Chapitre 14

La diagonale du carré

Préambule

Examinons un puzzle tout simple : on se donne deux carrés de même aire et on demande, au moyen de quelques découpages, de construire un nouveau carré qui aurait la même aire que les deux carrés réunis.

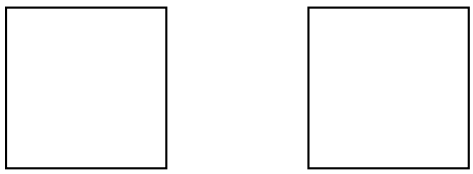


Fig. 1

Ce problème qui consiste à chercher b pour que $b^2 = 2a^2$ lorsque a est donné, est connu sous le nom de « duplication du carré ». Il reçoit une solution géométrique simple en découpant ces deux carrés le long d'une de leurs diagonales et en recomposant les quatre triangles d'aire identique ainsi obtenus.

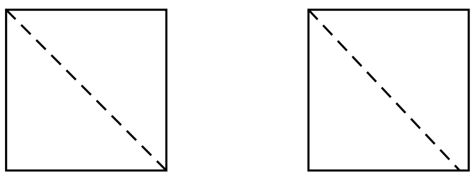


Fig. 2

Dans la figure 3, $AEFC$ est le carré cherché : il se compose des quatre triangles obtenus par le découpage et son aire est égale à la somme des aires des deux carrés donnés.

Remarquons que le carré $ABCD$ est identique à l'un des carrés de départ : il est composé de deux des triangles découpés. Ainsi l'aire du carré $AEFC$ est double de celle du carré $ABCD$.

Si l'on appelle b la longueur du côté du carré $AEFC$, et a la longueur du côté du carré $ABCD$, cette simple figure montre que $b^2 = 2a^2$. Le côté du carré $AEFC$ est de même longueur que la *la diagonale* du carré $ABCD$.

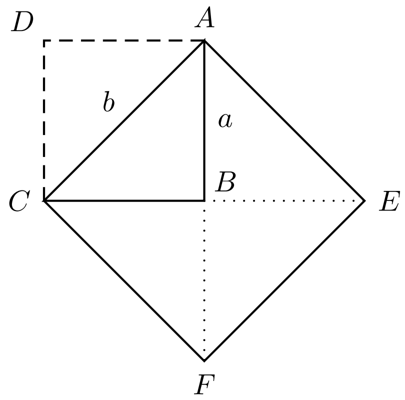


Fig. 3

> Le côté d'un carré d'aire double d'un carré donné a comme longueur celle de la diagonale du carré donné.

L'écriture sous forme fractionnaire de la relation $b^2 = 2a^2$ conduit à $2 = \dfrac{b^2}{a^2}$.

Le rapport $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire le rapport entre les longueurs des côtés de deux carrés dont l'un (celui de côté b) est d'aire double de l'autre (celui de côté a) va servir de définition à un certain nombre positif dont on sait que son carré vaut 2. Ce nombre appelé *racine de deux* se représente par le symbole $\sqrt{2}$ et on a

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}.$$

> Le nombre $\sqrt{2}$ exprime le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur du côté de ce carré.

Revenons sur la figure 3 et portons notre attention sur le triangle rectangle isocèle ABC où la longueur de l'hypoténuse AC vaut b et la longueur des côtés de l'angle droit $AB = BC$ vaut a.

> Le nombre $\sqrt{2}$ exprime le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle isocèle.

Les calculatrices donnent de ce rapport une première idée : c'est un nombre qui s'écrit 1,414213562. Cette dernière décimale 2 affichée par la calculatrice est étrange car le carré d'un nombre qui se termine par une décimale 2 ne saurait être un naturel. Si l'on effectue à la main le produit de 1,414213562 par lui-même, la première étape de l'opération sera $2 \times 2 = 4$ et l'on sait que ce 4 sera la dernière décimale du produit.

Puisque l'on ne peut se fier à cet affichage, on est conduit à se poser quelques questions à propos de ce nombre.

- Ce nombre est-il quand même une fraction, dont l'écriture décimale exacte n'aurait pu être atteinte suite au manque de précision de la calculatrice ?
- S'il est établi que 1,414213562 n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$, comment les calculatrices trouvent-elles cette valeur ?

Au second siècle de notre ère, le mathématicien THÉON DE SMYRNE[1] proposa un algorithme de construction de nombres diagonaux et latéraux[2] qui conduisent à des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$. La section 1 de ce chapitre s'inspire de ce texte pour montrer que $\sqrt{2}$ ne peut être une fraction.

La première activité (section 1.1) pourrait être abordée par des élèves de 4^{e} année : elle montre que $\sqrt{2}$ ne peut pas être la fraction $\frac{17}{12}$, l'une des valeurs approchées proposées par THÉON. Elle aborde le concept de démonstration par l'absurde. La seconde activité (section 1.2) est plutôt destinée aux élèves de 5^{e} année : elle montre que $\sqrt{2}$ ne peut en aucun cas être égale à une fraction. On y utilise la démonstration par l'absurde basée sur une descente infinie.

La deuxième section (page 437) développe l'algorithme de THÉON. En utilisant une définition par récurrence d'une suite de nombres, cet algorithme permet de rechercher des valeurs approchées de $\sqrt{2}$. Destiné aux élèves de 6^{e} année, c'est un prolongement naturel des résultats obtenus à la section 1.2. On s'intéresse à la transcription de l'algorithme avec une calculatrice et un tableur.

La troisième section (page 450) s'intéresse à un texte de HÉRON D'ALEXANDRIE[3] donnant une méthode pour trouver des valeurs approchées de plus en plus précises de la racine carrée d'un nombre positif, dans le cadre d'un problème de recherche d'aire d'un triangle. Les élèves de 6^{e} sont invités à analyser ce texte pas à pas pour construire l'algorithme proposé par l'auteur. Ensuite, ils appliquent cette technique d'approximation en utilisant des calculatrices ou un tableur. La démonstration de la *formule de Héron pour l'aire d'un triangle* est donnée en prolongement de cette activité.

1 La racine de deux est-elle une fraction ?

1.1 Plier des triangles...

De quoi s'agit-il ?

À partir du pliage d'un triangle dessiné sur une feuille de papier, montrer que si l'on admet que $\sqrt{2}$ est la fraction $\frac{17}{12}$, d'autres fractions *plus simples* conviennent aussi.

Faire découvrir un exemple de démonstration par l'absurde.

Enjeux

Mettre les élèves en contact avec une première valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Fournir un outil qui permettra, lors de la deuxième activité, de montrer que $\sqrt{2}$ n'est jamais égale à une fraction.

Compétences

Établir un raisonnement par l'absurde.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

La racine carrée d'une fraction est égale au quotient des racines du numérateur et du dénominateur.

[1] L'actuelle Izmir en Turquie.

[2] Il s'agit de nombres naturels dont le rapport converge vers $\sqrt{2}$.

[3] Il vécut probablement au premier siècle de notre ère.

Matériel

Feuille de papier (format A4), ciseaux, équerre, règle, crayon.

Comment s'y prendre ?

La recherche d'une hypothétique valeur rationnelle pour $\sqrt{2}$ conduit à écrire des rapports dont un des termes, le dénominateur par exemple, est un carré parfait : $(\sqrt{2})^2 = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{32}{16} = \cdots = \frac{288}{144} = \cdots$

Si l'on découvrait un numérateur d'un de ces rapports qui est également un carré parfait, on trouverait une valeur de 2 sous forme de rapport de carrés parfaits et donc une expression fractionnaire exacte de $\sqrt{2}$.

La fraction $\frac{288}{144}$ est remarquable de ce point de vue : en effet 288 est très proche de 289, le carré de 17. Ainsi, le nombre rationnel $\frac{17}{12}$ constitue *a priori* une bonne valeur approchée de $\sqrt{2}$. Cette première activité va s'intéresser à cette valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Le professeur demande aux élèves de dessiner sur la feuille de papier un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 12 cm. Ils graduent les deux côtés de l'angle droit tous les cm et vers l'intérieur. Ils découpent soigneusement le triangle (figure 4).

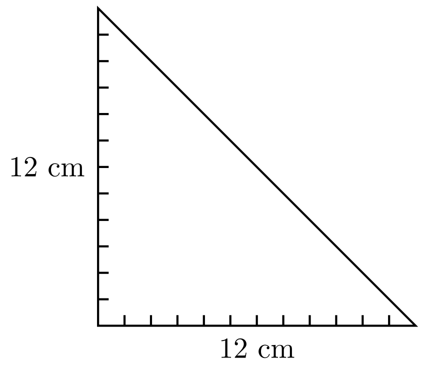


Fig. 4

Ensuite, ils posent devant eux le triangle préparé et désignent les sommets par les lettres A, B et C comme indiqué sur le dessin de la figure 5. Enfin, ils mesurent l'hypoténuse AC. Les élèves trouvent spontanément 17 cm et graduent cette hypoténuse de 17 traits (figure 6).

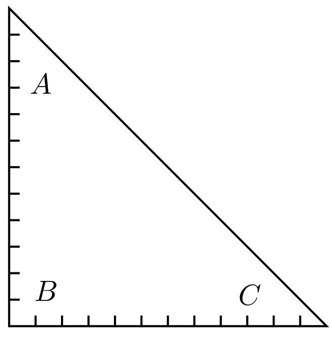


Fig. 5

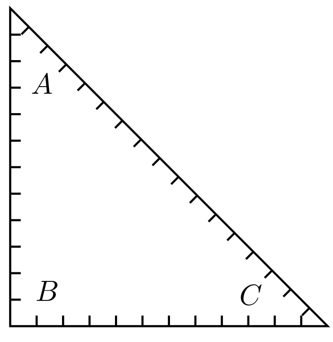


Fig. 6

Il est probable que les élèves se remémorent le théorème de PYTHAGORE qui affirme que le carré de la longueur de l'hypoténuse est la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Dans ce cas, ils constatent que pour ce triangle $17^2 = 289$ et $12^2 + 12^2 = 288$; donc la *vraie* longueur de l'hypoténuse ne peut pas être exactement 17. Ainsi la graduation en 17 traits ne peut être correcte.

On considère que 17 n'est pas une mauvaise approximation de la longueur de cette hypoténuse puisque la différence entre 289 et 288 n'est pas *grande* par rapport aux nombres concernés. Ceci n'est évidemment pas une raison suffisante pour affirmer que la longueur de l'hypoténuse est effectivement 17. Mais supposons que nous en sommes restés à la simple mesure et que nous croyons sincèrement que l'hypoténuse mesure 17. Que va-t-il nous arriver ?

Dans cette hypothèse, puisque $\sqrt{2}$ est le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle, ce triangle de papier illustre le fait que

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$

Le professeur demande aux élèves de plier précisément le triangle (suivant la bissectrice de l'angle en A) pour que le côté AB s'aligne avec le côté AC. Le sommet B de la figure 6 disparaît dans la pliure, mais se retrouve en un point de l'hypoténuse noté E sur la figure 7. Le pli qui matérialise la bissectrice de l'angle en A rencontre le côté BC en un nouveau point D.

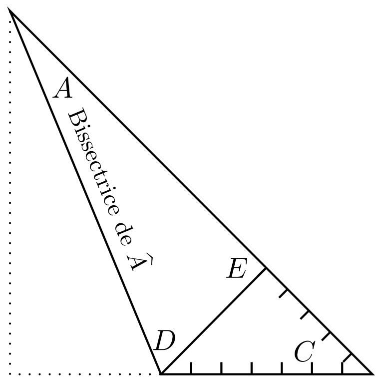


Fig. 7

Comment le triangle CDE se compare-t-il au triangle de départ ?

Le point D où la bissectrice de l'angle en A rencontre le côté BC semble coïncider avec un point de la graduation (CD semble valoir 7).

Le triangle CDE apparu par ce pliage semble être à son tour un triangle rectangle isocèle.

Valider ces observations en déterminant les longueurs des nouveaux segments issus de ce pliage en fonction des longueurs $AB = BC = 12$ et $AC = 17$ des côtés du triangle ABC.

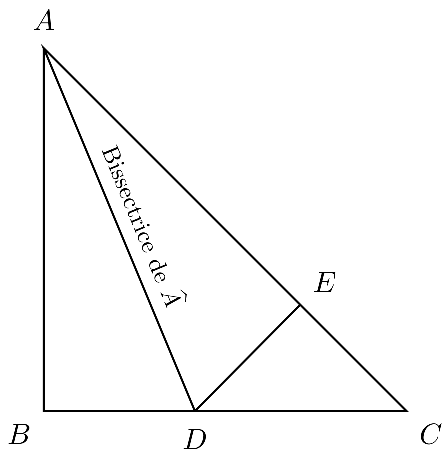


Fig. 8

Première étape : comparer les triangles ABD et ADE (voir figure 8).

Le pliage effectué implique que ces deux triangles sont isométriques : ils ont le côté AD commun, deux côtés égaux ($AE = AB = 12$) et les angles en A égaux puisque AD est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAE}$.

Deuxième étape : quelles sont les propriétés du triangle CDE ?

Puisque $AE = 12$, on trouve $EC = 17 - 12 = 5$.

L'angle de sommet E est un angle droit et l'angle $\widehat{ECD}$ a une amplitude de 45° car le triangle ABC de départ était un triangle rectangle isocèle. L'angle $\widehat{EDC}$ a également une amplitude de 45° ; le triangle DEC est lui aussi un triangle rectangle isocèle, ce qui valide notre seconde observation.

On en déduit que la longueur de DE est 5.

Troisième étape : quelle est la longueur de DC ?

Puisque $BD = DE$ par pliage, la longueur de BD est également de 5 et la longueur de DC est $12 - 5 = 7$. Nous avons validé notre première observation : le point D, où la bissectrice de l'angle A rencontre le côté BC, coïncide avec une graduation.

Conclusions

Ce pliage appliqué à un triangle rectangle isocèle (ABC) dont les longueurs des trois côtés seraient 12, 12 et 17 construit un nouveau triangle rectangle isocèle (CDE) dont les longueurs des côtés seraient 5, 5 et 7.

Remarquons que les dimensions du nouveau triangle sont plus petites que celles du triangle de départ et qu'elles s'expriment par des naturels non nuls.

Quelle conclusion observer à propos de valeurs éventuelles de $\sqrt{2}$?

Au départ, le triangle de papier suggérait que
$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$
Dans le nouveau triangle CDE, l'hypoténuse vaut 7 et les côtés de l'angle droit valent 5. En se servant de ce nouveau triangle et de la définition de $\sqrt{2}$ comme rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle, nous obtenons une nouvelle valeur fractionnaire
$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}.$$

Nous avons montré rigoureusement que le triangle CDE est un triangle rectangle isocèle sous l'hypothèse que le triangle ABC est également un triangle rectangle isocèle. Les deux valeurs fractionnaires de $\sqrt{2}$ sont conjointement valables et on a
$$\frac{17}{12} = \frac{7}{5}.$$

Si l'on fait l'hypothèse que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$, alors on peut montrer que $\frac{17}{12} = \frac{7}{5}$. Que penser de cette égalité ?

Comme on peut s'en convaincre en réduisant au même dénominateur, l'égalité $\frac{17}{12} = \frac{7}{5}$ est fausse : $\frac{85}{60}$ n'est pas égal à $\frac{84}{60}$.

Or nous avons raisonné juste. Alors qu'est-ce qui ne va pas ?

Admettre que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ conduit à montrer rigoureusement que $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ aussi. Or il est évident que $\frac{17}{12} \neq \frac{7}{5}$. Malgré la rigueur de notre démonstration, quelque chose n'est donc pas correct dans notre démarche : nous ne pouvions pas affirmer que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$.

Cette démarche pour montrer que la fraction $\frac{17}{12}$ n'est pas la valeur exacte de $\sqrt{2}$ peut sembler étrange puisque dès le départ, nous savions qu'elle ne convenait pas. Ce sur quoi nous allons tabler dans la suite, c'est qu'à partir de la fraction proposée comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, nous avons exhibé une *autre* fraction possible et que cette nouvelle fraction est composée de naturels non nuls inférieurs à ceux du départ.

L'activité suivante (section 1.2) va s'inspirer de cette démarche pour montrer que $\sqrt{2}$ ne peut être égale à aucune fraction. Ce fait acquis, on montrera comment une réécriture de la démarche permet de « construire » des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

Commentaire

Sur la démonstration par l'absurde

La démarche du type décrit dans cette expérience s'appelle un *raisonnement par l'absurde*. Cette méthode de démonstration, déjà connue des Grecs consiste à admettre pour vraie la proposition contraire de celle que l'on souhaite établir et en déduire un résultat manifestement faux.

La proposition (P) que l'on souhaitait démontrer est ici :

$$\sqrt{2} \textit{ n'est pas la fraction } \frac{17}{12}.$$

La proposition (logiquement) contraire (non P) est bien évidemment :

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}.$$

Une démonstration parfaitement correcte conduit au résultat :

$$\frac{17}{12} = \frac{7}{5}.$$

Ce résultat est faux : cela signifie que nous ne pouvions pas supposer que la proposition (non P) $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ était vraie. Cette proposition (non P) est donc fausse et c'est la proposition de départ (P) qui est vraie.

Prolongement possible Les longueurs des côtés du triangle de départ étaient représentées par des naturels non nuls. Plier un triangle rectangle isocèle le long de la bissectrice d'un des angles aigus conduit à un nouveau triangle rectangle isocèle. Les longueurs des côtés de celui-ci sont à leur tour représentées par des naturels non nuls, mais plus petits que ceux de départ.

On peut légitimement se demander ce qui se passerait si l'on décidait de poursuivre le processus de pliage. Ceci demande un peu de méticulosité car le papier utilisé deviendra de plus en plus petit (à moins de recommencer avec une plus grande feuille, toujours dans les mêmes proportions, mais où l'unité du dessin serait représentée par 2 cm (à l'échelle 2:1). Après le premier pliage, on découpe avec des ciseaux et on ne garde que le nouveau triangle de côtés de longueur 5, 5 et 7. Plier ce triangle le long de la bissectrice de l'un des angles aigus conduit cette fois à un triangle rectangle isocèle dont les côtés calculés seront de longueurs 2, 2 et 3.

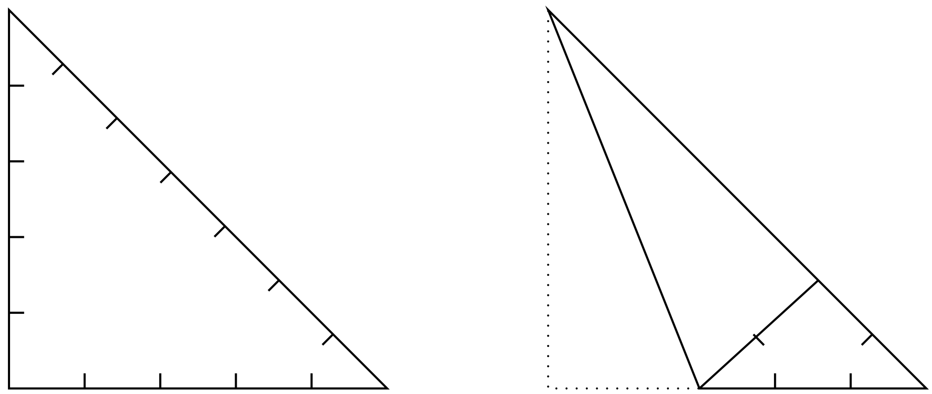


Fig. 9

On ne garde que ce triangle et on plie à nouveau. Surprise : le triangle rectangle isocèle a des côtés dont on calcule les longueurs : on obtient 1 pour les deux côtés de l'angle droit et encore 1 pour l'hypoténuse. Les trois côtés de ce triangle rectangle sont donc... égaux, ce qui est totalement absurde.

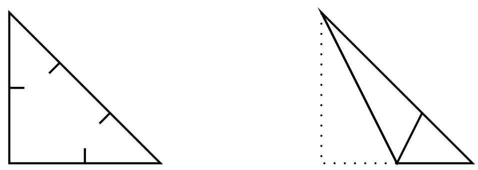


Fig. 10

On arrête de toute manière le processus de pliage, car une étape supplémentaire ferait apparaître des longueurs de côtés qui ne seraient plus exprimées par des naturels non nuls.

1.2 Irrationalité de $\sqrt{2}$

De quoi s'agit-il ?	Utiliser la forme de preuve découverte lors de l'activité précédente pour montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction.
Enjeux	Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
	Faire découvrir un exemple de descente infinie.

Compétences

L'existence de nombres irrationnels : la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis

Les critères d'isométrie de triangles.

La section 1.1 à la page 427.

Comment s'y prendre ?

En utilisant un triangle isocèle prétendument rectangle dont les longueurs des côtés sont 12, 12 et 17, les élèves ont vérifié à la première activité que $\sqrt{2}$ n'était pas égal à une fraction particulière, à savoir $\frac{17}{12}$.

