l'Ancien –, que le mathématicien, astronome, physicien grec Menelaos d'Alexandrie (Μενέλαος) réalise des observations. Il a écrit six livres (perdus) sur le calcul des cordes et trois sur les sphériques, qui nous sont parvenus dans des traductions arabes, hébraïques et latines. Ces livres sur les sphériques sont en fait un traité de trigonométrie sphérique ; il est le premier à libérer la trigonométrie de la stéréométrie et de l'astronomie. C'est dans le livre III que l'on trouve le célèbre théorème dit de Menelaos, relatif

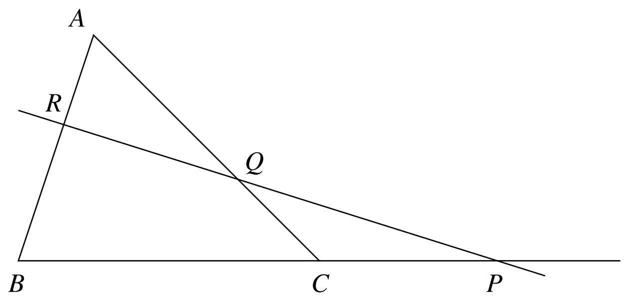
[2]Rappelons que cette civilisation s'est développée en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C.) et qu'elle n'était pas limitée au seul territoire grec.

[3]Ptolémée I est le fondateur de la dynastie des Lagides, seize souverains grecs qui vont régner sur l'Égypte après la mort d'Alexandre le Grand jusqu'en 30 av. J.-C. Il ne faut pas les confondre avec le mathématicien, astronome Claude Ptolémée, mort en 161 de notre ère.

[4]Une histoire du calendrier n'a pas sa place ici. Nous tenons néanmoins à signaler que la quantité « 360 » est liée aux premières formes de calendrier, comme le babylonien, entre autres, qui comportait douze mois de trente jours ; et on ajustait en fin d'année... C'est sans doute là qu'il faut chercher l'explication de l'utilisation du système sexagésimal.

[5]La fonction « corde d'un angle $\alpha$ » vaut en fait le double du sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$.

aussi bien aux triangles sphériques qu'aux triangles plans.




C'est une relation entre six quantités, d'où son nom aussi de *regula sex quantitatum*. Avec les notations de la figure ci-contre, ce théorème peut s'énoncer, en trigonométrie plane :
les points $P$, $Q$, $R$ sont alignés si et seulement si

$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1.$$

Nous connaissons le traité par plusieurs traductions en arabe qui s'étaleront du neuvième jusqu'à la fin du treizième siècle ; nous en mentionnerons une plus loin. Dans la deuxième moitié du douzième siècle, le texte arabe est traduit en latin par GÉRARD DE CRÉMONE et, environ un siècle plus tard, en hébreu par JACOB BEN MACHIR IBN TIBBON.

Claude PTOLÉMÉE (Πτολεμαῖος), dont le nom est sans doute le plus connu parmi ceux qui jalonnent l'histoire de la trigonométrie, est né en Égypte et exerce son activité à Alexandrie durant le deuxième quart du deuxième siècle de notre ère. Il meurt en 161. Il est astronome, mathématicien, géographe, physicien, « chronologiste ». Son influence – presque comparable à celle d'ARISTOTE – est marquante jusqu'au seizième siècle. Il possède une tournure d'esprit euclidienne et, quoique trois siècles les séparent, on le croirait proche collaborateur d'HIPPARQUE, ce dont il se prévaut la plupart du temps. Son œuvre principale porte le titre de *Traité de mathématiques*, en grec, *ἡ μαθηματικὴ σύνταξις* ou *μεγάλη σύνταξις τῆς ἀστρονομίας*, dont la contraction des deux premiers mots a donné, en passant par une traduction en arabe, *Almageste*. Cette encyclopédie de l'astronomie, dont pratiquement tout le contenu est basé sur les travaux d'HIPPARQUE, fait autorité jusqu'en 1543[6]. Les observations personnelles de PTOLÉMÉE s'étalent de 127 à 151, mais selon SARTON, il n'était pas un observateur très fin ; sa contribution principale semble avoir été sa théorie très élaborée des planètes et la découverte d'une deuxième inégalité dans le mouvement périodique de la lune, qu'on appelle de nos jours *évection*. Son système est purement géocentrique ; l'élaboration de la trigonométrie – le remplacement de diagrammes par des calculs – consacre l'astronomie comme discipline mathématique. Le catalogue d'étoiles de PTOLÉMÉE en répertorie 1 028 et est probablement fort proche de celui d'HIPPARQUE, mais ce dernier étant perdu, c'est celui de PTOLÉMÉE qui constitue la plus ancienne description précise du ciel, en fait la seule jusqu'au quinzième siècle ; en cela, il est d'une valeur inestimable.

