Quatrième partie

Aspects historiques et épistémologiques

Chapitre 16

Le monde « arabe » : quelques pages de son histoire

Avertissement

Ce chapitre peut *a priori* sembler un peu long ; certains peut-être ne verront pas son utilité dans une recherche sur l'enseignement des mathématiques. Et pourtant...

Voici quelques objectifs glanés au fil de nos lectures des textes officiels, objectifs auxquels nous adhérons totalement. Dans le *Décret définissant les missions prioritaires de l'Enseignement Fondamental et de l'Enseignement Secondaire*, on lit que la Communauté française s'engage à adapter la définition des programmes et leur projet pédagogique à *la transmission de l'héritage culturel dans tous ses aspects et à la découverte d'autres cultures, qui, ensemble, donnent des signes de reconnaissance et contribuent à tisser le lien social* (article 9, 7°). À la page 8 de la brochure *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques – Humanités générales et technologiques* [2], on trouve qu'*une formation mathématique peut contribuer à faire connaître les apports de toutes les cultures au développement des mathématiques...* Dans les *Compétences terminales et savoirs communs – Humanités professionnelles et techniques* [4], on lit que ces humanités *assurent une formation humaniste*, notamment *en aidant les élèves à se situer dans le temps et l'espace* (page 8) et *en aidant les élèves à s'ouvrir à la diversité sociale et culturelle...* (page 15).

Le présent chapitre est essentiellement destiné à l'enseignant qui, par la lecture d'une quinzaine de pages, peut avoir une première idée, mais une idée correcte, de ce qui s'est passé dans le monde arabe à une époque qui va nous intéresser particulièrement en ce qui concerne l'algèbre. Si tout enseignant a une certaine connaissance de l'histoire et de la culture occidentales, il n'en va pas de même en ce qui concerne l'Orient. Pas mal d'idées fausses ont été et sont encore véhiculées et il n'est pas toujours facile de faire le tri. Bien sûr, on peut toujours se documenter, mais cela demande du temps, de la patience, de l'esprit critique, beaucoup de travail en plus de la préparation des cours de mathématiques eux-mêmes. Notre but est donc d'aider un peu ces enseignants qui, pour motiver leurs élèves, seront peut-être tentés, à un certain moment de leur carrière, d'introduire un concept par le biais de l'histoire.

L'important n'est pas de raconter des histoires aux élèves mais bien de leur faire ressentir le côté profondément humain des mathématiques qui, au départ, ont un côté éminemment pratique ; elles sont au service de l'homme et l'aident à se tirer d'affaire dans ses problèmes de tous les jours.

Ensuite, lorsqu'une civilisation atteint un certain degré de développement, les problèmes traités deviennent de plus en plus complexes ; on débouche même alors sur une phase de spécialisation où des érudits et des chercheurs créent des mathématiques « savantes ». Pour arriver à faire passer de tels messages chez les élèves, il faut parfois pouvoir se plonger quelque peu dans le contexte où les événements se sont déroulés.

Il n'est pas facile d'imaginer comment, à partir de la naissance d'une nouvelle religion, un empire a pu se constituer et arriver aussi rapidement à un état de développement tel que les activités philosophique et scientifique deviennent comparables à ce qu'on avait connu dans les civilisations grecque antique et hellénistique[1]. Le sens de l'expression « mathématiques arabes » n'est pas, comme nous le verrons, une chose évidente à comprendre. Affirmer que l'algèbre a été inventée par les Arabes est à la fois naïf et très restrictif. Il y a tout un environnement géographique, social, culturel, ... dont il faut tenir compte. Nous espérons que les quelques développements qui suivent répondront, du moins en partie, aux besoins des enseignants qui se lanceront dans cette « aventure » culturelle.

Nous avons introduit, dans le texte, certains mots ou noms propres significatifs, en écriture arabe, essentiellement à l'attention des collègues et élèves arabophones qui lisent et écrivent cette langue. Qu'on y voie aussi un « symbole » de notre volonté de rapprocher deux grandes cultures. En ce qui concerne la translitération de ces mots arabes, nous avons choisi un « alphabet phonétique » le plus indépendant possible de la langue dans laquelle se fait cette translitération, en l'occurrence ici, le français. Par exemple, pour la lettre arabe ش, nous avons choisi la translitération š, qui a l'avantage d'être universelle. En fait, c'est le « ch » français ou le « sh » anglais ou... Pour la même raison, nous avons translitéré la lettre خ en ẖ plutôt que kh et la lettre ج en ğ plutôt que j. La fiche 18 à la page 488 reprend complètement l'alphabet phonétique utilisé. Il est conseilllé de se munir d'une photocopie de cette fiche afin de rendre plus aisée la lecture des éléments d'histoire qui suivent.

Les sources de ceux-ci sont de deux types, d'une part, une formation intitulée « Introduction à la civilisation et à la science arabo-musulmane[2] » et un cours fait durant l'année académique 2002-2003 par le Professeur Ahmed Djebbar[3] aux universités de Mons et Bruxelles et d'autre part, une série d'articles ou d'ouvrages dont *Quelques étapes de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes* [15], *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* [22], *Une histoire de la science arabe* [60], *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident* [61], *Histoire des peuples musulmans* [62], *A History of the Arab Peoples* [88], *The Arabs in History* [104], *Histoire des sciences arabes* [120], *Ce que la culture doit aux Arabes d'Espagne* [139], *Les mathématiques arabes (VIII^e – XV^e siècles)* [142].

Un tableau chronologique reprenant les faits les plus marquants se trouve à la page 511.

[1]La civilisation hellénistique se développe en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C). Cette civilisation n'est pas limitée au seul « territoire grec ».

[2]Cette formation a été organisée durant plusieurs années par la Formation en Cours de Carrière, conjointement avec des professeurs de l'Université Libre de Bruxelles.