Dans cette deuxième activité, ils découvriront pourquoi il ne peut exister aucun triangle rectangle isocèle dont les longueurs des trois côtés sont des naturels non nuls. Ils en déduiront que $\sqrt{2}$ ne peut s'exprimer sous forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ où p et q sont des naturels non nuls.

Le professeur (au tableau) et les élèves (dans leur cahier) vont construire étape par étape le dessin qui servira de support au raisonnement.

D'abord, chacun dessine un triangle rectangle isocèle ABC. On désigne par p les longueurs des côtés de l'angle droit et par q la longueur de l'hypoténuse. On suppose que p et q sont deux nombres naturels non nuls. Il importe pour la suite que les élèves relèvent que $q < p$.

Ils savent que le rapport de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle à la longueur d'un des côtés de l'angle droit est noté $\sqrt{2}$. Ils écrivent donc

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Le professeur demande de construire la bissectrice de l'angle en A : celle-ci rencontre le côté BC en D. Il construit ensuite la perpendiculaire à AC issue de D. Il note E l'intersection de AC et de cette perpendiculaire.

Les dimensions indiquées sur la figure 11 seront reportées sur celle-ci au fur et à mesure de leur calcul par les élèves. Pour cela, le professeur leur indique quelques pistes.

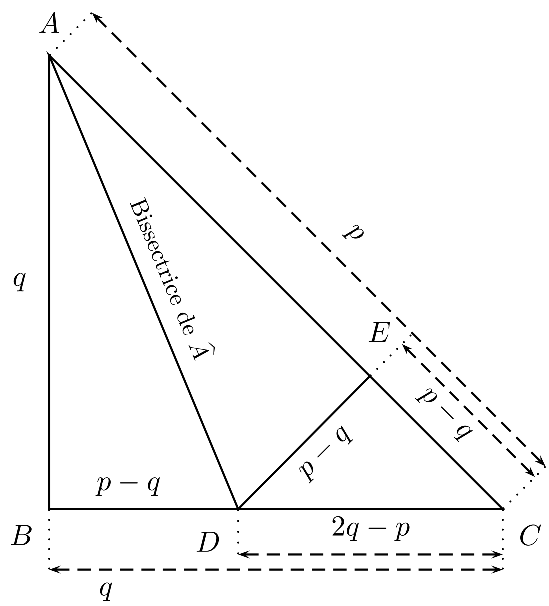


Fig. 11

Comparer les triangles ABD et AED.

Les triangles ABD et AED ont le côté AD commun et deux côtés égaux AB et AE. Les angles compris entre ces deux côtés, $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$ sont égaux par définition de la bissectrice.

Ainsi les triangles ABD et AED sont isométriques.

Caractériser le triangle CDE.

Puisque l'angle $\widehat{E}$ est un angle droit par construction et que $\widehat{C}$ est d'amplitude 45°, $\widehat{D}$ est également d'amplitude 45° : le triangle CDE est donc un triangle rectangle isocèle.

Calculer les longueurs des côtés du triangle CDE.

Les triangles ABD et AED étant isométriques, on a $BD = DE$.

Puisque le triangle CDE est isocèle, $DE = CE$.

Comme $CE = AC - AE = AC - AB$, les deux côtés de l'angle droit du triangle CDE sont de longueur $p - q$.

Enfin, en n'utilisant que les informations données par le pliage, $DC = BC - BD = BC - DE$ montre que l'hypoténuse du triangle CDE est de longueur $2q - p$.

Que peut-on dire des longueurs des côtés de ce nouveau triangle CDE ?

D'une part, les longueurs $2q - p$ et $p - q$ des côtés du triangle CDE s'expriment par des naturels non nuls car p et q sont des naturels non nuls et parce que les dimensions du triangle CDE ne peuvent évidemment pas être négatives.

D'autre part, la construction du triangle CDE « à l'intérieur » du triangle ABC suffit pour se convaincre que les longueurs des côtés de CDE sont strictement inférieures aux longueurs des côtés de ABC. Ainsi par exemple :

$$2q - p < p \quad \text{et} \quad p - q < q.$$

Les triangles rectangles isocèles dont les longueurs des côtés sont des naturels permettent d'exprimer $\sqrt{2}$ sous forme fractionnaire. Quelle conclusion déduire pour $\sqrt{2}$ de l'existence des triangles ABC et CDE ?

Le triangle rectangle isocèle ABC d'hypoténuse de longueur p et de côtés de l'angle droit de longueurs q, avec p et q naturels, permet d'écrire

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

et le triangle rectangle isocèle CDE d'hypoténuse de longueur $2q - p$ et de côtés de l'angle droit de longueur $p - q$, avec $2q - p$ et $p - q$ naturels, permet d'écrire

$$\sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Ces deux fractions sont équivalentes puisque toutes deux expriment le même nombre $\sqrt{2}$. Elles ne s'écrivent pas en utilisant les mêmes naturels puisque

– le numérateur $2q - p$ de la seconde est *strictement inférieur* au numérateur p de la première,
– le dénominateur $p - q$ de la seconde est *strictement inférieur* au dénominateur q de la première.

> S'il existait une écriture fractionnaire de $\sqrt{2}$ de type $\frac{p}{q}$, donc composée des naturels p et q, la construction développée ci-dessus conduirait à une *autre* fraction $\frac{2q-p}{p-q}$ constituée de naturels $2q - p$ et $p - q$ strictement inférieurs, respectivement, aux naturels p et q de départ. Que se passe-t-il si l'on essaie de reproduire la construction à partir de cette nouvelle expression fractionnaire de $\sqrt{2}$?

D'un point de vue géométrique, un triangle rectangle isocèle plus petit est construit « à l'intérieur » d'un triangle rectangle isocèle donné. La reproduction de la construction dans ce nouveau triangle est parfaitement légitime et conduit à son tour à un triangle – plus petit – auquel la construction peut à son tour être appliquée...

D'un point de vue numérique, au départ de l'activité, $\sqrt{2}$ est égale à une fraction. Si celle-ci est notée $\frac{n_1}{d_1}$, les répétitions successives de la construction conduisent à de nouvelles fractions : $\frac{n_2}{d_2}$, $\frac{n_3}{d_3}$, $\frac{n_4}{d_4}$, $\cdots$
La répétition du raisonnement développé ci-dessus vérifie que : $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \ \cdots$ et que $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > \cdots$. Il s'agit là de deux suites *décroissantes* de naturels (strictement positifs, non nuls), satisfaisant une règle donnée. Ces suites sont infinies.

Mais ceci heurte le bon sens : quelle que soit la valeur des naturels utilisés dans la fraction de départ, il est impossible d'imaginer que l'on puisse indéfiniment obtenir des fractions composées de naturels strictement inférieurs à ceux que l'on avait déjà. De telles suites décroissantes de naturels ne peuvent se poursuivre indéfiniment.

> À quel endroit situer l'erreur dans le raisonnement qui vient d'être fait ? Quelle conclusion en tirer ?

L'existence d'un triangle rectangle isocèle ABC ne peut être mise en doute.

La construction du triangle CDE à partir du triangle ABC est parfaitement légitime. Si le triangle ABC est rectangle isocèle, le triangle CDE l'est également. Ce n'est pas dans ce passage non plus que s'est glissée une erreur.

Le fait de pouvoir répéter indéfiniment la construction proposée pour passer d'un triangle donné à un plus petit ne pose donc aucun problème.

La seule hypothèse qu'il nous est permis de rejeter porte sur les dimensions du triangle de départ : nous avions admis que p et q étaient des naturels.

En conclusion, il n'existe aucune fraction de type $\frac{p}{q}$, où p et q sont des naturels non nuls, qui permette d'exprimer $\sqrt{2}$.

Commentaires

Sur la soustraction réciproque

La méthode de démonstration utilisée ci-dessus était appelée à l'époque des Grecs, la « méthode d'anthyphérèse » ou de « soustraction réciproque ». Dans la démonstration, on « retranche » sans arrêt une longueur d'une autre (le côté de l'angle droit de l'hypoténuse). L'adjectif « réciproque » tient au fait qu'à chaque nouvelle étape, c'est une partie (EC) de l'hypoténuse (AC) qui devient le nouveau côté de l'angle droit et une partie (DC) du côté de l'angle droit (BC) qui devient la nouvelle hypoténuse. Cette méthode fut décrite dans le livre 10 des *Éléments* d'EUCLIDE pour rechercher une commune mesure entre deux longeurs.

Sur la descente infinie

Ce type de démonstration se rattache également à la « descente infinie » surtout exploitée par le français FERMAT. La « descente infinie » est le principe selon lequel il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs. Ce principe permet de prouver qu'il n'existe pas de solution à certains problèmes faisant intervenir des nombres entiers : si à partir d'une solution, il est possible d'en fabriquer une autre strictement plus petite mais toujours en nombres entiers, et qu'on peut recommencer indéfiniment, alors le problème initial n'a pas de solution.

Sur l'irrationalité

La notion générale de « ratio » (rapport) de deux grandeurs homogènes (deux longueurs, deux aires, deux volumes,...) nous vient de la Grèce antique, entre autre dans les *Éléments* d'EUCLIDE. On y étudie des identités de rapports sous le nom de « proportions » et de nombreux théorèmes se présentent sous la forme de rapports : par exemple, *les cercles sont entre eux comme les carrés de leur diamètre.*

La traduction de l'arabe كَسر (kasr), signifiant « rompu », donnera à la Renaissance le latin « fractio », d'où procède notre terme « fraction ». Les fractions sont donc des nombres « rompus ». Le nombre $\frac{3}{4}$ signifie trois parties de quatre ; 3 est le numérateur qui « nombre », 4 le dénominateur qui « dénomme ».

La fraction $\frac{m}{n}$ exprime un rapport lorsque les grandeurs (m et n) sont « commensurables » c'est-à-dire lorsqu'il existe une « partie commune » t à m et n, en fait si $m = k \times t$ et $n = k' \times t$ avec k et k' des nombres naturels non nuls.

Les entiers et les fractions forment « l'ensemble de nombres rationnels », ceux qui expriment la « ratio ».

La découverte de l'impossibilité d'utiliser des fractions pour exprimer le « rapport » de la diagonale d'un carré au côté de ce même carré a conduit à utiliser le terme grec $\alpha\lambda o\gamma o\nu$ (alogon), signifiant « inexprimable » pour évoquer ce rapport. Puisque ce nombre refuse d'entretenir un « rapport rationnel » avec l'unité, il sera « le nombre irrationnel ».

Les rationnels et les irrationnels forment « l'ensemble des nombres réels », ceux qui « mesurent ».

Suite à l'écriture décimale des nombres élaborée par le mathématicien persan AL-KASHI dans sa *Clé de l'arithmétique*, on s'est aperçu que les nombres rationnels admettent un développement décimal périodique. Ceci implique qu'au bout d'un certain temps, les décimales de ces nombres sont « prévisibles ». Les nombres irrationnels n'ont pas cette propriété et ne peuvent être représentés exactement (et complètement) en écriture décimale : on pourra (au mieux) « encadrer » ces nombres.

La recherche de valeurs approchées de nombres irrationnels par le principe « d'encadrement » a été développée dès l'Antiquité. L'approche de THÉON (développée lors de la troisième activité) en est un exemple pour la racine carrée de deux ; celle de HÉRON (développée lors de la quatrième activité) en est un exemple plus général pour encadrer la racine d'un naturel quelconque. On peut également signaler les travaux d'ARCHIMÈDE pour « encadrer » π par l'utilisation de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle.

2 Valeurs approchées de $\sqrt{2}$

De quoi s'agit-il ?	Découvrir et expérimenter l'algorithme de Théon.
Enjeux	Comprendre la définition par récurrence d'une suite de nombres. Appliquer un algorithme pour rechercher des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.
De quoi a-t-on besoin ?	***Matériel*** Le texte de Théon de Smyrne (fiche 19 à la page 489). Un tableur ou une calculatrice scientifique. ***Prérequis*** Les deux activités de la section 1. L'écriture d'une formule dans une « cellule » d'un tableur et la copie de cette formule dans les cellules voisines.
Comment s'y prendre ?	Dans la première activité, qui démarre à la page 427, les élèves ont été confrontés à deux valeurs approchées différentes de $\sqrt{2}$: les fractions $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$. Dans la deuxième, qui débute à la page 432, ils ont rencontré les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q-p}{p-q}$. Dans chacune de ces deux situations, on examine si l'une des valeurs approchées est « meilleure » que l'autre. À partir des conclusions, les élèves découvrent un processus de recherche de valeurs approchées fractionnaires de plus en plus proches de $\sqrt{2}$. Ce processus est mis en relation avec le texte original de Théon.

2.1 Meilleures valeurs approchées ?

> Dans la première activité, les fractions $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$ sont apparues comme valeurs approchées de $\sqrt{2}$. De ces deux valeurs, quelle est la meilleure ?

Pour estimer l'écart entre $\sqrt{2}$ et ces valeurs approchées, nous les élevons au carré.

On a $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144}$: cette valeur est supérieure de $\frac{1}{144}$ à 2.

On a $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$: cette valeur est inférieure de $\frac{1}{25}$ à 2.

Deux conclusions peuvent être tirées :

- d'une part l'approximation de $\sqrt{2}$ par $\frac{17}{12}$ est « meilleure » que celle par $\frac{7}{5}$ puisque $\frac{1}{144}$ est inférieur à $\frac{1}{25}$;
- d'autre part, $\sqrt{2}$ est quelque part « entre » ces deux valeurs approchées puisque le carré de $\frac{17}{12}$ dépasse 2 et que le carré de $\frac{7}{5}$ est inférieur à 2.

> Dans la deuxième activité, les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q-p}{p-q}$ sont apparues comme valeurs approchées de $\sqrt{2}$. De ces deux valeurs, quelle est la meilleure ?

Dans ce cas également, nous élevons au carré les valeurs approchées et nous les comparons à 2. Comme nous ne savons pas si ces valeurs approchées sont inférieures ou supérieures à $\sqrt{2}$, nous introduisons des valeurs absolues.

D'une part :

$$\left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2\right| = \left|\frac{p^2-2q^2}{q^2}\right|,$$

et d'autre part :

$$\left|\left(\frac{2q-p}{p-q}\right)^2 - 2\right| = \left|\frac{4q^2-4pq+p^2-2p^2+4pq-2q^2}{(p-q)^2}\right| = \left|\frac{2q^2-p^2}{(p-q)^2}\right| = \left|\frac{p^2-2q^2}{(p-q)^2}\right|.$$

Nous savons que $p-q<q$ (voir page 434). Puisque p et q sont des naturels, on a également $(p-q)^2<q^2$.

On en déduit aisément que

$$\left|\frac{p^2-2q^2}{q^2}\right| < \left|\frac{p^2-2q^2}{(p-q)^2}\right|$$

puisque les deux numérateurs sont égaux et que le dénominateur de la seconde fraction est plus petit que le dénominateur de la première.

La valeur approchée $\frac{2q-p}{p-q}$ obtenue après le pliage est « moins bonne » que la valeur $\frac{p}{q}$ initiale.

Observons que la comparaison de $\frac{17}{12}$ et $\frac{7}{5}$ peut être vue comme un cas particulier de celle de $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q-p}{p-q}$. Si nous nous plaçons dans les hypothèses de la seconde activité, cela revient à dire que nous avions « choisi » $p=17$ et $q=12$. La fraction $\frac{7}{5}$ construite par pliage lors de la première activité peut être retrouvée par le calcul développé lors de la seconde activité puisque $2q-p=24-17=7$ et $p-q=17-12=5$.

Nous laisserons à la classe le choix de vérifier la « moins bonne qualité » de la seconde valeur approchée dans le cas particulier des valeurs numériques ou dans le cas général. Ce qu'il est important de constater ici est la perte de qualité de la valeur approchée lorsque l'on applique le processus décrit dans ces deux activités.

En « inversant » le processus, c'est-à-dire en passant d'une valeur approchée de type $\frac{2q-p}{p-q}$ à une valeur approchée de type $\frac{p}{q}$ et en poursuivant de la sorte, ne va-t-on pas engendrer des valeurs approchées de plus en plus proches de $\sqrt{2}$?

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{p}{q} & \xrightarrow{\text{pliage}} & \dfrac{2q-p}{p-q} \\[2ex] ? & \longleftarrow & \dfrac{x}{y} \end{array}$$

Si nous identifions $\frac{2q-p}{p-q}$ à une fraction $\frac{x}{y}$ connue, comment calculer la fraction $\frac{p}{q}$?

Nous posons $x=2q-p$ et $y=p-q$ et obtenons le système de deux équations à deux inconnues p et q

$$\begin{cases} -p+2q=x, \\ p-q=y. \end{cases}$$

En sommant ces deux équations, il vient $q = x + y$. En remplaçant cette valeur de q dans la seconde équation du système, il vient $p - (x + y) = y$ d'où l'on tire $p = x + 2y$.

Nous avons « inversé » le processus : si nous possédons une valeur approchée de $\sqrt{2}$ s'écrivant

$$\frac{x}{y},$$

alors une autre valeur approchée est donnée par la fraction

$$\frac{x+2y}{x+y}.$$

Et nous savons que cette nouvelle valeur approchée $\frac{x+2y}{x+y}$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que la valeur approchée $\frac{x}{y}$. Nous sommes en présence d'un « algorithme » qui calcule des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

En utilisant l'algorithme qui vient d'être découvert, calculer quelques valeurs approchées successives de $\sqrt{2}$ au départ des valeurs $x = 7$ et $y = 5$ rencontrées lors de la première activité.

1. Les valeurs de départ $x = 7$ et $y = 5$ donnent de $\sqrt{2}$ la valeur approchée

$$\frac{7}{5} = 1,4.$$

2. Appliquons une première foi l'algorithme à partir des valeurs $x = 7$ et $y = 5$.
   Le numérateur de la nouvelle fraction est donné par

$$p = x + 2y = 7 + 2 \cdot 5 = 17$$

   et le dénominateur est donné par

$$q = x + y = 7 + 5 = 12.$$

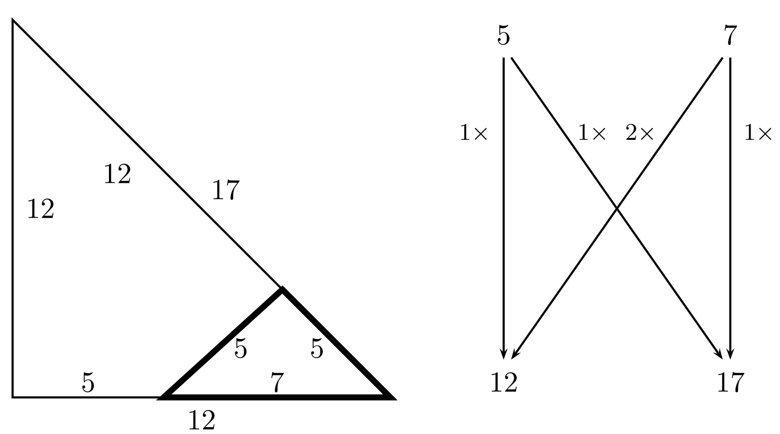


Fig. 12 : L'algorithme appliqué aux valeurs $x = 7$ et $y = 5$.

D'une part, ces valeurs $p = 17$ et $q = 12$ donnent de $\sqrt{2}$ la valeur approchée

$$\frac{17}{12} = 1,41667.$$

D'autre part, $p = 17$ et $q = 12$ deviennent respectivement $x = 17$ et $y = 12$ pour servir de point de départ à l'étape suivante.

3. À la seconde étape, partant de $x = 17$ et $y = 12$, le numérateur de la nouvelle fraction est donné par

$$p = x + 2y = 17 + 2 \cdot 12 = 41$$

et le dénominateur par

$$q = x + y = 17 + 12 = 29.$$

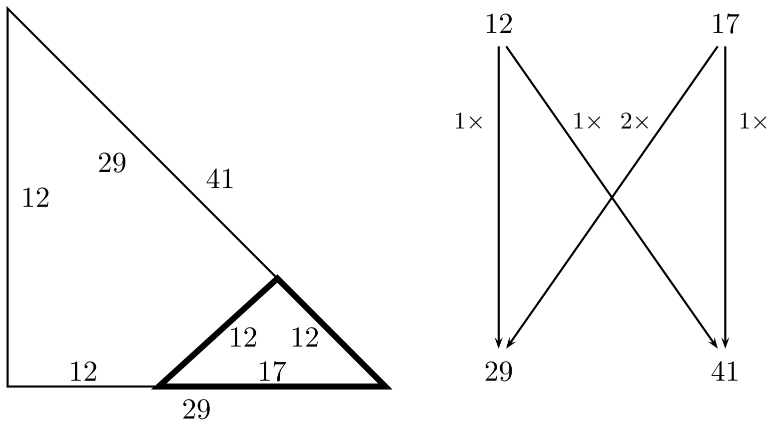


Fig. 13 : L'algorithme appliqué aux valeurs $x = 17$ et $y = 12$.