L'*Almageste* contient un très bel exposé des trigonométries plane et sphérique ; en outre, PTOLÉMÉE y explique comment construire une table de cordes, et il en fournit une allant de $\frac{1}{2}^{\circ}$ à $180^{\circ}$, par pas de $\frac{1}{2}^{\circ}$. Le théorème dit de PTOLÉMÉE, sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, fournit une formule équivalente[7] à celle qui donne $\sin(a \pm b)$.

Signalons encore que PTOLÉMÉE a tenté de démontrer le cinquième postulat d'EUCLIDE et que son *Traité de géographie*, *γηωγραφικὴ ὑφήγησις* vient en second sur le plan de l'importance de ses œuvres. Il a influencé les progrès de la géographie presque aussi profondément et longtemps que ne l'a fait l'*Almageste* pour les mathématiques et l'astronomie.

[6]L'année 1543 est ici prise symboliquement ; c'est celle de la mort du fondateur de l'astronomie moderne, Nicolas COPERNIC. En 1530, il avait achevé sa grande œuvre *De Revolutionibus*, dans laquelle il affirmait que la terre tournait autour de son axe en un jour et faisait le tour du soleil en un an.

[7]Ce théorème peut s'énoncer : dans tout quadrilatère inscriptible, la somme des produits des mesures des côtés opposés est égale au produit des mesures des diagonales.

## 3 La trigonométrie dans le monde indien

Les *siddhānta*, véritables traités théoriques par opposition à des ouvrages de nature plus pratique comme les *karaṇas*[8] et les tables, sont probablement les plus anciens travaux scientifiques indiens d'astronomie. On en cite souvent cinq, qu'il est impossible de dater avec précision. Il y a cependant assez de différences entre eux pour étayer l'hypothèse qu'ils furent écrits à des époques différentes. SARTON pense qu'on peut plus ou moins dater ces *siddhānta* à partir de la première moitié du cinquième siècle de notre ère.

Seul le premier, le *Sūrya-Siddhānta*, nous est parvenu dans sa forme originale ; on y trouve de nombreuses traces de l'influence grecque, mais on ignore encore par quel canal l'astronomie grecque a pu arriver en Inde. Divisé en quatorze chapitres, il est écrit en *ślokas*[9].

Selon AL-BĪRŪNĪ (البيروني), mathématicien, astronome arabe mort en 1048, il aurait été écrit par LĀṬA, mais il se peut que ce dernier n'ait rédigé que des commentaires sur le *Sūrya-Siddhānta*, comme il l'aurait fait à propos de deux autres *siddhānta*, selon des témoignages de l'époque. Les vers qui introduisent le texte affirment que celui-ci fut écrit par SŪRYA, le Dieu Soleil, à *Romaka* (Rome ?, Alexandrie ?). Les principales théories astronomiques qu'on y trouve sont grecques même si l'auteur a tenté d'y préserver les vieux usages indiens, tout en demeurant cohérent autant que possible.

La caractéristique la plus marquante du traité est l'utilisation du *ǧyā*[10] c'est-à-dire du sinus à la place de la corde. On y rencontre également une des premières mentions du sinus verse[11].

Un autre texte, le *Pauliśa-Siddhānta*, peut être considéré comme un des fondements de la trigonométrie indienne. Il introduit la notion de sinus et contient une table de vingt-quatre sinus et sinus verses par pas de $3^\circ\ 45'$. Au départ, le sinus de $3^\circ\ 45'$ est supposé égal à son arc, appelé *kramaǧyā* et les autres valeurs de la table sont calculées grâce à une formule de récurrence.