[3]A. Djebbar est professeur entre autres d'histoire des mathématiques à l'Université de Lille 1.

1 L'Arabie avant l'Islam

L'histoire ancienne des peuples de la péninsule arabique reste très obscure. Comme peu de textes arabes sont antérieurs au IV^{e} siècle de notre ère, il faut se référer à des documents étrangers. La littérature assyro-babylonienne du IX^{e} siècle avant J.-C. mentionne les Arabes sous le nom *Urbi* ou *Aribi*. La première utilisation du mot *al-'arab* (العرب) par les Arabes apparaît sur d'anciennes inscriptions de l'Arabie du Sud, vestiges de la civilisation florissante du Yémen – l'*Arabia Felix* de l'Antiquité. Le mot en question signifie bédouin, c'est-à-dire nomade.

Quant à l'étymologie du terme *Sarrasin*, au moins deux interprétations tout à fait différentes coexistent. Pour certains auteurs, le mot est d'origine grecque ; l'appellation *scénites* viendrait du grec *skênè* (*σκηνή*) signifiant « tente ». Cette dénomination se serait alors transformée en *Sarakênoi* (*Σαρακηνοί*) ou *Sar(r)aceni* en latin. Pour d'autres auteurs, le vocable viendrait de l'arabe *al-šarqiy* (الشرقيّ), qui signifie habitant de l'est.

La péninsule arabique, d'une superficie d'environ trois millions de kilomètres carrés, est limitée au nord par les territoires actuels de Jordanie et d'Iraq, à l'est par le golfe Persique, au sud par le golfe d'Aden et à l'ouest par la mer Rouge. Jusqu'au début du septième siècle, on peut en gros la diviser en deux grandes régions : le nord et le sud.

Les populations habitant ces deux grandes parties sont assez différentes : elles ne parlent pas la même langue ; l'écriture, la culture ne sont pas les mêmes.

Dans le sud au climat plus favorable que celui du nord, l'agriculture se développe et les tribus se sédentarisent rapidement. Ces peuples ont de nombreux contacts maritimes avec l'Éthiopie, l'Égypte et les régions du golfe Persique. Certaines villes yéménites sont de véritables cités-états puissantes et stables ; il s'agit là d'une structure socio-politique très contrastée par rapport à l'organisation du nord du pays.

Dans le nord, le plateau central est aride : ni fleuves, ni rivières, mais de nombreux *āwdiya*[4]. On trouve également des Arabes sédentaires le long des côtes, dans les oasis de l'est et de l'ouest. À l'époque préislamique, l'un des plus grands centres sédentaires de l'Arabie est La Mecque ou *Makka* (مكّة). Juifs et chrétiens s'établissent dans différentes parties du pays, notamment à *Yaṯrib*[5] (يثرب) et y répandent les cultures araméennes[6] et hellénistiques, ainsi que leurs religions monothéistes et les idées morales qu'elles véhiculent.

Les autres Arabes du nord vivent en tribus nomades. Ils ont des contacts avec la civilisation hellénistique, les mondes romain, indien, juif et chrétien. Ils parlent une langue sémitique[7] très structurée et possèdent une certaine unité de mœurs et des traditions orales communes.

On voit donc que l'Arabie n'est pas totalement isolée du reste du monde. Au contraire, elle est très tôt une zone de transit entre le monde méditerranéen et le lointain Orient.

L'organisation politique des tribus de bédouins est assez rudimentaire, comparée à l'organisation socio-politique d'un centre comme La Mecque, par exemple. À la tête de la tribu, on trouve le *Sayyid* ou *Šaiḫ* (سيّد ou شيخ) – souvent translitéré *cheikh* –, chef élu par les anciens de la tribu et qui est rarement plus que le premier parmi ses pairs. Il suit – en tentant parfois d'influencer – plus qu'il ne guide l'opinion tribale. Il ne peut punir ni imposer ses droits ; c'est une espèce d'arbitre. Il reçoit des avis d'un conseil d'anciens appelé *Majlis* (مجلس), qui est constitué par les chefs des familles et représentants des clans de la tribu. La vie est réglée par les coutumes, la tradition ou *sunna* (سنّة).

Au nord, à certaines époques, on voit aussi se former, tout comme au sud, des royaumes autour de villes prospères, comme le royaume nabatéen[8] de Pétra (premier siècle avant Jésus-Christ), qui sera finalement annexé par les Romains en 106 après J.-C. pour devenir la province d'Arabie. Ce royaume englobait le sud de la Palestine, la Transjordanie, le sud-ouest de la Syrie et le nord de la péninsule arabique. Cette civilisation était arabe dans sa langue, araméenne dans son écriture, sémitique[9] dans sa religion et gréco-romaine en ce qui concernait l'art et l'architecture.

On peut encore citer le royaume de Palmyre qui se crée en Syrie à partir d'une petite ville d'oasis[10]. Il atteint son apogée dès le deuxième siècle après Jésus-Christ en devenant une importante étape sur la route des caravanes reliant la Syrie occidentale et la Méditerranée à la vallée de l'Euphrate. On y parle l'araméen, le grec et le latin. La civilisation raffinée qui s'y développe est une agréable fusion des styles grecs, romains et orientaux. Ses derniers ≪ souverains ≫ seront

[4]Forme plurielle du mot *wādī* (وادي) souvent translitéré *oued* et qui signifie ravine, cours d'eau temporaire qui peut rouler de grandes quantités d'eau et de boue, lors d'orages par exemple.

[5]Cette ville sera plus tard rebaptisée Médine.

[6]Les Araméens, initialement établis en Mésopotamie, vont s'installer progressivement en Syrie entre le onzième et le septième siècle avant notre ère.