Ces valeurs $p = 41$ et $q = 29$ donnent de $\sqrt{2}$ la valeur approchée

$$\frac{41}{29} = 1,41379,$$

à leur tour, p et q deviennent les nouveaux x et y de l'étape suivante.

2.2 Le texte de Théon de Smyrne

Théon de Smyrne est un mathématicien qui vécut au deuxième siècle de notre ère : nous savons que de 127 à 132 après J.-C., il a effectué des observations astronomiques de Vénus et de Mercure rapportées par Ptolémée dans son *Almageste*[4].

Nous avons conservé de lui une sorte de manuel scolaire où il montre comment l'arithmétique, la géométrie, la stéréométrie[5] et l'astronomie sont entremêlées dans l'œuvre de Platon. Voici ce qu'il dit dans la préface de son livre *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de* Platon [135].

[4] Vers 150 après J.-C., l'astronome Ptolémée à écrit $M\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta\varsigma$ $\Sigma\upsilon\nu\tau\alpha\xi\varepsilon\omega\varsigma$ $\beta\iota\beta\lambda\iota\alpha$ $\overline{\iota\gamma}$ (Collection de 13 livres de Mathématiques). L'œuvre a été appelée $\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau o\varsigma$ (très grande) par les commentateurs ultérieurs souhaitant distinguer celle-ci d'autres textes mineurs du même auteur. Les arabes ont combiné leur article أل (al) avec le superlatif grec pour créer le terme « Almageste ».

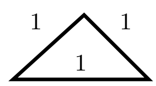
[5] Domaine constitué des applications pratiques de la géométrie à la mesure des volumes, comme par exemple la taille des pierres.

> Tout le monde conviendra assurément qu'il n'est pas possible de comprendre ce que Platon a écrit sur les mathématiques, si l'on ne s'est pas adonné à leur étude. Lui-même a montré en beaucoup d'endroits que cette connaissance n'est pas inutile et sans fruit pour les autres sciences. Celui-là donc doit être estimé très heureux qui, en abordant les écrits de Platon, possède bien toute la géométrie, toute la musique et l'astronomie. Mais ce sont là des connaissances dont l'acquisition n'est ni rapide, ni facile ; elle exige, au contraire, un travail assidu dès la première jeunesse. Dans la crainte que ceux qui n'ont pas eu la possibilité de cultiver les mathématiques et qui désirent néanmoins connaître les écrits de Platon ne se voient forcés d'y renoncer, nous donnerons ici un sommaire et un abrégé des connaissances nécessaires et la tradition des théorèmes mathématiques les plus utiles sur l'arithmétique, la musique, la géométrie, la stéréométrie et l'astronomie, sciences sans lesquelles il est impossible d'être parfaitement heureux, comme il le dit, après avoir longuement démontré qu'on ne doit pas négliger les mathématiques.

Dans l'extrait de [135], chapitre XXXI, THÉON introduit des ≪ nombres latéraux ≫ et des ≪ nombres diagonaux ≫. La lecture du texte montre que le ≪ nombre latéral ≫ peut être compris comme le ≪ côté ≫ d'un triangle rectangle isocèle dont le ≪ nombre diagonal ≫ représente l'hypoténuse. Si l'on considère un carré coupé en deux triangles rectangles isocèles par l'une de ses diagonales, on comprend mieux l'origine du qualificatif ≪ diagonal ≫ appliqué au côté de ce triangle particulier.

En notant y le côté et x l'hypoténuse, interpréter en termes modernes le texte de THÉON.

Pour des raisons de commodité, nous donnons dans la colonne de gauche, le texte de THÉON *et dans la colonne de droite, l'interprétation demandée.*

Nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.	
Supposons par exemple deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout, soit en puissance le côté et la diagonale ;	$y = 1$ est le côté, $x = 1$ est l'hypoténuse. 
ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois.	Le nouveau côté est $x + y$, la nouvelle hypoténuse est $x + 2y$.

Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit.

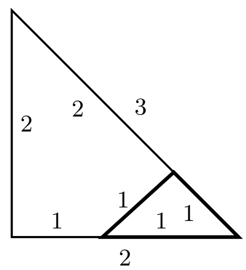
On a bien $x + 2y > x + y$.

Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité.

$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$

Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors deux unités ; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités ;

Maintenant $y = 2$ et $x = 3$.

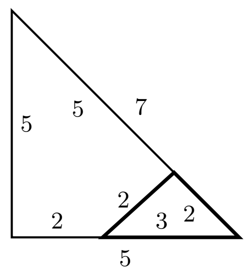


le carré construit sur le côté 2 est 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 4 - 9 = -1.$

De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3 : le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2 ; nous aurons 7 unités.

Maintenant $y = 5$ et $x = 7$.

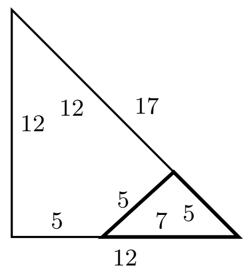


Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double 50 du carré 25.

$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 25 - 49 = 1.$

À nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités ; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17.

Maintenant $y = 12$ et $x = 17$.



Cette fois encore, le carré 289 est plus grand d'une unité que le double 288 du carré de 12.	$2y^2 - x^2 = 2 \cdot 12^2 - 17^2 = -1$.
Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté[6], en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.	Si x_n représente l'hypoténuse et y_n le côté obtenus à l'étape n, alors, on a toujours $x_n^2 = 2y_n^2 \pm 1$.

Commentaires

Sur la valeur approchée $\frac{17}{12}$

Nous pouvons constater que les constructions successives proposées par THÉON conduisent aux nombres $x = 17$ et $y = 12$. En remarquant que $2 \cdot 12^2 - 17^2 = -1$, l'auteur souligne que le double du carré de 12 n'est éloigné que d'une unité du carré de 17. En d'autres termes, 2 est proche de $\frac{17^2}{12^2}$ et en conséquence $\sqrt{2}$ est proche de $\frac{17}{12}$.

C'est en utilisant ces valeurs 12 et 17 qu'a été imaginée la première activité de pliage.

Sur la récurrence

Les valeurs du côté (1) et de l'hypoténuse (1) d'un premier triangle sont données au début du texte de THÉON. Ces valeurs de départ sont souvent notées $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$: elles initialisent un processus de construction de proche en proche d'une suite de nombres. Cette initialisation forme l'amorçage de la récurrence.

Ensuite, le texte exprime chaque nouvelle valeur du côté et de l'hypoténuse en utilisant le côté et l'hypoténuse déjà connus à l'étape précédente. Les valeurs 3 et 2 sont obtenues en utilisant les valeurs 1 et 1, les valeurs 7 et 5 sont obtenues à partir de 3 et 2, et ainsi de suite...

Le processus de construction des « nouvelles » valeurs à partir des « anciennes » est le même à chaque étape. Si nous appelons n le numéro d'ordre d'une étape, x_n et y_n les valeurs construites à cette étape, x_{n-1} et y_{n-1} les valeurs déjà connues à l'étape $n-1$, THÉON explique comment construire x_n et y_n en *fonction* de x_{n-1} et y_{n-1}. L'énoncé de ces *fonctions* forme le *pas récurrent* de la récurrence.

Lorsque les deux conditions sont correctement énoncées (initialisation et pas récurrent), il est possible de calculer les termes successifs d'une *suite* de nombres par l'utilisation d'une telle récurrence.

La construction de proche en proche des côtés et des hypoténuses de triangles rectangles isocèles est ici une double *récurrence*. En notant f_h et f_c les fonctions décrites par THÉON pour construire respectivement la nouvelle hypoténuse et le nouveau côté, nous avons :

$$\begin{aligned} x_n &= f_h(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n &= f_c(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

[6] Ce dernier résultat énoncé par THÉON sera démontré dans les prolongements de cette activité ; il n'est en effet d'aucune utilité pour la rédaction de l'algorithme décrit dans ce texte.

2.3 L'algorithme de Théon

Décrire l'algorithme de double récurrence de Théon.

Si x_n avec $n \in \mathbb{N}$, représente le terme général de la suite des numérateurs et si y_n avec $n \in \mathbb{N}$, représente le terme général de la suite des dénominateurs, alors

l'initialisation des récurrences est donné par

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 1$$

et pour tout n naturel strictement positif, les pas récurrents sont définis[7] par

$$x_n = x_n + 2y_{n-1}$$
$$y_n = x_n + y_{n-1}.$$

Les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ se calculent ensuite par

$$u_n = \frac{x_n}{y_n}.$$

En utilisant cette double récurrence, rechercher les premières valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

L'algorithme avec une calculatrice

Voici une transcription de l'algorithme de la double récurrence de Théon pour une calculatrice munie de trois mémoires appelées `A`, `B` et `C`.

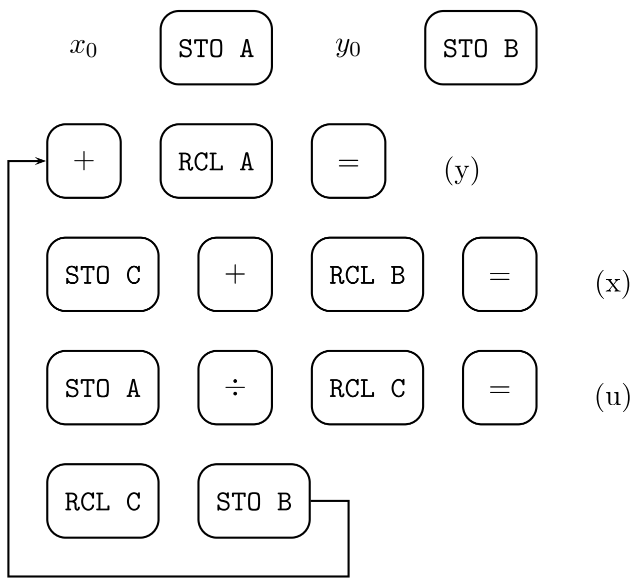


Fig. 14 : Double récurrence de l'algorithme de Théon.

[7]L'élève remarquera que ces formules définissant les pas récurrents sont – aux notations près – les mêmes que celles rencontrées dans l'approche empirique de la page 439.

La première ligne correspond à l'initialisation des deux récurrences : la mémoire `A` contiendra les valeurs successives des numérateurs x_n, la mémoire `B` contiendra les valeurs successives des dénominateurs y_n.

La deuxième ligne calcule un nouveau dénominateur ($y_n = x_{n-1}+y_{n-1}$) : il apparaît à l'affichage en `(y)`.

La troisième ligne garde dans une mémoire `C` provisoire ce dénominateur et calcule un nouveau numérateur ($x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} = y_n + y_{n-1}$) : il apparaît à l'affichage en `(x)`.

La quatrième ligne prépare l'étape suivante en recopiant ce numérateur dans la mémoire `A` et calcule un nouveau quotient ($u = \frac{x}{y}$) : il apparaît à l'affichage en `(u)`.

La cinquième ligne prépare l'étape suivante en récupérant le nouveau dénominateur gardé provisoirement dans la mémoire `C` et en le recopiant dans la mémoire `B`. La flèche qui remonte de cette cinquième ligne au début de la seconde symbolise la boucle de l'algorithme.

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous. La quatrième ligne du tableau indique qu'à la troisième application de la récurrence, le numérateur vaut 17, le dénominateur 12 et que la fraction $\frac{17}{12}$ donne de $\sqrt{2}$ la valeur approchée $1,416666667$ avec 9 décimales.

Étape	Numérateur (x)	Dénominateur (y)	Valeurs approchées de $\sqrt{2}$ (u)
0	1	1	1
1	3	2	1,5
2	7	5	1,4
3	17	12	1,416666667
4	41	29	1,413793103
5	99	70	1,414285714
6	239	169	1,414201183
7	577	408	1,414215686
8	1 393	985	1,414213198
9	3 363	2 378	1,414213625
10	8 119	5 741	1,414213552
11	19 601	13 860	1,414213564
12	47 321	33 461	1,414213562
13	114 243	80 782	1,414213562
14	275 807	195 025	1,414213562
15	665 857	470 832	1,414213562

L'algorithme avec un tableur

On prépare un tableau. Les cellules de la colonne `A` contiennent le compteur d'étapes de 0 à 15. La cellule `B2` contient la valeur d'initialisation du numérateur $x_0 = 1$, la cellule `C2` contient la valeur d'initialisation du dénominateur $y_0 = 1$, la cellule `D2` contient le premier quotient $u_0 = 1$.

D2 = 1

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12			
15	13			
16	14			
17	15			

La cellule `B3` contient la formule de récurrence des numérateurs : $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$

B3 = =B2+2*C2

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3		
4	2			

La cellule `C3` contient la formule de récurrence des dénominateurs : $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$

C3 = =B2+C2

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3	2	
4	2			

La cellule `D3` contient la formule de définition du quotient : $u_n = \frac{x_n}{y_n}$

D3 = =B3/C3

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3	2	1,5
4	2			

Les cellules `B3`, `C3` et `D3` sont recopiées vers le bas.

	A	B	C	D
1	Etape	Numérateur	Dénominateur	Valeurs approchées de racine de 2
2	0	1	1	1
3	1	3	2	1,5
4	2	7	5	1,4
5	3	17	12	1,416666667
6	4	41	29	1,413793103
7	5	99	70	1,414285714
8	6	239	169	1,414201183
9	7	577	408	1,414215686
10	8	1393	985	1,414213198
11	9	3363	2378	1,414213625
12	10	8119	5741	1,414213552
13	11	19601	13860	1,414213564
14	12	47321	33461	1,414213562
15	13	114243	80782	1,414213562
16	14	275807	195025	1,414213562
17	15	665857	470832	1,414213562

Prolongement possible

Cette double récurrence peut-elle être ramenée à une seule ? En d'autres mots, peut-on trouver un lien direct de récurrence entre u_n et u_{n-1} ?

Dans la formule calculant u_n en fonction de x_n et y_n, ces dernières valeurs sont remplacées en utilisant la double récurrence :

$$u_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + 2y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}.$$

Puisque $u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$, on divise chaque terme du quotient précédent par y_{n-1}, ce qui donne

$$u_n = \frac{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{2y_{n-1}}{y_{n-1}}}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{y_{n-1}}{y_{n-1}}} = \frac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}.$$

Si u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, représente le terme général de la suite des valeurs approchées de $\sqrt{2}$, alors l'algorithme de Théon s'exprime pour tout n naturel strictement positif, par la récurrence

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}$$

et la valeur d'initialisation de la récurrence

$$u_0 = 1.$$

Cette récurrence permet un autre type d'exploitation du tableur. Les cellules de la colonne `A` contiennent le compteur d'étapes (n). La cellule `B2` contient la valeur d'initialisation 1. La cellule `B3` contient la formule de récurrence $u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}$.

B2 ▾ f_x 1

	A	B
1	Etape	Valeurs approchées de racine carrée de 2
2	0	1
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	
14	12	
15	13	
16	14	
17	15	
18	16	

B3 ▾ f_x =(B2+2)/(B2+1)

	A	B
1	Etape	Valeurs approchées de racine carrée de 2
2	0	1
3	1	1,5
4	2	

La cellule `B3` est recopiée vers le bas et fournit les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ données par l'algorithme de THÉON.

	A	B
1	Etape	Valeurs approchées de racine carrée de 2
2	0	1
3	1	1,5
4	2	1,4
5	3	1,416666666667
6	4	1,413793103448
7	5	1,414285714286
8	6	1,414201183432
9	7	1,414215686275
10	8	1,414213197970
11	9	1,414213624895
12	10	1,414213551646
13	11	1,414213564214
14	12	1,414213562057
15	13	1,414213562427
16	14	1,414213562364
17	15	1,414213562375
18	16	1,414213562373

> Le texte de THÉON se terminait par l'affirmation que l'on a toujours $x_n^2 = 2y_n^2 \pm 1$ où x_n représente l'hypoténuse et y_n le côté obtenus à l'étape n. Démontrer ce résultat.

Les nombres x_n et y_n sont définis par deux relations de récurrence. On initialise d'abord

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 1, \end{aligned}$$

ensuite, pour tout n naturel strictement positif, on a

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1}. \end{aligned}$$

On regroupe dans un tableau les premières valeurs de x_n, y_n et $x_n^2 - 2y_n^2$ pour n égal à 0, 1, 2 et 3.

étape (n)	x_n	y_n	$x_n^2 - 2y_n^2$
0	1	1	$x_0^2 - 2y_0^2 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$
1	3	2	$x_1^2 - 2y_1^2 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$
2	7	5	$x_2^2 - 2y_2^2 = 7^2 - 2 \cdot 5^2 = 49 - 50 = -1$
3	17	12	$x_3^2 - 2y_3^2 = 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 288 = 1$

On remarque que lorsque le numéro n de l'étape est impair,

$$x_n^2 - 2y_n^2 \quad \text{vaut} \quad +1$$

et que lorsque le numéro n de l'étape est pair,

$$x_n^2 - 2y_n^2 \quad \text{vaut} \quad -1.$$

En conséquence, la thèse de THÉON revient à :

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^{n+1} \qquad \text{pour tout } n \text{ naturel.}$$

Nous démontrons ce résultat par récurrence. Si $n = 0$, on a $x_n = y_n = 1$ et

$$x_0^2 - 2y_0^2 = 1 - 2 = -1 = (-1)^{n+1}.$$

Supposons le résultat démontré pour l'indice $n-1$, c'est-à-dire admettons qu'il est vrai que

$$x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2 = (-1)^{(n-1)+1} = (-1)^n.$$

Nous allons vérifier que, sous cette hypothèse (de récurrence), on a

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

Nous calculons

$$x_n^2 = (x_{n-1} + 2y_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + 4y_{n-1}^2$$

et

$$y_n^2 = (x_{n-1} + y_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}^2.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} x_n^2 - 2y_n^2 &= x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + 4y_{n-1}^2 - 2\left(x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}y_{n-1} + y_{n-1}^2\right) \\ &= x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}y_{n-1} + 4y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}y_{n-1} - 2y_{n-1}^2 \\ &= -x_{n-1}^2 + 2y_{n-1}^2 \\ &= (-1)\left(x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2\right) \\ &= (-1)(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Le résultat de THÉON est bien démontré par récurrence.

3 Racine approchée d'un nombre positif quelconque

Pour un nombre rationnel, le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale revient à effectuer une division que l'on prolonge éventuellement au-delà de la partie entière. Si, à un moment, un reste nul apparaît, le nombre rationnel est un nombre décimal limité, sinon c'est un nombre décimal illimité périodique. Dans le cas des nombres irrationnels, on pourra au mieux donner une valeur approchée obtenue par encadrements successifs. Si A n'est pas un carré parfait, l'activité va montrer l'existence de deux nombres rationnels g et d tel que $g < \sqrt{A} < d$. Ces rationnels g et d pourront être connus avec un nombre de décimales aussi important que l'on souhaite, pour autant qu'on utilise des instruments permettant de traiter de grandes quantités de décimales.

De quoi s'agit-il ? Traduire en langage moderne un texte de HÉRON D'ALEXANDRIE décrivant une stratégie conduisant à une valeur approchée d'une racine carrée.

Enjeux Découvrir une méthode simple permettant d'approcher la racine carrée d'un nombre.

Calculer une valeur approchée et des encadrements de la racine carrée d'un nombre positif au moyen d'un algorithme.

Utiliser des moyens modernes de calcul (calculatrice et tableur).

De quoi a-t-on besoin ? ***Matériel***

Le texte de HÉRON D'ALEXANDRIE (fiche 20 à la page 490).

Un tableur ou une calculatrice scientifique.

Prérequis

Pouvoir écrire une formule dans une « cellule » d'un tableur et la recopier dans les cellules voisines.

3.1 Analyse d'un texte de Héron d'Alexandrie

Comment s'y prendre ?

L'élève est invité à traduire le texte de Héron d'Alexandrie en notation moderne. Il découvre dans quelle mesure la stratégie suggérée par Héron permet de trouver l'encadrement de la racine carrée d'un nombre.

Introduction au texte

Ce texte est extrait d'un manuscrit [93], en grec, daté du XI^{e} siècle. Il reprend les connaissances mathématiques et physiques de Héron d'Alexandrie, qui vécut probablement au premier siècle de notre ère. Sa principale œuvre mathématique *Les Métriques* traite du calcul des aires de diverses figures planes ainsi que du volume de certains solides. Nous y trouvons de larges indications sur la tradition grecque du calcul.

Au livre I, Héron s'intéresse à une méthode générale permettant de trouver l'aire d'un triangle lorsque l'on ne connaît pas la mesure des hauteurs, mais bien les longueurs des côtés. Le passage se compose de trois parties distinctes.

