Chapitre 13

Les équations du deuxième degré

Préambule

Nous avons choisi de faire émerger la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait de l'ouvrage d'AL-ḪWĀRIZMĪ, car on y trouve une justification de chaque étape de l'algorithme. Nous témoignons ensuite des origines babyloniennes de l'algèbre en présentant la résolution d'un problème mésopotamien. Le lecteur pourra constater que la suite de calculs, donnée sans justification, conduit à la même formule. Nous terminons en proposant une interprétation algébrique d'un problème géométrique issu des *Éléments* d'EUCLIDE.

1 À la découverte d'une formule

De quoi s'agit-il ? Découvrir la formule démontrée par AL-ḪWĀRIZMĪ, dans son *Abrégé de calcul par le ǧabr et la muqābala*, pour résoudre une équation du second degré. Établir la formule de résolution actuelle par un processus de généralisation.

Enjeux S'approprier la formule de résolution de l'équation du second degré, donner du sens aux développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique.

Montrer que les systèmes de notation et la pensée formelle ont été introduits très lentement et beaucoup plus tardivement qu'on ne l'imagine souvent. Faire comprendre que l'élaboration d'une notation appropriée peut être très utile et par là même, assurer une meilleure appréhension du symbolisme actuel.

Compétences transversales

Comprendre un message, en analyser la structure et repérer les idées centrales.

Traduire une information d'un langage dans un autre, passer du langage courant au langage graphique ou algébrique et réciproquement.

Compétences

Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation (2ème degré).

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

La traduction en français d'un extrait de l'*Abrégé de calcul par le ǧabr et la muqābala* d'AL-H̱WĀRIZMĪ.

Ce document est proposé ci-après et repris en annexe sous une forme photocopiable pour les élèves (fiche 12 à la page 482). Le texte est également disponible en langue arabe (fiche 13 à la page 483).

Les chapitres 16 et 17 contiennent des informations historiques et épistémologiques utiles pour situer l'ouvrage d'AL-H̱WĀRIZMĪ dans son contexte socio-culturel.

Prérequis

La formule du produit remarquable $(a+b)^2$ et son interprétation géométrique.

Comment s'y prendre ?

L'extrait proposé explique la méthode de résolution de l'équation du type $ax^2 + bx = c$. Il n'est pas intelligible sans quelques explications qui sont données immédiatement à la suite du texte.

Notre traduction est très fidèle, nous avons seulement jugé utile d'ajouter entre <> les mots <carrée> et <ce cinq> qui ne figurent pas dans le texte arabe. Pour éviter toute confusion entre le « carré x^2 » et le « carré figure géométrique », nous avons délibérément choisi de garder le terme arabe *māl*, qui désigne x^2, au lieu de le traduire.

L'activité commence donc par une lecture commentée de ce texte, dans lequel AL-H̱WĀRIZMĪ donne de l'algorithme qu'il a décrit précédemment, deux démonstrations qui s'appuient sur deux figures différentes. La première démonstration proposée, qui n'est pas reproduite ici, intervient dans l'espace noté [...] entre les deux paragraphes. C'est la deuxième approche, basée sur la figure la plus simple, que nous proposons en lecture aux élèves.

Démonstration du cas « un māl et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. »

La figure pour expliquer ceci est une surface <carrée> dont les côtés sont inconnus. Elle représente le *māl* qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la surface $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines ; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [...]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le *māl*. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces[1] $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle[2] de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.

Nous savons donc que la première surface est le *māl*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le *māl*, et c'est sa racine. Et le *māl* est neuf. Voici sa figure.

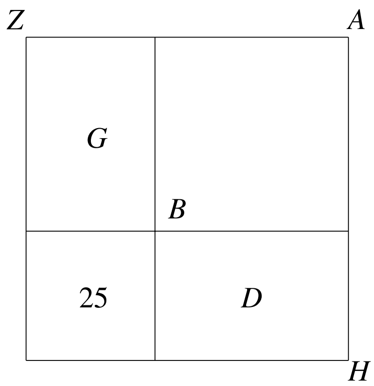


Fig. 1

La découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré se fera en trois étapes, à partir de ce texte accompagné du dessin.

1.1 Analyse du texte

> Transposer les explications fournies par le texte en utilisant le symbolisme mathématique actuel.
> Compléter la figure 1 en y reportant les mesures des côtés et des aires des carrés et des rectangles.

La lecture du texte appelle quelques commentaires.

Le terme *māl* signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau… Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. En fait on recherche X le *māl* et $\sqrt{X}$ le *ǧiḏr* qui est sa racine, et non une inconnue x et son carré x^2. Quant à l'expression *trente-neuf dirhams*, elle désigne une quantité positive connue, qui n'est ni un nombre de carrés, ni un nombre de racines. C'est ce que nous appelons aujourd'hui le terme indépendant.

[1] Il y a une erreur d'établissement du texte arabe dans l'édition de Rosen, où l'on trouve $\overline{GD}$ au lieu de $\overline{G}$ et $\overline{D}$.

[2] Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

L'équation à résoudre est donc

$$X + 10\sqrt{X} = 39 \quad \text{ou} \quad x^2 + 10x = 39.$$

La première forme est plus proche de l'esprit du texte arabe, mais nous lui substituons la seconde, mieux adaptée au travail à effectuer avec les élèves.

Remarquons au passage que les carrés et les rectangles sont désignés par les extrémités d'une diagonale. La barre au-dessus de AB permet de distinguer le nom d'une figure d'un mot.

C'est le recours au dessin qui montre clairement pourquoi l'auteur recommande de diviser en deux le nombre des racines (10 dans l'exemple choisi), le terme $10x$ de l'équation étant obtenu par l'adjonction au carré de deux rectangles de $5x$ chacun. AL-H̱WĀRIZMĪ insiste sur le fait que la longueur cinq de chacun des deux rectangles est la moitié du nombre des racines. C'est cette précision qui va permettre de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

La figure proposée est euclidienne, elle se trouve dans *Les Éléments* (proposition 4 du livre II) pour illustrer la formule du développement de $(a+b)^2$. Cependant, l'auteur ne fait pas référence au texte d'EUCLIDE pour étayer son raisonnement. On voit apparaître ici une rupture avec la tradition grecque. EUCLIDE aurait dit ≪ le carré de côté cinq ≫ et non ≪ cinq par cinq ≫. Cette forme d'arithmétisation trouve sa source dans la géométrie du mesurage, d'origine babylonienne et indienne. L'emploi du mot ≪ flanc ≫ et non ≪ côté ≫ est une autre trace de ce vocabulaire de l'arpentage.

Après avoir complété le dessin, comme on le voit à la figure 2, les élèves sont en mesure de transposer, sous forme d'équations, les opérations décrites dans le dernier paragraphe.

$$\begin{aligned}
x^2 + 10x &= 39 \\
x^2 + 10\,x + 25 &= 39 + 25 \\
x^2 + 10\,x + 25 &= 64 \\
(x+5)^2 &= 64 \\
(x+5) &= 8 \\
x &= 8 - 5 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

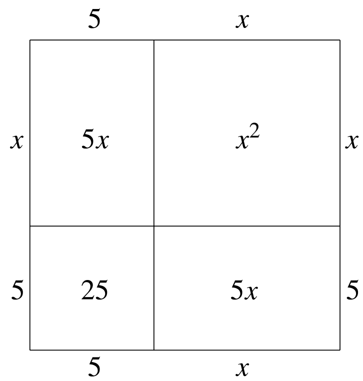


Fig. 2

Pour les mathématiciens de l'époque, qui ne concevaient pas les quantités négatives, la seule valeur dont le carré vaut 64 est 8. Dans le contexte actuel, nous considérons aussi la valeur -8, ce qui nous permet de compléter la résolution d'AL-H̱WĀRIZMĪ.

Dans le domaine des nombres positifs et négatifs, l'équation $(x+5)^2 = 64$ est équivalente à

$$x + 5 = 8 \ \text{ ou } \ x + 5 = -8,$$

ce qui donne les solutions

$$x = 3 \ \text{ ou } \ x = -13.$$

1.2 De l'exemple à l'algorithme

L'étape suivante consiste à se dégager de l'exemple numérique, à franchir un pas vers l'abstraction.

> Recommencer le même raisonnement pour l'équation $x^2 + px = q$ (où p et q sont ce que nous appelons aujourd'hui des rationnels positifs).

Il s'agit donc de remplacer 10 par p, 5 par $\frac{p}{2}$ et 39 par q. Les calculs littéraux qui s'ensuivent mènent à une première formule.

$$\begin{aligned}
x^2 + px &= q \\
x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right) &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

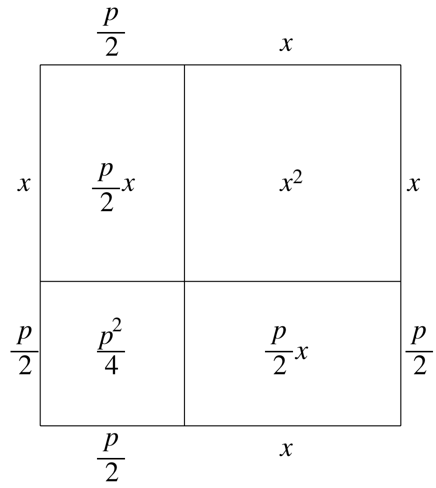


Fig. 3

Complétons à nouveau la résolution en ajoutant la racine carrée négative de $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

L'équation $(x + \frac{p}{2})^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

ce qui donne les solutions

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

En fait, nous avons obtenu une formule générale de résolution de l'équation de deuxième degré $x^2 + px = q$. En effet, si la démonstration géométrique ne s'applique qu'aux seuls cas où p et q sont strictement positifs, le développement algébrique, qui consiste à compléter le membre de gauche pour obtenir un carré parfait, peut être effectué avec n'importe quelle valeur de p et q.

1.3 La formule actuelle

Dans la troisième étape, il reste à dégager la formule qui donne la solution de l'équation sous la forme générale utilisée actuellement, à savoir $ax^2 + bx + c = 0$.

Modifier les résultats obtenus pour exprimer les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction des coefficients a, b et c, où a est non nul.

Nous avons supposé a non nul de manière à ce que l'équation ne soit pas réduite à une équation de premier degré. Dans ce cas, nous pouvons diviser tous les termes par a, ce qui donne

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a},$$

forme facilement comparable à

$$x^2 + px = q.$$

Les élèves verront qu'il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{-c}{a}$. On leur demande d'effectuer cette transformation de formule.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \qquad \text{devient} \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur, ils obtiennent

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{et finalement} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette unique formule nous permet de résoudre toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, avec des coefficients a, b et c positifs ou négatifs, b et c éventuellement nuls.

On remarquera que le nombre de solutions dépend du signe de l'expression $b^2 - 4ac$, habituellement notée Δ,

si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes,

si $\Delta = 0$, il y a une seule racine qui vaut $\frac{-b}{2a}$,

si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle.

Prolongement possible

Si les élèves manifestent un certain intérêt pour la manière dont les Arabes résolvaient les équations de types autres que celui dont il est question dans le texte, le professeur peut compléter leur information historique.

AL-ḪWĀRIZMĪ classe les équations de degré inférieur ou égal à 2 en six types dont trois sont des équations trinômes, puis il les réduit à leur forme normale, où le coefficient de la plus haute puissance de x vaut 1. Il établit ensuite les algorithmes de résolution des différents cas. Il obtient des formules équivalentes aux expressions reprises dans le tableau suivant.

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(3)	$x^2 + q = px$	$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Dans le dernier cas (3), il précise :

si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, ≪ alors le problème est impossible ≫,

si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, ≪ alors la racine du carré est égale à la moitié du nombre des racines, exactement, sans aucune addition ni soustraction ≫.

Ce dernier passage fait état d'une connaissance complète du calcul et des conditions d'existence des *racines positives* d'une équation du deuxième degré.

Pour faire comprendre ces formules, le professeur propose quelques équations bien choisies, par exemple celles qui figurent dans le tableau ci-après, et donne des consignes précises (fiche 14 à la page 484).

> Pour chacune de ces équations :
>
> résoudre l'équation par la formule générale,
>
> écrire l'équation sous la forme normale d'al-Ḫwārizmī, identifier à quel type elle appartient et la résoudre par la formule adéquate,
>
> reprendre les résultats dans un tableau qui permette une comparaison aisée.

Cette activité, qui fournit aux élèves des exercices de fixation des formules, permet en outre de dresser un tableau comparatif très éclairant.

Résolution actuelle		Résolution d'al-Ḫwārizmī		
équation	solution	équation	type	solution
$x^2 + x - 2 = 0$	$x = 1,\ x = -2$	$x^2 + x = 2$	(1)	$x = 1$
$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x = 3,\ x = -1$	$x^2 = 2x + 3$	(2)	$x = 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x = 1$	$x^2 + 1 = 2x$	(3)	$x = 1$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$x = 2,\ x = 3$	$x^2 + 6 = 5x$	(3)	$x = 2,\ x = 3$
$x^2 - x + 7 = 0$	–	$x^2 + 7 = x$	(3)	–
$4x^2 - 8x + 3 = 0$	$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2}$	$x^2 + \frac{3}{4} = 2x$	(3)	$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2}$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x = -2,\ x = -3$	–	–	–
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x = -1$	–	–	–

Le tableau montre bien que les formules énoncées par al-Ḫwārizmī permettent de calculer toutes les solutions positives, quel que soit leur nombre. Notre formule actuelle donne, en plus des solutions positives, les solutions négatives éventuelles.

On constate en outre que certaines équations ne sont jamais prises en compte dans le traité arabe. Par exemple, l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ ne se rattache à aucun des types répertoriés. En effet, il est impossible de l'écrire sous une forme où les deux membres ne contiennent que des quantités strictement positives. Cette équation est équivalente à $(x + 1)^2 = 0$, dont la solution est -1, solution qui n'a aucun sens pour les mathématiciens du IXe siècle. Il en va de même pour les équations $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 + 3x = 0$, $x^2 + 4 = 0$, et pour toute équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont tous les trois positifs. De telles équations n'admettent que des solutions négatives ou nulles. Il faut savoir que, jusqu'à la fin du XVIIe siècle, les quantités négatives n'avaient pas le statut de nombre. Dans [48] par exemple, le lecteur intéressé pourra trouver un extrait de texte de J. Wallis (1649-1703) témoignant de la difficulté à accepter tant les nombres négatifs que les imaginaires.

Échos des classes Nous rendons compte ci-après de deux expériences où nous avons eu l'occasion d'étudier le texte d'al-Ḫwārizmī sur la résolution de l'équation $x^2 + px = q$ avec des élèves.

Exposé à Liège

Tout d'abord, nous avons été invités à présenter, aux élèves de cinquième (enseignement général) d'une école de Liège, un exposé sur les méthodes de résolution des équations des deuxième et troisième degrés chez les auteurs arabes.

Bien sûr, l'expérience s'est déroulée dans des circonstances assez différentes de celles que nous préconisons, puisque le groupe comportait une centaine d'élèves, et que ceux-ci connaissaient déjà la formule de l'équation du deuxième degré. Il ne s'agissait donc plus de découvrir la formule, mais plutôt de la redécouvrir dans un autre contexte. Les professeurs ont assuré le suivi de cet exposé dans leurs classes et nous ont communiqué les réactions les plus significatives.

Les élèves se sont montré très intéressés par l'aspect culturel permettant de faire le lien entre la situation géographique, les contextes historique, politique et religieux et les démarches scientifiques des « savants » de l'époque. Certains d'entre eux ont décidé d'approfondir le sujet dans le cadre d'un travail de rhéto. Ils ont apprécié de recevoir par le biais du cours de mathématiques des informations qui éclairent sous un jour différent des problèmes d'actualité comme la situation au Moyen-Orient, la guerre en Irak...

Ces élèves étaient manifestement peu habitués à établir des passages entre l'algèbre et la géométrie. Le recours à des raisonnements géométriques pour résoudre des équations leur a paru surprenant. Ils ont pris conscience que le décloisonnement entre les différentes branches des mathématiques permet de varier les approches d'un problème et d'élargir le choix des modes de raisonnement pour le résoudre. Certains se sont inquiétés de savoir « depuis quand on séparait les maths ».

Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une longue évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme on le fait maintenant. La résolution algébrique formalisée dont nous disposons actuellement leur paraît un progrès sur le plan pratique, par rapport à « l'algèbre rhétorique ».

Expérimentation à Nivelles

Par la suite, nous avons eu l'occasion de tester l'activité de découverte de la formule de résolution de l'équation du second degré, telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, dans deux classes de quatrième (enseignement général) d'une école de Nivelles.

Dans l'une des classes, les élèves avaient manifesté de l'intérêt pour une approche historique d'un sujet mathématique ; dans l'autre, ils étaient plus réticents. Malgré cette différence d'attitude *a priori*, l'expérience a été positive dans les deux cas. Les disparités entre les deux classes, réputées de niveaux inégaux, n'ont pas été perçues lors de l'analyse du texte ; elles se sont manifestées uniquement dans l'aisance à exécuter des calculs formels.

Après un exposé relativement bref, d'une dizaine de minutes environ, destiné à situer l'ouvrage d'AL-H̱WĀRIZMĪ dans son cadre géographique, historique et culturel, les élèves ont été invités à lire le texte et à transposer les explications sous forme graphique (compléter le dessin comme à la figure 2) et algébrique.

Ce travail, réalisé collectivement, n'a pas posé problème aux élèves, qui ici, avaient déjà été familiarisés avec l'aspect géométrique des produits remarquables. Nous leur avons alors demandé de reproduire le même raisonnement pour résoudre l'équation $x^2 + px = q$, en suivant les indications suggérées dans le texte pour passer de l'équation particulière $x^2 + 10x = 39$ à cette forme plus générale. Nous avons remarqué à cette occasion que certains élèves n'étaient pas capables de franchir le pas vers une forme plus abstraite à ce stade de l'activité. Nous avons donc jugé opportun de leur soumettre une autre équation particulière ($x^2 + 8x = 65$), qu'ils devaient résoudre seuls avant de généraliser.