[7]L'arabe, l'hébreu, l'éthiopien, le babylonien, … sont des exemples de langues sémitiques. Une de leurs caractéristiques est que la plupart des mots sont formés autour de racines souvent trilitères (formées de trois consonnes). Ainsi, par exemple, les trois consonnes k, t et b induisent l'idée d'écriture. Le vocable ≪ kataba ≫ veut dire ≪ il a écrit ≫, ≪ kātib ≫ signifie ≪ scribe ≫, ≪ kitāb ≫, ≪ livre ≫, ≪ maktab ≫, ≪ bureau ≫ et ≪ miktab ≫, ≪ instrument pour écrire ≫, …

[8]Les Nabatéens sont en fait une population nomade de chameliers et de pasteurs, venant du sud de l'Arabie. Ils sont remontés au quatrième siècle avant Jésus-Christ vers le nord et se sont installés dans des régions au sud de la Mer Morte.

[9]La plupart des historiens des religions entendent par là, non seulement les religions monothéistes, mais aussi celles qui leur sont proches et qui étaient pratiquées à Tyr, Sidon, Pétra, en Mésopotamie, … Le culte d'Ashtart, par exemple, en fait partie, contrairement au bouddhisme, au védisme, au brahmanisme, …

[10]La population de l'oasis de Palmyre était essentiellement araméenne.

Odeinat II, puis à sa mort, son épouse, la fameuse reine Zénobie.

À la chute de ce royaume en 272 après Jésus-Christ[11], ce sont les rois lakhmides qui prennent la domination du désert. Le fondateur de ce royaume fait de Ḥira (حرة), au nord-est de la péninsule, sa capitale. Les Lakhmides sont originaires de l'Arabie du sud ; ils émigrent vers le nord, vers la Syrie, la Palestine et l'Iraq. Jusqu'à leur disparition en 602 après J.-C, ils vont être continuellement en guerre avec les Ghassanides qui occupent, eux, le nord-ouest de la péninsule. Ils seront au service des Sassanides de Perse en apportant leur soutien contre Byzance, l'ennemie commune. Les Arabes de Ḥira parlent l'arabe mais écrivent en langue syriaque. C'est de Ḥira que beaucoup d'éléments culturels et religieux vont pénétrer en Arabie.

Nous avons vu que, par-ci par-là, des nomades sédentarisés installent des villes avec un système de société mieux organisé que le tribalisme bédouin, et que l'une des plus importantes est La Mecque, dans le Ḥiğāz (الحجاز) – région de la péninsule arabique, le long de la mer Rouge.

Le pouvoir des notables de La Mecque n'est certes pas comparable à celui des souverains de Byzance, par exemple ; cependant il y aura des tentatives, de la part des Byzantins et du roi d'Abyssinie, visant à détourner, à leur profit, les routes commerciales passant par La Mecque.

C'est dans cette ville qu'un temple de forme cubique, abritant diverses divinités et connu sous le nom de *Ka'ba* (كعبة) est considéré par les Arabes comme « la Maison de Dieu », en arabe *Bayt Allah* (بيت الله). Des gens originaires de différentes tribus et régions y viennent en pélerinage. Chaque secte ou doctrine, même le christianisme, par exemple, y est représentée par des statues, figures ou images. Ces sont des ancêtres du Prophète, les *Banī Hāšim* (بني هاشم) de la tribu des *Qurayš* (قريش) qui avaient l'honneur d'assurer la garde de la *Ka'ba*.

2 L'avènement de l'Islam

Selon la tradition, *Muḥammad* (محمّد) serait né à La Mecque vers 570. Son père meurt avant sa naissance ; il perd sa mère à l'âge de six ans et est élevé par son grand-père qui décède deux ans plus tard. Il est alors pris en charge par son oncle *Abū Tālib* (ابو تالب) qui l'emmène en voyage en Syrie, à l'âge de douze ans, accompagnant une caravane commerciale. Il rentre à La Mecque et, à vingt-cinq ans, il retourne en Syrie en accompagnant une autre caravane qui fait commerce au nom de *Ḫadīğa* (خديجة), une riche veuve qu'il épouse à son retour.

C'est vers l'âge de quarante ans – soit vers 610 –, dit-on, qu'il reçoit le premier appel de l'archange Gabriel. Il se met à prôner la soumission à *Allah*, Dieu unique, grand justicier qui récompensera les hommes d'après leurs actions. Plusieurs personnes de son entourage immédiat adhèrent tout de suite à la nouvelle religion : la première des femmes est son épouse *Ḫadiğa*, le premier des jeunes, son cousin *'Alī* (عليّ), le premier des hommes, *Zayd Ibn Ḥariṯa* (زيد بن حرثى), son esclave affranchi. *Muḥammad* tente d'écarter ses contemporains de l'idolâtrie pratiquée par la classe dominante. Si ses premiers prêches sont considérés comme inoffensifs par l'oligarchie en place, ils finissent par inquiéter car trop de fidèles convertis viennent des classes les plus défavorisées. De plus, un changement de religion à La Mecque risque de faire perdre à la cité son statut de ville de pélerinage et donc de passage obligé. La situation devient délicate et *Muḥammad* conseille à ses compagnons d'émigrer en Abyssinie, afin d'échapper aux coups

[11]Les prétentions croissantes de Zénobie finissent par irriter l'empereur Aurélien.

des opposants. Lui-même continue à prêcher, de préférence lors des saisons de pélerinage. C'est ainsi qu'il convertit à l'Islam des pélerins de la ville de Yaṯrib, qui, de retour chez eux, commencent également à prêcher la nouvelle religion, qui a plus de succès qu'à La Mecque. Aussi, les convertis de Yaṯrib sont-ils qualifiés de *al-anṣār* (الانصار), c'est-à-dire ceux qui aident, les partisans. Dans l'oasis de Yaṯrib, la situation est très différente. On rencontre des réfugiés juifs et l'organisation politique est beaucoup plus rudimentaire qu'à La Mecque. Les premiers convertis mecquois du Prophète finissent par émigrer dans cette ville et seront connus sous le nom de *al-muhāǧirūn* (المهاجرون), les émigrés. En 622, *Muḥammad* rejoint lui-aussi cette même cité, accompagné de son ami *Abū Bakr* (ابو بكر). C'est *l'hiǧra* (الهجرة) ou *hégire*, l'émigration. Pour l'occasion, les partisans rebaptisent la ville *Madīna al-Nabī* (مدينة النبيّ), la Ville du Prophète, Médine. Le 16 juillet 622 de l'ère chrétienne correspond au 1er *Moḥarram*[12] (محرّم) de l'an 1 du calendrier musulman.