- Un exemple numérique comme c'était souvent la tradition dans les textes de l'époque. On y donne la ≪ recette ≫ pour calculer l'aire d'un triangle de côtés de longueurs 7, 8 et 9. Cette aire vaut $\sqrt{720}$. Cette recette est reprise ci-dessous.
- Comme 720 n'est pas un carré parfait, Héron donne un algorithme pour rechercher une valeur approchée de la racine carrée de 720. C'est ce passage qui nous intéresse dans l'activité.
- Le texte grec se poursuit par la démonstration rigoureuse de ce qui apparaissait comme une recette dans la première partie. La démonstration de cette formule d'aire est expliquée en prolongement possible de cette activité, à la page 462.

Voici tout d'abord la ≪ recette ≫ − qui aujourd'hui porte le nom de *formule de Héron* − permettant de trouver l'aire d'un triangle à partir des longueurs des côtés. Les mots entre <> ont été ajoutés dans la traduction française.

> Ainsi, par exemple, que les côtés du triangle soient les unités : 7, 8, 9. Additionne le 7 et 8 et 9 : cela devient 24, prends la moitié de cela et cela donne 12, soustrais-en 7 et il reste 5 ; à nouveau enlève 8 de 12 : il reste 4 et encore 9 <de 12> : il reste 3. Fais 12 fois 5 cela devient 60, et 60 fois 4 : cela devient 240 et 240 fois 3 cela devient 720 : prend le côté de 720 et ce sera la superficie du triangle.

En écriture plus moderne, si l'on recherche l'aire d'un triangle de côtés $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$, il faut en calculer le demi-périmètre $p = 12$. Puis on calcule les trois valeurs $p - a = 5$, $p - b = 4$ et $p - c = 3$. L'aire du triangle est alors donnée par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}.$$

Pour terminer son calcul, Héron doit à présent chercher le côté d'un carré dont l'aire vaut 720.

Le texte

> Comme les 720 n'ont pas un côté rationnel, nous prendrons la racine avec la différence la plus petite de la manière suivante : comme le carré s'approchant de 720 est 729 et qu'il a 27 pour racine, divise les 720 par 27 : il vient 26 et deux tiers ; ajoute les 27 : il vient 53 deux tiers. De ceci, <prends> la moitié : il vient $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. La racine de 720 sera donc au plus près les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Cependant, les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ <multipliés> par eux-mêmes, cela produit $720\frac{1}{36}$: de sorte que la différence est la fraction $\frac{1}{36}$ de l'unité. Et si nous voulons que la différence devienne une fraction plus petite que $\frac{1}{36}$, nous mettons à la place des 729 les 720 et $\frac{1}{36}$ maintenant trouvés, et après avoir effectué les mêmes <opérations>, nous trouverons la différence devenue beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

La première étape

Comment s'y prendre ?

Traduire la première étape de l'algorithme entièrement décrite par HÉRON.

Pour extraire la racine carrée de 720, HÉRON prend pour valeur approchée 27 dont le carré 729 surpasse 720. Il calcule ensuite la quantité $\frac{720}{27}$. Il suggère de faire la moyenne arithmétique de ce nombre et de 27, et trouve $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ que nous écririons de nos jours $26\frac{5}{6}$. En élevant au carré cette valeur, il trouve $720\frac{1}{36}$. Il conclut en remarquant qu'il a ainsi une différence de $\frac{1}{36}$.

Comment prouver que cette approche est correcte ?

Appelons r la racine que nous cherchons. La valeur approchée 27 de la racine choisie par HÉRON est une valeur qui majore r puisque $27^2 = 729$ est plus grand que 720.

Puisque $r > 0$, nous avons bien les inégalités :

$$\begin{aligned} 729 &> 720 \\ 729 &> r^2 \\ 27 &> r. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à la valeur $\frac{720}{27}$. Nous pouvons dire que

$$\begin{aligned} r &< 27 \\ \frac{r}{720} &< \frac{27}{720} \\ \frac{720}{r} &> \frac{720}{27}. \end{aligned}$$

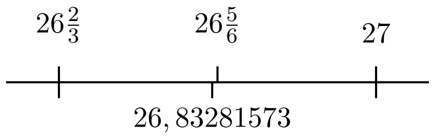
Par la définition même de r, nous avons évidemment $\dfrac{720}{r} = r$ et donc $r > \dfrac{720}{27}$.

Ainsi $\dfrac{720}{27} < r < 27$. Nous avons trouvé un premier encadrement de la racine : $\sqrt{720} \in \left[\dfrac{720}{27}, 27\right]$ ou sous une forme décimale limitée à 8 chiffres après la virgule : $\sqrt{720} \in [26,66666667; 27]$.

HÉRON dit que la moyenne m des valeurs 27 et $\frac{720}{27}$ qui forment cet encadrement est plus proche de $\sqrt{720}$ que ne l'est 27. Vérifier ceci numériquement.

On obtient successivement

$\frac{720}{27} = 26\frac{2}{3} = 26,66666667$
$\sqrt{720} \simeq 26,83281573$
$m = \frac{27+26\frac{2}{3}}{2} = 26\frac{5}{6} = 26,83333333.$



L'affirmation de HÉRON est indiscutablement vérifiée.

Nous venons de voir que dans ce cas particulier, la moyenne des valeurs qui forment l'encadrement de la racine cherchée est une meilleure valeur approchée que la borne droite de l'encadrement. Cette affirmation de HÉRON est-elle toujours vraie ?

Définissons g, la valeur approchée par défaut de la racine,
d, la valeur approchée par excès de la racine,
$m = \frac{g+d}{2}$, la moyenne de ces deux valeurs approchées,
r, la racine cherchée.

Vérifier que m est plus proche de r que ne l'était d peut se faire en prouvant que r est toujours entre g et m.

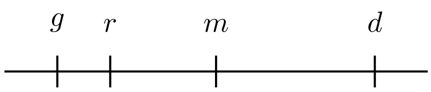


Fig. 15

HÉRON a construit $g = \frac{r^2}{d}$, nous en déduisons que $r^2 = gd$ ou encore que $r = \sqrt{gd}$. Ainsi dans la figure 15, r représente la *moyenne géométrique* et m est la *moyenne arithmétique* des deux valeurs approchées g et d.

Peut-on vérifier de manière générale que la moyenne géométrique de deux nombres distincts strictement positifs est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique ?

Une façon de le montrer est d'observer par exemple le carré de côté $g + d$ où nous avons inscrit quatre rectangles de côtés g et d. Un petit carré central est ainsi isolé.

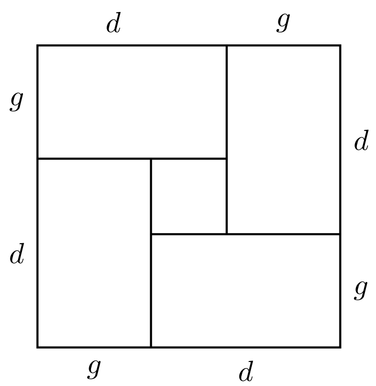


Fig. 16

On voit que l'aire du carré de côté $g+d$ est plus grande que l'aire des quatre rectangles. Donc on a successivement

$$\begin{array}{rcl} (g+d)^2 & > & 4gd \\ g+d & > & 2\sqrt{gd} \\ \dfrac{g+d}{2} & > & \sqrt{gd} \\ m & > & r. \end{array}$$

L'affirmation de HÉRON suivant laquelle m est plus proche de r que ne l'était d se vérifie donc toujours.

La deuxième étape

Comment s'y prendre ?

> Écrire la deuxième étape seulement suggérée dans le texte de HÉRON.

La dernière phrase du texte affirme qu'on obtient une valeur approchée meilleure encore en itérant le procédé pourvu que l'on remplace 729 par $720\frac{1}{36}$.

> Refaire avec cette nouvelle valeur la procédure que HÉRON a décrite.

Comme $720\frac{1}{36}$ est le carré de $26\frac{5}{6}$, cette nouvelle valeur $26\frac{5}{6}$ joue le rôle d'une nouvelle « borne droite ». La nouvelle « borne gauche » vaut :

$$\frac{720}{26\frac{5}{6}} = \frac{720}{\frac{161}{6}} = \frac{720 \cdot 6}{161} = \frac{4\,320}{161}.$$

La moyenne des deux valeurs de ces nouvelles bornes est :

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6} + \frac{4\,320}{161}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{6} + \frac{4\,320}{161}\right) = \frac{25\,921 + 25\,920}{2 \cdot 966} = \frac{51\,841}{1\,932}.$$

Nous trouvons un deuxième encadrement de la racine :

$$\sqrt{720} \in \left[\frac{51\,841}{1\,932}; 26\frac{5}{6}\right]$$

ou sous une forme décimale limitée à 8 chiffres après la virgule :

$$\sqrt{720} \in [26,83281573; 26,83333333].$$

Nous pouvons remarquer que ce deuxième intervalle est inclus dans le premier :

$$[26,83281573; 26,83333333] \subset [26,66666667; 27].$$

Cet « emboîtement » des intervalles qui encadrent la valeur de $\sqrt{720}$ que l'on cherche suggère la stratégie proposée dans ce texte de HÉRON. Appliquer de nouveau la procédure qu'il a décrite conduira à un intervalle encadrant la racine. S'il était possible de montrer qu'à chaque nouvelle étape, l'encadrement calculé est « meilleur » que le précédent car il lui est toujours emboîté, nous serions certains d'obtenir des valeurs approchées de plus en plus précises de cette racine de 720.

Le premier intervalle d'encadrement de $\sqrt{720}$ montrait seulement que la partie entière de cette racine était 26. Le deuxième encadrement montre que la valeur approchée à deux décimales de la racine est 26,83.

> Peut-on prouver qu'à chaque étape, le nouvel encadrement de la racine sera « meilleur » que le précédent au sens où il lui est forcément emboîté ? Est-ce toujours vrai ?

Éloignons-nous de l'exemple numérique de Héron pour vérifier ce résultat. Considérons un encadrement $[a, b]$ d'une racine $\sqrt{A}$ cherchée, où a et b sont des réels positifs obtenus par Héron lors d'une étape de son approximation. Nous savons que $A = ab$. Prenons une valeur d comprise dans l'intervalle $]a, b[$, avec $d > \sqrt{A}$ et construisons c par le fait que $cd = A$. Vérifions que c appartiendra forcément à l'intervalle $]a, b[$ avec $c < \sqrt{A}$ et qu'ainsi l'intervalle $[c, d]$ est emboîté dans l'intervalle $[a, b]$.

Nous posons $d = b - y$ avec $0 < y < b - a$ et $c = a + x$.

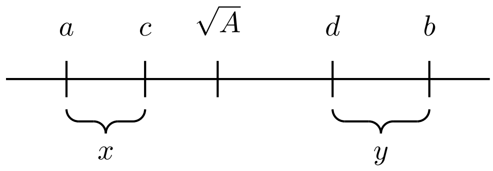


Fig. 17 : Imbrication des encadrements.

Pour répondre à la question précédente, il suffit de vérifier que $x > 0$. On obtient

$$ab = cd = (a + x)(b - y) = ab - ay + bx - xy,$$

ce qui implique que $ay - bx + xy = 0$. On en tire

$$x = \frac{ay}{b - y} = \frac{ay}{d}.$$

Puisque a, d et y sont strictement positifs, x est bien strictement positif.

En conséquence, l'application de l'algorithme de Héron conduit bien à des intervalles « emboîtés ». Non seulement, ce fait est vérifié, mais de plus, l'emboîtement a lieu quel que soit l'intervalle d'encadrement choisi au départ.

3.2 L'algorithme de Héron

Comment s'y prendre ?

> Dégager l'algorithme suggéré par le texte de Héron.

L'algorithme de Héron pour la recherche de la racine carrée positive du réel strictement positif A est l'un des premiers algorithmes dans l'histoire des mathématiques. Il se présente comme une « recette » de calcul d'une liste de valeurs $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de plus en plus proches de la racine cherchée. Sa définition en deux temps est à nouveau une *relation de récurrence*.

On y définit d'abord comment trouver a_1, la première valeur approchée de la racine ; c'est l'*initialisation* de la récurrence.

Ensuite, on explique comment la connaissance d'une valeur approchée quelconque a_i (celle qui dans la liste porte le numéro i) permet de trouver la suivante a_{i+1} (celle qui dans la liste porte le numéro $i + 1$) ; c'est le *pas récurrent*.

Ainsi, l'application répétitive de cette seconde définition construit successivement $a_2, a_3, \ldots$

Voici cet algorithme de Héron tel qu'il le décrit dans son texte.

L'initialisation de la récurrence pour chercher $\sqrt{720}$ s'est faite à partir d'une valeur $a_1 = 27$ car, nous a-t-il dit, 27 est tel que son carré 729 est le *premier* carré qui surpasse 720.

La valeur initiale de la récurrence (a_1) est le plus petit entier naturel dont le carré surpasse le réel A. On sait que $\sqrt{A} \in \left[\frac{A}{a_1}, a_1\right]$.

La deuxième valeur (a_2) est calculée par une première application de la relation de récurrence : $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$. On sait que $\sqrt{A} \in \left[\frac{A}{a_2}, a_2\right]$.

On poursuit la récurrence, et d'une manière générale

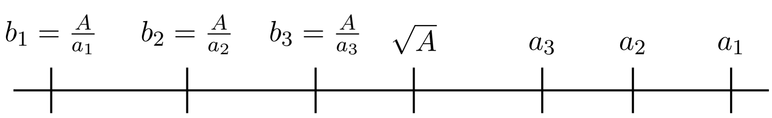
$$a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{A}{a_i}\right)$$

pour i un naturel quelconque plus grand que 1. On sait que $\sqrt{A} \in \left[\frac{A}{a_{i+1}}, a_{i+1}\right]$.

Les valeurs successives $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont les *valeurs approchées par excès de* $\sqrt{A}$.

Les valeurs successives $b_1 = \frac{A}{a_1}, b_2 = \frac{A}{a_2}, b_3 = \frac{A}{a_3}, \ldots$ sont les *valeurs approchées par défaut de* $\sqrt{A}$.

Les intervalles $[b_1, a_1] \supset [b_2, a_2] \supset [b_3, a_3] \supset \cdots$ forment des *intervalles emboîtés encadrant* $\sqrt{A}$.



L'imbrication des intervalles d'encadrements de la racine $\sqrt{A}$ – que nous venons de démontrer – nous dit que *quel que soit le choix d'un premier intervalle* $[a, b]$*, l'algorithme de* Héron *conduit à un « meilleur » intervalle* $[c, d]$. Ceci reste vrai pour autant que b soit supérieur à $\sqrt{A}$.

Pour rendre un peu plus automatique la programmation de cet algorithme, il faudrait s'affranchir de l'obligation de choisir a_1 comme l'a fait Héron. Il n'y a pas vraiment de moyen simple pour trouver le plus petit entier naturel dont le carré surpasse un réel donné. Une suggestion qui peut venir à l'esprit est d'initialiser la récurrence avec $a_1 = \dfrac{A}{2}$.

> Contrôler si une telle valeur de a_1 vérifie la condition demandée par Héron, à savoir que $a_1 > \sqrt{A}$.

Comme A est positif, nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &> \sqrt{A} \\ A^2 &> 4A \\ A(A-4) &> 0. \end{aligned}$$

Puisque $A > 0$, cette dernière inéquation n'est vérifiée que si $A > 4$. Lorsque $0 < A < 4$, $\frac{A}{2} < \sqrt{A}$ et le choix de Héron comme condition de départ n'est pas rencontré.

> Que faire lorsque A est compris entre zéro et quatre ? Doit-on changer d'initialisation ? L'algorithme reste-t-il valable ?

Nous pouvons vérifier que l'algorithme peut fonctionner avec cette valeur $a_1 = \frac{A}{2}$. Plus généralement, la question est de voir comment se comporte l'algorithme de HÉRON lorsque l'initialisation de la récurrence se fait avec une valeur inférieure à la racine carrée que nous cherchons.

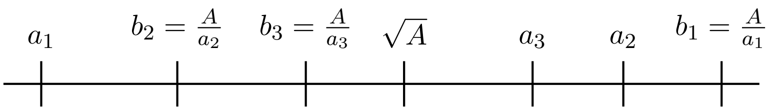
Si $g = a_1 < \sqrt{A}$, alors $d = b_1 = \frac{A}{a_1}$ et nous avons vu page 453 que la racine r cherchée se trouvait toujours entre la moyenne $m = \frac{a_1+b_1}{2}$ et la valeur de gauche g de l'intervalle. Cela signifie que l'on a successivement :

$$a_1 < \sqrt{A}, \quad b_1 = \frac{A}{a_1}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad \sqrt{A} \in [a_1, b_1]$$

$$a_2 > \sqrt{A}, \quad b_2 = \frac{A}{a_2}, \quad a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad \sqrt{A} \in [b_2, a_2]$$

$$a_3 > \sqrt{A}, \quad b_3 = \frac{A}{a_3}, \quad a_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}, \quad \sqrt{A} \in [b_3, a_3]$$

et ainsi de suite.



En conclusion, même si on initialise le processus avec une valeur a_1 inférieure à la racine cherchée, l'algorithme fournit les valeurs a_2, a_3 et toutes les suivantes par excès. On retrouve une suite d'intervalles emboîtés encadrant la racine. En pratique, $\frac{A}{2}$ est donc un bon point de départ quelle que soit la valeur de A.

> Vérifier ce fait sur un exemple : $\sqrt{2}$.

Nous avons $A = 2$ et donc $a_1 = \frac{2}{2} = 1$, $a_1 < \sqrt{A}$

Les calculs sont effectués avec une calculatrice permettant l'affichage de 10 chiffres significatifs.

$a_1 = 1$	$b_1 = \frac{2}{1} = 2$	on a $\sqrt{2} \in [a_1, b_1]$
$a_2 = \frac{1+2}{2} = 1,5$	$b_2 = \frac{2}{1,5} = 1,333\,333\,333$	on a $\sqrt{2} \in [b_2, a_2]$
$a_3 = \frac{1,5+1,333\,333\,333}{2} = 1,416\,666\,667$	$b_3 = \frac{2}{1,416\,666\,667} = 1,411\,764\,706$	on a $\sqrt{2} \in [b_3, a_3]$
$a_4 = \frac{1,416\,666\,667+1,411\,764\,706}{2} = 1,414\,215\,686$	$b_4 = \frac{2}{1,414\,215\,686} = 1,414\,211\,438$	on a $\sqrt{2} \in [b_4, a_4]$
$a_5 = \frac{1,414\,215\,686+1,414\,211\,438}{2} = 1,414\,213\,562$	$b_5 = \frac{2}{1,414\,213\,562} = 1,414\,213\,562$	

Les deux valeurs affichées de b_5 et de a_5 sont égales, néanmoins l'emploi d'un matériel plus performant aurait ici également montré simplement que $\sqrt{2} \in [b_5, a_5]$. Nous remarquons que le premier intervalle d'encadrement de $\sqrt{2}$ est de type $[a_1, b_1]$. À partir du deuxième intervalle, on retrouve l'ordre des valeurs approchées prévues par le texte de HÉRON : $b_2 < \sqrt{2} < a_2, \ldots$

Le calcul, ici effectué en gardant neuf décimales après la virgule lors des calculs intermédiaires, montre que

$$|a_5 - b_5| < 10^{-9}$$

et donc que la valeur $1,414\,213\,562$ est une valeur approchée à neuf décimales de $\sqrt{2}$, obtenue après seulement cinq itérations.

Liaison avec l'algorithme de Théon

Il peut être intéressant de refaire l'exemple de l'extraction de la racine de 2 par la méthode de Héron en gardant à chaque étape des nombres fractionnaires plutôt que des décimaux. On obtient ainsi

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \qquad b_2 = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{17}{6}}{2} = \frac{17}{12} \qquad b_3 = \frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17}$$

$$a_4 = \frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \frac{\frac{577}{204}}{2} = \frac{577}{408} \qquad b_4 = \frac{2}{\frac{577}{408}} = \frac{816}{577}$$

$$a_5 = \frac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2} = \frac{\frac{332\,929+332\,928}{235\,416}}{2} = \frac{665\,857}{470\,832} \qquad b_5 = \frac{2}{\frac{665\,857}{470\,832}} = \frac{941\,664}{665\,857}$$

En comparant avec le tableau de la page 445, nous remarquons que les valeurs approchées successives calculées par l'algorithme de Héron se retrouvent parmi les valeurs approchées calculées par l'algorithme de Théon. Par exemple, la troisième valeur chez Héron est égale à la troisième valeur chez Théon alors que la quatrième valeur chez Héron est égale à la septième valeur chez Théon. L'algorithme de Héron retrouve donc certaines des valeurs obtenues à l'activité 2, mais avec une meilleure « performance ». Le tableau ci-dessous suggère qu'à une étape i de l'algorithme de Héron correspond le résultat de l'étape $2^{i-1} - 1$ de l'algorithme de Théon.