Dans les deux classes, cette consigne a suscité deux types de comportements. Certains élèves ont réalisé un nouveau dessin pour servir de support au raisonnement algébrique ; d'autres ont travaillé directement sur l'équation, en ajoutant aux deux membres la quantité adéquate pour obtenir, dans le membre de gauche, le développement d'un carré parfait. De nombreux élèves sont arrivés seuls au bout des calculs littéraux, mais nous avons dû remettre sur rail ceux qui avaient ajouté p^2 au lieu de $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ pour compléter le carré. Il a aussi fallu intervenir pour éviter quelques simplifications erronées de l'expression $\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$, ainsi que pour obtenir la deuxième racine.

L'élaboration de la formule pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a posé que des problèmes calculatoires aux élèves les plus faibles. La séquence d'apprentissage s'est terminée par la résolution d'une série d'équations, en l'occurence celles qui figurent dans le tableau de la page 413. Seuls les élèves les plus rapides se sont intéressés à établir une comparaison avec la solution qu'aurait obtenue AL-H̱WĀRIZMĪ.

À l'issue des deux heures de cours consacrées à l'expérimentation, les élèves disposaient de la formule, en avaient compris la démonstration, et étaient capables de l'utiliser pour résoudre des équations ; l'objectif fixé avec le professeur était ainsi atteint.

2 L'algèbre d'avant « al-ǧabr »

De quoi s'agit-il ? Plonger dans l'histoire des équations pour découvrir comment procédaient les mathématiciens mésopotamiens il y a quatre mille ans et EUCLIDE au troisième siècle avant Jésus-Christ.

Confronter ces méthodes de résolution à celle d'AL-H̱WĀRIZMĪ, ou à la formule actuelle.

Enjeux Attester les sources mésopotamiennes de la méthode de résolution de l'équation du deuxième degré. Situer son émergence dans un contexte historique et culturel.

Montrer une interprétation algébrique d'un problème de construction géométrique chez EUCLIDE.

Établir un parallèle entre résolutions algébrique et géométrique pour différents problèmes.

Compétences transversales

Comprendre un message, en analyser la structure et repérer les idées centrales.

Traduire une information d'un langage dans un autre, passer du langage courant au langage graphique ou algébrique.

Compétences

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Le problème 1 de la tablette BM 13 901 conservée au British Museum. Il s'agit d'un texte mésopotamien en écriture cunéiforme.

La proposition 11 du livre II des *Éléments* d'EUCLIDE.

Le chapitre 17 contient des informations historiques et épistémologiques utiles pour situer ces documents dans leur contexte socio-culturel.

Des traductions en français des extraits utilisés sont proposées ci-après et reprises en annexe sous une forme photocopiable pour les élèves (fiches 15 et 17, aux pages 485 et 487).

Prérequis

La formule du produit remarquable $(a + b)^2$.

La formule de résolution de l'équation $x^2 + px = q$.

2.1 Un problème mésopotamien

Comment s'y prendre ?

La tablette répertoriée BM 13 901 au British Museum consiste en un recueil de 21 problèmes, qui conduisent à des équations ou à des systèmes d'équations du second degré. Les résolutions de ces problèmes se présentent comme une suite d'instructions qui décrivent les calculs à effectuer pour obtenir le nombre à déterminer : le « côté du carré ».

Les tablettes qui nous sont parvenues attestent que les Mésopotamiens connaissaient déjà une méthode de résolution des équations du deuxième degré, équivalente à l'algorithme décrit par AL-H̱WĀRIZMĪ, au moins dans les deux cas repris ci-contre.

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$

Il ne s'agit pas ici de dégager la formule, mais seulement de vérifier que les calculs qui figurent sur la tablette correspondent bien aux étapes de l'algorithme de résolution du type (2), équivalent à la formule en notation actuelle qui figure dans le tableau.

Le texte proposé est la traduction due à F. Thureau-Dangin (in [134]) du problème 1 de la tablette BM 13 901. Le signe « : » qui figure dans ce texte n'est pas le symbole d'une division, il annonce le résultat de l'opération décrite juste avant. Le signe « $'$ » doit être lu « minute ».

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : $45'$.

Tu poseras 1 l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : $30'$. Tu croiseras $30'$ et $30'$: $15'$. Tu ajouteras $15'$ à $45'$: 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas $30'$, que tu as croisé, de 1 : $30'$, le côté du carré.

Interpréter l'énoncé du problème, et la suite de calculs qui mènent à la solution, dans le langage mathématique actuel. Comparer ces calculs avec ceux qu'on effectuerait en appliquant la formule $x = \dfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 + q}$.

Dès la lecture de l'énoncé, la plupart des élèves seront probablement désarçonnés. Que signifie, par exemple, $45'$? On peut découvrir dans le texte que $30'$ représentent la moitié de l'unité. Les Babyloniens utilisaient un système de numération sexagésimale[3] , il s'agit de $\dfrac{30}{60}$ de l'unité, ce qui correspond pour nous à la fraction $\dfrac{1}{2}$. On peut en déduire que $45'$, représentent $\dfrac{45}{60}$ de l'unité, ce qui correspond à la fraction $\dfrac{3}{4}$.

Reprenons l'énoncé du problème et interprétons-le dans le langage mathématique actuel. Notons x le côté du carré, x^2 représente alors la surface. La somme vaut $45'$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{4}$.

L'équation obtenue est alors $x^2 + x = \frac{3}{4}$, elle est du type $x^2 + px = q$, avec $p = 1$ et $q = \dfrac{3}{4}$.

La suite de calculs qui constitue la résolution de l'équation se présente sous une forme très peu familière. Il conviendra sans doute d'explorer le sens de la phrase « Tu croiseras $30'$ et $30'$: $15'$. » Après avoir constaté que $30' = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, on peut arriver à l'interprétation suivante : « croiser » signifie « multiplier » et

$$30' \times 30' = \frac{30}{60} \times \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 15'.$$

Reprenons l'ensemble du problème et interprétons-le phrase par phrase.

[3]Nous retrouvons la trace du système babylonien dans la division sexagésimale des degrés et des heures (voir le chapitre 17).

Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : $45'$	$x^2 + x = 45'$	$x^2 + x = \frac{3}{4}$	$x^2 + px = q$
Tu poseras 1 l'unité	1	1	p
Tu fractionneras en 2	$30'$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$
Tu croiseras $30'$ et $30'$	$30' \times 30' = 15'$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Tu ajouteras $15'$ à $45'$	$45' + 15' = 1$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$	$q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$
C'est le carré de 1	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$
Tu soustrairas $30'$, que tu as croisé, de 1	$1 - 30'$	$1 - \frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$
Le côté du carré	$30'$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$

Il apparaît que les instructions du texte reviennent à faire appliquer la formule

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

La tablette révèle ainsi que les Babyloniens avaient une connaissance empirique de cette formule, mais ne renseigne guère sur la manière dont ils l'ont obtenue.

Même si les étapes de calcul semblent ne prendre en compte que des nombres, l'énoncé fait apparaître la nature géométrique du problème. Une hypothèse étayée notamment par Høyrup[4] est que la méthode de résolution s'appuie sur un procédé géométrique qui trouve sa source dans les pratiques des arpenteurs. Dans cette optique, on peut trouver étrange d'ajouter une surface (le carré) et une longueur (le côté du carré). En réalité, ce qui est ajouté à la surface du carré est un rectangle dont l'une des dimensions est le côté du carré et l'autre l'unité usuelle de mesure de longueur (figure 4). Ce rectangle est partagé en deux (figure 5) et chacune des deux moitiés est accolée au carré de départ comme sur la figure 6. L'énoncé nous apprend que la surface de la figure ainsi obtenue – appelée plus tard *gnomon* par les Grecs – vaut $\dfrac{3}{4}$. La première opération effectuée dans la résolution consiste à calculer la surface $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ du petit carré (en gris sur la figure 7), qu'il faut lui adjoindre pour obtenir le grand carré dont la surface est alors $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$. Le côté de ce grand carré est 1. En retirant $\dfrac{1}{2}$, le côté du petit carré ajouté, on trouve x, le côté du carré de départ.

[4]Voir à ce sujet [89] et [90].

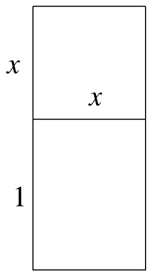


Fig. 4

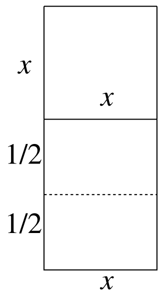


Fig. 5

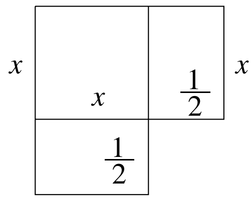


Fig. 6

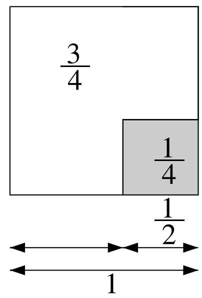


Fig. 7

Ce raisonnement géométrique dont les Babyloniens n'ont pas laissé de preuve connue à ce jour, est en tous points semblable à celui qui sous-tend la démonstration de l'algorithme de résolution dans le traité théorique d'AL-ḪWĀRIZMĪ. Il peut être adapté au cas où, à la surface on ajoute p fois le côté du carré. Dans ce cas on ajoute au carré un rectangle dont une dimension est le côté du carré et l'autre p unités de longueur. Le problème 6 de la tablette BM 13 901, présenté en prolongement illustre ce cas.

Prolongement possible

Le problème 6 de la tablette BM 13 901 conservée au British Museum débouche sur une équation dont le coefficient de x est différent de 1, ce qui permet de distinguer plus facilement les éléments qui interviennent dans la résolution. Par contre, les calculs sous forme sexagésimale sont plus difficiles à effectuer, mais se présentent de manière simple sous forme fractionnaire.

Voici le texte du problème, dans la traduction de F. THUREAU-DANGIN (fiche 16 à la page 486).

J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$.

Tu poseras 1 l'unité. Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$. Tu croiseras $20'$, sa moitié et $20'$: $6'\,40''$. Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35'$: $41'\,40''$. C'est le carré de $50'$. Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50'$: $30'$, le côté du carré.

Les $35'$ de l'énoncé représentent les $\dfrac{35}{60}$ de l'unité, ce qui correspond à la fraction $\dfrac{7}{12}$.
L'équation obtenue est dans ce cas

$$x^2 + \frac{2}{3}x = 35' \quad \text{ou encore} \quad x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12},$$

elle est également du type $x^2 + px = q$.

Reprenons l'ensemble du problème et son interprétation dans un tableau.

Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : 35′	$x^2 + \frac{2}{3}x = 35'$	$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$	$x^2 + px = q$
Tu poseras 1 l'unité	1	1	1
Les deux tiers de 1, l'unité, sont 40′	$\frac{2}{3} \times 60' = 40'$	$\frac{2}{3}$	p
La moitié est 20′	$\frac{1}{2} \times 40' = 20'$	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{p}{2}$
Tu croiseras 20′ et 20′	$20' \times 20' = 6'\,40''$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
Tu ajouteras 6′ 40″ à 35′	$6'\,40'' + 35' = 41'\,40''$	$\frac{1}{9} + \frac{7}{12} = \frac{25}{36}$	$q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$
C'est le carré de 50′	$\sqrt{41'\,40''} = 50'$	$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$
Tu soustrairas 20′, que tu as croisé, de 50′	$50' - 20' = 30'$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$
Le côté du carré	$30'$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$

2.2 Une résolution géométrique chez Euclide

Les *Éléments* d'Euclide

Euclide a vécu au début du troisième siècle avant notre ère. Il travaillait à Alexandrie, qui était à cette époque un important pôle culturel et scientifique. La ville, créée par Alexandre le Grand vers 331, avait été dotée sous le règne du roi Ptolémée I d'un centre de recherche – le Musée – touchant à tous les domaines de la connaissance et muni d'une prestigieuse bibliothèque. De nombreux savants y ont travaillé jusqu'au V^{e} siècle de notre ère, comme par exemple les mathématiciens Apollonius de Perge, Archimède, Diophante et Pappus, mais aussi l'astronome Ptolémée, le géographe Ératosthène et bien d'autres... C'est dans ce cadre qu'Euclide a enseigné les mathématiques et rédigé de nombreux ouvrages, parmi lesquels les *Éléments* reste le plus fameux à cause de l'influence qu'il a exercé pendant des siècles sur l'enseignement de la géométrie.

Cette œuvre monumentale rassemble la somme des connaissances mathématiques de l'époque, non seulement en géométrie, mais aussi en théorie des grandeurs et des proportions et en théorie des nombres. Euclide a ordonné, complété et perfectionné les travaux de ses prédécesseurs, mais surtout, il a présenté cet ensemble de connaissances mathématiques sous une forme déductive bien structurée, avec des démonstrations et une volonté de rigueur.

La plupart des élèves en ont entendu parler, mais il est probable qu'aucun d'entre eux n'a jamais eu l'occasion de consulter un texte des *Éléments*.

Comment s'y prendre ?

Nous proposons d'étudier la proposition 11 du livre II, dans la traduction de B. Vitrac. Sans vouloir nécessairement analyser avec les élèves les détails de la démonstration, il est intéressant de leur faire découvrir que la solution géométrique exposée par Euclide coïncide avec la solution algébrique qu'ils peuvent calculer.

Euclide – Les Éléments, Livre II, proposition 11

11

Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

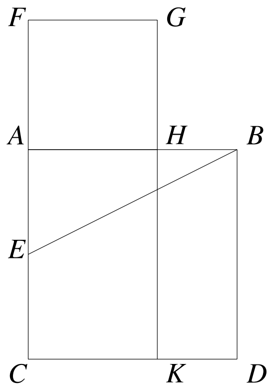


Fig. 8

Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En effet, que le carré $ABCD$ soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

Quel est le problème posé par Euclide ?
Que signifie pour Euclide l'égalité entre le rectangle et le carré ?
Refaire la construction géométrique.
Comment mettre le problème en équation ?
Analyser la solution géométrique proposée par Euclide et l'interpréter en termes de résolution algébrique.

Il faut tout d'abord s'assurer que les élèves interprètent correctement l'égalité entre le rectangle et le carré. Euclide pose un problème d'égalité de grandeurs, en l'occurrence une égalité d'aires.

Le problème est de partager un segment de droite AB par un point noté H de telle sorte que le rectangle dont les côtés sont AB et l'un des segments du partage de AB soit de même aire que le carré dont le côté est le segment restant.

Comme Vitrac, adoptons la notation AB indifféremment pour désigner le segment $[AB]$ et sa longueur $|AB|$, cette notation allégée n'engendre aucune ambiguïté dans la compréhension de ce qui suit.

La dernière phrase du texte

> Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

nous permet de poser le problème dans les mêmes termes qu'Euclide : il s'agit de déterminer la position du point H sur AB tel que le rectangle dont les dimensions sont AB et BH est de même aire que le carré de côté AH, c'est-à-dire tel que

$$AB \cdot BH = AH^2,$$

et non pas $AB \cdot AH = BH^2$, qui est une autre façon de poser le problème, mais qui ne correspond ni au texte, ni au dessin.

Dans ce cas, le point H est situé plus près de B que de A ($AH > BH$) comme on le voit dans la figure 8. En effet, le côté d'un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle est plus grand que la « largeur » du rectangle, mais plus petit que sa « longueur » (« largeur » et « longueur » du rectangle représentant respectivement la plus petite et la plus grande dimension de celui-ci). Une discussion préalable avec les élèves sera peut-être nécessaire pour établir cette propriété, qui peut être éclairée par la comparaison des deux dessins de la figure 9.

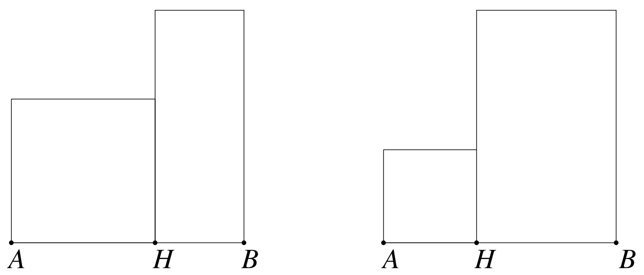


Fig. 9

Pour établir le lien entre la résolution géométrique décrite par Euclide et la formule de résolution algébrique préalablement établie, on demande aux élèves de formaliser.

Désignons par a la longueur du segment AB à partager. Comme Euclide décrit la construction du carré $AFGH$, la longueur du côté de ce carré est l'inconnue que l'on calcule à partir de la résolution géométrique. La comparaison entre la construction et la résolution algébrique sera donc plus aisée si on choisit de noter x le côté du carré, c'est-à-dire le segment AH. Le segment restant BH est noté $a - x$.

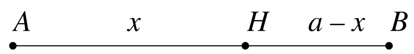


Fig. 10

L'équation à résoudre est alors $x^2 = a(a - x)$ ou $x^2 = a^2 - ax$, qu'on peut encore écrire $x^2 + ax = a^2$. On retrouve ainsi un cas particulier d'une équation de la forme $x^2 + px = q$, avec

p et q positifs. En résolvant cette équation par la formule déjà bien connue des Mésopotamiens, en remplaçant p par a et q par a^2, nous trouvons

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Analysons la construction décrite par EUCLIDE, tout en calculant les longueurs des segments qui interviennent à chaque étape.

Il construit successivement

1. le carré $ABCD$ de côté $AB = a$,
2. le point E, tel que $AE = \frac{a}{2}$,
3. le point F tel que $EF = EB = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$,
4. le carré de côté $AF = EF - EA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$.

Nous constatons que le déroulement de la solution géométrique proposée par EUCLIDE coïncide exactement avec les étapes du calcul effectué lors de la résolution algébrique.