Muḥammad fait construire à Médine la première mosquée de l'Islam. Grâce à l'appui tant des *Muhāǧirūn* que des *Anṣār*, il jette les fondations d'un nouvel état, l'état islamique. Plusieurs fois les Mecquois vont tenter d'envahir Médine, mais la conclusion sera la prise de La Mecque par les musulmans en l'an 8 de l'hégire. L'islamisation de l'Arabie va être favorisée par l'arrivée de tribus bédouines venant de diverses régions de la péninsule et qui rallient Médine pour déclarer leur adhésion à l'Islam.

Après la prise de La Mecque, le Prophète s'installe à Médine. En l'an 10 de l'hégire, lors d'un dernier pélérinage, *haǧǧat al-wadā'* (حجّة الوداع) c'est-à-dire le pélerinage de l'adieu, il annonce à la communauté de ses fidèles qu'il a terminé sa mission puisqu'il a transmis le message qui lui avait été révélé. Il rentre alors à Médine où il tombe assez rapidement malade. Avant de mourir, il désigne *Abū Bakr* pour le remplacer comme guide des mulsulmans lors de la prière.

3 Les califes orthodoxes

En confiant à *Abū Bakr* la responsabilité de guide des musulmans, *Muḥammad* ne l'a en fait pas désigné comme un véritable successeur, c'est-à-dire quelqu'un qui remplirait, comme lui, les rôles de législateur, chef de la communauté religieuse et commandant de l'armée. Ainsi, le tout nouvel état musulman se trouve très tôt confronté à un énorme problème, celui du choix du successeur, en arabe *ẖālīfa* (خاليفة), calife.

Plusieurs tendances vont évidemment s'affronter. Les *Muhāǧirūn* défendent l'idée qu'ils sont de la tribu du Prophète et qu'ils ont été les premiers à recevoir la révélation. Les *Anṣār* prétendent que s'ils n'avaient pas donné asile au Prophète et à ses compagnons, la nouvelle religion ne se serait pas aussi bien implantée. Enfin, un peu plus tard apparaissent les Légitimistes, en arabe, *al-aṣḥāb al-naṣṣ w'al-ta'īn* (الاصحاب النصّ و التعيّن), ce qui signifie littéralement, les maîtres du texte exact et de la désignation (à un poste). Pour ces derniers, Allah ne peut confier l'avenir de la communauté des fidèles aux aléas d'une élection et il a donc sans doute choisi un successeur. Ils pensent que la personne la plus apte à assumer cette lourde responsabilité est *'Alī*, cousin paternel de *Muḥammad*, époux de sa fille *Fāṭma* (فاطمة) et l'un des premiers croyants. Enfin, un autre parti tente de faire valoir ses droits, celui des *Qurayš*, la tribu du

[12]Premier mois de l'année musulmane.

Prophète, dont la branche *Umayya* (اميّة) possède pouvoir, richesse et ruse.

Ce sont les *Muhāǧirūn* qui réussissent finalement à imposer leur point de vue. Ainsi, le premier calife est *Abū Bakr*, compagnon et ami le plus proche du Prophète. En fait il est le premier de ce qu'on appelle les <quatre> califes orthodoxes ou *al-ẖulāfa' al-rašidūn* (الخلفاء الرشدون) ; son califat ne durera que deux ans, de 632 à 634 et sera troublé par *al-ridda* (الردّة), littéralement le refus, qu'on appelle encore guerre de sécession. La cause en est l'opposition à l'obligation religieuse du paiement de la *zakāt* (زكاة)[13], menée par les tribus les plus éloignées des centres de La Mecque et Médine, qui considèrent que cette *zakāt* était un contrat entre eux et le Prophète. Puisque ce dernier est mort, le contrat n'existe plus. Toutefois, *Abū Bakr* réussit à unifier le pays sous un seul gouvernement central.

Les trois autres « califes orthodoxes » sont *'Umar Ibn al-Ḫaṭāb* (عمر بن الخطاب), calife de 634 à 644, *'Uṯman Ibn 'Affān* (عثمن بن عفّان), de la maison *Umayya* (644 – 656) et enfin, *'Alī Ibn Abī* Ṭālib (عليّ بن ابي طالب), calife de 656 à 661. C'est l'époux de *Fāṭma*, la fille du Prophète.

L'expansion arabe au Proche et Moyen-Orient peut s'expliquer par différents facteurs. Nous ne ferons que les citer ici sans les analyser en profondeur.

L'un des premiers événements marquants est l'anéantissement du puissant empire romain par les invasions germaniques.

Un autre facteur est l'affaiblissement et le déclin des empires byzantin et perse, conséquences des guerres continuelles qu'ils se livrent. Tant dans un camp que dans l'autre, ces luttes obligent le pouvoir à lever de lourds impôts, situation qui diminue la loyauté des sujets.

L'extrême rigueur avec laquelle les autorités religieuses de Byzance ont combattu l'église nestorienne de Syrie ou l'église copte[14] d'Égypte, par exemple, ne permet guère de gagner la sympathie des populations en place.