Valeurs fractionnaires approchées de $\sqrt{2}$	Numéro de l'étape avec l'algorithme de Héron	Numéro de l'étape avec l'algorithme de Théon
1	1	0
$\frac{3}{2}$	2	1
$\frac{17}{12}$	3	3
$\frac{577}{408}$	4	7
$\frac{665\,857}{470\,832}$	5	15

Conclusion

L'algorithme peut être poursuivi tant que les possibilités de l'instrument de calcul ne le trahissent pas. Dans le cadre de l'utilisation de programmes automatisés, on pourrait arrêter le processus lorsque :

$|a_{i+1} - a_i|$ est inférieure à un nombre donné,

$|a_i^2 - A|$ est inférieure à un nombre donné,

$|a_i - \frac{A}{a_i}|$ est inférieure à un nombre donné.

3.3 Programmation de l'algorithme de Héron

Comment s'y prendre ?

Calculer quelques encadrements de la racine carrée de 720, au moyen de l'algorithme de Héron, sur une calculatrice, puis avec un tableur.

L'algorithme avec une calculatrice élémentaire

Nous avons vu que le caractère itératif de l'algorithme de Héron permet d'obtenir des encadrements successifs, jusqu'à saturation des possibilités d'affichage ou jusqu'à ce que soit atteinte une condition d'approximation fixée à l'avance (et compatible avec les possibilités techniques de la calculette). Le *programme* ci-dessous recherche les encadrements successifs de $\sqrt{A}$. Il peut être adapté à n'importe quelle machine qui possède une mémoire adressable directement et non par addition (touche de type `STO` et non pas `M+`). La grande flèche de droite à gauche symbolise l'idée de *boucle* (l'itération) du programme. En (G) apparaît une nouvelle borne gauche de l'encadrement de la racine $(b_1, b_2, b_3, \cdots)$; en (D) apparaît la borne droite de l'étape suivante $(a_2, a_3, a_4, \cdots)$.

La valeur a_1 initiale peut être choisie arbitrairement entre zéro et A, mais nous avons vu que $\frac{A}{2}$ est toujours un bon candidat.

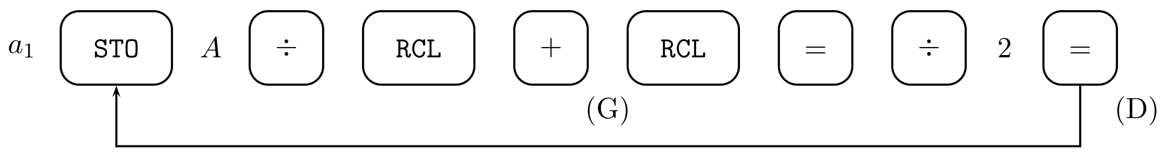


Fig. 18 : Algorithme de Héron.

Avant l'exécution de la boucle du programme, nous devons introduire la valeur initiale choisie pour a_1 (360) dans la mémoire A.

Les valeurs suivantes ((G) et (D)) vont apparaître lors des exécutions successives de la boucle du programme :

2,000000000 181,0000000	3,977900552 92,48895028	7,784713718 50,13683200	14,36039993 32,24876597
22,32643571 27,28760084	26,38561024 26,83660554	26,82902646 26,83281600	26,83281546 26,83281573
26,83281573 26,83281573			

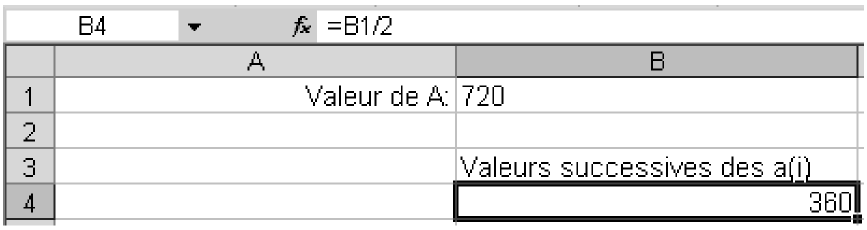
On peut remarquer que le nombre d'étapes nécessaire pour obtenir $\sqrt{720}$ avec une précision de 8 décimales semble plus grand que dans le cas exposé dans le texte de Héron. La raison en est le point de départ (a_1) relativement éloigné de la racine cherchée. Nous pouvons modifier légèrement le programme pour nous placer dans la situation du texte original en introduisant la valeur approchée par excès de la racine (27) dans la mémoire A avant l'exécution de la boucle du programme. Cette fois, nous trouvons les valeurs suivantes lors des exécutions successives de la boucle du programme :

26,66666667 26,83333333	26,83229814 26,83281573	26,83281573 26,83281573

Il suffit cette fois de trois étapes pour atteindre la précision maximale de la calculatrice utilisée.

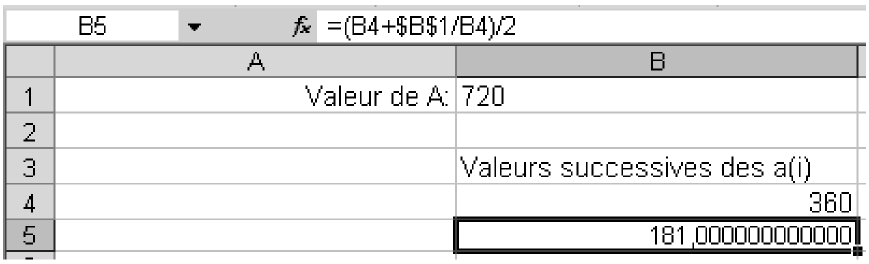
L'algorithme avec un tableur

La cellule `B1` du tableur contient la valeur du nombre A dont on recherche la racine carrée (ici : 720). La cellule `B4` contient la première valeur approchée $a_1 = \frac{A}{2}$. Dans le cas de la recherche de $\sqrt{720}$, cette case contiendra donc le nombre 360 qui initialise la récurrence.


B4 | fx =B1/2

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3		Valeurs successives des a(i)
4		360

Introduisons dans la cellule `B5` du tableur, la formule $a_{i+1} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{A}{a_i}\right)$ qui traduit la récurrence de l'algorithme de Héron. La validation de la formule fera apparaître le nombre 181 dans cette cellule.


B5 | fx =(B4+$B$1/B4)/2

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3		Valeurs successives des a(i)
4		360
5		181,000000000000

La copie vers le bas du contenu de la cellule `B5` donnera les valeurs approchées successives de $\sqrt{720}$. Cette première version simple ne nous donne que les valeurs approchées *par excès* de la racine cherchée.

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3		Valeurs successives des a(i)
4		360
5		181,000000000000
6		92,488950276243
7		50,136831997236
8		32,248765966080
9		27,287600836978
10		26,836605537221
11		26,832815997592
12		26,832815729998
13		26,832815729998
14		26,832815729998

Comme dans l'exemple avec la calculatrice, il est possible avec un tableur de faire apparaître les encadrements successifs de la racine cherchée. Il nous faut dans ce cas y définir deux colonnes : la colonne `A` contenant les bornes de gauche b_i de l'intervalle et la colonne `B` contenant les bornes de droite a_i de l'intervalle. Les cellules `B1` et `B4` sont définies comme précédemment.

Maintenant, nous pouvons définir la colonne `A`. La cellule `A4` doit contenir la formule qui traduit dans le tableur la relation $b_i = \frac{A}{a_i}$ qui lie la borne gauche b_i à la borne droite a_i.

A4 ▾ fx =$B$1/B4

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360

La cellule `B5` contient la formule $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ qui traduit dans ce cas la récurrence de l'algorithme de Héron.

B5 ▾ fx =(B4+A4)/2

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360
5		181,000000000000

Nous devons recopier en `A5` le contenu de la cellule `A4`.

A5 f_x =$B$1/B5

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360
5	3,977900552486	181,000000000000

La copie vers le bas des contenus des cellules `A5` et `B5` donnera les valeurs approchées successives encadrant la racine cherchée.

	A	B
1	Valeur de A:	720
2		
3	Valeurs successives des b(i)	Valeurs successives des a(i)
4	2	360
5	3,977900552486	181,000000000000
6	7,784713718228	92,488950276243
7	14,360699934924	50,136831997236
8	22,326435707875	32,248765966080
9	26,385610237465	27,287600836978
10	26,829026457962	26,836605537221
11	26,832815462403	26,832815997592
12	26,832815729998	26,832815729998
13	26,832815729998	26,832815729998
14	26,832815729998	26,832815729998

Prolongement possible

L'algorithme de HÉRON pour la recherche d'une racine carrée est apparu à propos d'un problème d'aire de triangle. Cette aire s'exprimait par la racine carrée d'un nombre qui n'était pas un carré parfait ; d'où la recherche d'une valeur approchée de la racine carrée par la méthode qui vient d'être analysée.

La troisième partie du texte du *Codex* [93] reprend la démonstration que donne HÉRON de la formule de calcul d'aire qu'il vient d'utiliser dans le cas particulier du triangle dont les côtés sont de longueur 7, 8 et 9.

Cette formule est, d'une certaine manière, plus « naturelle » que celle, plus classique, utilisant la mesure de la base (B) et celle de la hauteur (H) d'un triangle. Cette dernière doit peut-être son succès à sa facilité à être (dé-)montrée ; l'aire d'un triangle de base B et de hauteur H apparaissant de manière assez naturelle comme la moitié de l'aire d'un parallélogramme de même base B et de même hauteur H.

Pensons à un géomètre prié de trouver l'aire d'un terrain triangulaire qui se trouve être une plantation extrêmement dense et désordonnée d'épicéas. Pour « mesurer » la longueur de la hauteur du triangle, il doit « partir » d'un sommet et espérer — en parcourant son terrain en ligne droite — rejoindre perpendiculairement le côté opposé au sommet. Il peut aussi choisir un point au hasard sur l'un des côtés du triangle, s'enfoncer dans le bois perpendiculairement à ce côté et rêver d'atteindre le sommet opposé ! On l'aura compris, il lui sera beaucoup plus simple d'arpenter les trois côtés du terrain et d'appliquer la formule de HÉRON.

La formule de l'aire d'un triangle

Soit un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c. Si l'on note $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre, l'aire du triangle est alors donnée par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

De quoi a-t-on besoin ?

La démonstration de Héron (fiche 21 page 491) est assez technique et utilise un certain nombre de résultats constituant des prérequis.

Prérequis

Tout cercle inscrit dans un triangle est tangent aux trois côtés et a pour centre le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle.

Les tangentes menées d'un point extérieur à un cercle, limitées à leur point de contact, ont même longueur.

La mesure de l'aire A d'un triangle de base b et de hauteur h vaut $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un côté de l'angle droit de même longueur, alors ils sont isométriques.

Tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont le diamètre est son hypoténuse.

Si deux triangles ont des angles homologues de même amplitude, alors ils sont semblables ; si deux triangles sont semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

Dans toute proportion, on a :
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
La mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre les mesures des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Le texte de la démonstration

En préambule à la démonstration, Héron rappelle l'originalité de la formule : il souhaite trouver l'aire d'un triangle dont sont connues les longueurs des trois côtés sans utiliser la mesure d'une des hauteurs.

> Et la démonstration géométrique de cette <méthode> est la suivante : les côtés d'un triangle étant donnés, trouver la superficie. Il est en effet possible qu'après avoir conduit une hauteur et sa grandeur étant déduite, l'on trouve la superficie du triangle, mais ce qu'il faut <ici>, c'est que la superficie soit déterminée sans la hauteur.

Vient ensuite la démonstration générale proposée par Héron. Nous l'avons présentée ici en deux colonnes. La colonne de gauche reprend notre traduction du grec en français non littéraire. Les mots entre < > ont été ajoutés pour clarifier le sens en français. La colonne de droite explicite le texte dans une formulation plus contemporaine.

Que soit donné le triangle ABΓ et que soient données <les grandeurs> AB, BΓ <et> ΓA : trouver la superficie.

Quelle est l'aire d'un triangle ABΓ dont on donne les longueurs des côtés AB, BΓ et ΓA ?

Que soit inscrit dans le triangle le cercle ΔEZ, dont le centre sera H, et que soient menés AH, BH, ΓH, ΔH, EH, ZH.

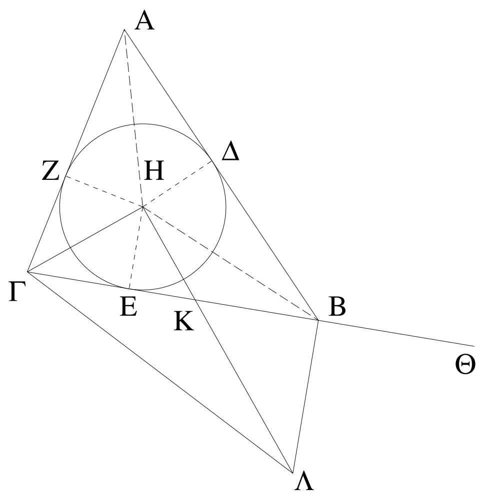


Fig. 19

Traçons le cercle inscrit au triangle ABΓ. Son centre est en H, intersection des bissectrices intérieures du triangle. Traçons :
– ΔH perpendiculaire à AB,
– EH perpendiculaire à BΓ,
– ZH perpendiculaire à ΓA.
Joignons H aux trois sommets du triangle : AH, BH, ΓH.

D'une part, <le rectangle> sous BΓ <et> EH est double du triangle BHΓ, d'autre part, <le rectangle> sous ΓA <et> ZH <est double> du triangle AΓH, et <le rectangle> sous AB <et> DH <est double> du triangle ABH.

BΓ est la base du triangle BHΓ et EH est la hauteur de ce même triangle. L'aire du triangle BHΓ est donc $\frac{B\Gamma \cdot EH}{2}$. Le produit BΓ·EH vaut le double de l'aire du triangle BHΓ.
De même, ΓA·ZH vaut le double de l'aire du triangle AΓH et AB·ΔH vaut le double de l'aire du triangle ABH.

<Le rectangle> sous le périmètre du triangle ABΓ et la <grandeur> EH, c'est-à-dire le rayon du cercle ΔEZ, est double du triangle ABΓ.

La somme des aires des trois triangles BHΓ, AΓH et ABH est équivalente à l'aire du triangle ABΓ. Et puisque ΔH, EH et ZH sont trois rayons du cercle inscrit, on peut écrire :
2 aires de ABΓ = BΓ·EH + ΓA·ZH + AB·ΔH,
2 aires de ABΓ=(BΓ + ΓA + AB)·EH (1)
où BΓ + ΓA + AB est le périmètre du triangle ABΓ.

Que soit prolongée ΓB et que soit placé <sur ce prolongement> BΘ égale à AΔ. ΓBΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ parce que d'une part AΔ est égal à AZ, d'autre part ΔB <est égal> à BE et ZΓ <est égale> à ΓE.

On positionne sur le prolongement de ΓB le point Θ tel que BΘ=AΔ. Les triangles AHZ et AHΔ sont isométriques car ils sont rectangles, ont le côté AH commun et ZH = HΔ. AΔ est donc égal à AZ. Pour une même raison, ΔB = EB et ZΓ = ΓE.
En vertu de ces égalités, le demi-périmètre du triangle ABΓ = ΓE + EB + AΔ = ΓE + EB + BΘ = ΓΘ. (2)

Donc, <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est égal au triangle ABΓ.

En associant les égalités (1) et (2), on trouve que l'aire du triangle ABΓ = ΓΘ·EH.

Mais <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est la racine <du carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH ; <le carré> du triangle ABΓ sera donc égal au carré de ΘΓ <multiplié> par <le carré> de EH.

Puisque l'aire du triangle ABΓ = ΓΘ·EH, elle peut s'exprimer par $\sqrt{\Gamma\Theta^2 \cdot \mathrm{EH}^2}$ (3).
Une autre manière de le dire est que le carré de l'aire vaut $\Gamma\Theta^2 \cdot \mathrm{EH}^2$.

Que soit menée d'une part HΛ perpendiculairement à ΓH, d'autre part BΛ <perpendiculairement> à ΓB et que soit mené ΓΛ.

On construit HΛ perpendiculairement à ΓH et BΛ perpendiculairement à ΓB. On trace ΓΛ pour terminer le triangle ΓBΛ.

Si maintenant chacun <des angles> sous ΓHΛ <et> ΓBΛ est droit, alors le quadrilatère ΓHBΛ est <inscrit> dans un cercle ; donc, <les angles> sous ΓHB <et> ΓΛB sont égaux <ensemble> à deux droits.

Le triangle ΓHΛ est rectangle en H : il est donc inscrit dans le cercle de diamètre ΓΛ. Il en est de même pour le triangle ΓBΛ, rectangle en B qui est lui aussi inscrit dans le cercle de diamètre ΓΛ.
Les quatre points Γ, Λ, B et H sont donc cocycliques et la somme des angles opposés de ce quadrilatère convexe ΓHBΛ inscrit dans un cercle vaut 2 angles droits :
$\widehat{\Gamma\mathrm{HB}} + \widehat{\Gamma\Lambda\mathrm{B}} = 180°$. (4)

Et, d'autre part, <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> à deux droits parce que les angles autour de H sont coupés en deux par AH, BH <et> ΓH, et <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> aux angles sous AHΓ <et> ΔHB et, ensemble, ils sont égaux à quatre droits ; donc, <l'angle> sous AHΔ est égal à celui sous ΓΛB.

Considérons six des angles en $\widehat{H}$:
- $\widehat{\Gamma\mathrm{HE}} = \widehat{\Gamma\mathrm{HZ}}$ puisque les triangles EHΓ et ΓHZ sont isométriques,
- $\widehat{\mathrm{EHB}} = \widehat{\mathrm{BH}\Delta}$ puisque les triangles EHB et BHΔ sont isométriques,
- $\widehat{\mathrm{AH}\Delta} = \widehat{\mathrm{ZHA}}$ puisque les triangles AHΔ et AHZ sont isométriques.

$\widehat{\Gamma\mathrm{HE}} + \widehat{\mathrm{EHB}} + \widehat{\mathrm{AH}\Delta} = \widehat{\Gamma\mathrm{HZ}} + \widehat{\mathrm{BH}\Delta} + \widehat{\mathrm{ZHA}}$
$\widehat{\Gamma\mathrm{HB}} + \widehat{\mathrm{HA}\Delta} = \widehat{\mathrm{AH}\Gamma} + \widehat{\mathrm{BH}\Delta}$.
Puisque la somme de ces six angles vaut 360°, nous avons : $\widehat{\Gamma\mathrm{HB}} + \widehat{\mathrm{HA}\Delta} = 180°$. (5)
De (4) et (5), on tire que
$\widehat{\Gamma\Lambda\mathrm{B}} = \widehat{\Delta\mathrm{HA}}$. (6)

Et <l'angle> droit sous ΑΔΗ est égal à <l'angle> droit sous ΓΒΛ ; le triangle ΑΔΗ est donc semblable au triangle ΓΒΛ.

L'égalité (6) implique que les deux triangles rectangles ΓΒΛ et ΑΔΗ sont semblables.

Comme ΒΓ <est> à ΒΛ, ΑΔ <est> à ΔΗ, c'est-à-dire ΒΘ <est> à ΕΗ et, alternativement, comme ΓΒ <est> à ΒΘ, ΒΛ <est> à ΕΗ,

Les côtés homologues de ces deux triangles sont proportionnels : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B\Lambda}}{\Delta\mathrm{H}}$.
Le calcul des proportions permet d'échanger les termes moyens : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Lambda}} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{H}}$.
Et puisque $\Delta\mathrm{A} = \mathrm{B}\Theta$ par construction et que ΔΗ et ΕΗ sont deux rayons du cercle inscrit, on obtient : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Lambda}} = \frac{\mathrm{B}\Theta}{\mathrm{EH}}$ et en échangeant à nouveaux les termes moyens, on obtient : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{B\Lambda}}{\mathrm{EH}}$. (7)

c'est-à-dire ΒΚ <est> à ΚΕ, parce que ΒΛ est parallèle à ΕΗ,

Les deux triangles ΒΛΚ et ΕΗΚ ont leurs côtés homologues parallèles : ils sont donc semblables et on a : $\frac{\mathrm{B\Lambda}}{\mathrm{EH}} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{EK}}$. (8)
De (7) et (8), on déduit : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{EK}}$.

et en rassemblant, comme ΓΘ <est> à ΒΘ, de même ΒΕ <est> à ΕΚ ;

Une propriété du calcul des proportions conduit à : $\frac{\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{B}\Theta}{\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{BK}+\mathrm{KE}}{\mathrm{EK}}$ et donc à $\frac{\Gamma\Theta}{\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EK}}$.

de sorte que, comme <le carré> de ΓΘ <est> au <rectangle> sous ΓΘ <et> ΘΒ, ainsi le <rectangle> sous ΒΕ <et> ΕΓ <est> au <rectangle> sous ΓΕ <et> ΕΚ,

et en multipliant à gauche par $\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Theta}$ et à droite par $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}}$, on obtient : $\frac{\Gamma\Theta\cdot\Gamma\Theta}{\mathrm{B}\Theta\cdot\Gamma\Theta} = \frac{\mathrm{BE}\cdot\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EK}\cdot\Gamma\mathrm{E}}$.

c'est-à-dire au <carré> de ΕΗ ; <car> dans un <triangle> rectangle, la hauteur ΕΗ est abaissée de <l'angle> droit sur la base ;

Dans le triangle ΓΚΗ rectangle en Η par construction, ΗΕ est la hauteur issue du sommet de l'angle droit. Son pied partage l'hypoténuse en deux segments ΓΕ et ΕΚ et on sait que $\mathrm{EK}\cdot\Gamma\mathrm{E}=\mathrm{EH}^2$. Donc : $\frac{\Gamma\Theta^2}{\mathrm{B}\Theta\cdot\Gamma\Theta} = \frac{\mathrm{BE}\cdot\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EH}^2}$.

de sorte que <le carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de ΕΗ, produit dont la racine était la superficie du triangle ΑΒΓ, sera égal <au rectangle> sous ΓΘ <et> ΘΒ <multiplié> par <le rectangle> sous ΓΕ <et> ΕΒ.