C'est au mathématicien et astronome indien ĀRYABHAṬA, né à *Kusumapura* près de *Pāṭaliputra*, l'actuelle Patna, vers 476, que l'on doit le traité intitulé *Āryabhaṭīya* ou *Laghv-Āryabhaṭīya*, qui représente une sorte de systématisation des résultats contenus dans les *siddhānta*. Il date de l'année 3600 de *Kaliyuga*, ce qui correspond à l'an 499 de notre ère. Il est écrit en vers et divisé en quatre parties :

> *Daśagītikāsūtra*, système d'écriture des nombres ;
>
> *Gaṇitapāda*, traité mathématique en 33 stances ;
>
> *Kālakriyāpāda*, éléments de chronologie astronomique ;
>
> *Golapāda*, considérations qui concernent les sphères célestes.

Cet ouvrage comporte plusieurs formules concernant les suites arithmétiques, mais également

[8] Les *karaṇas* sont plutôt des manuels d'astronomie pratique qui n'ont pas la prétention d'un véritable traité.

[9] Les *ślokas* sont des vers, souvent écrits en sanskrit. On y trouve généralement une connotation religieuse et une prière dédiée à une déesse ou un dieu particuliers.

[10] Lorsque les traducteurs arabes ont rencontré ce mot *ǧyā*, ils l'ont translittéré dans leur alphabet, ce qui donna lieu a une ≪ mauvaise ≫ interprétation. Le mot arabe جيب, *ǧaīb*, signifiant entre autres ≪ cavité ≫, en était fort proche du point de vue de l'écriture. Si on ajoute à cela que la langue arabe ne note pas nécessairement la vocalisation brève, on trouve l'explication du fait que le vocable mathématique ≪ sinus ≫ traduction latine du mot arabe *ǧaīb* désigne également la cavité nasale, par exemple.

[11] Le sinus verse d'un angle vaut 1 moins le cosinus de cet angle.

une valeur très précise de $\pi$ – à savoir $3\,\dfrac{177}{1250} = 3,1416$ – ainsi que des tables de sinus et de sinus verses. Les concepts astronomiques sont du même type que dans le *Sūrya-Siddhānta*, excepté le fait qu'Āryabhaṭa enseigne que la rotation journalière du ciel n'est qu'apparente ; elle est due à la rotation de la terre autour de son axe. Cette hypothèse, très osée, ne sera pas admise par des astronomes indiens postérieurs comme par exemple, Brahmagupta au septième siècle.

## 4 La trigonométrie dans le monde musulman

Il existait, dans le monde arabe, avant l'Islam, une « astronomie populaire » qui englobait la connaissance des saisons, quelques phénomènes météorologiques, les positions des étoiles fixes, ... Jusqu'au IX^e^ siècle et même au X^e^, ces rudiments, qui ne reposaient sur aucun calcul mais seulement sur l'accumulation des expériences, étaient consignés dans ce qu'on appelait des *Livres des saisons* ou *kutub al-āwina* (كتب الاونة).

L'avènement de l'Islam exige des réponses rapides aux besoins liés à la pratique du culte : connaissance des moments des cinq prières quotidiennes, détermination de la direction de La Mecque ou *qiblā* (القبلة) et fixation du début et de la fin du *ramaḍān* (رمضان). On voit apparaître deux nouveaux types d'ouvrages, d'une part les *kutub al-mawāqīt* (كتب المواقيت) ou livres de détermination des temps (détermination basée sur la technique du gnomon le jour et sur le déplacement de la lune durant la nuit), d'autre part, les *Dalā'il al-qiblā* (دلائل القبلة) ou indicateurs de la direction de La Mecque (techniques fondées sur les levers et couchers astronomiques). En ce qui concerne le *ramaḍān*, le problème est tellement complexe que pendant longtemps, on se contentera d'observer, depuis une élévation (montagne, tertre, ... ) et à l'œil nu, l'apparition du croissant de lune.