La construction demandée a été effectivement réalisée : le segment AB a été coupé de telle sorte que le rectangle de dimensions AB et BH est de même aire que le carré de côté AH. Ce problème, très célèbre dans l'Antiquité, est repris par EUCLIDE à la proposition 30 du livre VI sous la forme *couper une droite limitée donnée en extrême et moyenne raison.* Cela revient à partager un segment AB en deux segments AH et BH tels que $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{BH}$. Ce rapport est nommé ἡ τομή (la section) par les Grecs et *divina proportione* (divine proportion) par Luca PACIOLI. C'est sa valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que nous appelons le *nombre d'or.*

Prolongement possible — Après avoir décrit la résolution géométrique du problème, EUCLIDE valide la construction proposée par une démonstration. Une lecture commentée de celle-ci n'est pas sans intérêt pour des élèves motivés.

En effet, puisque la droite AC a été coupée en deux parties égales au point E et, puisque FA lui a été ajoutée, le rectangle contenu par CF, FA, pris avec le carré sur AE, est donc égal au carré sur EF (II. 6). Or EF est égale à EB. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal au carré sur EB. Mais à celui sur EB sont égaux ceux sur BA, AE (I. 47), car l'angle en A est droit. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal à ceux sur BA, AE (N.C. 1)[5]. Que le carré sur AE soit retranché de part et d'autre. Donc ce qui reste, le rectangle contenu par CF, FA, est égal au carré sur AB (N.C. 3)[6]. Et d'une part, le rectangle contenu par CF, FA est FK – car AF est égale à FG –, d'autre part le carré décrit sur AB est AD. Donc FK est égal à AD. Que AK soit retranché de part et d'autre ; le reste FH est donc égal à HD (N.C. 3). Et, d'une part HD est le rectangle contenu par AB, BH – car AB est égale à BD –, d'autre part FH est le carré décrit sur AH. Donc le rectangle contenu par AB, BH est égal au carré sur AH.

Donc la droite donnée AB a été coupée en H, de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH. Ce qu'il fallait faire.

Voici une traduction de cette démonstration en langage mathématique actuel.

Une première égalité

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 \quad \text{(II, 6)}$$

est énoncée et justifiée par la proposition 6 du livre II. Cette proposition établit géométriquement l'identité remarquable $(a+b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2$, elle est appliquée ici pour $a = AB = CA$ et $b = AF$.

Comme $EF = EB$, par construction, on peut écrire

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2 \quad \text{(I, 47)}.$$

Les élèves devraient reconnaître dans la proposition 47 du livre I justifiant la dernière égalité, le théorème que nous connaissons sous le nom de théorème de Pythagore.

Dès lors, en soustrayant AE^2 des deux membres de l'égalité, il vient

$$CF \cdot FA = AB^2,$$

ce qui signifie que le rectangle FK ($FGKC$) est égal au carré AD ($ABDC$). Remarquons au passage que Euclide désigne les quadrilatères par l'énoncé des extrémités d'une diagonale.

Il reste à retirer le rectangle AK ($AHKC$) de ces deux figures de même aire pour établir l'égalité des aires du carré FH ($FGHA$) et du rectangle HD ($HBDK$), ce qui termine la démonstration puisque $FGHA$ est bien le carré construit sur AH et $HBDK$ le rectangle de dimensions AB et BH.

Échos des classes Le problème 1 de la tablette BM 13 901 a été décortiqué lors de l'exposé à Liège, déjà mentionné et commenté à la page 414.

Commentaires

En ce qui concerne le texte d'al-Ḫwārizmī, nous avons consulté les documents suivants :
- une transcription en latin d'une partie de l'œuvre originale (manuscrit latin 7377A des environs du XIVe siècle conservé à la Bibliothèque Nationale de Paris, in [105]),
- la traduction en anglais et le texte en arabe de l'édition de F. Rosen [5].

Le travail de Rosen s'appuie sur le seul manuscrit disponible à son époque : il s'agit du manuscrit de la *Bodleian collection* à Oxford. Il est contenu dans le volume numéroté CMXVIII. *Hunt.* 214, *fol.*, et porte la date de la transcription A.H. 743 (1342 après J.-C.)[7].

Notre traduction, très proche du texte arabe, nous a été largement inspirée par une lecture commentée que nous en a faite A. Djebbar. C'est sur son conseil, que nous avons délibérément choisi de ne pas traduire le terme *māl*, mais de garder le mot arabe.

Pour le problème 1 de la tablette répertoriée BM 13 901 au British Museum, nous avons reproduit la traduction de F. Thureau-Dangin [134], mais nous avons également consulté les travaux de J. Høyrup [89] et [90].

Quant à la proposition 11 du livre II des *Éléments* d'Euclide, nous avons adopté la traduction de B. Vitrac [67]. Cette traduction a été réalisée à partir du texte grec des *Éléments* établi par J. L. Heiberg. Cette édition de Heiberg, publiée de 1883 à 1888 fait toujours autorité.

[5] Notion commune 1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

[6] Notion commune 3 : Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

[7] A.H. 743 signifie année 743 de l'hégire.

Annexe III

Fiches à photocopier

Extrait du texte d'al-Ḫwārizmī

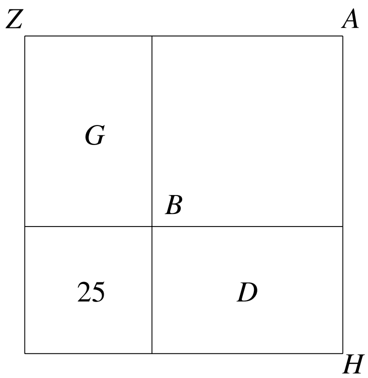
Démonstration du cas
« *un māl*[1] *et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams*[2]. »

La figure pour expliquer ceci est une surface <carrée> dont les côtés sont inconnus. Elle représente le *māl* qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la figure[3] $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines ; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [. . .]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le *māl*. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs[4] de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines[5], et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle[6] de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq[7], et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.

Nous savons donc que la première surface est le *māl*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le *māl*, et c'est sa racine. Et le *māl* est neuf. Voici sa figure.



[1]Le terme *māl* signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau. . . Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. Nous notons x^2 cette quantité et x sa racine.

[2]L'unité de monnaie a coutume de désigner ce que nous appelons le terme indépendant.

[3]Les carrés et les rectangles sont désignés par les extrémités d'une diagonale. La barre au-dessus de AB permet de distinguer le nom d'une figure d'un mot.

[4]L'emploi du mot « flanc » et non « côté » est une trace du vocabulaire de la géométrie d'arpentage, d'origine babylonienne et indienne.

[5]Cette remarque permet de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

[6]Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

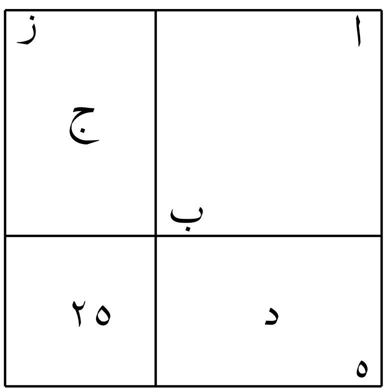
[7]On voit apparaître ici une rupture avec la tradition grecque. Euclide aurait dit « le carré de côté cinq ». Cette forme d'arithmétisation trouve également sa source dans la géométrie du mesurage.

Extrait du texte d'al-Ḫwārizmī en langue arabe

فاما علة مال و عشرة اجذار يعدل تسعة و ثلثين درهما

فصورة ذلك سطح مربع مجهول الاضلاع وهو المال الذي تريد ان تعرفه و تعرف جذره وهو اب وكل ضلع من اضلاعه فهو جذره وكل ضلع من اضلاعه اذا ضربته في عدد من الاعداد فما بلغت الاعداد فهي اعداد جذور * [...]

وله ايضا صورة اخري تودي الي هذا وهي سطح اب وهو المال فاردنا ان نزيد عليه مثل عشرة اجذاره فنصفنا العشرة فصارت خمسة فصيرناها سطحين علي جنبتي سطح اب وهما سطحا ج د فصار طول كل سطح منهما خمسة اذرع وهو نصف العشرة الاجذار وعرضه مثل ضلع سطح اب فبقيت لنا مربعة من زوايا سطح اب وهي خمسة في خمسة وهي نصف العشرة الاجذار التي زدناها علي جنبتي السطح الاول فعلمنا ان السطح الاول هو المال وان السطحين الذين علي جنبتيه هما عشرة اجذار فذلك كله تسعة و ثلثون و بقي الي تمام السطح الاعظم مربعة خمسة في خمسة فذلك خمسة و عشرون فزدناها علي تسعة و ثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح زه فبلغ ذلك كله اربعة و ستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره والمال تسعة وهذه صورته



Comparaison des méthodes

*Résolution actuelle – Résolution d'*AL-ḪWĀRIZMĪ

AL-ḪWĀRIZMĪ classe les équations de degré inférieur ou égal à 2 en six types dont trois sont des équations trinômes, puis il les réduit à leur forme normale, où le coefficient de x vaut 1. Il établit ensuite les algorithmes de résolution des différents cas. Il obtient des formules équivalentes aux expressions reprises dans le tableau ci-contre :

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(3)	$x^2 + q = px$	$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Voici une liste d'équations :

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x^2 - x + 7 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad 4x^2 - 8x + 3 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$

Pour chacune de ces équations :

- résoudre l'équation par la formule générale,
- écrire l'équation sous la forme normale d'AL-ḪWĀRIZMĪ, identifier à quel type elle appartient et la résoudre par la formule adéquate,
- reprendre les résultats dans un tableau qui permette une comparaison aisée.

Résolution actuelle		Résolution d'AL-ḪWĀRIZMĪ		
équation	solution	équation	type	solution
$x^2 + x - 2 = 0$				
$x^2 - 2x - 3 = 0$				
$x^2 - 2x + 1 = 0$				
$x^2 - 5x + 6 = 0$				
$x^2 - x + 7 = 0$				
$4x^2 - 8x + 3 = 0$				
$x^2 + 5x + 6 = 0$				
$x^2 + 2x + 1 = 0$				

Un problème mésopotamien

Problème 1 de la tablette BM 13 901

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : $45'$.

Tu poseras 1 l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : $30'$. Tu croiseras $30'$ et $30'$: $15'$. Tu ajouteras $15'$ à $45'$: 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas $30'$, que tu as croisé, de 1 : $30'$, le côté du carré.

Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : $45'$			
Tu poseras 1 l'unité			
Tu fractionneras en 2			
Tu croiseras $30'$ et $30'$			
Tu ajouteras $15'$ à $45'$			
C'est le carré de 1			
Tu soustrairas $30'$, que tu as croisé, de 1			
Le côté du carré			

Un autre problème mésopotamien

Problème 6 de la tablette BM 13 901

J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$.

Tu poseras 1 l'unité. Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$. Tu croiseras $20'$, sa moitié et $20'$: $6'\,40''$. Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35'$: $41'\,40''$. C'est le carré de $50'$. Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50'$: $30'$, le côté du carré.

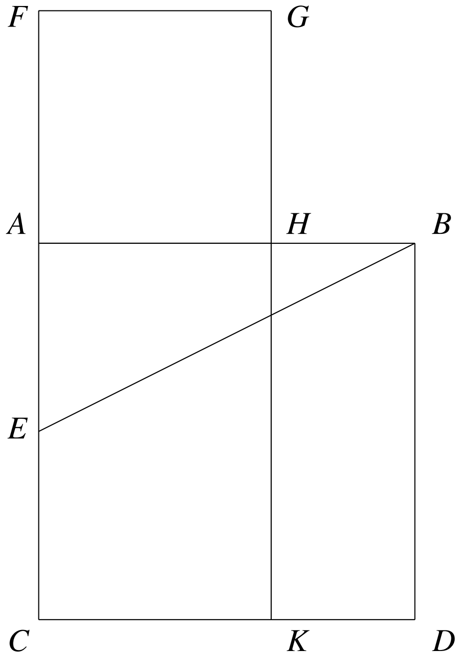
Texte	Interprétation		
Énoncé du problème et sa résolution sous forme d'une suite de calculs	sous forme sexagésimale	sous forme de fractions	sous forme littérale
J'ai additionné la surface et les deux tiers du côté de mon carré : $35'$			
Tu poseras 1 l'unité			
Les deux tiers de 1, l'unité, sont $40'$			
La moitié est $20'$			
Tu croiseras $20'$ et $20'$			
Tu ajouteras $6'\,40''$ à $35'$			
C'est le carré de $50'$			
Tu soustrairas $20'$, que tu as croisé, de $50'$			
Le côté du carré			

Un problème géométrique chez Euclide

Euclide – Les Éléments, Livre II, proposition 11

11

Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.



Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En effet, que le carré $ABCD$ soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

nom	lettre arabe	translitération	prononciation
’alif	ا	ā	a long
bā’	ب	b	b
tā’	ت	t	t
thā’	ث	ṯ	th (think)
ğīm	ج	ğ	j
ḥā’	ح	ḥ	h (home)
ẖā’	خ	ẖ	jota ou kh (loch)
dāl	د	d	d
ḏāl	ذ	ḏ	th (that)
rā’	ر	r	r roulé
zāy	ز	z	z
sīn	س	s	s
šīn	ش	š	sh (show)
ṣād	ص	ṣ	ss (ness)
ḍād	ض	ḍ	z, dh ou dd
ṭā’	ط	ṭ	t dur, emph.
ẓā’	ظ	ẓ	z, dh ou dd emph.
‘ayn	ع	‘	hiatus guttural
ġayn	غ	ġ	r grasseyé
fā’	ف	f	f
qāf	ق	q	q ou k guttural
kāf	ك	k	k
lām	ل	l	l
mīm	م	m	m
nūn	ن	n	n
hā’	ه	h	h non aspiré
wāw	و	w	w ou o ou ‘ou’ long
yā’	ي	y ou ī	y ou i long
hamza	أ	’	attaque vocalique

Chapitre 16

Le monde « arabe » : quelques pages de son histoire

Avertissement

Ce chapitre peut *a priori* sembler un peu long ; certains peut-être ne verront pas son utilité dans une recherche sur l'enseignement des mathématiques. Et pourtant...

Voici quelques objectifs glanés au fil de nos lectures des textes officiels, objectifs auxquels nous adhérons totalement. Dans le *Décret définissant les missions prioritaires de l'Enseignement Fondamental et de l'Enseignement Secondaire*, on lit que la Communauté française s'engage à adapter la définition des programmes et leur projet pédagogique à *la transmission de l'héritage culturel dans tous ses aspects et à la découverte d'autres cultures, qui, ensemble, donnent des signes de reconnaissance et contribuent à tisser le lien social* (article 9, 7^{o}). À la page 8 de la brochure *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques – Humanités générales et technologiques* [2], on trouve qu'*une formation mathématique peut contribuer à faire connaître les apports de toutes les cultures au développement des mathématiques...* Dans les *Compétences terminales et savoirs communs – Humanités professionnelles et techniques* [4], on lit que ces humanités *assurent une formation humaniste*, notamment *en aidant les élèves à se situer dans le temps et l'espace* (page 8) et *en aidant les élèves à s'ouvrir à la diversité sociale et culturelle...* (page 15).

Le présent chapitre est essentiellement destiné à l'enseignant qui, par la lecture d'une quinzaine de pages, peut avoir une première idée, mais une idée correcte, de ce qui s'est passé dans le monde arabe à une époque qui va nous intéresser particulièrement en ce qui concerne l'algèbre. Si tout enseignant a une certaine connaissance de l'histoire et de la culture occidentales, il n'en va pas de même en ce qui concerne l'Orient. Pas mal d'idées fausses ont été et sont encore véhiculées et il n'est pas toujours facile de faire le tri. Bien sûr, on peut toujours se documenter, mais cela demande du temps, de la patience, de l'esprit critique, beaucoup de travail en plus de la préparation des cours de mathématiques eux-mêmes. Notre but est donc d'aider un peu ces enseignants qui, pour motiver leurs élèves, seront peut-être tentés, à un certain moment de leur carrière, d'introduire un concept par le biais de l'histoire.

L'important n'est pas de raconter des histoires aux élèves mais bien de leur faire ressentir le côté profondément humain des mathématiques qui, au départ, ont un côté éminemment pratique ; elles sont au service de l'homme et l'aident à se tirer d'affaire dans ses problèmes de tous les jours.

Ensuite, lorsqu'une civilisation atteint un certain degré de développement, les problèmes traités deviennent de plus en plus complexes ; on débouche même alors sur une phase de spécialisation où des érudits et des chercheurs créent des mathématiques ≪ savantes ≫. Pour arriver à faire passer de tels messages chez les élèves, il faut parfois pouvoir se plonger quelque peu dans le contexte où les événements se sont déroulés.

Il n'est pas facile d'imaginer comment, à partir de la naissance d'une nouvelle religion, un empire a pu se constituer et arriver aussi rapidement à un état de développement tel que les activités philosophique et scientifique deviennent comparables à ce qu'on avait connu dans les civilisations grecque antique et hellénistique[1]. Le sens de l'expression ≪ mathématiques arabes ≫ n'est pas, comme nous le verrons, une chose évidente à comprendre. Affirmer que l'algèbre a été inventée par les Arabes est à la fois naïf et très restrictif. Il y a tout un environnement géographique, social, culturel, ... dont il faut tenir compte. Nous espérons que les quelques développements qui suivent répondront, du moins en partie, aux besoins des enseignants qui se lanceront dans cette ≪ aventure ≫ culturelle.