L'égalité du produit des moyens et des extrêmes dans cette dernière égalité donne : $\Gamma\Theta^2 \cdot \mathrm{EH}^2 = \Gamma\Theta \cdot \Theta\mathrm{B} \cdot \mathrm{BE} \cdot \Gamma\mathrm{E}$. (9)
En comparant (3) et (9), on a bien montré que l'aire du triangle ΑΒΓ vaut $\sqrt{\Gamma\Theta \cdot \Theta\mathrm{B} \cdot \mathrm{BE} \cdot \Gamma\mathrm{E}}$.

Et chacune des <grandeurs> ΓΘ, ΘΒ, ΒΕ, ΓΕ est donnée ; en effet, d'une part ΓΘ est la moitié du périmètre du triangle ΑΒΓ,

Nous posons $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{B\Gamma} = a$, $\Gamma\mathrm{A} = b$ et nous notons $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre. En (2) ci-dessus, nous avions déjà remarqué que ΓΘ vaut le demi-périmètre p.

d'autre part ΒΘ <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse ΓΒ,

$\mathrm{B}\Theta = \Gamma\Theta - \Gamma\mathrm{B} = p - a$.

et BE <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse AΓ, et la droite EΓ est l'excédent par lequel la moitié du périmètre dépasse AB, puisque, d'une part, EΓ est égale à ΓZ, d'autre part BΘ <est égale> à AZ puisqu'elle est aussi égale à AΔ.	$\mathrm{BE} = \Gamma\Theta - \Gamma\mathrm{E} - \mathrm{B}\Theta = p - \Gamma\mathrm{Z} - \mathrm{ZA} = p - \Gamma\mathrm{A} = p - b$. $\Gamma\mathrm{E} = \Gamma\Theta - \mathrm{EB} - \mathrm{B}\Theta = p - \Delta\mathrm{B} - \mathrm{A}\Delta = p - \mathrm{AB} = p - c$.
La superficie du triangle ABΓ est donc ainsi donnée.	L'aire du triangle de côté de longueur a, b et c est $$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ où $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Annexe III

Fiches à photocopier

Texte de Théon de Smyrne

Nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons par exemple deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout, soit en puissance le côté et la diagonale ; ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois. Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit.

Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité.

Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors deux unités ; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités ; le carré construit sur le côté 2 est 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3 : le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2 ; nous aurons 7 unités. Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double 50 du carré 25.

À nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités ; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17. Cette fois encore, le carré 289 est plus grand d'une unité que le double 288 du carré de 12.

Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.

Texte de Héron d'Alexandrie (1)

La formule

Ainsi, par exemple, que les côtés du triangle soient les unités : 7, 8, 9. Additionne le 7 et 8 et 9 : cela devient 24, prends la moitié de cela et cela donne 12, soustrais-en 7 et il reste 5 ; à nouveau enlève 8 de 12 : il reste 4 et encore 9 <de 12> : il reste 3. Fais 12 fois 5 cela devient 60, et 60 fois 4 : cela devient 240 et 240 fois 3 cela devient 720 : prend le côté de 720 et ce sera la superficie du triangle.

L'algorithme

Comme les 720 n'ont pas un côté rationnel, nous prendrons la racine avec la différence la plus petite de la manière suivante : comme le carré s'approchant de 720 est 729 et qu'il a 27 pour racine, divise les 720 par 27 : il vient 26 et deux tiers ; ajoute les 27 : il vient 53 deux tiers. De ceci, <prends> la moitié : il vient $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. La racine de 720 sera donc au plus près les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Cependant, les $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ <multipliés> par eux-mêmes, cela produit $720\frac{1}{36}$: de sorte que la différence est la fraction $\frac{1}{36}$ de l'unité. Et si nous voulons que la différence devienne une fraction plus petite que $\frac{1}{36}$, nous mettons à la place des 729 les 720 et $\frac{1}{36}$ maintenant trouvés, et après avoir effectué les mêmes <opérations>, nous trouverons la différence devenue beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

Texte de Héron d'Alexandrie (2)

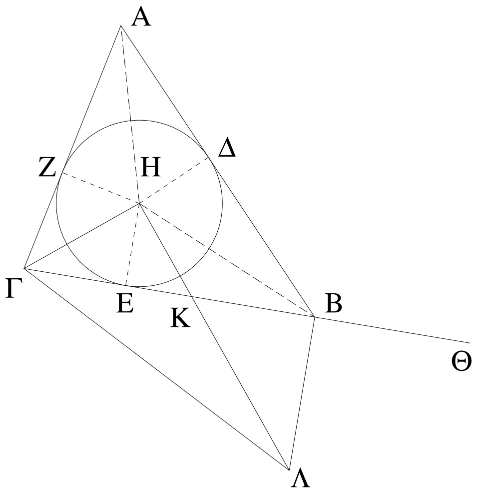
Démonstration de la formule

Que soit donné le triangle ABΓ et que soient données <les grandeurs> AB, BΓ <et> ΓA : trouver la superficie.

Que soit inscrit dans le triangle le cercle ΔEZ, dont le centre sera H, et que soient menés AH, BH, ΓH, ΔH, EH, ZH.

D'une part, <le rectangle> sous BΓ <et> EH est double du triangle BHΓ, d'autre part, <le rectangle> sous ΓA <et> ZH <est double> du triangle AΓH, et <le rectangle> sous AB <et> DH <est double> du triangle ABH.

<Le rectangle> sous le périmètre du triangle ABΓ et la <grandeur> EH, c'est-à-dire le rayon du cercle ΔEZ, est double du triangle ABΓ.



Que soit prolongée ΓB et que soit placé <sur ce prolongement> BΘ égale à AΔ. ΓBΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ parce que d'une part AΔ est égal à AZ, d'autre part ΔB <est égal> à BE et ZΓ <est égale> à ΓE. Donc, <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est égal au triangle ABΓ.

Mais <le rectangle> sous ΓΘ <et> EH est la racine <du carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH ; <le carré> du triangle ABΓ sera donc égal au carré de ΘΓ <multiplié> par <le carré> de EH.

Que soit menée d'une part HΛ perpendiculairement à ΓH, d'autre part BΛ <perpendiculairement> à ΓB et que soit mené ΓΛ.

Si maintenant chacun <des angles> sous ΓHΛ <et> ΓBΛ est droit, alors le quadrilatère ΓHBΛ est <inscrit> dans un cercle ; donc, <les angles> sous ΓHB <et> ΓΛB sont égaux <ensemble> à deux droits.

Et, d'autre part, <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> à deux droits parce que les angles autour de H sont coupés en deux par AH, BH <et> ΓH, et <les angles> sous ΓHB <et> AHΔ sont égaux <ensemble> aux angles sous AHΓ <et> ΔHB et, ensemble, ils sont égaux à quatre droits ; donc, <l'angle> sous AHΔ est égal à celui sous ΓΛB.

Et <l'angle> droit sous AΔH est égal à <l'angle> droit sous ΓBΛ ; le triangle AΔH est donc semblable au triangle ΓBΛ.

Comme BΓ <est> à BΛ, AΔ <est> à ΔH, c'est-à-dire BΘ <est> à EH et, alternativement, comme ΓB <est> à BΘ, BΛ <est> à EH, c'est-à-dire BK <est> à KE, parce que BΛ est parallèle à EH, et en rassemblant, comme ΓΘ <est> à BΘ, de même BE <est> à EK ; de sorte que, comme <le carré> de ΓΘ <est> au <rectangle> sous ΓΘ <et> ΘB, ainsi le <rectangle> sous BE <et> EΓ <est> au <rectangle> sous ΓE <et> EK, c'est-à-dire au <carré> de EH ; <car> dans un <triangle> rectangle, la hauteur EH est abaissée de <l'angle> droit sur la base ; de sorte que <le carré> de ΓΘ <multiplié> par <le carré> de EH, produit dont la racine était la superficie du triangle ABΓ, sera égal <au rectangle> sous ΓΘ <et> ΘB <multiplié> par <le rectangle> sous ΓE <et> EB.

Et chacune des <grandeurs> ΓΘ, ΘB, BE, ΓE est donnée ; en effet, d'une part ΓΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ, d'autre part BΘ <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse ΓB, et BE <est> l'excédent dont la moitié du périmètre dépasse AΓ, et la droite EΓ est l'excédent par lequel la moitié du périmètre dépasse AB, puisque, d'une part, EΓ est égale à ΓZ, d'autre part BΘ <est égale> à AZ puisqu'elle est aussi égale à AΔ.

La superficie du triangle ABΓ est donc ainsi donnée.

Chapitre 20

Le défi de l'irrationalité

1 Logistique et arithmétique

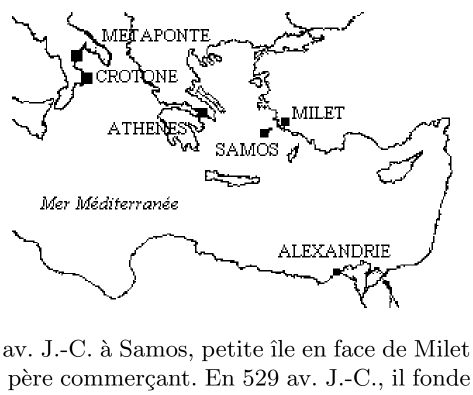
Les mathématiques ont d'abord été une manipulation de nombres : ceux-ci permettaient le dénombrement de collections finies, mais ils intervenaient également pour exprimer la mesure de grandeurs géométriques comme la longueur, l'aire, le volume ou l'amplitude d'angles. Ce rôle attribué aux nombres se retrouve aussi bien au Proche-Orient qu'en Grèce, et pour ce que l'on en sait, en Inde.

Les Babyloniens en particulier ont fait un effort pour poser et résoudre des problèmes de géométrie au moyen de segments rationnels et de proportions numériques. La seule distinction qui est faite est celle entre nombres qui s'expriment exactement (en base 60) et nombres ≪ qui n'existent pas ≫ et qui sont remplacés par une valeur approchée, sans donner aucune explication (voir [46]).

Les Grecs distinguaient la partie noble des activités numériques sous le nom d'≪ arithmétique ≫ et la partie pratique sous celui de ≪ logistique ≫. Cette partie maintenait actifs les procédés numériques d'approximations déjà connus des Babyloniens et des Égyptiens. Un système d'écriture des nombres sous forme décimale basé sur l'usage de l'alphabet grec est connu, mais il ne permet pas un calcul aisé ; aussi de nombreuses opérations continuent à être exécutées en utilisant le système babylonien d'écriture des fractions (voir [52]).

Dès le V^e siècle av. J.-C., l'école philosophique regroupée autour de PYTHAGORE[1] appuie ses principes sur l'expérience des mathématiciens eux-mêmes, et notamment sur l'usage des proportions numériques dans la résolution de nombreux problèmes.

Le pythagorisme explicitait pour le mathématicien le sens de son travail, à savoir la connaissance par le nombre de la réalité des choses. Le pythagorisme a intégré la mathématique à la ≪ philosophie ≫, c'est-à-dire, en l'occurrence, à une doctrine de la nature, pour qui $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ *(mathéma)* ne signifie autre chose que la connaissance immédiate de cette nature par les nombres.



[1] PYTHAGORE DE SAMOS, né dans la première moitié du VI^e siècle av. J.-C. à Samos, petite île en face de Milet où il étudie à l'école fondée par THALÈS. Il visite Alexandrie avec son père commerçant. En 529 av. J.-C., il fonde une école à Crotone en Italie du Sud. On y pratique la philosophie, les mathématiques, les sciences naturelles, la musique et des rites secrets. Il meurt à Métaponte, chassé de sa ville par une révolte contre sa ≪ secte ≫.

L'indifférenciation régnant encore entre physique et mathématique explique et même légitime le fait que ce soit dans une doctrine de la nature qu'apparaisse le « fondement ». Le principe des choses est le nombre entier, et par suite, la connaissance des rapports des nombres est suffisante pour celle des grandeurs physiques, c'est-à-dire « géométriques » (voir [37]).

On possède peu de données historiques sur l'origine et les causes de la recherche de démonstrations rigoureuses. Tout au plus, peut-on replacer cette quête dans le contexte de civilisation qui confère à l'argumentation dans la vie publique grecque, un rôle qu'elle ne tenait sans doute pas dans les civilisations de l'Orient.

Les « logisticiens » mettaient en évidence les difficultés particulières à effectuer certaines opérations, assorties toutefois de l'espoir d'y parvenir par quelque ingénieux procédé, ou bien en poursuivant assez longtemps un processus opératoire dont les résultats partiels seraient sans cesse meilleurs.

En émettant des doutes quant à la vraie nature de la difficulté éprouvée, c'est-à-dire quant à la cause de l'impuissance opératoire,

> est-ce une difficulté relative et temporaire, que la maladresse dans le choix d'un procédé ou l'arrêt prématuré des calculs, bref des raisons subjectives, n'ont pas permis de surmonter ?
>
> est-ce au contraire une impossibilité objective, tenant à la « nature des choses », et dans ce cas comment s'en assurer ?

les « arithméticiens » orientaient la recherche vers l'établissement de la preuve de cette impossibilité objective (voir [37]).

L'éclosion de cette science positive, détachée mais intégrant les collections de résultats empiriques des civilisations antérieures, conduira certes à une mathématique plus abstraite, mais surtout déductive. À une période de découvertes sporadiques va succéder une ère d'inventions systématiques. Celles-ci ont débouché sur la rédaction de textes démonstratifs et déductifs caractérisés par une charpente logique et par un choix judicieux des « notions premières » qui servent de fondements.

Les *Éléments* d'Euclide[2], étaient de loin les plus complets et les plus achevés, aussi bien sur le plan de la méthode que de la forme. Considérés comme un modèle de rigueur, ils constituent l'apogée de la création mathématique en Grèce classique et ont exercé une influence durable sur le développement des mathématiques ultérieures (voir [52]).

2 Grandeurs et nombres.

Une grandeur en mesure une autre de même nature si la seconde est obtenue en juxtaposant un nombre entier de fois la première. L'égalité de deux grandeurs est perçue comme la possibilité de les faire coïncider. Dans ce contexte, le nombre reste une « pluralité d'unités » dans une opération de comptage.

[2] Euclide d'Alexandrie a écrit les *Éléments* en treize livres. Il vécu vers 300 av. J.-C. (voir [110]). Ces textes regroupent tous les résultats antérieurs tout en ajoutant des recherches originales : Proclus affirme au V^{e} siècle après J.-C. qu'en rassemblant les *Éléments*, Euclide « en a coordonné beaucoup d'Eudoxe, perfectionné beaucoup de Théétète et qu'il a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montrés d'une manière relâchée » (voir [52]).

Fig. 1

La grandeur de gauche mesure la grandeur de droite ; le nombre lié à cette mesure est 5.

Deux grandeurs sont *commensurables* lorsque leur rapport (*ratio*) se ramène à un rapport de deux nombres entiers : ainsi la notion de nombre englobe aussi celle de fraction (voir [46]). La similitude de deux figures s'exprime alors directement par l'existence d'un rapport unique et bien défini entre segments homologues.

Fig. 2

Le rapport de la grandeur de gauche à la grandeur de droite s'exprime par la fraction $\frac{2}{5}$.

Certaines grandeurs ne peuvent pas s'exprimer par rapport à une autre par l'usage d'une fraction de nombres : c'est par exemple le cas de la diagonale d'un carré par rapport à son côté (figure 3), ou encore la diagonale d'un pentagone par rapport à son côté (figure 4). Il faut donc adjoindre au système d'opérateurs dont on disposait pour les grandeurs, à savoir les entiers et les rapports $\frac{m}{n}$, un opérateur nouveau, qui n'est plus un rapport numérique, mais une « raison » entre grandeurs.

On dit que de telles grandeurs sont *incommensurables* entre elles, que leur raison est *inexprimable* par une fraction, qu'elle est *irrationnelle*[3].

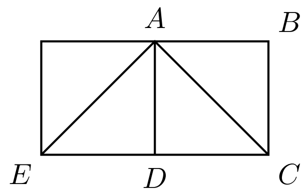


Fig. 3

Les triangles AEC et BAC sont tous deux rectangles isocèles : ils sont semblables et pourtant le rapport des grandeurs AC et AB est inexprimable par une fraction. La « raison » vaut $\sqrt{2}$.

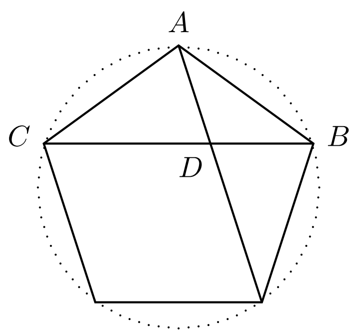


Fig. 4

Soit un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle. Les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ ont même amplitude (car ce sont des angles inscrits égaux à 36°). Les triangles isocèles ABC et DAB sont semblables. Le rapport des grandeurs BC et AB est inexprimable par une fraction. La « raison » vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour la théorie subtile du *rapport* exposée dans les *Éléments*, ce sont des grandeurs géométriques qui sont *irrationnelles* (d'où le féminin). Il ne s'agit pas de « nombres » irrationnels, ce qui n'a pas de sens pour les mathématiques grecques où le vocable nombre désigne toujours

[3]Il existe trois mots grecs pour ces trois notions qui sont conceptuellement différentes, mais qui dans le cadre de cette étude peuvent être considérées comme synonymes.

un nombre entier pendant la période classique puis un nombre entier ou fractionnaire à partir de la période hellénistique (voir [46]).

3 Légende ?

Un des grands triomphes de la mathématique grecque fut la découverte et le traitement des grandeurs irrationnelles. L'histoire de cette découverte ne nous est parvenue que par des textes postérieurs de près de sept siècles à l'époque de Pythagore.

Iamblichus (ou Iamblique) né vers 250 à Chalcis au Liban et mort vers 330 a écrit une *Vie de Pythagore*. Il situe cette découverte des irrationnelles non pas pour la diagonale du carré, mais pour le partage d'un segment en extrême et moyenne raison.

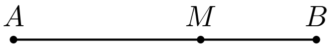


Fig. 5

Soit $AB = 1$. On cherche M pour que $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$.
La « raison » vaut $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Pappus d'Alexandrie, qui vécut à la fin du III^{e} siècle après J.-C. a écrit une *Collection mathématique* en huit livres ; il situe la découverte des irrationnelles dans la secte pythagoricienne à propos de la diagonale du carré, et l'attribue à Hyppasius[4].

Proclus Diadochus, né en 411 à Constantinople et mort en 485 à Athènes, dans ses *Commentaires sur* Euclide, attribue la découverte à Pythagore.

Les textes de Platon et Aristote plus proches des pythagoriciens la situent dans la secte pythagoricienne et parlent de la diagonale du carré (voir la duplication du carré à partir d'un texte extrait du *Ménon* de Platon, page 182).

Ce qui a frappé les contemporains, ce qui est nouveau et distingue la « raison » de la « ratio », c'est que cette propriété d'incommensurabilité des segments ne peut en aucune manière être constatée sur le dessin, la conviction de sa véracité ne pourra donc se faire que par une preuve, une démonstration. De plus, il y a incommensurabilité des segments (le rapport de la diagonale au côté du carré est $\sqrt{2}$), mais pas des surfaces (le rapport du carré construit sur la diagonale au carré construit sur le côté est 2). Comme le dit Caveing [37],

> Ce qui allait se révéler dans la découverte de l'irrationalité, c'était la richesse insoupçonnée du champ opératoire ainsi naïvement soumis d'abord à la loi « discontinue » du nombre. Du fait de la divisibilité indéfinie de la grandeur et de la possibilité d'inexistence d'une partie aliquote commune, le domaine des opérations effectuables grâce au rapport d'entiers ne pouvait plus être posé comme coextensif à celui des opérations requises par la mesure des grandeurs. Ainsi la fonction opératoire du nombre se détachait-elle d'une essence circonscrite étroitement par tradition à la « pluralité d'indivisibles ».