Ces deux réalités de terrain permettent de comprendre pourquoi ces populations ont pu voir en l'envahisseur arabe une alternative peut-être plus favorable à leurs conditions de vie.

À cette liste non exhaustive, loin de là, il faut encore ajouter la haute qualité militaire des généraux arabes à la tête des armées. Leurs campagnes seront comparées à celles d'Alexandre le Grand, d'Hannibal et de Napoléon. De plus, les soldats arabes sont résistants ; ils sont issus, du moins en grosse partie, du peuple saharien accoutumé à survivre dans des conditions très dures durant de longues périodes, maîtrisant la cavalerie et la méharée.

Sous le califat de *'Umar*, l'armée musulmane remporte une première victoire sur la Perse à

[13] La *zakāt* est une aumône, un don. Le mot vient de *al-zakā'* (الزكاء) qui signifie la pureté. Celui qui possède des biens doit en donner une partie aux plus démunis. Cela purifie son âme de l'avarice et de l'avidité. C'est une prescription coranique ; par exemple, on trouve dans la deuxième sourate *al-baqarah* (البقرة) – ce qui signifie la vache –, au verset 43 : « Et accomplissez la ṣalāt, et acquittez la zakāt… ». *Al-ṣalāt* (الصلاة) signifie la prière ; *zakāt* et *ṣalāt* sont deux des cinq piliers de l'Islam.

[14] Outre la division entre église catholique romaine et église orthodoxe d'Orient, il apparaît d'autres tendances qui diffèrent selon l'interprétation de la nature du Christ : deux natures – divine et humaine – (Concile de Chalcédoine, 451), une seule nature composée de deux natures (doctrine des Monophysites qui est notamment celle de l'église copte d'Égypte). Un patriarche de Constantinople, Nestorius, chef de l'église nestorienne, défend l'idée que la parole de Dieu habite dans l'homme Jésus depuis sa conception…

al-Qadisiyya en 637, puis à Jalula et enfin, en 642, à Nahavend. Cette même année voit la conquête de l'Iraq, de l'ancienne Mésopotamie et de la Perse occidentale et centrale. Se succèdent alors l'invasion de la Syrie, la chute de Jérusalem, la conquête de l'Égypte. En Syrie, *'Umar* nomme gouverneur *Mu'āwiyah Ibn Abī Sufiān* (معاويّه بن ابي سفيان) de la famille *Umayya*. En Égypte, c'est le calife *'Uṯman* qui désigne *'Abdallah Ibn Sa'd Ibn Abī Sarh* (عبدالله بن سعد بن ابي سره) comme gouverneur. Ce dernier crée la première flotte arabe avec l'aide de *Mu'āwiyah*. Ils deviennent ainsi les premiers amiraux arabes. Par la suite, les deux flottes, égyptienne et syrienne attaquent Byzance. Chypre, l'île de Rhodes... sont prises. Une partie de l'*Ifrīqīa* (إفريقيا), l'actuelle Tunisie tombe elle aussi aux mains des Arabes.

Le calife *'Uṯman* a tendance à nommer trop de membres de sa famille à des postes importants dans l'empire. On le presse d'abdiquer, ce qu'il refuse de faire. Il finit assassiné. Si à la mort de *'Umar*, le choix de son successeur *'Uṯman* n'avait guère posé de problème, cette fois, ce n'est pas pareil : la communauté musulmane reste divisée. Après bien des difficultés, c'est finalement *'Alī* qui est nommé calife dans la mosquée de Médine, le 24 juin 656. Il transporte immédiatement la capitale de Médine à *al-Kūfa* (الكوفة) en Iraq et révoque les gouverneurs de province nommés par son prédécesseur. Le gouverneur de Syrie, *Mu'āwiyah*, qui est de la même famille *Umayya* que le calife assassiné, appelle à la vengeance en excitant le peuple. L'affrontement a lieu le 28 juillet 657 sur la rive ouest de l'Euphrate ; les Iraquiens sont conduits par *'Alī* et les Syriens, par *Mu'āwiyah*. L'armée de *'Alī* est sur le point de remporter la victoire lorsqu'un allié de *Mu'āwiyah* a recours à une ruse : des copies du Coran attachées à des lances sont interprétées par tous comme un appel à l'arbitrage du Coran...

Que s'est-il passé alors ? Les témoignages sont contradictoires. Il est difficile de croire qu'un calife ait pu s'abaisser devant un gouverneur... Évidemment, il a sans doute perdu des partisans... Le 24 janvier 661, *'Alī* est assassiné près de Kūfa par un membre d'une ancienne secte de dissidents en Islam. L'endroit, situé à quelque 160 km au sud de *Baġdād* (بغداد), et aujourd'hui appelé *al-Naǧaf* (النجف), est un lieu de pélerinage.

4 Le califat umayyade

Mu'āwiyah se trouve au centre du conflit pour le pouvoir. Il fonde le deuxième califat, celui des *Umayyades*, du nom de sa famille. Il est nommé calife en 661 à Jérusalem et transporte la capitale de l'empire à Damas.

Entretemps, l'Iraq déclare *al-Ḥasan* (الحسن), successeur de son père *'Alī* assassiné. Mais *al-Ḥasan* abdique en faveur de *Mu'āwiyah* et se retire à Médine. Son frère *al-Ḥusayn* (الحسين) revendique le califat. À l'invitation des Iraquiens, qui l'avaient proclamé calife après la mort de son père et l'abdication de son frère, il se rend à Kūfa avec sa famille et quelques partisans. Il est massacré le 10 octobre 680 par l'armée *umayyade*. Ce jour correspond au 10 du mois de *Moḥarram* de l'année 61 de l'hégire et reste pour les *Chī'ites*[15], en arabe, *Šīa'īy* (الشيعيّ),

[15] C'est l'une des grandes subdivisions de l'Islam, celle des dissidents, des partisans de *'Alī* qui contestaient *Abū Bakr* comme successeur du Prophète. Une autre grande subdivision est la branche sunnite à laquelle se rattachent notamment les califats umayyade et abbasside. Ce vocable vient du mot arabe *sunna* qui signifie tradition et a ici le sens de ≪ ensemble des pratiques et préceptes du Prophète ≫.

littéralement les dissidents, le jour de la commémoration du martyre de *al-Ḥusayn*.