La religion n'est cependant pas le seul moteur du développement de l'astronomie. Les humains en général, *a fortiori* ceux qui occupent un poste important dans la société, ont toujours éprouvé un « certain besoin » d'avoir des renseignements sur leur avenir ; cela explique le succès que connaît l'astrologie. On peut vraiment considérer que l'astrologie a été un facteur de développement de l'astronomie, en ce sens que l'astrologie astronomique repose effectivement sur le principe énonçant que le monde sublunaire et tous les êtres vivants qui le composent sont soumis aux effets des mouvements des astres.

Un troisième facteur est sans doute le besoin qu'éprouve l'homme de comprendre le monde dans lequel il vit et, par conséquent, de tenter de rechercher les lois qui régissent l'univers, le mouvement des corps célestes, ...

On possède des témoignages du fait que les premiers astronomes de l'Islam ont eu connaissance, bien avant que ne démarre la période de traduction[12], de certains aspects de l'astronomie babylonienne, grecque ou indienne, notamment par le biais de spécialistes syriaques. L'un des très célèbres est, par exemple, l'évêque nestorien Severus Sebo̱ht, originaire de Nisibe mais qui travaille au cloître de Kenešra dans la haute vallée de l'Euphrate ; en 661, année de la prise du pouvoir par les Umayyades, il écrit un *Traité des constellations*.

Un siècle plus tard, la découverte plus en profondeur de la science indienne va pousser les savants de Baġdād à s'intéresser de très près à l'astronomie. Voici ce qu'on peut lire, dans le

[12]Voir à ce sujet le chapitre 16, à la page 498.

*Dictionnaire des savants*, de Abū-l-Ḥasan al-Qifṭī (ابو الحسن القفطي) qui a vécu de 1172 à 1288.

---

> En l'année 156 de l'hégire[13], il arriva de l'Inde à Baġdād un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. Cet homme possédait la méthode du *Sind hind* (سندهند)[14], relative aux mouvements des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les éclipses, ainsi que le lever des signes du zodiaque. Il avait composé un abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince nommé Figar[15]. Dans cet écrit, les *Kardaga*[16] étaient calculées par minutes. Le calife[17] ordonne qu'on traduise le traité indien en arabe, afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. Le soin de la traduction fut confié à Muḥammad, fils de Ibrāhīm al-Fazārī (محمّد بن ابراهيم الفزاري), le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez les astronomes, sous le titre de *Grand Sind hind*[18].

---

On sait, par les astronomes eux-mêmes et non pas par les historiens, que l'astronomie indienne contenait des outils trigonométriques, comme la notion de sinus, que les Arabes vont préférer à celle de corde utilisée par les Grecs. On y trouve également de petites tables fournissant les valeurs des sinus et sinus verses pour des angles donnés, ainsi que des algorithmes de calcul de certains paramètres permettant la constitution de tables astronomiques et des procédés de mesure pour déterminer, par exemple, le méridien en un lieu.

Par contre, les biobibliographes fournissent des informations très pointues sur le contenu, les traductions, ... de l'ensemble des connaissances astronomiques qui viennent du monde grec. Par exemple, il est rapporté que l'*Almageste* de Ptolémée a d'abord été traduit du syriaque en arabe, dès le huitième siècle, par al-Ḥasan ibn Qurayš (الحسن بن قريش). À la fin de ce même siècle, Yaḥya ibn Ḫālid al-Barmakī (يحيى بن خالد البرمكي) ordonne d'en faire une traduction à partir d'un texte grec, mais ce sont finalement deux autres traductions qui vont nous parvenir, l'une de al-Haǧǧāǧ ibn Maṭar (الحجّاج بن مطر), mort en 830 et l'autre de Isḥāq ibn Ḥunayn (اسحاق بن حنين), mort en 910. Cette dernière sera revue par Ṯābit ibn Qurra (ثابت بن قرّ), mort en 901. Les *Sphériques* de Menelaos seront également traduites par Isḥāq ibn Ḥunayn sous le titre *al-aškāl al-kuriya* (الاشكال الكري), ce qui signifie littéralement *la forme des globes*.