Nous avons introduit, dans le texte, certains mots ou noms propres significatifs, en écriture arabe, essentiellement à l'attention des collègues et élèves arabophones qui lisent et écrivent cette langue. Qu'on y voie aussi un ≪ symbole ≫ de notre volonté de rapprocher deux grandes cultures. En ce qui concerne la translitération de ces mots arabes, nous avons choisi un ≪ alphabet phonétique ≫ le plus indépendant possible de la langue dans laquelle se fait cette translitération, en l'occurrence ici, le français. Par exemple, pour la lettre arabe ش, nous avons choisi la translitération š, qui a l'avantage d'être universelle. En fait, c'est le ≪ ch ≫ français ou le ≪ sh ≫ anglais ou... Pour la même raison, nous avons translitéré la lettre خ en ẖ plutôt que kh et la lettre ج en ğ plutôt que j. La fiche 18 à la page 488 reprend complètement l'alphabet phonétique utilisé. Il est conseillllé de se munir d'une photocopie de cette fiche afin de rendre plus aisée la lecture des éléments d'histoire qui suivent.

Les sources de ceux-ci sont de deux types, d'une part, une formation intitulée ≪ Introduction à la civilisation et à la science arabo-musulmane[2] ≫ et un cours fait durant l'année académique 2002-2003 par le Professeur Ahmed Djebbar[3] aux universités de Mons et Bruxelles et d'autre part, une série d'articles ou d'ouvrages dont *Quelques étapes de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes* [15], *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* [22], *Une histoire de la science arabe* [60], *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident* [61], *Histoire des peuples musulmans* [62], *A History of the Arab Peoples* [88], *The Arabs in History* [104], *Histoire des sciences arabes* [120], *Ce que la culture doit aux Arabes d'Espagne* [139], *Les mathématiques arabes (VIIIe – XVe siècles)* [142].

Un tableau chronologique reprenant les faits les plus marquants se trouve à la page 511.

[1]La civilisation hellénistique se développe en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C). Cette civilisation n'est pas limitée au seul ≪ territoire grec ≫.

[2]Cette formation a été organisée durant plusieurs années par la Formation en Cours de Carrière, conjointement avec des professeurs de l'Université Libre de Bruxelles.

[3]A. Djebbar est professeur entre autres d'histoire des mathématiques à l'Université de Lille 1.

1 L'Arabie avant l'Islam

L'histoire ancienne des peuples de la péninsule arabique reste très obscure. Comme peu de textes arabes sont antérieurs au IVe siècle de notre ère, il faut se référer à des documents étrangers. La littérature assyro-babylonienne du IXe siècle avant J.-C. mentionne les Arabes sous le nom *Urbi* ou *Aribi*. La première utilisation du mot *al-ʿarab* (العرب) par les Arabes apparaît sur d'anciennes inscriptions de l'Arabie du Sud, vestiges de la civilisation florissante du Yémen – l'*Arabia Felix* de l'Antiquité. Le mot en question signifie bédouin, c'est-à-dire nomade.

Quant à l'étymologie du terme *Sarrasin*, au moins deux interprétations tout à fait différentes coexistent. Pour certains auteurs, le mot est d'origine grecque ; l'appellation *scénites* viendrait du grec *skênè* (*σκηνή*) signifiant « tente ». Cette dénomination se serait alors transformée en *Sarakênoi* (*Σαρακηνοί*) ou *Sar(r)aceni* en latin. Pour d'autres auteurs, le vocable viendrait de l'arabe *al-šarqiy* (الشرقيّ), qui signifie habitant de l'est.

La péninsule arabique, d'une superficie d'environ trois millions de kilomètres carrés, est limitée au nord par les territoires actuels de Jordanie et d'Iraq, à l'est par le golfe Persique, au sud par le golfe d'Aden et à l'ouest par la mer Rouge. Jusqu'au début du septième siècle, on peut en gros la diviser en deux grandes régions : le nord et le sud.

Les populations habitant ces deux grandes parties sont assez différentes : elles ne parlent pas la même langue ; l'écriture, la culture ne sont pas les mêmes.

Dans le sud au climat plus favorable que celui du nord, l'agriculture se développe et les tribus se sédentarisent rapidement. Ces peuples ont de nombreux contacts maritimes avec l'Éthiopie, l'Égypte et les régions du golfe Persique. Certaines villes yéménites sont de véritables cités-états puissantes et stables ; il s'agit là d'une structure socio-politique très contrastée par rapport à l'organisation du nord du pays.

Dans le nord, le plateau central est aride : ni fleuves, ni rivières, mais de nombreux *āwdiya*[4]. On trouve également des Arabes sédentaires le long des côtes, dans les oasis de l'est et de l'ouest. À l'époque préislamique, l'un des plus grands centres sédentaires de l'Arabie est La Mecque ou *Makka* (مكّة). Juifs et chrétiens s'établissent dans différentes parties du pays, notamment à *Yaṯrib*[5] (يثرب) et y répandent les cultures araméennes[6] et hellénistiques, ainsi que leurs religions monothéistes et les idées morales qu'elles véhiculent.

Les autres Arabes du nord vivent en tribus nomades. Ils ont des contacts avec la civilisation hellénistique, les mondes romain, indien, juif et chrétien. Ils parlent une langue sémitique[7] très structurée et possèdent une certaine unité de mœurs et des traditions orales communes.

On voit donc que l'Arabie n'est pas totalement isolée du reste du monde. Au contraire, elle est très tôt une zone de transit entre le monde méditerranéen et le lointain Orient.

L'organisation politique des tribus de bédouins est assez rudimentaire, comparée à l'organisation socio-politique d'un centre comme La Mecque, par exemple. À la tête de la tribu, on trouve le *Sayyid* ou *Šaiḫ* (سيّد ou شيخ) – souvent translitéré *cheikh* –, chef élu par les anciens de la tribu et qui est rarement plus que le premier parmi ses pairs. Il suit – en tentant parfois d'influencer – plus qu'il ne guide l'opinion tribale. Il ne peut punir ni imposer ses droits ; c'est une espèce d'arbitre. Il reçoit des avis d'un conseil d'anciens appelé *Majlis* (مجلس), qui est constitué par les chefs des familles et représentants des clans de la tribu. La vie est réglée par les coutumes, la tradition ou *sunna* (سنّة).

Au nord, à certaines époques, on voit aussi se former, tout comme au sud, des royaumes autour de villes prospères, comme le royaume nabatéen[8] de Pétra (premier siècle avant Jésus-Christ), qui sera finalement annexé par les Romains en 106 après J.-C. pour devenir la province d'Arabie. Ce royaume englobait le sud de la Palestine, la Transjordanie, le sud-ouest de la Syrie et le nord de la péninsule arabique. Cette civilisation était arabe dans sa langue, araméenne dans son écriture, sémitique[9] dans sa religion et gréco-romaine en ce qui concernait l'art et l'architecture.

On peut encore citer le royaume de Palmyre qui se crée en Syrie à partir d'une petite ville d'oasis[10]. Il atteint son apogée dès le deuxième siècle après Jésus-Christ en devenant une importante étape sur la route des caravanes reliant la Syrie occidentale et la Méditerranée à la vallée de l'Euphrate. On y parle l'araméen, le grec et le latin. La civilisation raffinée qui s'y développe est une agréable fusion des styles grecs, romains et orientaux. Ses derniers « souverains » seront

[4] Forme plurielle du mot *wādī* (وادي) souvent translitéré *oued* et qui signifie ravine, cours d'eau temporaire qui peut rouler de grandes quantités d'eau et de boue, lors d'orages par exemple.

[5] Cette ville sera plus tard rebaptisée Médine.

[6] Les Araméens, initialement établis en Mésopotamie, vont s'installer progressivement en Syrie entre le onzième et le septième siècle avant notre ère.

[7] L'arabe, l'hébreu, l'éthiopien, le babylonien, ... sont des exemples de langues sémitiques. Une de leurs caractéristiques est que la plupart des mots sont formés autour de racines souvent trilitères (formées de trois consonnes). Ainsi, par exemple, les trois consonnes k, t et b induisent l'idée d'écriture. Le vocable « kataba » veut dire « il a écrit », « kātib » signifie « scribe », « kitāb », « livre », « maktab », « bureau » et « miktab », « instrument pour écrire », ...

[8] Les Nabatéens sont en fait une population nomade de chameliers et de pasteurs, venant du sud de l'Arabie. Ils sont remontés au quatrième siècle avant Jésus-Christ vers le nord et se sont installés dans des régions au sud de la Mer Morte.

[9] La plupart des historiens des religions entendent par là, non seulement les religions monothéistes, mais aussi celles qui leur sont proches et qui étaient pratiquées à Tyr, Sidon, Pétra, en Mésopotamie, ... Le culte d'Ashtart, par exemple, en fait partie, contrairement au bouddhisme, au védisme, au brahmanisme, ...

[10] La population de l'oasis de Palmyre était essentiellement araméenne.

Odeinat II, puis à sa mort, son épouse, la fameuse reine Zénobie.

À la chute de ce royaume en 272 après Jésus-Christ[11], ce sont les rois lakhmides qui prennent la domination du désert. Le fondateur de ce royaume fait de Ḥira (حرة), au nord-est de la péninsule, sa capitale. Les Lakhmides sont originaires de l'Arabie du sud ; ils émigrent vers le nord, vers la Syrie, la Palestine et l'Iraq. Jusqu'à leur disparition en 602 après J.-C, ils vont être continuellement en guerre avec les Ghassanides qui occupent, eux, le nord-ouest de la péninsule. Ils seront au service des Sassanides de Perse en apportant leur soutien contre Byzance, l'ennemie commune. Les Arabes de Ḥira parlent l'arabe mais écrivent en langue syriaque. C'est de Ḥira que beaucoup d'éléments culturels et religieux vont pénétrer en Arabie.

Nous avons vu que, par-ci par-là, des nomades sédentarisés installent des villes avec un système de société mieux organisé que le tribalisme bédouin, et que l'une des plus importantes est La Mecque, dans le Ḥiğāz (الحجاز) – région de la péninsule arabique, le long de la mer Rouge.

Le pouvoir des notables de La Mecque n'est certes pas comparable à celui des souverains de Byzance, par exemple ; cependant il y aura des tentatives, de la part des Byzantins et du roi d'Abyssinie, visant à détourner, à leur profit, les routes commerciales passant par La Mecque.

C'est dans cette ville qu'un temple de forme cubique, abritant diverses divinités et connu sous le nom de *Ka'ba* (كعبة) est considéré par les Arabes comme ≪ la Maison de Dieu ≫, en arabe *Bayt Allah* (بيت الله). Des gens originaires de différentes tribus et régions y viennent en pélerinage. Chaque secte ou doctrine, même le christianisme, par exemple, y est représentée par des statues, figures ou images. Ces sont des ancêtres du Prophète, les *Banī Hāšim* (بني هاشم) de la tribu des *Qurayš* (قريش) qui avaient l'honneur d'assurer la garde de la *Ka'ba*.

2 L'avènement de l'Islam

Selon la tradition, *Muḥammad* (محمّد) serait né à La Mecque vers 570. Son père meurt avant sa naissance ; il perd sa mère à l'âge de six ans et est élevé par son grand-père qui décède deux ans plus tard. Il est alors pris en charge par son oncle *Abū Tālib* (ابو تالب) qui l'emmène en voyage en Syrie, à l'âge de douze ans, accompagnant une caravane commerciale. Il rentre à La Mecque et, à vingt-cinq ans, il retourne en Syrie en accompagnant une autre caravane qui fait commerce au nom de *Ḫadīğa* (خديجة), une riche veuve qu'il épouse à son retour.

C'est vers l'âge de quarante ans – soit vers 610 –, dit-on, qu'il reçoit le premier appel de l'archange Gabriel. Il se met à prôner la soumission à *Allah*, Dieu unique, grand justicier qui récompensera les hommes d'après leurs actions. Plusieurs personnes de son entourage immédiat adhèrent tout de suite à la nouvelle religion : la première des femmes est son épouse *Ḫadiğa*, le premier des jeunes, son cousin *'Alī* (عليّ), le premier des hommes, *Zayd Ibn Ḥariṯa* (زيد بن حرثى), son esclave affranchi. *Muḥammad* tente d'écarter ses contemporains de l'idolâtrie pratiquée par la classe dominante. Si ses premiers prêches sont considérés comme inoffensifs par l'oligarchie en place, ils finissent par inquiéter car trop de fidèles convertis viennent des classes les plus défavorisées. De plus, un changement de religion à La Mecque risque de faire perdre à la cité son statut de ville de pélerinage et donc de passage obligé. La situation devient délicate et *Muḥammad* conseille à ses compagnons d'émigrer en Abyssinie, afin d'échapper aux coups

[11] Les prétentions croissantes de Zénobie finissent par irriter l'empereur Aurélien.

des opposants. Lui-même continue à prêcher, de préférence lors des saisons de pélerinage. C'est ainsi qu'il convertit à l'Islam des pélerins de la ville de Yaṯrib, qui, de retour chez eux, commencent également à prêcher la nouvelle religion, qui a plus de succès qu'à La Mecque. Aussi, les convertis de Yaṯrib sont-ils qualifiés de *al-anṣār* (الانصار), c'est-à-dire ceux qui aident, les partisans. Dans l'oasis de Yaṯrib, la situation est très différente. On rencontre des réfugiés juifs et l'organisation politique est beaucoup plus rudimentaire qu'à La Mecque. Les premiers convertis mecquois du Prophète finissent par émigrer dans cette ville et seront connus sous le nom de *al-muhāǧirūn* (المهاجرون), les émigrés. En 622, *Muḥammad* rejoint lui-aussi cette même cité, accompagné de son ami *Abū Bakr* (ابو بكر). C'est *l'hiǧra* (الهجرة) ou *hégire*, l'émigration. Pour l'occasion, les partisans rebaptisent la ville *Madīna al-Nabī* (مدينة النبيّ), la Ville du Prophète, Médine. Le 16 juillet 622 de l'ère chrétienne correspond au 1er *Moḥarram*[12] (محرّم) de l'an 1 du calendrier musulman.

Muḥammad fait construire à Médine la première mosquée de l'Islam. Grâce à l'appui tant des *Muhāǧirūn* que des *Anṣār*, il jette les fondations d'un nouvel état, l'état islamique. Plusieurs fois les Mecquois vont tenter d'envahir Médine, mais la conclusion sera la prise de La Mecque par les musulmans en l'an 8 de l'hégire. L'islamisation de l'Arabie va être favorisée par l'arrivée de tribus bédouines venant de diverses régions de la péninsule et qui rallient Médine pour déclarer leur adhésion à l'Islam.

Après la prise de La Mecque, le Prophète s'installe à Médine. En l'an 10 de l'hégire, lors d'un dernier pélérinage, *haǧǧat al-wadā'* (حجّة الوداع) c'est-à-dire le pélerinage de l'adieu, il annonce à la communauté de ses fidèles qu'il a terminé sa mission puisqu'il a transmis le message qui lui avait été révélé. Il rentre alors à Médine où il tombe assez rapidement malade. Avant de mourir, il désigne *Abū Bakr* pour le remplacer comme guide des mulsulmans lors de la prière.

3 Les califes orthodoxes

En confiant à *Abū Bakr* la responsabilité de guide des musulmans, *Muḥammad* ne l'a en fait pas désigné comme un véritable successeur, c'est-à-dire quelqu'un qui remplirait, comme lui, les rôles de législateur, chef de la communauté religieuse et commandant de l'armée. Ainsi, le tout nouvel état musulman se trouve très tôt confronté à un énorme problème, celui du choix du successeur, en arabe *ẖālīfa* (خاليفة), calife.

Plusieurs tendances vont évidemment s'affronter. Les *Muhāǧirūn* défendent l'idée qu'ils sont de la tribu du Prophète et qu'ils ont été les premiers à recevoir la révélation. Les *Anṣār* prétendent que s'ils n'avaient pas donné asile au Prophète et à ses compagnons, la nouvelle religion ne se serait pas aussi bien implantée. Enfin, un peu plus tard apparaissent les Légitimistes, en arabe, *al-aṣḥāb al-naṣṣ w'al-ta'īn* (الاصحاب النصّ و التعيّن), ce qui signifie littéralement, les maîtres du texte exact et de la désignation (à un poste). Pour ces derniers, Allah ne peut confier l'avenir de la communauté des fidèles aux aléas d'une élection et il a donc sans doute choisi un successeur. Ils pensent que la personne la plus apte à assumer cette lourde responsabilité est *'Alī*, cousin paternel de *Muḥammad*, époux de sa fille *Fāṭma* (فاطمة) et l'un des premiers croyants. Enfin, un autre parti tente de faire valoir ses droits, celui des *Qurayš*, la tribu du

[12]Premier mois de l'année musulmane.

Prophète, dont la branche *Umayya* (اميّة) possède pouvoir, richesse et ruse.

Ce sont les *Muhāǧirūn* qui réussissent finalement à imposer leur point de vue. Ainsi, le premier calife est *Abū Bakr*, compagnon et ami le plus proche du Prophète. En fait il est le premier de ce qu'on appelle les <quatre> califes orthodoxes ou *al-ẖulāfa' al-rašidūn* (الخلفاء الرشدون) ; son califat ne durera que deux ans, de 632 à 634 et sera troublé par *al-ridda* (الردّة), littéralement le refus, qu'on appelle encore guerre de sécession. La cause en est l'opposition à l'obligation religieuse du paiement de la *zakāt* (زكاة)[13], menée par les tribus les plus éloignées des centres de La Mecque et Médine, qui considèrent que cette *zakāt* était un contrat entre eux et le Prophète. Puisque ce dernier est mort, le contrat n'existe plus. Toutefois, *Abū Bakr* réussit à unifier le pays sous un seul gouvernement central.

Les trois autres « califes orthodoxes » sont *'Umar Ibn al-H̱aṭāb* (عمر بن الخطاب), calife de 634 à 644, *'Ut̠man Ibn 'Affān* (عثمن بن عفّان), de la maison *Umayya* (644 – 656) et enfin, *'Alī Ibn Abī* Ṭālib (عليّ بن ابي طالب), calife de 656 à 661. C'est l'époux de *Fāṭma*, la fille du Prophète.

L'expansion arabe au Proche et Moyen-Orient peut s'expliquer par différents facteurs. Nous ne ferons que les citer ici sans les analyser en profondeur.