La découverte de l'incommensurabilité de certaines longueurs entre elles fut-elle, dès lors, un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement comme le pense Paul Tan-

[4] Hyppase de Métaponte, né vers 500 av. J.-C., aurait découvert les irrationnelles en considérant des pentagones emboités. D'après Jamblique, c'est lui le disciple de Pythagore qui aurait péri noyé, puni des dieux pour avoir révélé au monde l'existence des grandeurs irrationnelles.

NERY (voir [132]) ? Constitués en mouvement que nous qualifierions aujourd'hui de mouvement sectaire – basé sur l'adoration du principe ultime « Tout est nombre » (sous-entendus, entiers ou fractionnaires) –, il a dû être difficile aux adeptes pythagoriciens de remettre en cause leurs conceptions.

Pourtant, l'effort de reconstruction de l'édifice d'EUCLIDE sera rapidement mené à bien par EUDOXE DE CNIDE, qui vécut entre 400 et 350 av. J.-C. Comptemporain de PLATON, échangeant des idées sur plusieurs sujets dans une atmosphère de respect mutuel (voir [44]), c'est lui qui formulera la définition 5 du livre V des *Éléments* d'EUCLIDE au sujet de l'égalité des rapports.

> Des grandeurs sont dans le même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, quand, de tout équimultiple de la première et de la troisième quel qu'il soit, et de tout équimultiple de la deuxième à la quatrième quel qu'il soit, les premiers équimultiples sont excédents, sont égaux, ou sont plus petits que les derniers équimultiples considérés en ordre correspondant.

Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si, étant donné m et n entiers, toutes les fois que $ma < nb$, alors $mc < nd$, ou si $ma = nb$, alors $mc = nd$, ou si $ma > nb$, alors $mc > nd$. Cette définition offre l'avantage d'être applicable, non seulement aux nombres, aux grandeurs commensurables ou non, mais également à des grandeurs géométriques distinctes comme par exemple un rapport de volume de sphères égal à un rapport de cube de segments (voir [44]).

Chez des philosophes comme PLATON et ARISTOTE, l'étonnement initial devant le fait de l'irrationalité avait déjà fait place à une certaine admiration devant la difficulté vaincue.

À la lecture d'HIPPOCRATE DE CHIO[5], auteur du seul document mathématique actuellement disponible sur la mathématique du Ve siècle, FREUNDENTHAL n'y trouve aucun indice de crise (voir [71]). HIPPOCRATE ne considère que des rapports très particuliers et peut se passer d'une théorie générale des proportions et de la similitude ; il connaît les lignes incommensurables et les considère comme indirectement commensurables par la médiation des aires des carrés construits sur elles. L'existence connue de l'irrationalité n'empêche pas le géomètre de poursuivre ses recherches.

4 La numérisation des rapports

Une première trace de la numérisation des rapports se rencontre dans une définition de l'égalité de deux rapports, due à 'Umar AL-ḪAYYĀM, qui a beaucoup étudié EUCLIDE (voir [46]).

[5] HIPPOCRATE DE CHIO qui vécut vers 430 av.J.-C., s'est rendu célèbre en réalisant la quadrature de certaines lunules. On lui doit la première quadrature d'une surface curviligne effectuée rigoureusement dans l'histoire des mathématiques (voir [44]). Plusieurs fois, il compare des segments de cercles semblables dont il sait que le rapport de leur aire est le même que le rapport des carrés de leurs cordes. Il montre ainsi que le rapport de l'aire de deux cercles s'énonce avec des nombres entiers p et q si les diamètres sont en « raison » $\sqrt{p}/\sqrt{q}$. Les deux diamètres sont pour lui « potentiellement commensurables ». Nous avons gardé un fragment original de son œuvre qu'il nous est possible de comparer avec des commentaires et versions ultérieures. Il est également le premier à avoir écrit des *Éléments*, malheureusement perdus.

Étant données quatre grandeurs telles que la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien telle que la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien telle que la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique.

Exprimé en notations modernes, les égalités de rapports suivantes

$$\begin{aligned} a &= b \quad \text{et} \quad c = d; \\ a &= \frac{b}{n} \quad \text{et} \quad c = \frac{d}{n}; \\ a &= \frac{mb}{n} \quad \text{et} \quad c = \frac{md}{n}; \end{aligned}$$

permettent de conclure que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La naissance d'une nouvelle conception du nombre embrassant à la fois tous les nombres réels positifs ne peut être repérée qu'au début du X^e siècle dans l'emploi d'un même mot العدد (al-a'dad), signifiant nombre, pour les nombres rationnels العدد المنطق (al-a'dad al-manṭiqa, *nombre logique*) et les nombres irrationnels العدد اصمّا (al-a'dad aṣammā, *nombre sourd*). Le projet d'Al-Karağī[6] et d'Al-Samaw'al[7] d'étendre les opérations d'arithmétique, y compris les extractions de racines carrées aux quantités algébriques irrationnelles, conduira à un élargissement du champ du calcul qui concernera à la fois nombres et grandeurs. Ce point de vue entraînera d'ailleurs une réinterprétation des *Éléments* (voir [52]).

La première construction historique des nombres réels sera proposée en 1858 par Richard Dedekind[8]. Il suppose bien fondée l'arithmétique des nombres rationnels et rien d'autre. Il montre que l'on peut constater dans les nombres rationnels des phénomènes qui peuvent être employés à compléter ce domaine par une création unique de nombres irrationnels : le phénomène dont il parle est la *coupure*.

En se laissant guider par l'intuition géométrique qu'un point intérieur à un segment divise celui-ci en deux parties, Dedekind appelle coupure C_1, C_2 des rationnels, toute partition des rationnels en deux classes C_1 et C_2 non vides, disjointes et telles que tout nombre de la première C_1 est strictement inférieur à tout nombre de la seconde C_2.

Si d'aventure, il existe un plus grand élément dans C_1 ou un plus petit élément dans C_2, alors la coupure définit un nombre rationnel. Ainsi la coupure C_1, C_2 où C_1 est l'ensemble des rationnels

[6] Al-Karağī, mathématicien de la fin du X^e siècle, né en Iran actuel, écrit *Le livre suffisant sur la science de l'arithmétique*. On y découvre entre autre la loi de formation du triangle de Pascal.

[7] Élève du précédent, ce juif marocain est un médecin réputé et un mathématicien de premier plan. Son *Livre lumineux sur l'arithmétique*, écrit à l'age de dix-neuf ans, témoigne d'une grande familiarité avec les nombres réels, qu'il écrit au moyen des chiffres indiens. Il étudie les fractions décimales et l'extraction de racines n-ièmes.

[8] Richard Dedekind, mathématicien allemand (Brunswick, 1831 – Brunswick, 1916), propose une construction axiomatique des naturels, précise la structure des rationnels et comble le fossé entre la géométrie grecque et les nombres irrationnels permettant enfin de parler de *droite numérique*. On lui doit également le symbole $\mathbb{Z}$ pour les entiers relatifs et la structure de corps (Zahlkörper).

inférieurs ou égal à 3, et C_2 est l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à 3 définit rigoureusement le rationnel 3.

Il existe des coupures qui n'ont pas cette propriété, c'est-à-dire où C_1 n'a pas de plus grand élément et C_2 n' a pas de plus petit élément. Prenons comme exemple la coupure définie par C_1 qui représente l'ensemble comprenant tous les rationnels négatifs et les rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2, et C_2 tous les autres rationnels. Un plus grand élément x dans C_1 signifierait que $x^2 = 2$, ce qui est impossible avec x rationnel. Cette coupure C_1, C_2 crée donc un nouveau nombre irrationnel a tel que $a^2 = 2$.

À une coupure correspond donc exactement un réel, qu'il soit rationnel ou irrationnel. Dedekind montre ensuite que ses coupures vérifient toutes les propriétés que l'on est en droit d'attendre des réels pour l'ordre, l'addition et la multiplication[9] (voir [52]).

5 Calculs approchés de $\sqrt{2}$

5.1 Tablette mésopotamienne

Il existe dans la collection des antiquités babyloniennes de l'Université de Yale une petite tablette circulaire[10] d'à peine 7 cm de diamètre. Elle représente un carré et ses diagonales où trois séries de nombres sont gravés. La gravure se faisait par pression plus ou moins prononcée d'un roseau taillé dans un pain d'argile malléable. Les encoches avaient la forme de coins (*cuneus* en latin) semblables à des *clous* ou des *chevrons* ; d'où le nom de *cunéiforme* donné à ce type d'écriture. Une fois le texte écrit, l'argile était chauffée et prenait la consistance d'une brique, ce qui garantissait une certaine pérennité de l'information.

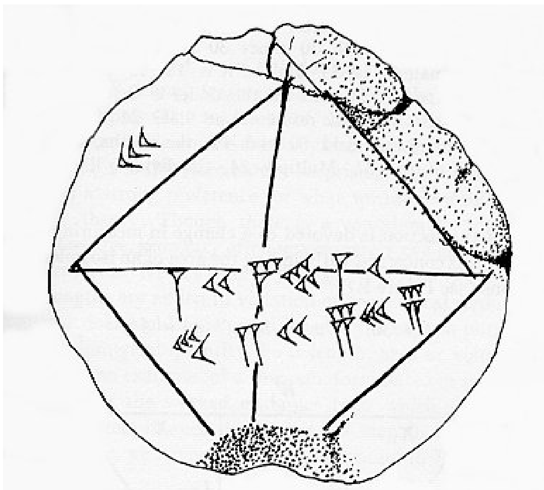


Fig. 6 : YBC7289

[9]En termes de la mathématique des structures, les coupures forment avec l'addition et la multiplication un corps commutatif totalement ordonné.

[10]Yale Babylonian Collection, YBC7289, datée de la première dynastie babylonienne, entre 1728-1530 av.J.-C.

L'interprétation des signes mathématiques est assez simple si l'on connaît les quelques règles qui régissent leur écriture[11]. Tête en haut et le corps fortement marqué, le *clou* représente l'unité.

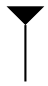


Fig. 7 : Représentation de 1 en cunéiforme.

Ces marques, regroupées par série de trois, sont utilisées pour indiquer les unités, de 1 à 9. Seuls les clous de la série du bas gardent une grande empreinte du corps. Voici par exemple la représentation du nombre 4.

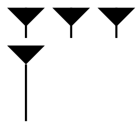


Fig. 8 : Représentation de 4 en cunéiforme.

Tête vers la gauche sans marque du corps, le *chevron* représente la dizaine. Ces chevrons sont utilisés par leur éventuelle répétition pour marquer les dizaines de 10 à 50.

Fig. 9 : Représentation de 10 en cunéiforme.

On juxtapose les symboles et on additionne leurs valeurs. Par exemple 24 se représente par deux chevrons (20) et quatre clous (4).

La base du système de numération est 60, mais le système sert aussi bien à la représentation des entiers qu'à celle des fractions ayant pour dénominateur une puissance de 60 (voir [27]) ; un bloc de deux chevrons et quatre clous suivi un peu plus loin d'un bloc de 5 chevrons et 1 clou s'interprétera soit par le nombre $24 \times 60 + 51$, soit par le nombre $24 + \frac{51}{60}$, car il n'y a pas de signe équivalent à notre virgule pour départager les deux cas. On se trouve donc obligé de recourir à la vraisemblance et au contexte pour comprendre de quels nombres il s'agit (voir [115]).

Examinons de plus près les trois nombres gravés sur la tablette mésopotamienne. Interprétons tout d'abord le nombre écrit près du côté supérieur gauche du carré. Composé de 3 chevrons, ce nombre ne peut être égal qu'à 30.

Fig. 10 : Représentation de 30 en cunéiforme.

Déchiffrons à présent le nombre inscrit au travers de la diagonale du carré. Nous lisons successivement de gauche à droite :

[11] Plusieurs manières de positionner les différents signes les uns par rapport aux autres ont été constatées sur différentes tablettes. Pour plus de détails, voir [79].

– 1 clou ;
– un bloc constitué de 2 chevrons et de 4 clous ;
– un bloc constitué de 5 chevrons et de 1 clou ;
– 1 chevron.

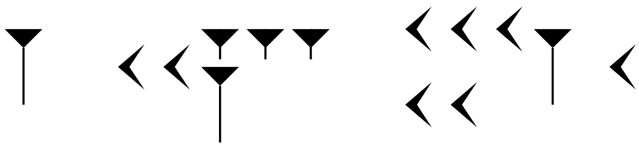


Fig. 11 : Le nombre inscrit au travers de la diagonale.

Plusieurs valeurs sont possibles :

– soit $1 \times 60^3 + 24 \times 60^2 + 51 \times 60^1 + 10 \times 60^0 = 305\,470$;

– soit $1 \times 60^2 + 24 \times 60^1 + 51 \times 60^0 + 10 \times 60^{-1} = 5\,091,166\,667$;

– soit $1 \times 60^1 + 24 \times 60^0 + 51 \times 60^{-1} + 10 \times 60^{-2} = 84,852\,778$;

– soit $1 \times 60^0 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3} = 1,414\,212\,963$.

Cette petite tablette « aide-mémoire » fournit donc dans un contexte de carré et de ses diagonales, une excellente approximation de $\sqrt{2}$, puisque l'erreur relative n'est que de $4 \cdot 10^{-7}$. Une telle précision ne peut provenir d'une mesure physique effectuée sur une figure même très soignée. Il faut donc en conclure que le scribe était conscient du fait que ce nombre avait pour carré 2, et qu'il disposait d'une technique de calcul des racines.

Gilles Godefroid [76] pense qu'une méthode proche de celle connue sous le nom d'algorithme de Héron[12] pouvait avoir été utilisée par les babyloniens. La voici :

Considérons a proche de $\sqrt{2}$: dans ce cas

$$2 = a^2 + h$$

avec h assez petit. Si nous considérons la somme de ces deux termes comme le début d'un carré, nous avons

$$\left(a + \frac{h}{2a}\right)^2 = a^2 + h + \frac{h^2}{4a^2}.$$

Et puisque h est petit, on a

$$\left(a + \frac{h}{2a}\right)^2 \simeq a^2 + h$$

et donc

$$\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + h} \simeq a + \frac{h}{2a}.$$

On remarque ensuite que

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + h}{a}\right) = a + \frac{h}{2a}$$

[12] Voir chapitre 14, page 451.

ce qui nous conduit à l'approximation

$$\sqrt{2} \simeq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

En partant de $a = 1$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{3}{2}$ qui s'écrit dans la notation babylonienne $1 + \frac{30}{60}$.

En partant de $a = \frac{3}{2}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{17}{12}$ qui s'écrit dans la notation babylonienne $1 + \frac{25}{60}$.

En partant de $a = \frac{17}{12}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{577}{408}$ dont l'écriture dans la notation babylonienne commence par $1 + \frac{24}{60}$.

En partant de $a = \frac{577}{408}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{665\,857}{470\,832}$ dont l'écriture dans la notation babylonienne commence par $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

Revenons à notre tablette : le troisième nombre comporte les blocs 42, 25 et 35.

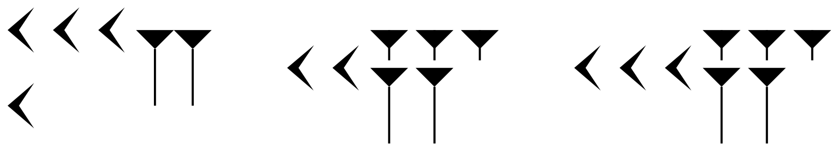


Fig. 12 : Le nombre inscrit sous la diagonale.

Effectuons le produit, en base 60, de 30 (la mesure du côté du carré) par $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$. On trouve successivement :

$30 \times 1 = 30$

$30 \times \frac{24}{60} = \frac{720}{60} = 12$

$30 \times \frac{51}{60^2} = \frac{1\,530}{60^2} = \frac{25\times 60+30}{60^2} = \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2}$

$30 \times \frac{10}{60^3} = \frac{300}{60^3} = \frac{5}{60^2}$

$30 \times \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right) = 30 + 12 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2} + \frac{5}{60^2} = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$

Le troisième nombre doit donc se lire $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42,426\,388$ et représente, avec une erreur relative de $4 \cdot 10^{-7}$, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 30.

Le grand spécialiste du déchiffrement des tablettes babyloniennes, O. Neugebauer (voir [113]), pense également que l'extraction avec une telle précision de la racine carrée de deux se faisait par la méthode qui vient d'être indiquée. Il soutient que les Mésopotamiens semblent avoir eu d'extraordinaires capacités à manipuler les nombres de toutes sortes de manières, manipulations dont ils consignaient soigneusement les résultats. Si la tablette YBC 7289 montre incontestablement que le scribe savait que la diagonale d'un carré de côté c est égale à $c\sqrt{2}$, elle ne permet pas de conclure à la connaissance du théorème de Pythagore dans le cas général. Que l'aire de la surface carrée $(AEFC)$ construite sur la diagonale (AC) d'un autre carré $(ABCD)$ est égale au double de l'aire de la surface de celui-ci, est immédiatement visible sur la figure 13.

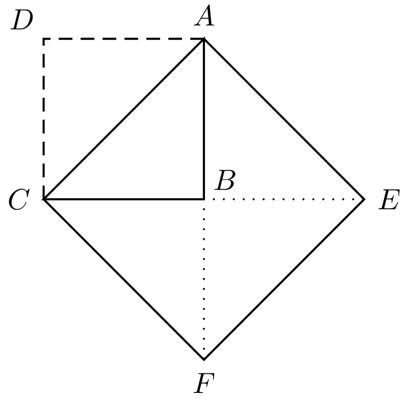


Fig. 13

5.2 Les Śulbasutras

Vers le III^{e} millénaire av. J.-C., des Aryens, originaires des steppes d'Eurasie, envahissent l'Inde et parviennent à dominer le peuple hindou. Ils installent en Inde du Nord une riche civilisation qui va développer une littérature savante écrite en sanscrit. Entre 1500 et 500 avant J.-C., les textes sacrés de l'hindouisme vont être rédigés et compilés dans une œuvre monumentale : la *Véda*[13]. Ce terme qui signifie « science, savoir » recouvre de nombreux recueils disparates destinés aux « fonctionnaires » du culte.

Les prescriptions et les connaissances requises pour construire les temples sont regroupées dans des *Sutras* (ensemble de règles rituelles). Les *Śulbasutras* (littéralement : règles des cordes, celles qu'emploient les géomètres pour mesurer) sont une section des Sutras consacrée à certaines règles mathématiques régissant la construction et la forme des autels sacrificiels. Ces « sacrifices » étaient des offrandes constituées de récoltes ou de bétail : les nombreux dieux hindous pouvaient ainsi mieux veiller à la marche correcte du monde.

Nous disposons de quatre textes complets d'auteurs différents : Baudhayana et Apastamba, antérieurs au V^{e} siècle av. J.-C., Manava et Katyayana, antérieurs au III^{e} siècle av. J.-C. Malgré la similitude entre les problèmes étudiés par Euclide et les problèmes abordés dans les *Śulbasutras*, ces derniers restent peu connus[14]. Ils présentent pourtant l'originalité d'être de simples annexes d'un rituel long et compliqué. Ils étaient tellement peu perçus comme textes mathématiques que l'on trouve difficilement leur influence chez les auteurs indiens postérieurs présentant une mathématique plus structurée comme Āryabhaṭa[15] et Brahmagupta[16].

Dans ses *Śulbasutras*[17], Baudhayana explique comment construire un carré d'aire double d'un carré donné, ce qui conduit à une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (voir [98] et [57]). Il suggère

[13] Ce terme donnera son nom à cette période historique de l'histoire indienne : la période de l'Inde *védique*.

[14] La première traduction anglaise de G. Thibaut date de 1877 à 1882 et ne se trouve que dans de rares bibliothèques spécialisées. Une nouvelle traduction a été publiée en 1983 par S. N. Sen et A. K. Bag, *The Śulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava*, New Dehli, Indian National Science Academy.

[15] Āryabhaṭa, vivait à Patna sur le Gange ; il a écrit en 499 après J.-C. un petit livre descriptif des règles de calcul usuelles en astronomie, sommaire des connaissances de l'époque. Il utilise l'écriture décimale et se sert d'un « trou » qui joue le rôle du zéro.

[16] Brahmagupta, vivait à Ujjain dans le centre de l'Inde ; dans son recueil *Le système révisé de Brahma* écrit en 628, quelques chapitres sont consacrés aux mathématiques. Il étudie les équations, parle d'inconnues, et considère zéro comme un nombre à part entière. C'est aussi à lui que l'on doit le plus ancien essai connu pour trouver la solution d'une équation à l'aide de fractions continuées (voir [42]).

[17] Baudhayana, *Śulbasutra*, I, 62.

qu'on augmente le côté du carré d'un tiers et cela de son quart diminué du trente-quatrième de lui-même.