Le califat des *Umayyades* est marqué par une politique pragmatique, matérielle et profane. Ruse, machination politique et terreur en sont les principales caractéristiques.

C'est *Mu'āwiyah*, calife de 661 à 680, qui introduit, dans l'Islam, le principe de succession par hérédité, lorsqu'il nomme son fils *Yazīd* (يزيد) comme son successeur. Le califat de *Yazīd* ne dure que trois années. Les *Umayyades* sont ainsi la première dynastie en Islam.

À la fin du septième siècle, début du huitième, sous le califat de *'Abd al-Mālik* (عبد المالك) qui s'étale de 685 à 705, puis de son fils *al-Walīd* (الوليد), de 705 à 715, l'empire islamique, avec Damas comme capitale, est arrivé au sommet de son expansion. Il s'étend des côtes de l'océan Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus et aux frontières de la Chine avec aussi le Ḫwārizm[16], la Transoxiane[17], l'Afrique du Nord et l'Espagne. La conquête de l'Espagne se fait à partir de l'Afrique du Nord. En 711, un lieutenant berbère, du nom de *Ṭāriq Ibn Ziyād* (طارق بن زيّاد) fait une expédition de reconnaissance dans la péninsule ibérique ; il traverse la Méditerranée en un lieu qui s'appelle désormais Gibraltar. L'étymologie en est effectivement *ǧabal al-Ṭāriq* (جبل الطارق), littéralement, la « montagne de Ṭāriq ». Les armées islamiques – c'est un fait très connu – ne seront arrêtées qu'en 732 par Charles Martel, quelque part entre Tours et Poitiers.

On assiste à l'arabisation des administrations publiques, ce qu'on a appelé *al-dīwān* (الديوان). Les premières monnaies arabes, le service postal apparaissent aussi. On voit également la construction de nombreux édifices privés et publics et la naissance de nouvelles villes, comme *al-Ramla* (الرملة), œuvre du calife *Sulaymān* (سليمان) (715 – 717), qui y fait bâtir la Mosquée Blanche.

[16] Région située au sud de la mer d'Aral ; elle correspond aujourd'hui au Turkmenistan et à l'Uzbekistan.

[17] La Transoxiane était la région d'Asie centrale au nord-est de l'Oxus ; Samarqand en fut la ville principale. Le fleuve Oxus est l'actuel Amou-Daria.

'Abd al-Mālik érige à Jérusalem la Coupole du Rocher et la grande mosquée *al-Masǧid al-Aqṣā* (المسجد الاقصى). Quant à *al-Walīd*, il fait agrandir la Mosquée de La Mecque, celle de Damas, reconstruire celle de Médine et ériger des écoles et des hôpitaux.

Mais l'ancienne rivalité entre les tribus arabes du sud et du nord refait surface. Le problème de la succession au pouvoir déstabilise le régime : il y a en effet conflit entre la règle établie par *Mu'āwiyah*, selon laquelle le calife désigne son fils, et la très ancienne règle tribale des Arabes, qui veut que le successeur soit le plus âgé de la famille. Les *Chī'ites*, majoritaires en Iraq, par opposition au pouvoir sunnite en place en Syrie, n'ont pas pardonné les meurtres de *'Alī* et de *al-Ḥusayn*. Enfin, les descendants de *al-'Abbās* (العبّاس), l'oncle du Prophète se sont toujours considérés comme successeurs légitimes, puisqu'ils sont de la famille de *Hāšim*.

	Hāšim	
'Abdallah	*Abū Ṭālib*	*al-'Abbās*
Muḥammad	*'Alī*	
	al-Ḥusayn	*Abbassides*

D'autre part, les peuples islamisés ne sont pas traités comme les Arabes de souche ; ils sont par exemple soumis à des taxes desquelles les musulmans eux, sont exonérés. Il y a ainsi un certain mécontentement au sein de la population, spécialement dans la province du *Ḫurāsān* en Perse. Les partisans de la cause *abbasside* iront les rejoindre, de même que les *Chī'ites*.

On le voit, de nombreuses conditions sont réunies pour entraîner la chute du califat *umayyade* en l'an 750, après nonante années et quatorze califes, dont le dernier fut *Marwān II* (مروان الثاني).

5 Le califat abbasside et la transmission du savoir

Le premier calife *abbasside* est *Abū al-'Abbās* (ابو العبّاس), qui aura le pouvoir de 750 à 754. Dans son discours d'intronisation, il se donne lui-même le surnom de *al-Saffāḥ* (السفّاح), littéralement « qui a soif de sang ». La dynastie qu'il fonde va être celle qui connaîtra la plus longue durée, de 750 à 1258, date de la (première) prise de *Baġdād*, par les Mongols.

Les *Abbassides* se lancent dans une campagne d'extermination des *Umayyades*. Le seul rescapé du massacre sera *'Abd al-Raḥmān Mu'āwiyah* (عبد الرحمان معاويّه) qui fondera une dynastie *umayyade* en Espagne.

La capitale de l'empire est retransférée en Iraq, dans la ville de *al-Kūfa*, aux frontières de la Perse. Le calife est protégé par des troupes du *Ḫurāsān*, qui l'ont aidé à prendre le pouvoir et les Perses obtiennent des postes importants dans le gouvernement. Le pouvoir devient plus cosmopolite et l'aristocratie arabe, florissante sous le califat précédent, est remplacée par une hiérarchie d'officiers et de fonctionnaires de toutes races et de toutes nationalités.