L'un des premiers événements marquants est l'anéantissement du puissant empire romain par les invasions germaniques.

Un autre facteur est l'affaiblissement et le déclin des empires byzantin et perse, conséquences des guerres continuelles qu'ils se livrent. Tant dans un camp que dans l'autre, ces luttes obligent le pouvoir à lever de lourds impôts, situation qui diminue la loyauté des sujets.

L'extrême rigueur avec laquelle les autorités religieuses de Byzance ont combattu l'église nestorienne de Syrie ou l'église copte[14] d'Égypte, par exemple, ne permet guère de gagner la sympathie des populations en place.

Ces deux réalités de terrain permettent de comprendre pourquoi ces populations ont pu voir en l'envahisseur arabe une alternative peut-être plus favorable à leurs conditions de vie.

À cette liste non exhaustive, loin de là, il faut encore ajouter la haute qualité militaire des généraux arabes à la tête des armées. Leurs campagnes seront comparées à celles d'Alexandre le Grand, d'Hannibal et de Napoléon. De plus, les soldats arabes sont résistants ; ils sont issus, du moins en grosse partie, du peuple saharien accoutumé à survivre dans des conditions très dures durant de longues périodes, maîtrisant la cavalerie et la méharée.

Sous le califat de *'Umar*, l'armée musulmane remporte une première victoire sur la Perse à

[13]La *zakāt* est une aumône, un don. Le mot vient de *al-zakā'* (الزكاء) qui signifie la pureté. Celui qui possède des biens doit en donner une partie aux plus démunis. Cela purifie son âme de l'avarice et de l'avidité. C'est une prescription coranique ; par exemple, on trouve dans la deuxième sourate *al-baqarah* (البقرة) – ce qui signifie la vache –, au verset 43 : « Et accomplissez la ṣalāt, et acquittez la zakāt… ». *Al-ṣalāt* (الصلاة) signifie la prière ; *zakāt* et *ṣalāt* sont deux des cinq piliers de l'Islam.

[14]Outre la division entre église catholique romaine et église orthodoxe d'Orient, il apparaît d'autres tendances qui diffèrent selon l'interprétation de la nature du Christ : deux natures – divine et humaine – (Concile de Chalcédoine, 451), une seule nature composée de deux natures (doctrine des Monophysites qui est notamment celle de l'église copte d'Égypte). Un patriarche de Constantinople, Nestorius, chef de l'église nestorienne, défend l'idée que la parole de Dieu habite dans l'homme Jésus depuis sa conception…

al-Qadisiyya en 637, puis à Jalula et enfin, en 642, à Nahavend. Cette même année voit la conquête de l'Iraq, de l'ancienne Mésopotamie et de la Perse occidentale et centrale. Se succèdent alors l'invasion de la Syrie, la chute de Jérusalem, la conquête de l'Égypte. En Syrie, *'Umar* nomme gouverneur *Mu'āwiyah Ibn Abī Sufiān* (معاويّه بن ابي سفيان) de la famille *Umayya*. En Égypte, c'est le calife *'Uṯman* qui désigne *'Abdallah Ibn Sa'd Ibn Abī Sarh* (عبدالله بن سعد بن ابي سره) comme gouverneur. Ce dernier crée la première flotte arabe avec l'aide de *Mu'āwiyah*. Ils deviennent ainsi les premiers amiraux arabes. Par la suite, les deux flottes, égyptienne et syrienne attaquent Byzance. Chypre, l'île de Rhodes... sont prises. Une partie de l'*Ifrīqīa* (إفريقيا), l'actuelle Tunisie tombe elle aussi aux mains des Arabes.

Le calife *'Uṯman* a tendance à nommer trop de membres de sa famille à des postes importants dans l'empire. On le presse d'abdiquer, ce qu'il refuse de faire. Il finit assassiné. Si à la mort de *'Umar*, le choix de son successeur *'Uṯman* n'avait guère posé de problème, cette fois, ce n'est pas pareil : la communauté musulmane reste divisée. Après bien des difficultés, c'est finalement *'Alī* qui est nommé calife dans la mosquée de Médine, le 24 juin 656. Il transporte immédiatement la capitale de Médine à *al-Kūfa* (الكوفة) en Iraq et révoque les gouverneurs de province nommés par son prédécesseur. Le gouverneur de Syrie, *Mu'āwiyah*, qui est de la même famille *Umayya* que le calife assassiné, appelle à la vengeance en excitant le peuple. L'affrontement a lieu le 28 juillet 657 sur la rive ouest de l'Euphrate ; les Iraquiens sont conduits par *'Alī* et les Syriens, par *Mu'āwiyah*. L'armée de *'Alī* est sur le point de remporter la victoire lorsqu'un allié de *Mu'āwiyah* a recours à une ruse : des copies du Coran attachées à des lances sont interprétées par tous comme un appel à l'arbitrage du Coran...

Que s'est-il passé alors ? Les témoignages sont contradictoires. Il est difficile de croire qu'un calife ait pu s'abaisser devant un gouverneur... Évidemment, il a sans doute perdu des partisans... Le 24 janvier 661, *'Alī* est assassiné près de Kūfa par un membre d'une ancienne secte de dissidents en Islam. L'endroit, situé à quelque 160 km au sud de *Baġdād* (بغداد), et aujourd'hui appelé *al-Naǧaf* (النجف), est un lieu de pélerinage.

4 Le califat umayyade

Mu'āwiyah se trouve au centre du conflit pour le pouvoir. Il fonde le deuxième califat, celui des *Umayyades*, du nom de sa famille. Il est nommé calife en 661 à Jérusalem et transporte la capitale de l'empire à Damas.

Entretemps, l'Iraq déclare *al-Ḥasan* (الحسن), successeur de son père *'Alī* assassiné. Mais *al-Ḥasan* abdique en faveur de *Mu'āwiyah* et se retire à Médine. Son frère *al-Ḥusayn* (الحسين) revendique le califat. À l'invitation des Iraquiens, qui l'avaient proclamé calife après la mort de son père et l'abdication de son frère, il se rend à Kūfa avec sa famille et quelques partisans. Il est massacré le 10 octobre 680 par l'armée *umayyade*. Ce jour correspond au 10 du mois de *Moḥarram* de l'année 61 de l'hégire et reste pour les *Chī'ites*[15], en arabe, *Šīa'īy* (الشيعيّ),

[15] C'est l'une des grandes subdivisions de l'Islam, celle des dissidents, des partisans de *'Alī* qui contestaient *Abū Bakr* comme successeur du Prophète. Une autre grande subdivision est la branche sunnite à laquelle se rattachent notamment les califats umayyade et abbasside. Ce vocable vient du mot arabe *sunna* qui signifie tradition et a ici le sens de ≪ ensemble des pratiques et préceptes du Prophète ≫.

littéralement les dissidents, le jour de la commémoration du martyre de *al-Ḥusayn*.

Le califat des *Umayyades* est marqué par une politique pragmatique, matérielle et profane. Ruse, machination politique et terreur en sont les principales caractéristiques.

C'est *Mu'āwiyah*, calife de 661 à 680, qui introduit, dans l'Islam, le principe de succession par hérédité, lorsqu'il nomme son fils *Yazīd* (يزيد) comme son successeur. Le califat de *Yazīd* ne dure que trois années. Les *Umayyades* sont ainsi la première dynastie en Islam.

À la fin du septième siècle, début du huitième, sous le califat de *'Abd al-Mālik* (عبد المالك) qui s'étale de 685 à 705, puis de son fils *al-Walīd* (الوليد), de 705 à 715, l'empire islamique, avec Damas comme capitale, est arrivé au sommet de son expansion. Il s'étend des côtes de l'océan Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus et aux frontières de la Chine avec aussi le Ḫwārizm[16], la Transoxiane[17], l'Afrique du Nord et l'Espagne. La conquête de l'Espagne se fait à partir de l'Afrique du Nord. En 711, un lieutenant berbère, du nom de *Ṭāriq Ibn Ziyād* (طارق بن زيّاد) fait une expédition de reconnaissance dans la péninsule ibérique ; il traverse la Méditerranée en un lieu qui s'appelle désormais Gibraltar. L'étymologie en est effectivement *ǧabal al-Ṭāriq* (جبل الطارق), littéralement, la « montagne de Ṭāriq ». Les armées islamiques – c'est un fait très connu – ne seront arrêtées qu'en 732 par Charles Martel, quelque part entre Tours et Poitiers.

On assiste à l'arabisation des administrations publiques, ce qu'on a appelé *al-dīwān* (الديوان). Les premières monnaies arabes, le service postal apparaissent aussi. On voit également la construction de nombreux édifices privés et publics et la naissance de nouvelles villes, comme *al-Ramla* (الرملة), œuvre du calife *Sulaymān* (سليمان) (715 – 717), qui y fait bâtir la Mosquée Blanche.

[16] Région située au sud de la mer d'Aral ; elle correspond aujourd'hui au Turkmenistan et à l'Uzbekistan.

[17] La Transoxiane était la région d'Asie centrale au nord-est de l'Oxus ; Samarqand en fut la ville principale. Le fleuve Oxus est l'actuel Amou-Daria.

'Abd al-Mālik érige à Jérusalem la Coupole du Rocher et la grande mosquée *al-Masǧid al-Aqṣā* (المسجد الاقصى). Quant à *al-Walīd*, il fait agrandir la Mosquée de La Mecque, celle de Damas, reconstruire celle de Médine et ériger des écoles et des hôpitaux.

Mais l'ancienne rivalité entre les tribus arabes du sud et du nord refait surface. Le problème de la succession au pouvoir déstabilise le régime : il y a en effet conflit entre la règle établie par *Mu'āwiyah*, selon laquelle le calife désigne son fils, et la très ancienne règle tribale des Arabes, qui veut que le successeur soit le plus âgé de la famille. Les *Chī'ites*, majoritaires en Iraq, par opposition au pouvoir sunnite en place en Syrie, n'ont pas pardonné les meurtres de *'Alī* et de *al-Ḥusayn*. Enfin, les descendants de *al-'Abbās* (العبّاس), l'oncle du Prophète se sont toujours considérés comme successeurs légitimes, puisqu'ils sont de la famille de *Hāšim*.

	Hāšim	
'Abdallah	*Abū Ṭālib*	*al-'Abbās*
Muḥammad	*'Alī*	
	al-Ḥusayn	*Abbassides*

D'autre part, les peuples islamisés ne sont pas traités comme les Arabes de souche ; ils sont par exemple soumis à des taxes desquelles les musulmans eux, sont exonérés. Il y a ainsi un certain mécontentement au sein de la population, spécialement dans la province du *Ḫurāsān* en Perse. Les partisans de la cause *abbasside* iront les rejoindre, de même que les *Chī'ites*.

On le voit, de nombreuses conditions sont réunies pour entraîner la chute du califat *umayyade* en l'an 750, après nonante années et quatorze califes, dont le dernier fut *Marwān II* (مروان الثاني).

5 Le califat abbasside et la transmission du savoir

Le premier calife *abbasside* est *Abū al-'Abbās* (ابو العبّاس), qui aura le pouvoir de 750 à 754. Dans son discours d'intronisation, il se donne lui-même le surnom de *al-Saffāḥ* (السفّاح), littéralement « qui a soif de sang ». La dynastie qu'il fonde va être celle qui connaîtra la plus longue durée, de 750 à 1258, date de la (première) prise de *Baġdād*, par les Mongols.

Les *Abbassides* se lancent dans une campagne d'extermination des *Umayyades*. Le seul rescapé du massacre sera *'Abd al-Raḥmān Mu'āwiyah* (عبد الرحمان معاويّه) qui fondera une dynastie *umayyade* en Espagne.

La capitale de l'empire est retransférée en Iraq, dans la ville de *al-Kūfa*, aux frontières de la Perse. Le calife est protégé par des troupes du *Ḫurāsān*, qui l'ont aidé à prendre le pouvoir et les Perses obtiennent des postes importants dans le gouvernement. Le pouvoir devient plus cosmopolite et l'aristocratie arabe, florissante sous le califat précédent, est remplacée par une hiérarchie d'officiers et de fonctionnaires de toutes races et de toutes nationalités.

Les califes *abbassides*, contrairement à leurs prédécesseurs, vont s'occuper de religion ; le calife guide la prière en portant le manteau du Prophète. Il s'entoure de conseillers en théologie et loi canonique. L'idée des *Abbassides* est de garder le pouvoir jusqu'à la fin du monde, ultime instant où ils le remettraient à Jésus-Christ, le Messie. La propagation de ce genre d'affirmations les a sans doute aidés à régner longtemps car beaucoup sont persuadés que, lorsque le pouvoir *abbasside* disparaîtra, l'ordre du monde sera totalement désintégré...

Lorsque *al-Saffāḥ* meurt en 754, c'est son frère *al-Mansūr* (المنسور) qui lui succède, de 754 à 775. On peut dire que c'est véritablement le fondateur de la dynastie car les trente-cinq califes qui viendront après lui sont tous ses descendants. En 762, il fonde *Baġdād* – ce qui signifie « cité de la paix » – sur la rive ouest du Tigre. Quelques années plus tard, il en fera la capitale de l'empire. C'est à cette époque que l'influence persane commence à se faire sentir, tant à la cour que dans la vie de tous les jours. On la ressent dans le gouvernement et l'administration, dans les costumes, accessoires, ustensiles, dans la cuisine, ... Seules la religion et la langue de l'administration et de la culture ne subiront pas cette influence. La religion restera l'Islam, et la langue, l'arabe.

Le vaste mouvement de transmission du savoir scientifique et philosophique commence à *Baġdād* : les Arabes vont traduire dans leur langue et assimiler toute la culture des pays conquis.

Ǧirǧis Ibn Baḫtayšū (جرجس بن بختيشو), médecin nestorien persan, traduit pour le calife des œuvres de médecins grecs. *Ǧirǧis Ibn Baḫtayšū* est directeur de l'école de médecine de *Jundayšapur* ; il meurt vers 771. C'est encore pour *al-Mansūr* que AL-FAZĀRĪ (الفزاري) traduit du sanskrit le premier traité d'astronomie mathématique introduit dans la littérature scientifique arabe. Son titre arabe est le *Zīǧ al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Grand Zīǧ du Sind hind*, encore connu sous le nom de *Siddhānta*. Le terme *Zīǧ* est d'origine persane ; il signifie « fil à coudre », « corde », « fil à plomb ». Par extension, il veut encore dire « trame » d'un tissu, ce qui fait penser aux lignes et colonnes d'une table astronomique. Mais c'est plus qu'une simple table ; on y trouve aussi des techniques pour convertir les dates d'un calendrier dans un autre, des prédictions météorologiques basées sur l'observation des astres et des étoiles, ...

Il y aura trente-sept califes *abbassides* ; les plus importants sont les dix premiers et nous nous limiterons, parmi ceux-ci, à ne citer que ceux qui ont eu une influence marquante dans le domaine des sciences et plus particulièrement, des mathématiques.

Le cinquième calife est *Hārūn ar-Rašīd* (هارون الرشيد), celui des *Mille et Une Nuits*, celui aussi qui a entretenu des relations diplomatiques suivies avec Charlemagne. Son califat s'étend de 786 à 809. Il reprend les campagnes contre Byzance et ses armées obtiennent de très importantes victoires.

Mais ce n'est pas qu'un guerrier. Il introduit en Iraq l'usage du papier qui était connu en Chine. Il continue à encourager le mouvement de transmission des connaissances scientifiques et philosophiques en langue arabe déjà amorcé du temps de *al-Mansūr* ; il favorise ainsi la culture qui est bien sûr influencée par des éléments étrangers : indiens, persans, syriaques, grecs et hellénistiques.

Un peu plus tard, le calife *al-Ma'mūn* (المأمون) va régner de 813 à 833. C'est un mutazilite, ce qui signifie qu'il appartient à une école de pensée en Islam, qui défend l'idée que le texte religieux doit être en accord avec la raison. Il va promouvoir et protéger les sciences. Il envoie des missions à Byzance pour ramener des manuscrits grecs de philosophie et de science, afin de les faire traduire en arabe. À *Baġdād*, il fonde la *Bayt al-ḥikma* (بيت الحكمة), c'est-à-dire la Maison de la Sagesse, véritable académie de traduction à laquelle il attache une bibliothèque. Il fonde également le premier observatoire en pays d'Islam.

Pendant près de deux siècles, les traductions vont se faire sans relâche : EUCLIDE, ARCHIMÈDE, APOLLONIUS, PTOLÉMÉE, DIOPHANTE, ... – pour ne citer que les mathématiciens – soit d'après des originaux grecs, soit d'après des traductions syriaques. À cela, il faut ajouter les connaissances venues de l'Inde, les traditions du Ḫwārizm, de la Perse et de la Mésopotamie.

Les mots « techniques » de la philosophie ou de la science grecques n'ont évidemment pas leurs correspondants dans la langue arabe des débuts de l'Islam. C'est entre autres grâce aux traducteurs que cette langue va évoluer vers l'arabe classique, qui deviendra la langue scientifique, celle des savants en Orient, tout comme la langue latine le fut chez nous. Certains mots ont été empruntés au grec et arabisés sans plus évoluer par la suite ; c'est le cas par exemple du vocable *al-ǧaġrāfya* (الجغرافية), la géographie. D'autres ont été remplacés plus tard, dans une phase d'enrichissement de la langue. C'est le cas de *al-ǧyūmaṭrya* (الجيومطرية) qui a d'abord désigné la géométrie. Actuellement, cette science s'appelle *al-handasa* (الهندسة), déformation du mot persan *Indāza* voulant dire « mesure ». Les *Éléments* d'EUCLIDE seront traduits de nombreuses fois. En langue arabe, il y aura trois titres selon l'époque de la traduction : *al-usṭuqssāt* (الاسطقسّات), arabisation du grec $\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha$, éléments ; on voit ensuite apparaître *al-ārkān* (الاركان), qui signifie piliers (au sens propre) et enfin *al-uṣūl* (الاصول), qui veut dire piliers, principes. On assiste ainsi réellement à la mise en place d'une langue culturelle et scientifique. Parfois, dans un écrit sur la botanique, par exemple, le traducteur est confronté à un problème d'identification de différents végétaux. Il est obligé d'aller voir sur place de quoi il s'agit. ÉRATOSTHÈNE a mesuré le méridien terrestre qu'il a exprimé en « stades » grecs, mais que représente cette unité pour un habitant de l'empire arabe ? Il faut refaire une mesure...