---

[13]Cela correspond à l'année 773 de notre ère chrétienne.

[14]C'est le terme utilisé par les Arabes pour le mot indien *siddhānta*.

[15]Ce nom est peut-être une déformation arabe du patronyme du souverain indien *Vyagramuẖa*, sous le règne duquel *Brahmagupta* a composé son *siddhānta*.

[16]Il s'agit vraisemblablement de l'*arthaǧya* indien ou ligne des sinus.

[17]Ce calife est *al-Mansūr* (المنسور), deuxième de la dynastie des abbassides.

[18]On dit aussi *Zīǧ al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Zīǧ du Grand Sind hind*. La question de savoir lequel des *siddhānta* fut ainsi traduit est encore sans réponse.

Connu pour un célèbre « traité d'algèbre » (cf. chapitre 17, section 4), ABŪ 'ABD ALLĀH MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḪWĀRIZMĪ (ابو عبد الله محمّد بن موسى الخوارزمي), qui vivait au début du neuvième siècle, a établi des tables astronomiques et des tables trigonométriques. Elles ont été revues, durant la seconde moitié du dixième siècle, par MASLAMA AL-MAĞRĪṬĪ (مسلم المجريطي) et traduites en latin, dès 1126 par ADELARD DE BATH. Elles figurent parmi les premières tables de l'empire musulman ; elles contiennent non seulement la fonction « sinus », mais aussi la fonction « tangente ». Cette notion de tangente, qui est en fait l'ombre d'un gnomon fixé horizontalement sur un mur vertical, semble avoir été introduite par ḤABAŠ AL-ḤĀSIB (حبش الحاسب), qui a fait des observations entre 825 et 835. AL-ḪWĀRIZMĪ a probablement participé aux travaux de mesure du méridien terrestre, ordonnés par le calife *al-Ma'mūn* (المأمون), et a amélioré la géographie de PTOLÉMÉE, tant en ce qui concerne le texte que les cartes.

AL-BATTĀNĪ (البتّاني), né avant 858 et mort en 929, mérite également d'être cité. Son nom a été latinisé en ALBATE(G)NIUS. Son œuvre principale est un traité d'astronomie avec des tables, traduit en latin sous les titres *De scientia stellarum* et *De numeris stellarum et motibus*. Cet ouvrage a influencé notre astronomie jusqu'à la Renaissance. AL-BATTĀNĪ a déterminé, avec une grande précision, de nombreux coefficients astronomiques tels que la précession ou l'inclinaison de l'écliptique, ... Le troisième chapitre de son astronomie est consacré à la trigonométrie. Il utilise surtout les sinus qu'il préfère aux cordes grecques. Il travaille également avec les fonctions ombres, *umbra extensa* et *umbra versa*, ombre d'un gnomon vertical sur le sol et ombre d'un gnomon horizontal sur un mur vertical, ce qui correspond, on l'a déjà dit, à notre cotangente et à notre tangente. Il connaissait la relation entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, relation que nous exprimons de nos jours par la formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Un autre grand nom parmi les savants du monde musulman est ABŪ-L-WAFĀ' (الو الوفاء), l'un des derniers traducteurs arabes et commentateurs des œuvres grecques. Il est né en 940 et a travaillé à Baġdād, où il est mort vers 998. Outre ses apports en géométrie, en arithmétique, en astronomie, il développe très fort la trigonométrie. Il donne une nouvelle méthode pour construire des tables de sinus, détermine, par exemple, la valeur de $\sin 30'$ avec huit décimales correctes et calcule une table de tangentes. Il connaît des formules de trigonométrie équivalentes à celles que nous enseignons encore sur le sinus d'une somme ou d'une différence ou sur les sinus et cosinus des angles doubles...