Les califes *abbassides*, contrairement à leurs prédécesseurs, vont s'occuper de religion ; le calife guide la prière en portant le manteau du Prophète. Il s'entoure de conseillers en théologie et loi canonique. L'idée des *Abbassides* est de garder le pouvoir jusqu'à la fin du monde, ultime instant où ils le remettraient à Jésus-Christ, le Messie. La propagation de ce genre d'affirmations les a sans doute aidés à régner longtemps car beaucoup sont persuadés que, lorsque le pouvoir *abbasside* disparaîtra, l'ordre du monde sera totalement désintégré...

Lorsque *al-Saffāḥ* meurt en 754, c'est son frère *al-Mansūr* (المنسور) qui lui succède, de 754 à 775. On peut dire que c'est véritablement le fondateur de la dynastie car les trente-cinq califes qui viendront après lui sont tous ses descendants. En 762, il fonde *Baġdād* – ce qui signifie « cité de la paix » – sur la rive ouest du Tigre. Quelques années plus tard, il en fera la capitale de l'empire. C'est à cette époque que l'influence persane commence à se faire sentir, tant à la cour que dans la vie de tous les jours. On la ressent dans le gouvernement et l'administration, dans les costumes, accessoires, ustensiles, dans la cuisine, ... Seules la religion et la langue de l'administration et de la culture ne subiront pas cette influence. La religion restera l'Islam, et la langue, l'arabe.

Le vaste mouvement de transmission du savoir scientifique et philosophique commence à *Baġdād* : les Arabes vont traduire dans leur langue et assimiler toute la culture des pays conquis.

Ǧirǧis Ibn Baḫtayšū (جرجس بن بختيشو), médecin nestorien persan, traduit pour le calife des œuvres de médecins grecs. *Ǧirǧis Ibn Baḫtayšū* est directeur de l'école de médecine de *Jundayšapur* ; il meurt vers 771. C'est encore pour *al-Mansūr* que AL-FAZĀRĪ (الفزاري) traduit du sanskrit le premier traité d'astronomie mathématique introduit dans la littérature scientifique arabe. Son titre arabe est le *Zīǧ al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Grand Zīǧ du Sind hind*, encore connu sous le nom de *Siddhānta*. Le terme *Zīǧ* est d'origine persane ; il signifie « fil à coudre », « corde », « fil à plomb ». Par extension, il veut encore dire « trame » d'un tissu, ce qui fait penser aux lignes et colonnes d'une table astronomique. Mais c'est plus qu'une simple table ; on y trouve aussi des techniques pour convertir les dates d'un calendrier dans un autre, des prédictions météorologiques basées sur l'observation des astres et des étoiles, ...

Il y aura trente-sept califes *abbassides* ; les plus importants sont les dix premiers et nous nous limiterons, parmi ceux-ci, à ne citer que ceux qui ont eu une influence marquante dans le domaine des sciences et plus particulièrement, des mathématiques.

Le cinquième calife est *Hārūn ar-Rašīd* (هارون الرشيد), celui des *Mille et Une Nuits*, celui aussi qui a entretenu des relations diplomatiques suivies avec Charlemagne. Son califat s'étend de 786 à 809. Il reprend les campagnes contre Byzance et ses armées obtiennent de très importantes victoires.

Mais ce n'est pas qu'un guerrier. Il introduit en Iraq l'usage du papier qui était connu en Chine. Il continue à encourager le mouvement de transmission des connaissances scientifiques et philosophiques en langue arabe déjà amorcé du temps de *al-Mansūr* ; il favorise ainsi la culture qui est bien sûr influencée par des éléments étrangers : indiens, persans, syriaques, grecs et hellénistiques.

Un peu plus tard, le calife *al-Ma'mūn* (المأمون) va régner de 813 à 833. C'est un mutazilite, ce qui signifie qu'il appartient à une école de pensée en Islam, qui défend l'idée que le texte religieux doit être en accord avec la raison. Il va promouvoir et protéger les sciences. Il envoie des missions à Byzance pour ramener des manuscrits grecs de philosophie et de science, afin de les faire traduire en arabe. À *Baġdād*, il fonde la *Bayt al-ḥikma* (بيت الحكمة), c'est-à-dire la Maison de la Sagesse, véritable académie de traduction à laquelle il attache une bibliothèque. Il fonde également le premier observatoire en pays d'Islam.

Pendant près de deux siècles, les traductions vont se faire sans relâche : EUCLIDE, ARCHIMÈDE, APOLLONIUS, PTOLÉMÉE, DIOPHANTE, ... – pour ne citer que les mathématiciens – soit d'après des originaux grecs, soit d'après des traductions syriaques. À cela, il faut ajouter les connaissances venues de l'Inde, les traditions du H̱wārizm, de la Perse et de la Mésopotamie.

Les mots « techniques » de la philosophie ou de la science grecques n'ont évidemment pas leurs correspondants dans la langue arabe des débuts de l'Islam. C'est entre autres grâce aux traducteurs que cette langue va évoluer vers l'arabe classique, qui deviendra la langue scientifique, celle des savants en Orient, tout comme la langue latine le fut chez nous. Certains mots ont été empruntés au grec et arabisés sans plus évoluer par la suite ; c'est le cas par exemple du vocable *al-ğaġrāfya* (الجغرافية), la géographie. D'autres ont été remplacés plus tard, dans une phase d'enrichissement de la langue. C'est le cas de *al-ğyūmaṭrya* (الجيومطرية) qui a d'abord désigné la géométrie. Actuellement, cette science s'appelle *al-handasa* (الهندسة), déformation du mot persan *Indāza* voulant dire « mesure ». Les *Éléments* d'EUCLIDE seront traduits de nombreuses fois. En langue arabe, il y aura trois titres selon l'époque de la traduction : *al-usṭuqssāt* (الاسطقسّات), arabisation du grec $\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha$, éléments ; on voit ensuite apparaître *al-ārkān* (الاركان), qui signifie piliers (au sens propre) et enfin *al-uṣūl* (الاصول), qui veut dire piliers, principes. On assiste ainsi réellement à la mise en place d'une langue culturelle et scientifique. Parfois, dans un écrit sur la botanique, par exemple, le traducteur est confronté à un problème d'identification de différents végétaux. Il est obligé d'aller voir sur place de quoi il s'agit. ÉRATOSTHÈNE a mesuré le méridien terrestre qu'il a exprimé en « stades » grecs, mais que représente cette unité pour un habitant de l'empire arabe ? Il faut refaire une mesure...