Cette période de traductions et d'assimilation sera suivie d'une période tout aussi intense de créations. C'est dans ce contexte que sont nées notamment ce que nous appelons les « mathématiques arabes », c'est-à-dire les mathématiques qui se sont développées dans les pays qui ont été conquis par les peuples musulmans après l'avènement de l'Islam. Ces mathématiques ont été pratiquées par des savants qui parlaient l'arabe et qui habitaient ces contrées, ou qui ont transité par ces contrées. Leurs pays d'origine sont très variés (Perse, Égypte, Afrique du nord, Espagne, ...) tout autant que leurs religions (musulmans, chrétiens, juifs[18], adeptes du zoroastrisme[19]...) En fait, comme le dit si bien DJEBBAR [60], « En pays d'Islam, les hommes de science venaient de tous les horizons et ils n'avaient, pour la plupart, aucun lien avec les théologiens ou les religieux au sens large. »

L'année 1258 marque la fin de l'empire *abbasside*, fin qui peut s'expliquer par plusieurs causes. Parmi les facteurs externes, il faut mentionner l'invasion mongole au Proche-Orient. Les causes internes sont essentiellement liées au manque d'homogénéité de l'empire : arabes – non-arabes, arabes musulmans – arabes non-musulmans, arabes du nord – arabes du sud...

Ensuite, il y aura les invasions ottomanes et en 1492, la reconquête de l'Espagne par les chré-

[18]Juifs et chrétiens sont appelés, par les musulmans, les « gens du livre ». Le mot grec $\beta\acute{\iota}\beta\lambda o\varsigma$ signifie livre.

[19]Le zoroastrisme est une religion qui est apparue en Perse environ neuf siècles avant Jésus-Christ. Ses adeptes sont adorateurs de la lumière et du feu.

tiens... La fin de l'histoire rapportée ici va peut-être paraître brutale, mais il n'est pas possible, dans le cadre de cette recherche mathématique, d'aller plus avant. Nous avons pris le parti de tenter de faire un peu comprendre ce qui a permis le développement des sciences arabes, au moins jusqu'à l'époque où a vécu un mathématicien qui va nous occuper dans le cadre de l'art de l'algèbre, *al-ṣanā'a al-ğabr w'al-muqābala* (الصناعة الجبر والمقابلة), comme disent les mathématiciens « arabes ».

6 Épilogue

L'historien des sciences, d'origine gantoise, Georges Sarton (1884-1956), auteur de l'ouvrage *Introduction to the History of Science*, a écrit « Il est puéril d'affirmer que la science commença en Grèce : le "miracle" grec fut préparé par des millénaires de travail en Égypte, en Mésopotamie et peut-être dans d'autres régions. La science grecque fut moins une invention qu'une renaissance[20] ». Les recherches récentes sur les sources de la science grecque font apparaître de nombreux éléments d'origine égyptienne ou babylonienne. On peut dire que c'est la première transmission de savoirs de l'Orient vers l'Occident. Sarton écrit encore « si l'histoire de la science antique est composée sans qu'on apporte au lecteur une connaissance suffisante de la science orientale, cette histoire n'est pas incomplète, elle est falsifiée ».

Nous avons évoqué, dans les pages qui précèdent, la deuxième phase de transmission du savoir. Elle s'est déroulée entre le septième et le neuvième siècle : le monde islamique s'approprie la science grecque.

Dans la troisième phase, du onzième au quatorzième siècle, c'est la science islamique qui passe au monde latin. La science indienne ou chinoise n'a généralement pas influencé directement le monde occidental ; elle l'a fait par l'intermédiaire de la science arabe. Le mouvement de traduction de l'arabe vers le latin s'amorce réellement avec Constantin l'Africain au XI^e siècle et atteint son apogée au XII^e siècle avec notamment Gérard de Crémone, Jean de Séville, Robert de Chester, Adélard de Bath, Platon de Tivoli, Michael Scott (XIII^e siècle), ... Les principaux centres de transmission du savoir de l'Orient à l'Occident sont l'Espagne, et particulièrement Tolède, le sud de l'Italie et la Sicile. C'est seulement à la Renaissance que l'Occident se dégage petit à petit de l'influence orientale.

On peut affirmer que l'appétit avec lequel l'Occident s'est approprié la science arabe est comparable à celui avec lequel ces derniers avaient reçu la science grecque et les apports chinois et indiens.

[20] Sarton veut dire par là que la science grecque n'est pas issue du néant, qu'elle s'est développée à partir d'un fond de connaissances bien répandues au Proche et au Moyen-Orient. Bien sûr, la science grecque a été créative ; en mathématiques, par exemple, Eudoxe, Euclide et bien d'autres ont introduit une nouveauté radicale : le rationalisme axiomatique.

Les faits marquants

Période	Événements	Territoire	Autorité
Avant 622		Péninsule arabique avec deux grandes régions : nord et sud de cultures différentes.	Tribalisme plus ou moins bien organisé, petites autocraties, royautés...
622 - 632	**622** : Hégire marquant le début de l'ère musulmane. **629** : prise de La Mecque. **632** : mort de *Muḥammad*	Péninsule arabique.	*Muḥammad* législateur, chef de la communauté religieuse et commandant des armées.
632 - 661	Début de l'expansion de l'empire.	Péninsule arabique plus Iraq, Mésopotamie, Perse, Syrie, Égypte.	Les quatre califes orthodoxes : *Abū Bakr* (632 - 634), *'Umar* (634-644), *'Uṯman* (644 - 656) et *'Alī* (656 - 661).
661 - 750	**661** : assassinat de *'Alī*. L'empire continue à s'étendre. Sa capitale est Damas. Politique matérielle et profane. Arabisation des administrations publiques (*al-dīwān*).	De l'océan Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus, la frontière de la Chine plus le Ḫwārizm, la Transoxiane, l'Afrique du nord et l'Espagne.	Première dynastie de califes : les Umayyades.
750 - 1258	Le calife *al-Mansūr* (754 - 775) fonde la ville de Baġdād et en fait la capitale. Le mouvement de traduction s'accentue. *al-Ma'mūn* (813 - 833) fonde la Maison de la Sagesse où travaille AL-ḪWĀRIZMĪ.		Deuxième dynastie de califes : les Abbassides.
Après 1258	**1258** : prise de Baġdād par les Mongols. Déclin de l'empire déjà amorcé plus tôt. Invasions ottomanes.		

Chapitre 17

L'art de l'algèbre

Préambule

Même si on se limite au ≪ sens classique[1] ≫, les érudits et les mathématiciens semblent très partagés sur le sens qu'ils donnent au mot ≪ algèbre ≫. Dans le *Petit Larousse*, édition 2003, on peut lire ≪ Branche des mathématiques qui, dans sa partie classique, se consacre à la résolution d'équations par des formules explicites, ... ≫. Dans le *Mathematics Dictionary* [96], on apprend que l'algèbre est une généralisation de l'arithmétique. Dans le *Dictionnaire des mathématiques* [28], on trouve : ≪ Issue du calcul pratique sur les nombres et de recherches d'arithmétique élémentaire, l'algèbre s'est d'abord dégagée de ses origines en se développant dans deux directions : remplacement des nombres par des lettres et passage du calcul des formules à la résolution d'équations (c'est-à-dire de formules contenant des nombres inconnus) ≫. Stella Baruk, dans son *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* [18], signale que le mot date de 1554 et qu'il est issu du latin médiéval *algebra*, venant lui-même de l'arabe. Elle écrit encore ≪ L'algèbre est l'art ou la science de résoudre des problèmes en généralisant les méthodes de l'arithmétique par l'emploi de lettres qui représentent des grandeurs ou des nombres inconnus et permettent d'établir des formules ≫. N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee ont édité un ouvrage intitulé *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching* [19]. Dans leur introduction, ils font allusion à diverses approches de cette discipline :

règles pour transformer et résoudre des équations ;

résolutions de problèmes spécifiques ou de classes de problèmes ;

généralisation de lois gouvernant des nombres ;

introduction (plus récente) des concepts de variable et fonction ;

étude des structures algébriques[2].

Pour notre part, tout comme Jacques Sesiano [129], nous dirons simplement que, au sens classique, l'algèbre est ≪ l'art ≫ qui s'occupe de trouver des solutions d'équations et de systèmes d'équations. S'il faut vraiment qu'il y ait des lettres pour pouvoir parler d'algèbre, alors pourquoi de nombreux auteurs, faisant autorité, s'accordent-ils à dire que les Babyloniens faisaient de l'algèbre deux millénaires avant Jésus-Christ ? Il y a confusion entre ce qu'est en fait l'algèbre

[1] Au sens moderne, l'algèbre est aussi l'étude des structures, telles que groupes, ...

[2] Cette approche de la discipline a fortement marqué le curriculum scolaire à partir de la fin des années soixante, sous l'influence des mathématiques modernes.

et... ce qu'elle est devenue de nos jours après la lente élaboration d'un symbolisme simplificateur[3]. Comme le dit fort bien G. G. JOSEPH, dans son ouvrage *The Crest of the Peacock, Non-European Roots of Mathematics* [98], « It is taking too narrow a view to equate the term "algebra" just with symbolic algebra[4]. »

Il nous semble de loin préférable de qualifier l'algèbre au moyen d'attributs qui nous renseignent soit sur l'époque soit sur la manière de la pratiquer. Ainsi, on parle d'*algèbre rhétorique* qui est un mode de résolution d'équations ou de systèmes sans aucun symbolisme, par utilisation d'une langue écrite ou parlée, qu'elle soit savante ou vernaculaire. On peut considérer que cette manière de procéder a perduré plus ou moins jusqu'au milieu du quinzième siècle. C'est à ce moment qu'on voit naître les premiers symbolismes, comme par exemple, en Italie, p̃ pour *plus* (latin) ou *più* (italien) et m̃ pour *minus* ou *meno*. L'algèbre, ainsi enrichie de ces premières tentatives de symbolisme, est souvent qualifiée d'*algèbre syncopée*. Il convient toutefois de signaler que, chez DIOPHANTE – qu'on situe généralement vers 250 après J.-C. –, on rencontre un certain symbolisme algébrique, pour l'inconnue et ses puissances, pour les signes « moins », « égal », ... Mais il faut ajouter qu'on ignore totalement la part de DIOPHANTE dans ce symbolisme qui va complètement disparaître après lui, et ce, jusqu'au XV^e^ siècle.

L'algèbre qui s'enseigne de nos jours est bien sûr de l'*algèbre symbolique*. Le développement de ce symbolisme ne s'est pas opéré qu'en Italie. Il semble clair que le signe « + » nous vient d'Allemagne (XV^e^ siècle) ; c'est une abréviation d'écriture de la conjonction « et ». C'est d'Allemagne aussi que vient l'usage de $\sqrt{\ }$ pour la racine ; on suppose qu'il s'agit d'une déformation de la lettre « r ». Le signe d'égalité est né en même temps à Bologne et en Angleterre au milieu du XVI^e^ siècle. Robert RECORDE, dans son *Whetstone of Witte* (Londres, 1557), justifie l'emploi de deux parallèles pour exprimer l'égalité, *bicause noe 2 thynges can be moare equalle*[5]. Le lecteur intéressé par plus de détails sur le développement du symbolisme algébrique consultera F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations* [34].

Si l'on s'intéresse au livre II des *Éléments* d'EUCLIDE, on y trouve également une forme d'algèbre. L'interprétation de ce livre est d'ailleurs fort discutée. Certains historiens des mathématiques n'hésitent pas à parler d'*algèbre géométrique*, en ce sens que les solutions de certaines classes d'équations particulières[6] sont obtenues par des manipulations géométriques. Ainsi, par exemple, la proposition 11 de ce livre II, d'un point de vue algébrique moderne, revient à résoudre l'équation du second degré $x^2 = a(a - x)$, comme on peut le voir à la page 421.

Dès qu'on pratique une discipline scientifique, même à un niveau relativement modeste, le problème qui se pose très souvent et très concrètement, est de trouver des solutions d'équations ou de ce qui peut être considéré dans les productions anciennes comme l'équivalent de nos équations. C'est une situation à laquelle l'humanité a été très tôt confrontée. Ainsi, l'algèbre est une discipline fort ancienne. Nous allons examiner quelque peu comment se pratiquait l'algèbre à diverses époques et en différents lieux.

[3] *A priori*, la commodité de l'expression algébrique actuelle n'apparaît pas toujours clairement aux élèves.
[4] C'est une vue trop étroite que de prendre le mot « algèbre » seulement dans le sens d'algèbre symbolique.
[5] Parce que 2 choses ne peuvent être plus égales.
[6] Notons cependant que les questions posées par EUCLIDE sont de nature géométrique.

1 Les origines des mathématiques

G. G. JOSEPH [98], pour le citer encore, affirme « It is taking an unnecessarily restrictive view of the history of mathematics to confine our study to written evidence[7]. » Les mathématiques, en effet, sont nées d'un besoin de compter et de retenir des nombres. On rencontre très tôt, dans les sociétés humaines qui ne possèdent pas l'écriture, des formes de comptage ou d'appariement d'une collection d'objets avec un ensemble de « marques au sens large », telles que pierres, nœuds sur une corde ou encoches sur un morceau de bois ou d'os (voir à ce propos le chapitre 15). L'Institut Royal des Sciences Naturelles de Belgique possède un témoignage de ces « proto-mathématiques » : *le bâton d'Ishango*, qui a plus ou moins vingt mille ans. C'est le géologue belge Jean DE HEINZELIN DE BRAUCOURT (1920 - 1998) – professeur aux universités de Bruxelles et de Gand – qui l'a exhumé d'un endroit appelé Ishango, qui se trouve sur les bords du lac Edward, l'une des plus lointaines sources du Nil, aux confins de l'Uganda et de l'ex-Congo belge, à quinze kilomètres seulement de l'Équateur.

Des preuves archéologiques montrent l'existence évidente de transmissions d'« outils agricoles ishango » vers le nord, jusqu'aux frontières de l'Égypte. D'autres témoignages écrits viennent conforter cette origine africaine profonde – en fait, éthiopienne – du peuple égyptien. C'est peut-être une explication du caractère très ancien des mathématiques égyptiennes.

2 L'Égypte

On le sait, l'Égypte est avec la Mésopotamie, l'Inde et la Chine, le berceau d'une des grandes civilisations qui se développent le long des vallées d'Afrique et d'Asie, il y a quelque cinq mille ans. Que s'y est-il passé ?

Sans doute la découverte progressive de « bonnes » méthodes pour contrôler inondations, irrigation et drainage a-t-elle contribué à améliorer la production agricole, ce qui constitue un premier pas vers une sédentarisation. Entre 3500 et 3000 avant Jésus-Christ, les communautés agricoles qui vivent le long des rives du Nil font peu à peu bloc pour former deux royaumes, la Haute et la Basse-Égypte. Une légende raconte que, vers 3100, un certain *Min*, qui vient de Nubie – une partie de l'actuel Soudan –, fonde une longue lignée de Pharaons, en fait trente-deux dynasties, qui vont régner sur une société stable mais assez isolée durant trois mille ans.

C'est notamment dans ce pays que se développent les premières mathématiques écrites. L'historien HÉRODOTE (Ve siècle av. J.-C.), dans le livre II – qui s'appelle *Euterpe* – de ses *Histoires* [83][92], nous dit que ce fut *Min* le premier roi d'Égypte qui a fait élever la digue pour créer Memphis. Plus loin, il nous raconte encore que *Sesostris*[8] a partagé le pays entre tous les Égyptiens en donnant à chacun une égale parcelle de terre, pour laquelle il exigeait une taxe annuelle. Tout homme dont la propriété subirait des dommages par le débordement du fleuve irait les déclarer devant le roi, qui enverrait des inspecteurs pour mesurer l'étendue de la perte, de manière qu'à l'avenir, chacun ne paie qu'une taxe proportionnelle à la dimension à laquelle sa propriété a été estimée. Et l'historien ajoute, qu'à son avis, c'est à partir de là que la géométrie fut inventée et passa ensuite en Grèce. Il poursuit en signalant que la connaissance du cadran solaire, du gnomon, et des douze divisions du jour est arrivée en Grèce venant de Babylone.

[7] C'est avoir un point de vue inutilement restrictif sur l'histoire des mathématiques que de confiner notre étude à des documents écrits.

[8] Il s'agit du pharaon *Ramses II*, env. 1300 av. J.-C.

Certes, au départ, il s'agit bien de géométrie, d'arpentage... Mais lorsqu'il faut calculer la nouvelle taxe à payer, on tombe évidemment sur ce que nous appelons une règle de trois, qui va évoluer vers une forme d'algèbre.

Au fur et à mesure du développement de la civilisation égyptienne, le « calcul d'inconnues » trouve d'autres applications, notamment dans les pratiques financières et commerciales. Ce n'est cependant pas en algèbre que la culture mathématique égyptienne culmine – et nous allons tenter d'en comprendre quelque peu le pourquoi –, mais plutôt dans la construction des pyramides.