D'origine égyptienne, IBN YŪNUS (بن يونس), qui est mort au Caire en 1009, a aussi apporté une contribution considérable à la trigonométrie. Il résout de nombreux problèmes d'astronomie sphérique au moyen de projections orthogonales et introduit certaines formules indispensables avant l'invention des logarithmes, telles que, par exemple, l'équivalent de $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Au XI[e] siècle, un pas important est franchi avec l'obtention d'un théorème qui va permettre de se passer de celui de MENELAOS. Ce dernier est en effet d'un emploi très lourd lors des calculs, puisqu'il fait intervenir six quantités. Grâce au *théorème des sinus*, le nombre de quantités va se réduire à quatre. Dans le monde musulman, il porte le nom de *al-šakal al-muġnī* (الشكل المغني), littéralement, la *forme qui dispense* (de l'utilisation du théorème de MENELAOS). En trigonométrie plane, si $A$, $B$, $C$ sont les trois angles d'un triangle dont les côtés respectivement opposés sont désignés par $a$, $b$ et $c$, on a[19]

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\,.$$

La découverte de cette relation a provoqué une polémique à propos de la paternité du résultat. Ce fait nous est rapporté par AL-BĪRŪNĪ dans son ouvrage *al-kitāb maqālīd 'ilm al-haiy'a* (الكتاب مقاليد علم الهيئة), qu'on peut traduire par *le livre des propos sur la science de l'astronomie.* Cet épisode nous permet de découvrir un réseau d'échanges scientifiques et une coopération à distance. Parmi les chercheurs qui ont permis d'arriver à ce résultat, on peut citer ABŪ-L-WAFĀ' et IBN YŪNUS pour le centre de l'empire, AL-BĪRŪNĪ, pour l'Asie centrale et ǦĀBIR IBN AFLAH (جابر بن افله) pour l'Espagne.

Il est impossible de donner une liste exhaustive des hommes de science qui se sont occupés d'astronomie – et, par là-même, de trigonométrie – dans les pays du monde arabe, tant cette activité a connu de succès. Nous dirons encore que, dès le dixième siècle, de nombreuses relations étaient établies entre les six nombres trigonométriques classiques, qui tous étaient tabulés. Il faut se rendre compte que ces relations ne constituaient pas un jeu de l'esprit, mais étaient utilisées essentiellement pour simplifier les calculs.

## 5 La trigonométrie dans le monde occidental

Les résultats obtenus en astronomie et en trigonométrie vont pénétrer le monde occidental par le même biais que les autres sciences. C'est ce que nous avons appelé la troisième phase de transmission des savoirs à la fin du chapitre 16. Les savants européens vont poursuivre le travail déjà bien entamé par leurs collègues orientaux. Nous nous contenterons de citer quelques faits importants.

À la Renaissance, des mathématiciens allemands élaborent des tables trigonométriques d'une très grande précision, que l'on paie très cher, étant donné la masse de calculs à effectuer, sans instrument performant. CAJORI [33] n'hésite pas à affirmer, même si c'est un peu caricatural, que l'invention des logarithmes a doublé la vie des astronomes en diminuant leur labeur. Les logarithmes ont été inventés par l'écossais John NAPIER[20], Baron de Merchiston, qui a vécu de 1550 à 1617. L'anglais Henry BRIGGS (1556-1631), admirateur de NAPIER, suggère quelques améliorations qui sont approuvées par ce dernier, ce qui donnera lieu à l'appellation *logarithme de Briggs*. En 1624, BRIGGS publie son *Arithmetica logarithmica*, qui contient les logarithmes à 14 places décimales des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Le trou est comblé par le Hollandais Adriaan VLACQ (1600 ?-1667), qui a passé dix ans à Londres comme libraire et éditeur.

La première publication des logarithmes de Briggs des fonctions trigonométriques est réalisée en 1620 par Edmund GUNTER (1581-1626), un collègue londonien de BRIGGS.

Il y aurait encore beaucoup de choses à dire sur l'histoire de la trigonométrie, mais nous pensons que ce qui précède brosse un tableau assez significatif de l'évolution de cette branche des mathématiques. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à la bibliographie.

[19] En trigonométrie sphérique, on a $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$, où les côtés $a$, $b$ et $c$ sont des arcs de grand cercle.
[20] Ce surnom apparaît avec de nombreuses orthographes ; il est fort probable qu'à l'époque, il s'écrivait NEPER.