Concrètement, cela revient à transformer un carré de côté 1 pour en faire un gnomon que l'on adjoint à un autre carré de côté 1 pour obtenir un carré dont l'aire sera 2. Le côté de ce nouveau carré devrait être $\sqrt{2}$ si la construction était exacte. L'auteur suggère de prendre comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la valeur

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{34}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

c'est-à-dire

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12\cdot 34}.$$

Le découpage du carré de côté 1 et la construction du gnomon, donnée par Joseph [98] permettent de justifier cette valeur approchée[18].

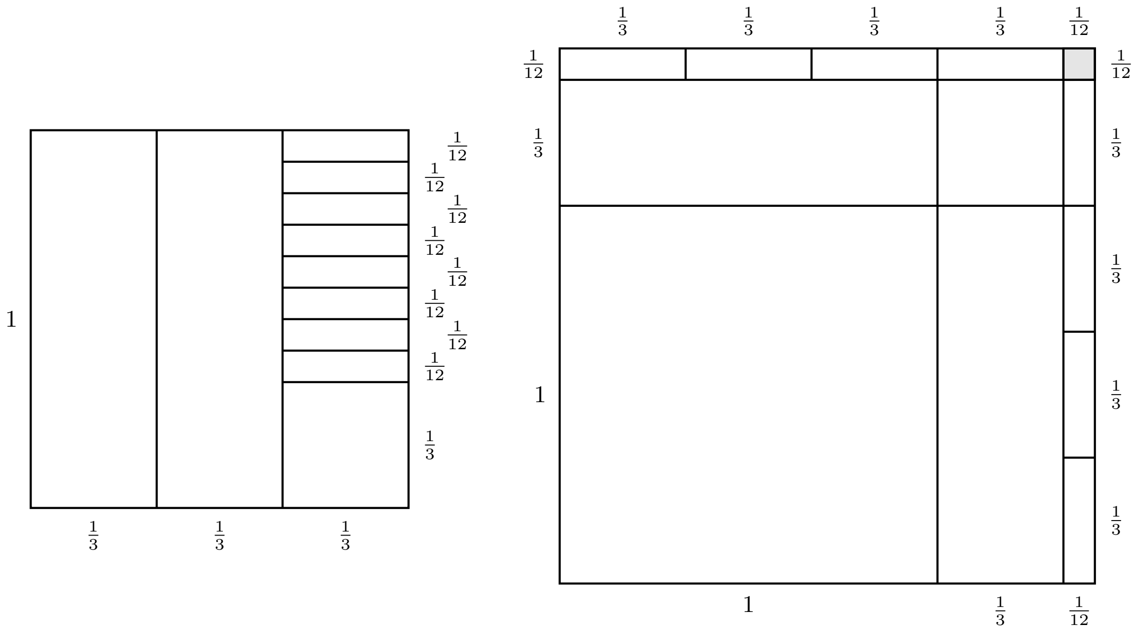


Fig. 14 : Découpage du carré et constitution du gnomon.

Un carré d'aire unité est découpé en deux grands rectangles d'aire un tiers, un carré d'aire un neuvième et huits petits rectangles d'aire un trente-sixième. Ces onze « pièces » sont assemblées pour former un gnomon autour d'un autre carré d'aire unité (figure 14). Ce gnomon est malheureusement incomplet, car un petit carré de côté un douzième n'est pas couvert en haut à droite de l'assemblage.

Le grand carré de droite, de côté $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ est d'aire légèrement plus grande que 2, exactement $2+\left(\frac{1}{12}\right)^2$.

[18] Par ailleurs, on ne connaît pas avec certitude la justification indienne sur laquelle les spécialistes ne sont pas d'accord.

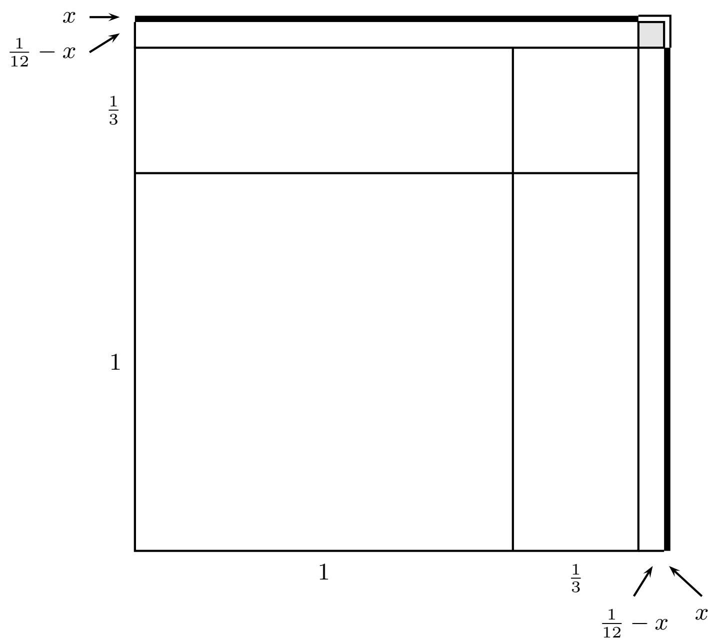


Fig. 15 : Second gnomon

On va enlever sur deux côtés du carré, un second gnomon très fin dont l'aire compensera en partie ce petit carré de côté $\frac{1}{12}$.

Les aires de chacun des rectangles très fins et allongés valent $\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot x$. Le côté du petit carré ombré intérieur au carré de côté $\frac{1}{12}$ obtenu avec le premier gnomon ne vaut plus que $\frac{1}{12} - x$. La largeur x des rectangles effilés (en haut et à droite sur la figure 15) sera choisie pour que les aires se compensent exactement.

Pour trouver la valeur de x, on résout

$$\begin{aligned} 2\left(1 + \frac{1}{3}\right) x &= \left(\frac{1}{12} - x\right)^2, \\ 2\frac{4}{3} x &= \frac{1}{144} - \frac{1}{6} x + x^2. \end{aligned}$$

En négligeant x^2 qui est petit, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{6}\right) x &= \frac{1}{144}, \\ \frac{17}{6} x &= \frac{1}{144}, \\ x &= \frac{1}{12 \cdot 34}. \end{aligned}$$

Ce découpage justifie la formule d'approximation donnée par la *Śulbasutra*. Le côté du carré après enlèvement des rectangles effilés est donc bien de

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}.$$

Le terme x^2 qui a été négligé donne une indication de l'erreur absolue qui est commise dans cette valeur approchée de $\sqrt{2}$. Elle est de l'ordre de $\left(\frac{1}{12 \cdot 34}\right)^2 \approx 6 \times 10^{-6}$. L'erreur relative est de l'ordre de 1×10^{-6}.

6 Le pair et l'impair chez Aristote.

Aristote dit que si la diagonale était commensurable avec le côté, alors un même nombre serait pair et impair. On suppose que la diagonale et le côté sont commensurables, et que l'unité de longueur est contenue m fois dans la diagonale et n fois dans le côté, les entiers m et n n'étant pas tous les deux pairs car sinon on utiliserait une unité double. D'après le théorème de Pythagore, on a $m^2 = 2n^2$, ce qui montre que m^2 est pair et donc que m est pair. En posant $m = 2p$ et en reportant dans l'égalité, on obtient en simplifiant par 2 l'égalité $2p^2 = n^2$ qui montre que n est pair et ceci est en contradiction avec l'hypothèse que m et n ne sont pas tous les deux pairs. Cette démonstration n'utilise que des connaissances arithmétiques des pythagoriciens.

7 Fractions continuées.

Si le terme *continued fraction* n'est introduit pour la première fois que par John Wallis[19] en 1655, le concept en est beaucoup plus ancien. On en relève de premières traces chez Āryabhaṭa en 499, Brahmagupta en 628 et chez Raffaele Bombelli[20] vers 1560 (voir [32]). La *fraction continuée* est un outil mathématique assez remarquable qui a eu beaucoup de succès avant l'apparition des calculatrices.

Une expression telle que

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

est une *fraction continuée* : elle se représente plus simplement par

$$< q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots > .$$

Les nombres q_1, q_2, q_3, q_4, ... sont les *quotients incomplets* ou *partiels* de la fraction continuée. Si la suite des quotients incomplets est interrompue après q_n, on obtient la *réduite*

$$< q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_n > .$$

La fraction continuée est dans ce cas *limitée*, sinon elle est *illimitée*. En instituant la théorie des fractions continuées, Euler a montré que tout réel peut s'écrire sous forme d'une fraction continuée : aux rationnels correspondent des fractions continuées limitées ; aux irrationnels correspondent des fractions continuées illimitées. Si l'irrationnel est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers, alors la fraction continuée est *périodique* (voir [53]).

La suite des *réduites*

$$\begin{array}{l} < q_1 > \\ < q_1, q_2 > \\ < q_1, q_2, q_3 > \\ \ldots \end{array}$$

[19]John Wallis, (Ashford, 1616 –Oxford, 1703). Connu pour son *Tractatus de sectionibus conicis*, un important traité d'analytique des coniques où est formulée pour la première fois la définition algébrique des coniques. Il s'intéressa également à l'analyse infinitésimale et rencontra les fractions continuées en cherchant des valeurs approchées de π.

[20]Cet ingénieur de talent, (Bologne, 1526 – Rome, 1573) publie une *Algèbre* où il solutionne l'équation du troisième degré en utilisant les nombres imaginaires.

de la fraction continuée correspondant à un nombre irrationnel converge vers ce nombre irrationnel.

Voyons comment Bombelli aborde la recherche de $\sqrt{2}$. Il écrit que :

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1).$$

Il remarque ensuite que

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1.$$

Ainsi, il peut écrire

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

En remplaçant à son tour $\sqrt{2}$ au dénominateur du terme de droite par sa valeur, à savoir $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, il trouve

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}},$$

et, en continuant de la même manière

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}.$$

L'écriture de $\sqrt{2}$ sous forme de *fraction continuée* est

$$\sqrt{2} = < 1, 2, 2, 2, \dots > .$$

La suite des *réduites* est

$< 1 > = 1,$

$< 1, 2 > = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2},$

$< 1, 2, 2 > = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{3}{2}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{5},$

$< 1, 2, 2, 2 > = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{7}{5}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \dfrac{5}{12} = \dfrac{17}{12},$

...

D'une manière générale, pour n un nombre naturel au moins égal à 1, si une réduite s'écrit $u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$, on constate que la réduite suivante $u_n = \frac{x_n}{y_n}$ se calcule par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{y_{n-1}+x_{n-1}}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{y_{n-1}}{y_{n-1} + x_{n-1}} = \frac{y_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1}}{y_{n-1} + x_{n-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \end{aligned}$$

et on retrouve les équations de récurrence de l'algorithme de THÉON (voir page 444).

8 L'algorithme (graphique) de NEWTON

Dans son traité *Tractatus de latitudinibus formarum* (Traité de la latitude des formes) publié vers 1350, Nicole ORESME[21] expose pour la première fois une méthode de représentation graphique des variations d'une grandeur, par exemple l'évolution de la chaleur d'un corps en fonction du temps qui s'écoule. Cette discipline (l'analyse), qui interprète de manière nouvelle pour l'époque la physique et la géométrie, va à son tour s'intéresser à l'irrationalité.

NEWTON développe en 1671, dans sa *Méthode des fluxions* [112], un algorithme général de recherche d'une valeur approchée d'un zéro d'une fonction, algorithme toujours utilisé de nos jours. Appliqué à une fonction particulière, les valeurs fournies par cet algorithme reproduisent de manière inattendue les résultats connus de HÉRON.

L'algorithme s'applique à une fonction réelle continue, deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$, qui admet un et un seul zéro z dans l'intervalle $]a, b[$ (ce qui est le cas de la plupart des fonctions polynômes et fonctions usuelles). Si en b par exemple, le produit $f(b) \cdot f''(b)$ est positif, la tangente à la courbe au point d'abscisse b rencontre l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_1 compris entre z et b. En réitérant le procédé à partir de l'intervalle $[a, a_1]$, on définit une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de valeurs qui s'approchent de plus en plus de celle de z (voir [28]).

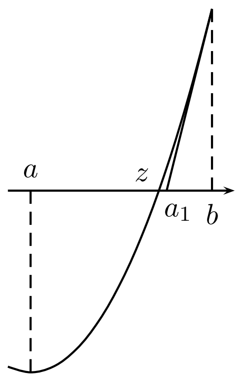


Fig. 16 : La méthode de NEWTON

La figure 16 montre comment on trouve a_1, la première valeur approchée du zéro z de la fonction : c'est le résultat d'une première itération de l'algorithme de NEWTON pour laquelle on construit la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse b.

Soit la valeur approchée a_i obtenue après i itérations de l'algorithme de NEWTON ; voyons comment est calculé a_{i+1} ($i \in \mathbb{N}_\circ$). Le point du graphe d'abscisse a_i est $(a_i, f(a_i))$. L'équation de la tangente au graphe en ce point est donnée par

$$y - f(a_i) = f'(a_i)(x - a_i).$$

Cette tangente coupe l'axe horizontal en un point d'abscisse a_{i+1} qui vérifie

$$-f(a_i) = f'(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

[21] Nicole ORESME (Allemagne sur Orne, 1348 – Lisieux, 1382) est un des grands penseurs du XIV$^{\text{e}}$ siècle. Grand-maître au Collège de Navarre en 1356, secrétaire et conseiller du Roi Charles V, évêque de Lisieux en 1378, il s'est intéressé à l'astronomie, aux mathématiques, à la théologie et à l'économie politique. Il a produit des versions latines et françaises de ses œuvres, donnant ainsi une impulsion certaine au développement de la langue française comme outil intellectuel.

ou encore

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)}.$$

C'est l'équation de récurrence de l'algorithme de NEWTON.

Puisque $\sqrt{2}$ est le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ pour laquelle $f'(x) = 2x$, on peut écrire l'équation de récurrence de l'algorithme de NEWTON dans ce cas particulier. On peut écrire

$$a_{i+1} = a_i - \frac{a_i^2 - 2}{2a_i} = \frac{2a_i^2 - a_i^2 + 2}{2a_i} = \frac{a_i^2 + 2}{2a_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2 + 2}{a_i}\right) = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{2}{a_i}\right).$$

On retrouve exactement la récurrence donnée page 456 par l'algorithme de HÉRON (voir [76]).

9 L'algorithme (numérique) de NEWTON

Cette méthode[22], également due à NEWTON, est un algorithme qui détermine successivement les chiffres de la racine d'un nombre en partant de ceux d'ordre le plus élevé.

Le nombre de chiffres de la racine carrée a d'un nombre naturel non nul A comporte autant de chiffres qu'il y a de tranches de deux chiffres dans le nombre A donné, la dernière tranche à gauche pouvant être incomplète.

En effet, si a s'écrit avec n chiffres, on a

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n.$$

Puisque $a \geqslant 1$, on a également

$$10^{2n-2} \leqslant a^2 < 10^{2n},$$

ce qui montre que a^2 s'écrit avec $2n - 1$ ou $2n$ chiffres[23].

Ayant fait cette remarque, NEWTON suppose qu'à une étape du processus, d est déjà déterminé et que l'on cherche le plus grand u possible pour que

$$A = (10d + u)^2 + R,$$

où R est le reste le plus petit possible ($R \geqslant 0$). Ceci sera vérifié si, en remplaçant dans la relation précédente u par $u + 1$, on obtient une valeur de R négative. On a

$$(10d + (u + 1))^2 = 100d^2 + 2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + 2 \cdot 10 \cdot d + u^2 + 2u + 1$$

et

$$(10d + u)^2 = 100d^2 + 2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + u^2.$$

Il faut donc que $R < 2 \cdot 10 \cdot d + 2u + 1$, ou encore $R \leqslant 2(10d + u)$.

En retranchant $100d^2$ de A, il vient $2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + u^2 + R$, donc pour trouver R, il faut encore retrancher $(2 \cdot 10d + u) \cdot u$ pour la plus grande valeur de u possible telle que $R \leqslant 2(10d + u)$.

[22] Cette technique était enseignée chez nous jusqu'à l'apparition des calculatrices au début des années 1970 (voir [82]).

[23] Le nombre 14 s'écrit avec deux chiffres et son carré 196, avec trois ; 85 s'écrit avec deux chiffres et son carré 7 225, avec quatre.

Examinons cette technique pour calculer la racine carrée approchée de $A = 200$. La racine carrée approchée a de ce nombre s'écrit avec deux chiffres. Puisque le nombre de la tranche incomplète de gauche (2) est compris entre le carré 1 de 1 et le carré 4 de 2, on peut affirmer que le premier chiffre (d) de a est un 1. On calcule $A - 100d^2 = 200 - 100 = 100$. Testons maintenant successivement les valeurs de u pour trouver celle qui vérifie la condition sur R.

u	$2 \cdot 10 \cdot d + u$	$(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$	R	$R \leqslant 2 \cdot 10 \cdot d + u$
0	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 0 = 20$	$20 \cdot 0 = 0$	$100 - 0 = 100$	$100 \leqslant 20$? NON
1	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 1 = 21$	$21 \cdot 1 = 21$	$100 - 21 = 79$	$79 \leqslant 21$? NON
2	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 = 22$	$22 \cdot 2 = 44$	$100 - 44 = 56$	$56 \leqslant 22$? NON
3	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 3 = 23$	$23 \cdot 3 = 69$	$100 - 69 = 31$	$31 \leqslant 23$? NON
4	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 4 = 24$	$24 \cdot 4 = 96$	$100 - 96 = 4$	$4 \leqslant 24$? OUI

Le deuxième chiffre (u) est donc 4 et on a $200 = 14^2 + 4$. La racine carrée approchée de 200 est 14, d'où l'on déduit que la racine carrée approchée de 2,00 est 1,4.

Newton a également proposé une « présentation » des calculs sous une forme qui rappelle celle de la division écrite. Avec un peu de pratique, les différents essais pour u ne doivent pas tous être notés puisque seul le dernier est utile.

$$\begin{array}{l|l} \overline{2}\ \overline{0\ 0} & 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Le nombre 200 (A) dont on cherche la racine carrée est écrit à la position qu'occupe le dividende dans une division ; les chiffres successifs de la racine carrée s'écriront à la position occupée par le diviseur ; les différentes valeurs des produits $(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ seront testées à l'endroit traditionnel du quotient.
On partage le nombre 200 en tranches de deux chiffres en commençant par la droite : la tranche de gauche se compose du seul chiffre 2.

$$\begin{array}{l|l} 2\ 0\ 0 & 1 \\ \cline{2-2} 1 & \\ \cline{1-1} 1\ 0\ 0 & \end{array}$$

Le plus grand nombre carré inférieur à 2 est 1 ; on écrit ce premier chiffre d de la racine carrée de 200 en haut à droite de la potence. On effectue ensuite $A - 100d^2$ à gauche de la potence.

$$\begin{array}{l|r} 2\ 0\ 0 & 1\ 4 \\ \cline{2-2} 1 & \\ \cline{1-1} & 2\ 4 \\ 1\ 0\ 0 & 4 \\ \cline{2-2} & 9\ 6 \end{array}$$

On teste les différentes valeurs de u possibles pour que le calcul $(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ donne un reste qui vérifie la condition $R \leqslant 2(10d + u)$. On sait ici que $u = 4$ convient. On recopie ensuite le deuxième chiffre de la racine en haut à droite de la potence.

$$\begin{array}{r|r} 2\ 0\ 0 & 1\ 4 \\ \cline{2-2} 1\ \ \ \ \ \ & \\ \cline{1-1} & 2\ 4 \\ 1\ 0\ 0 & 4 \\ 9\ 6 & \\ \cline{1-2} & 9\ 6 \\ 4 & \end{array}$$

On effectue $A - 100d^2 - (2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ à gauche de la potence pour trouver le reste R.
L'opération peut être poursuivie en « abaissant » une nouvelle tranche de deux zéros ce qui donnera une valeur approchée de la racine carrée de 20 000.

On peut poursuivre l'algorithme pour rechercher les 5 premiers chiffres significatifs de $\sqrt{2}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc|}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & 9 & 6 & & & & & & \\
\hline
 & & 4 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 2 & 8 & 1 & & & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & 9 & 0 & 0 & & \\
 & & 1 & 1 & 2 & 9 & 6 & & \\
\hline
 & & & & 6 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
 & & & & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 \\
\hline
 & & & & & 3 & 8 & 3 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|c|c}
\multicolumn{4}{l}{1\ 4\ 1\ 4\ 2} \\
\hline
2\ 4 & 2\ 8\ 1 & 2\ 8\ 2\ 4 & 2\ 8\ 2\ 8\ 2 \\
4 & 1 & 4 & 2 \\
\hline
9\ 6 & 2\ 8\ 1 & 1\ 1\ 2\ 9\ 6 & 5\ 6\ 5\ 6\ 4
\end{array}
$$

On a :

$$200\,000\,000 = 14\,142^2 + 3836$$

ou encore

$$2 = 1,4141^2 + 0,000\,038\,36.$$