Il nous reste très peu de témoignages mathématiques de l'Égypte ancienne. La raison en est évidente : le support d'écriture utilisé par le scribe, le papyrus, est très fragile. Les documents les plus importants sont le *papyrus Rhind* et le *papyrus de Kahun*, tous deux conservés au British Museum, ainsi que le *papyrus de Berlin* et le *papyrus de Moscou.*

Le scribe égyptien AHMES, par exemple, qui a recopié le *papyrus Rhind* vers le milieu du seizième siècle avant Jésus-Christ, utilise, comme tous ses « collègues scribes égyptiens », un système de numération décimal non positionnel. Ce système n'est pas plus commode que la numération romaine, par exemple, pour effectuer des multiplications ou des divisions. Aussi, le scribe opère-t-il la multiplication par duplications successives. Quant à la division, il la ramène à une multiplication (également par duplications). Pour diviser a par b, il préfère se poser la question de savoir par quoi il doit multiplier b pour obtenir a.

Les difficultés qu'entraîne l'utilisation d'un tel système n'ont pas permis aux Égyptiens de développer de bons algorithmes de résolution d'équations ou de systèmes, qui d'ailleurs sont presque tous du premier degré. La méthode de recherche de la valeur des inconnues repose sur le principe de fausse position, qui s'enseignait encore dans nos classes primaires au début du vingtième siècle. C'est une technique qui s'appuie sur la théorie des proportions. Une activité sur cette manière de résoudre des équations est proposée dans la publication du CREM, *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur* [48].

On trouve encore l'une ou l'autre équation ou système du deuxième degré dans les papyrus de Berlin et Kahun, mais ce sont des problèmes triviaux. En notation moderne, ces exemples s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcr} x^2+y^2 & = & 100 \\ 4x-3y & = & 0, \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcr} xy & = & a \\ x & = & by. \end{array}\right.$$

3 La Mésopotamie

La Mésopotamie est la vaste région située entre les vallées du Tigre et de l'Euphrate ; elle recouvre des territoires des états actuels de la Syrie et de l'Iraq. C'est là que se sont succédés pendant près de 3 000 ans les civilisations sumérienne, babylonienne et assyrienne. L'écriture cunéiforme[9] y est inventée vers 3200 avant J.-C. par les Sumériens. Vers 2000 avant J.-C., le pays est conquis par les Akkadiens, peuple sémitique qui conservera la culture et l'écriture des Sumériens et établira des lexiques sumériens-akkadiens sans lesquels nous n'aurions sans doute pas eu accès à leurs écrits. Les premières dynasties babyloniennes et assyriennes s'installent à cette époque, et la cité de Babylone ne cessera d'être le principal pôle culturel de la région jusqu'au début de l'ère chrétienne.

C'est un pays où se développent aussi les premières mathématiques écrites, plus ou moins à

[9]Du latin *cuneus*, qui signifie « coin », pour fendre ou pour caler. L'empreinte laissée par le stylet du scribe mésopotamien dans l'argile évoque la forme d'un coin.

la même époque qu'en Égypte. La plupart des textes mathématiques qui nous sont parvenus datent de la période paléo-babylonienne, qu'on situe de 1800 à 1600 avant J.-C.[10] Ils sont écrits en cunéiforme sur des tablettes d'argile ; la langue utilisée est l'akkadien. Les autres écrits mathématiques, moins nombreux, ont été composés durant les trois derniers siècles avant Jésus-Christ, à l'époque séleucide. Il faut encore ajouter qu'on ne sait rien de la genèse des textes de la période paléo-babylonienne.

On peut estimer le nombre de tablettes présentes dans les musées à environ un million, dont une très faible proportion a un rapport avec les mathématiques. Les « tablettes mathématiques » sont de deux types : des tables et des textes de problèmes, parmi lesquels des résolutions d'équations quadratiques, révélant ainsi une certaine forme d'algèbre. Les problèmes étudiés ont leur source dans la vie économique – commerce, poids et mesures, impôts et intérêts, superficie et production – et dans l'activité astronomique – calendrier et astrologie.

Les Sumériens avaient adopté un système de numération sexagésimal et positionnel, que les Babyloniens vont perpétuer dans leurs écrits scientifiques. L'explication du choix de la base soixante est très controversée. La plupart des arguments avancés, comme par exemple le fait que soixante possède de nombreux diviseurs, ou d'autres, liés à l'astronomie, ... ne sont guère convaincants car ce sont toujours des arguments *a posteriori*.

Le Mésopotamien dispose ainsi d'un système de numération positionnel, mélange de base 60 et 10, plus performant que le système égyptien et va donc développer des méthodes de résolutions d'équations. En fait, il résout les équations du deuxième degré par une procédure analogue à la nôtre[11]. Mais, il ne se sert pas de lettres et décrit avec des mots les opérations à effectuer, dans le style « Prends tel nombre, multiplie-le par tel autre... » C'est un exemple type d'algèbre rhétorique (voir aux pages 417 et 419). Il faut cependant remarquer que, sur l'ensemble de toutes les tablettes d'argile recensées à ce jour, on ne trouve jamais de résolution d'une classe de problèmes, mais toujours de problèmes particuliers.

Certains historiens reconnaissent, chez les Mésopotamiens, des traces d'algèbre syncopée. En fait, la géométrie, souvent sous-jacente dans les problèmes traités, a provoqué l'apparition de certains termes pour désigner des quantités inconnues. Le mot *ush* (longueur) s'utilise pour noter l'inconnue x, $lagab$ (carré) désigne x^2. Dans les systèmes, le terme sag (largeur) représente y et $sukud$ (hauteur), z. Enfin, le produit xy est appelé $asha$ (aire) et xyz, $sahar$ (volume).

Le système positionnel mésopotamien possède plusieurs faiblesses. L'une d'elle est l'absence d'un symbole pour le zéro, qui rend parfois ambiguë la lecture du nombre. En effet, si une place est non occupée, on laisse un blanc mais... de quelle dimension ? Une autre faiblesse est de ne pas posséder de symbole pour séparer la partie entière d'un nombre de sa partie fractionnaire, ce qui induit également une ambiguïté. D'autre part, les Mésopotamiens font un usage intensif de tables : multiplications, carrés, cubes, inverses, racines carrées, ... Les raisons sont diverses. L'une d'elles est que les multiplications ne sont guère aisées en base 60. En effet, pour multiplier mentalement en base 10, il est nécessaire de connaître « par cœur » 36 produits (en éliminant les multiplications banales par 0 et par 1 et en faisant usage de la commutativité) ; par contre, la base 60 exige, elle, la connaissance de 1 711 produits ! Quant aux tables d'inverses, elles sont rendues nécessaires par le fait que la division est traitée comme une multiplication par l'inverse du diviseur.

Pour terminer, signalons encore que les observations réalisées par les astronomes babyloniens

[10] *Hammurabi*, dont le code constitue la plus ancienne collection de lois connue, a régné de 1792 à 1750 av. J.-C.
[11] Il faut rester conscient du fait que le Mésopotamien ne connaît pas les nombres négatifs.

pendant des siècles, ont été recueillies et utilisées par les Grecs, qui ont renoncé à convertir cette masse d'informations dans un système décimal de numération. Ainsi, PTOLÉMÉE, qui travaillait à Alexandrie de 127 à 141 après J.-C., les mentionne dans son *Almageste*. Plus tard, l'astronomie grecque sera transmise à l'Europe par l'intermédiaire de la civilisation arabo-musulmane. C'est ainsi que nous retrouvons la trace du système babylonien dans la division sexagésimale des degrés et des heures.

Les quelques faits esquissés ci-dessus ont essentiellement pour source *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics)* [98], *The Exact Sciences in Antiquity* [111], *Une introduction à l'histoire de l'algèbre* [129] et *Introduction aux mathématiques babyloniennes* [131].

4 L'empire arabe

4.1 Introduction

Le chapitre 16 brosse un rapide survol des événements qui ont favorisé la naissance et la rapide expansion de l'empire arabe et met en exergue quelques faits marquants qui s'y sont déroulés.

Le principe de numération décimale positionnelle et les chiffres que nous utilisons de nos jours nous ont été transmis par les Arabes, vers la fin du X^e siècle, notamment à l'occasion des croisades. Mais cette apparition est, au début, très timide : la numération romaine sera encore longtemps utilisée par la suite. C'est à tort que nous appelons ces chiffres ≪ arabes ≫ car les Arabes eux-mêmes n'en ont jamais revendiqué la paternité ; ils parlent au contraire de ≪ calcul indien ≫ et de ≪ figures indiennes ≫. L'expression ≪ chiffres indo-arabes ≫ est ainsi plus appropriée. De nos jours, il y a deux formes de chiffres indo-arabes, ceux d'Occident et ceux d'Orient. Ce sont deux déformations des ≪ figures indiennes ≫ d'origine ; il n'est d'ailleurs pas difficile de leur trouver certaines ressemblances :

Occident	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Orient	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Le premier ouvrage arabe que nous connaissons, dans lequel ce système et les opérations de calcul qui s'y rapportent sont décrits, est le *kitāb al-ḥisāb al-hindī* (الكتاب الحساب الهندي) c'est-à-dire le *Livre du calcul indien*. Son auteur est MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḪWĀRIZMĪ (محمّد بن موسى الخوارزمي), littéralement Muḥammad, fils de Moïse, qui vient du Ḫwārizm[12]. Cette région est située au sud de la mer d'Aral, comme on peut le voir sur la carte à la page 506. Le ≪ surnom de provenance ≫, *al-Ḫwārizmī* va donner naissance au mot latin *algorismus*, titre des traités produits par les compilateurs d'Europe qui ont traduit en latin les ouvrages écrits en langue arabe. Une déformation de ce terme aboutit au mot français ≪ algorithme ≫. AL-ḪWĀRIZMĪ a vécu plus ou moins entre les années 780 et 850 de notre ère. Il travaille à Baġdād, à la Maison de la Sagesse fondée par le calife abbasside al-Ma'mūn, qui règne de 813 à 833.

Le *Livre du calcul indien* ne nous est parvenu que dans une traduction latine peut-être commencée au XII^e siècle, mais le seul manuscrit connu à ce jour date du XIII^e siècle. Il est conservé

[12]Certains historiens des mathématiques pensent qu'il est né dans une région de l'Iraq actuel, et que ses ancêtres sont originaires du Ḫwārizm.

à la bibliothèque de l'Université de Cambridge [6]. Il ne semble pas être une traduction fidèle de l'arabe ; on y trouve des erreurs, il y a des « blancs »... Il commence par les mots *Dixit Algorismi*, c'est-à-dire « Algorismi a dit... » et se termine au milieu d'un exemple sur la multiplication des fractions.

4.2 Le contenu du « traité d'*al-ğabr* »

Avant d'écrire le traité d'arithmétique en question, AL-H̱WĀRIZMĪ a composé un opuscule intitulé الكتاب المختصر في حساب الجبر و المقابلة, *al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr w-al-muqābala*, ce qui signifie le *Livre abrégé sur le calcul par le ğabr et la muqābala*[13] [5].

Dans sa préface, l'auteur fait la traditionnelle louange à *Allah*. Il a également une pensée émue pour tous ceux qui sont maintenant morts et qui ont consacré une partie de leur vie à écrire des ouvrages de science. Il remercie l'Imam al-Ma'mūn, protecteur de la science, Commandeur de la Foi, qui l'a encouragé à écrire ce petit ouvrage sur le *Calcul par la restauration et la comparaison* ; c'est cette dédicace qui permet de dater le livre d'avant l'année 833, année qui marque la fin du califat d'al-Ma'mūn. La préface se termine par l'énoncé du contenu de l'opuscule, à savoir tout ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique, ce dont on a besoin dans les cas d'héritages, de legs, de partages, d'actions en justice, de commerce, dans les relations entre les hommes, la mesure des terres, le creusement de canaux, le calcul géométrique et d'autres choses variées... Ce texte a été établi et traduit en anglais par F. ROSEN[14] [5]. Le texte arabe de cette version bilingue comporte cent vingt-deux pages ; cette préface y occupe les deux premières pages.

Ensuite, AL-H̱WĀRIZMĪ présente un bref rappel du système décimal et fait observer que les nombres qui sont requis dans le calcul par la restauration et la comparaison, sont de trois types, à savoir des racines, des *māl(s)* et des nombres simples, qui n'ont aucun lien avec la racine ou le *māl*[15]. Tout nombre, dit-il, appartenant à l'une de ces trois classes peut être égal à un nombre d'une autre classe ; on peut dire, par exemple « des carrés sont égaux à des racines » ou « des carrés sont égaux à des nombres » ou « des racines sont égales à des nombres ». Dans notre formalisme moderne, ce sont les trois cas $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, où a, b et c sont bien sûr strictement positifs[16]. L'auteur indique alors comment agir dans ces trois cas relativement simples, en ramenant à l'unité le coefficient du carré ou de la racine. À la page 5, il signale que les trois types, à savoir, racines, carrés et nombres, peuvent se combiner entre eux et que cela fait apparaître trois espèces composées qui sont « des carrés et des racines sont égaux à des nombres », « des carrés et des nombres sont égaux à des racines », « des racines et des nombres sont égaux à des carrés ». En formalisant, cela donne $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$,

[13] Nous verrons plus loin qu'il s'agit de deux opérations mathématiques, que l'on peut traduire par les mots *restauration* et *comparaison*.

[14] Comme il a été dit au chapitre 13, ROSEN a établi le texte arabe à partir du seul manuscrit disponible à son époque ; il s'agit du manuscrit de la *Bodleian collection* à Oxford. Il est contenu dans le volume numéroté CMXVIII. *Hunt.* 214, *fol.*, et porte la date de la transcription A.H. 743 (1342 après J.-C.). A.H. 743 signifie année 743 de l'hégire.

[15] Le mot arabe *māl* (مال) signifie bien, argent, richesse, capital, fortune, troupeau... Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. Dans le texte qui suit, nous dirons désormais « carré ».

[16] Ce n'est qu'au XVII^e siècle que les quantités négatives acquerront – et au prix de quelles difficultés ! – le statut de nombres. Zéro n'est pas un nombre, mais seulement un symbole. Par conséquent, 0 ne peut être racine d'une équation. Ainsi l'équation $5x^2 = 10x$ devient $x^2 = 2x$ qui a comme unique racine $x = 2$.

$bx + c = ax^2$, où a, b et c sont strictement positifs[17]. Pour chacune de ces formes, AL-ḪWĀRIZMĪ traite un ou plusieurs exemples ; il explique l'algorithme à utiliser sur l'exemple puis l'énonce de manière générale, dans le genre « prends la moitié du nombre des racines, multiplie-la par elle-même, ... » Lorsque le cas s'y prête, il discute le nombre de racines (positives, évidemment) selon le signe de ce que nous avons coutume d'appeler Δ. Finalement, il démontre chacun des algorithmes par des arguments géométriques. Un des cas est développé et commenté à la page 408 du présent ouvrage ; c'est une manière d'introduire dans les classes la résolution de l'équation du deuxième degré. Nous sommes ainsi arrivés à la page 15 de l'ouvrage et la « théorie » est terminée... Pendant plus de cinq siècles, on enseignera les équations dans le même ordre que celui du traité d'AL-ḪWĀRIZMĪ, et en se référant aux mêmes exemples, devenus des paradigmes. On les trouve notamment dans le *Liber abaci* de FIBONACCI, dont la première édition [70] remonte à 1202 ou la *Summa* de 1494 de Luca PACIOLI [114].

De la page 15 à la page 24, l'auteur enseigne à faire les multiplications que nous écririons aujourd'hui $(10-x)(10+x)$, $(x \pm a)(y \pm b)$, ... à additionner, soustraire et diviser des expressions avec des radicaux carrés.

De la page 25 à la page 48, on trouve toute une série de problèmes qui débouchent sur des équations à résoudre. Nombreux sont ceux dont l'énoncé commence par « j'ai divisé dix en deux parties et... » et on manipule ces deux parties : on les multiplie entre elles, on les ajoute ou soustrait, ce qui donne un certain résultat. Évidemment, à partir de là, il faut retrouver les parties.

Les pages 48 à 50 traitent rapidement des transactions commerciales, qui ne sont jamais que des problèmes de proportionnalité entre quatre nombres : une quantité de référence, un prix, une quantité à acquérir et le total à payer. Trois de ces nombres sont connus et il faut déterminer le quatrième.

Les pages 50 à 64 de l'ouvrage s'intéressent à la géométrie ; on y trouve des formules d'aires et de volumes, mais aussi des problèmes issus de la tradition d'arpentage, comme « Une terre triangulaire a, sur chacun de ses deux flancs[18], dix coudées, et sur la base, douze ; quelle doit être la longueur du côté d'un carré qu'on construirait à l'intérieur du triangle ? » Il faut bien entendu que deux des sommets du carré soient sur la base et chacun des deux autres, sur un des deux « flancs ». Dans la résolution, AL-ḪWĀRIZMĪ appelle شيء (*šaī'*) le côté du carré. Ce terme sera traduit en latin par *res*, en italien par *cosa*, en français par *chose*. Il désigne l'inconnue que nous notons aujourd'hui x.

De la page 65 à la page 98, l'auteur résout des problèmes de partage de legs et l'ouvrage se termine par un chapitre sur le calcul des retours. L'idée de ces « retours » est de protéger les héritiers et les parents proches, en limitant le pouvoir d'un testateur malade, qui lègue des biens ou émancipe un esclave. Le calcul des retours permet de fixer le montant que vont récupérer les proches en cas de décès relativement immédiat dudit testateur.

Voilà donc le contenu un peu inattendu de l'opuscule que de nombreux historiens des mathématiques s'accordent à considérer comme le « texte fondateur » de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application.

[17] Le cas $ax^2+bx+c = 0$ n'apparaît pas, car une somme de quantités strictement positives ne peut pas être égale à « rien ». Il faut bien être conscient que c'est parce qu'il ne dispose pas des nombres négatifs qu'AL-ḪWĀRIZMĪ se trouve devant trois cas distincts. Le mathématicien Simon STEVIN, dans ses *Livres d'arithmétiques* [130], affirme, contrairement à STIFEL et CARDAN, qu'on peut résoudre les trois cas avec une seule règle en utilisant des quantités négatives. Il ne considère toutefois pas les racines négatives de l'équation comme solutions.

[18] Ce sont les termes utilisés par AL-ḪWĀRIZMĪ, termes issus du langage des corporations.

4.3 L'algèbre comme « science constituée »

Quel a été le rôle exact d'AL-ḪWĀRIZMĪ, qu'a-t-il vraiment inventé ? Quelles sont ses sources ? Nous allons tenter de donner un début de réponse à ces questions. Mais pour cela, il faut examiner quelque peu la situation à cette époque.

Il existe une algèbre chinoise ; on la trouve notamment dans *Les neuf chapitres sur l'art du calcul* ; ce traité date du premier siècle après J.-C., et il a été commenté au troisième siècle par LIU HUI. Il a été récemment réédité [99] ; on y trouve des résolutions de systèmes par des méthodes tout à fait comparables aux triangulations de matrices ! Il n'y a pas trace de cela chez les Arabes au IXe siècle. L'algèbre chinoise n'est donc pas une source plausible.

Une influence euclidienne semble être également à rejeter, car on ne trouve pas de références précises aux propositions des *Éléments* d'EUCLIDE qui pourraient étayer les raisonnements.

La tradition indienne est très riche en algèbre, en particulier chez deux auteurs antérieurs à AL-ḪWĀRIZMĪ, à savoir ĀRYABHAṬA (né en 476 apr. J.-C.) et BRAHMAGUPTA (né en 598 apr. J.-C.). Mais les Arabes ne signalent jamais l'influence indienne en algèbre, or, on l'a vu, ils en parlent pour les chiffres par exemple, ou pour l'astronomie. Une hypothèse émise par A. DJEBBAR est la suivante : si les Arabes, qui ont eu de nombreux contacts avec l'Inde, ne parlent pas des méthodes indiennes, c'est que celles-ci ne les ont pas étonnés, et cela parce qu'ils connaissaient déjà les procédures qui existaient dans le « Croissant fertile », dans la tradition babylonienne...

Le rôle d'AL-ḪWĀRIZMĪ a été de rassembler toutes les procédures de calcul qui s'utilisaient dans ces contrées et d'« abréger » tout cela, d'où le titre de son opuscule. On l'a vu, les Mésopotamiens ne résolvaient pas des classes de problèmes, mais des énoncés au coup par coup. AL-ḪWĀRIZMĪ, lui, va réduire tous les problèmes (de degré au plus 2) à six classes, par l'utilisation de deux opérations. La première est *al-ǧabr* – qui a donné naissance au vocable algèbre. Ce mot vient de la racine trilitère *ǧbr*, qui donne l'idée de « restaurer, réparer, redresser » ; nous dirons donc *restauration*. La seconde opération est *al-muqābala* ; le *mu* est un préfixe passif, quant à la racine *qbl*, elle donne l'idée d'*opposition*, de *comparaison*, d'où l'expression *calcul par la restauration et la comparaison*.

Par exemple, soit l'équation que nous écririons $4x^2 - 9x + 5 = 3x^2 + 2x + 4$. AL-ḪWĀRIZMĪ dirait « quatre *māl* diminués de neuf *ǧiḏr* et augmentés de cinq *dirhams*[19] sont égaux à trois *māl* augmentés de deux *ǧiḏr* et de quatre *dirhams* ». Nous allons faire agir la première opération, *al-ǧabr*, pour restaurer les quantités soustraites. Cela peut se faire en ajoutant, en langage moderne, $9x$ au deux membres. Il vient alors $4x^2 + 5 = 3x^2 + 11x + 4$. S'il y a d'autres quantités soustraites à restaurer, on procède de la même manière[20]. Ensuite, on utilise la deuxième opération, *al-muqābala*. On compare l'espèce des *māl* et on enlève $3x^2$ de chaque membre (il faut n'avoir que des nombres positifs). Il vient $x^2 + 5 = 11x + 4$. On compare enfin l'espèce des *dirhams* et on ôte 4 de chaque côté, ce qui donne $x^2 + 1 = 11x$ qui est bien une des six formes canoniques, la cinquième, en l'occurrence.

Signalons encore qu'il existait une autre méthode – qu'AL-ḪWĀRIZMĪ ne mentionne pas dans son traité – pour résoudre des équations ou systèmes linéaires, appelée méthode de fausse position

[19] L'unité de monnaie a coutume de désigner ce que nous appelons le terme indépendant.

[20] Dans un article non encore paru, intitulé *The Vocabulary of Early Arabic Algebra*, Jeffrey A. OAKS de l'université d'Indianapolis, donne une nouvelle interprétation de l'utilisation du mot *al-ǧabr*. Il considère l'équation $10x - x^2 = 21$ et explique qu'on ne restaure pas x^2, mais bien $10x$; car $10x - x^2$ est un « $10x$ » diminué et il doit donc être restauré en ajoutant x^2. OAKS n'est pas le seul à défendre cette interprétation.

(simple ou double). Les Arabes l'utilisent mais ne disent pas qu'ils l'ont inventée. Elle existe aussi chez les Indiens et les Chinois. Cette méthode va perdurer jusqu'au XVIe siècle chez les Arabes et jusqu'au XXe chez nous. Son intérêt est qu'elle permet de ne pas manipuler trop vite des fractions dans le processus de résolution du problème. Le lecteur intéressé peut consulter, à ce sujet, une publication précédente du CREM [48] où le procédé est présenté et discuté.

4.4 L'algèbre après AL-ḪWĀRIZMĪ

Nous l'avons déjà dit, si AL-ḪWĀRIZMĪ a démontré certains procédés de calcul par la géométrie, il ne cite pas explicitement de propositions puisées dans *Les Éléments* d'EUCLIDE. Le grand mathématicien sabéen[21] ṮĀBIT IBN QURRA (ثابت بن قرّ), mort en 901, introduit, lui, la géométrie euclidienne dans l'algèbre ; il connaît fort bien le texte d'EUCLIDE, puisqu'il en est un des nombreux traducteurs.

Un peu plus tard, l'égyptien ABŪ KĀMIL (ابو كامل), mort en 930, va faire une tentative pour se dégager de la géométrie ; il ne tient plus compte de l'homogénéité dans la manipulation des grandeurs : parfois le carré de l'inconnue est représenté par un segment. Deux de ses ouvrages nous sont parvenus, *Le livre complet en algèbre* et *Les choses rares en algèbre*.

Le monde musulman va connaître bien d'autres grands algébristes que nous ne mentionnerons pas ici. Disons encore toutefois que IBN AL-BANNĀ (بن البنّا), mort en 1321, donne lui, des démonstrations, sans se référer du tout à la géométrie, mais plutôt à la tradition du calcul mental.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que d'équations de degré au plus deux. Des tentatives vont être réalisées pour résoudre des équations du troisième degré.

4.5 'Umar ibn Ibrāhīm AL-ḪAYYĀM et les équations du troisième degré

'Umar ibn Ibrāhīm AL-ḪAYYĀM (عمر بن ابراهيم الخيّامى) est né vers 1048 à *Nayšabūr*[22] dans le *Ḫurāsān*, une partie de l'Iran actuel. C'est dans cette même ville qu'il mourra en 1131, après avoir beaucoup voyagé.

On connaît peu de choses sur sa vie. Il avait une double formation de mathématicien et de philosophe. Pour cette dernière discipline, il était élève de بهمنيار (BAHMANYĀR), lui-même disciple direct de الرءيس ابن سينا, c'est-à-dire le Maître IBN SĪNĀ, plus connu sous le nom d'AVICENNE.

L'historien بن الاثير (IBN AL-AṮĪR) nous rapporte, qu'en l'année 467 de l'hégire (1074-1075), AL-ḪAYYĀM était à *Isfahan*, dans l'équipe des astronomes au service du Sultan seldjoukide[23] ملكشاه (MALIKŠĀH) et de son vizir نظام الملك (NIẒĀM AL-MULK). MALIKŠĀH souhaitait une réforme du calendrier.

[21] Le Saba' (سبأ) est un ancien royaume préislamique du sud-ouest de l'Arabie, correspondant à l'actuel Yémen.

[22] On l'écrit souvent Nichāpur.

[23] Les Seldjoukides sont membres d'une tribu d'origine turque qui a émigré du Turkestan vers le Proche-Orient et a établi son pouvoir sur l'Asie Mineure du milieu du XIe à la fin du XIIIe siècle. C'est la première dynastie turque dans l'Orient méditerranéen.

'Umar AL-ḪAYYĀM a écrit de nombreux ouvrages scientifiques et philosophiques, dont la paternité ne laisse aucun doute. Nous ne nous intéresserons ici qu'à son *Traité d'algèbre et d'al-muqābala*.

Après la traditionnelle louange à Allah, on peut y lire

Une des théories mathématiques dont on a besoin dans la partie des sciences philosophiques connue sous le nom des sciences mathématiques, c'est l'art de l'algèbre, lequel a pour but la détermination des inconnues, soit numériques, soit géométriques. Il se rencontre dans cette science des problèmes, dépendant de certaines espèces très difficiles de théorèmes préliminaires, dans la solution desquelles ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupés. Quant aux anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrages qui en traitent ; peut-être, après en avoir cherché la solution et après les avoir étudiés, n'en avaient-ils pas pénétré les difficultés ; ou peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen ; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue. Quant aux modernes, c'est الماهاني (AL-MĀHĀNĪ) qui parmi eux conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par ARCHIMÈDE dans la quatrième proposition du second livre de son traité *De la sphère et du cylindre* ; or il fut conduit à une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres, qu'il ne réussit pas à résoudre, après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On déclara donc que cette résolution était impossible, jusqu'à ce que parût ابو جعفر الخازن (ABŪ ǦA'FAR AL-ḪĀZIN), qui résolut l'équation à l'aide des sections coniques. Après lui tous les géomètres avaient besoin d'un certain nombre des espèces[24] des susdits théorèmes, et l'un en résolut une, et l'autre une autre. Mais aucun d'eux n'a rien émis sur l'énumération de ces espèces, ni sur l'exposition des cas de chaque espèce, ni sur leurs démonstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, que je ne manquerai pas de faire remarquer. Moi, au contraire, je n'ai jamais cessé de désirer vivement de faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi que de distinguer parmi les cas de chaque espèce, les possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur des démonstrations ; car je savais combien est urgent le besoin de ces théorèmes dans les difficultés des problèmes. [...]

Afin de situer quelque peu ces événements dans le temps, signalons que AL-MĀHĀNĪ est mort en 880, et ABŪ ǦA'FAR AL-ḪĀZIN, plus ou moins vers 970. Peu de temps après, إبن الهيثم (IBN AL-HAYṮAM) – mort vers 1039 –, connu sous le nom d'ALHAZEN en Occident, résout le problème d'ARCHIMÈDE à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole. AL-ḪAYYĀM, lui, classe toutes les équations de degré inférieur ou égal à trois en vingt-cinq espèces et donne, pour chacune d'elles, la solution générale. Il signale clairement les espèces qui ne peuvent se traiter que par intersection de courbes coniques. Il ne parviendra cependant pas à donner une formule de résolution des équations du troisième degré.

[24] C'est-à-dire d'autres cas d'équations de degré 3.

5 L'algèbre en Occident

Les travaux des mathématiciens arabes ont été connus en Europe occidentale, notamment par l'intermédiaire de l'Espagne et du sud de l'Italie.

On voit se développer en Occident des tentatives pour trouver une formule de résolution de l'équation du troisième degré, par exemple chez Paolo Gerardi (1328), chez Dardi de Pise, à la fin du XIV^{e} siècle et chez Luca Pacioli à la fin du XV^{e} siècle.

C'est vers 1510 que Scipione dal Ferro (1465–1528), qui enseigne à l'Université de Bologne dès 1496, découvre la formule qui permet de résoudre l'équation $x^3 + px = q$, où p et q sont bien sûr positifs. Un peu avant sa mort, il confie cette formule à son élève Antonio Maria Fior.

À l'époque, en Italie, l'obtention d'une « chaire » à l'université dépendait de concours ou « tournois », en l'occurrence ici mathématiques. Fior, en possession de la formule de son maître, imagine donc, afin d'assurer sa « carrière académique », de défier un mathématicien qui avait déjà une certaine renommée et qui par là, était un rival sérieux. Ce mathématicien s'appelait Nicolò Fontana, surnommé Tartaglia (env. 1500–1557). Fior lui propose trente problèmes dont six débouchent sur une équation du type $x^3 + px = q$.

Piqué au vif, se consacrant à fond à la recherche des solutions demandées, Tartaglia finit par trouver, le 12 février 1535, c'est-à-dire huit jours avant l'échéance fixée, non seulement les réponses aux problèmes posés par Fior, mais en plus, une extension de la formule de résolution au cas $x^3 = px + q$, ignoré par Fior. Ceci met définitivement fin aux prétentions de ce dernier. Mais, malheureusement pour lui, Tartaglia va rencontrer Girolamo Cardano (1501–1576).

Cardan est en fait un personnage fort bizarre : médecin, mécanicien, mathématicien, joueur, astrologue – il a même tenté de dresser l'horoscope de Jésus. Fâcheuse idée sous l'Inquisition, qui le fait incarcérer en 1570. Sa réputation scientifique lui permet cependant de se retrouver quelques mois plus tard à Rome, avec une pension papale !

Cardan, ayant appris que Tartaglia connaît les formules de résolution des cas $x^3 + px = q$ et $x^3 = px + q$, le prie de les lui communiquer. Après un premier refus, Tartaglia est finalement contraint, par certaines circonstances, à confier les formules à Cardan qui promet de les garder secrètes. Il les publiera cependant en 1545, dans son *Ars Magna* [35], en citant quand même le nom de Tartaglia. Cela mettra cependant fin aux « bonnes » relations entre les deux compères !

Ainsi, au chapitre onze de l'*Ars magna*, qui s'intitule *Sur le cube et la première puissance égale au nombre*, Cardan écrit :

« Il y a bien près de trente ans que Scipio Ferro de Bologne a découvert la règle et l'a transmise à Antonio Maria Fior de Venise, dont la compétition avec Niccolò Tartaglia de Brescia a donné à Niccolò l'occasion de la découvrir. Lui [Tartaglia] me l'a donnée en réponse à mes demandes instantes, mais sans la démonstration. Armé de cette aide, j'ai recherché sa démonstration sous <différentes> formes. Ce fut très difficile. Ma version de celle-ci suit… »

Cardan, aidé de son élève Ludovico Ferrari (1522–1565) va poursuivre les recherches et aboutir à une autre formule, cette fois pour résoudre l'équation du quatrième degré.

Et au-delà du quatrième degré ? Les succès dont nous venons de rendre compte ont incité les mathématiciens à rechercher des formules permettant de résoudre des équations de degré 5 ou plus. En fait, il est toujours possible de résoudre une équation de degré 2, 3 ou 4 en se ramenant, par un changement de variable, à une équation de degré moindre. Une idée assez naturelle est donc d'essayer d'appliquer cette même méthode aux équations de degrés 5, 6, ... Très vite, on s'aperçoit que pour résoudre de telles équations, les calculs intermédiaires semblent toujours faire appel à une équation de degré supérieur à celui de l'équation de départ.

L'Italien P. Ruffini (1755–1822) démontre, de manière imparfaite, qu'on ne peut résoudre, à l'aide d'une formule générale, n'importe quelle équation de degré supérieur à 4.

N. Abel (1802–1829), de nationalité norvégienne, pense avoir trouvé une solution générale de l'équation du cinquième degré. Mais il y a une erreur dans son raisonnement, erreur qu'il finit par déceler et qui le conduit à démontrer l'impossibilité de trouver une formule algébrique donnant la solution générale de n'importe quelle équation du cinquième degré.

C'est finalement Évariste Galois (1811–1832) qui, partant d'une idée de Lagrange, finit par régler définitivement le problème en démontrant qu'il n'existe pas de formule algébrique donnant la solution générale de n'importe quelle équation de degré n, où $n > 4$. Ce faisant, il introduit la théorie des groupes. C'est à partir de ce moment que l'algèbre va progressivement s'intéresser à l'étude des structures (groupes, anneaux, corps, ...)

Nous dirons un dernier mot sur l'équation du troisième degré, qui a en quelque sorte poussé les mathématiciens à donner un statut aux nombres imaginaires.

Dans la résolution de l'équation du troisième degré, au moyen de la formule dite de Cardan, il apparaissait parfois une racine carrée d'un nombre négatif, ce qui posait évidemment problème à l'époque. Ainsi, par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 = 51x + 104$ (écrite ici en notation moderne), dont une solution est $x = 8$, il vient l'équation auxiliaire $u^2 - 104u + 17^3 = 0$. On constate que le degré de cette dernière équation n'est plus que 2 ! On calcule son discriminant qui vaut $-2\,209$, ce qui conduit aux solutions (toujours en notation moderne) $u_1 = 52+47\sqrt{-1}$, $u_2 = 52 - 47\sqrt{-1}$. La formule de Tartaglia-Cardan nous enseigne alors qu'une solution de l'équation du troisième degré est $\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} = 4 + \sqrt{-1} + 4 - \sqrt{-1} = 8$. En fermant les yeux au bon moment, tout va pour le mieux ! C'est Raphaël Bombelli (1526–1572) qui le premier, donnera une définition des opérations (addition, soustraction, multiplication) sur ces quantités « imaginaires », sous une forme proche de celle que nous connaissons. Dans son *Algèbre* datée de 1572, on trouve la comptine suivante :

Più via più di meno fa più di meno,
Meno via più di meno fa meno di meno,
Più via meno di meno fa meno di meno,
Meno via meno di meno fa più di meno,
Più di meno via più fa meno,
Più di meno via meno di meno fa più,
Meno di meno via più di meno fa più,
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Le lecteur n'aura sans doute pas trop de mal à continuer la traduction : $(+) \cdot (+i) = +i$, $(-) \cdot (+i) = -i$, ...