Cette période de traductions et d'assimilation sera suivie d'une période tout aussi intense de créations. C'est dans ce contexte que sont nées notamment ce que nous appelons les « mathématiques arabes », c'est-à-dire les mathématiques qui se sont développées dans les pays qui ont été conquis par les peuples musulmans après l'avènement de l'Islam. Ces mathématiques ont été pratiquées par des savants qui parlaient l'arabe et qui habitaient ces contrées, ou qui ont transité par ces contrées. Leurs pays d'origine sont très variés (Perse, Égypte, Afrique du nord, Espagne, ...) tout autant que leurs religions (musulmans, chrétiens, juifs[18], adeptes du zoroastrisme[19]...) En fait, comme le dit si bien DJEBBAR [60], « En pays d'Islam, les hommes de science venaient de tous les horizons et ils n'avaient, pour la plupart, aucun lien avec les théologiens ou les religieux au sens large. »

L'année 1258 marque la fin de l'empire *abbasside*, fin qui peut s'expliquer par plusieurs causes. Parmi les facteurs externes, il faut mentionner l'invasion mongole au Proche-Orient. Les causes internes sont essentiellement liées au manque d'homogénéité de l'empire : arabes – non-arabes, arabes musulmans – arabes non-musulmans, arabes du nord – arabes du sud...

Ensuite, il y aura les invasions ottomanes et en 1492, la reconquête de l'Espagne par les chré-

[18]Juifs et chrétiens sont appelés, par les musulmans, les « gens du livre ». Le mot grec $\beta\acute{\iota}\beta\lambda o\varsigma$ signifie livre.

[19]Le zoroastrisme est une religion qui est apparue en Perse environ neuf siècles avant Jésus-Christ. Ses adeptes sont adorateurs de la lumière et du feu.

tiens... La fin de l'histoire rapportée ici va peut-être paraître brutale, mais il n'est pas possible, dans le cadre de cette recherche mathématique, d'aller plus avant. Nous avons pris le parti de tenter de faire un peu comprendre ce qui a permis le développement des sciences arabes, au moins jusqu'à l'époque où a vécu un mathématicien qui va nous occuper dans le cadre de l'art de l'algèbre, *al-ṣanā'a al-ǧabr w'al-muqābala* (الصناعة الجبر ولمقابلة), comme disent les mathématiciens ≪ arabes ≫.

6 Épilogue

L'historien des sciences, d'origine gantoise, Georges Sarton (1884-1956), auteur de l'ouvrage *Introduction to the History of Science*, a écrit ≪ Il est puéril d'affirmer que la science commença en Grèce : le "miracle" grec fut préparé par des millénaires de travail en Égypte, en Mésopotamie et peut-être dans d'autres régions. La science grecque fut moins une invention qu'une renaissance[20] ≫. Les recherches récentes sur les sources de la science grecque font apparaître de nombreux éléments d'origine égyptienne ou babylonienne. On peut dire que c'est la première transmission de savoirs de l'Orient vers l'Occident. Sarton écrit encore ≪ si l'histoire de la science antique est composée sans qu'on apporte au lecteur une connaissance suffisante de la science orientale, cette histoire n'est pas incomplète, elle est falsifiée ≫.

Nous avons évoqué, dans les pages qui précèdent, la deuxième phase de transmission du savoir. Elle s'est déroulée entre le septième et le neuvième siècle : le monde islamique s'approprie la science grecque.

Dans la troisième phase, du onzième au quatorzième siècle, c'est la science islamique qui passe au monde latin. La science indienne ou chinoise n'a généralement pas influencé directement le monde occidental ; elle l'a fait par l'intermédiaire de la science arabe. Le mouvement de traduction de l'arabe vers le latin s'amorce réellement avec Constantin l'Africain au XI^e^ siècle et atteint son apogée au XII^e^ siècle avec notamment Gérard de Crémone, Jean de Séville, Robert de Chester, Adélard de Bath, Platon de Tivoli, Michael Scott (XIII^e^ siècle), ... Les principaux centres de transmission du savoir de l'Orient à l'Occident sont l'Espagne, et particulièrement Tolède, le sud de l'Italie et la Sicile. C'est seulement à la Renaissance que l'Occident se dégage petit à petit de l'influence orientale.

On peut affirmer que l'appétit avec lequel l'Occident s'est approprié la science arabe est comparable à celui avec lequel ces derniers avaient reçu la science grecque et les apports chinois et indiens.

[20] Sarton veut dire par là que la science grecque n'est pas issue du néant, qu'elle s'est développée à partir d'un fond de connaissances bien répandues au Proche et au Moyen-Orient. Bien sûr, la science grecque a été créative ; en mathématiques, par exemple, Eudoxe, Euclide et bien d'autres ont introduit une nouveauté radicale : le rationalisme axiomatique.

Les faits marquants

Période	Événements	Territoire	Autorité
Avant 622		Péninsule arabique avec deux grandes régions : nord et sud de cultures différentes.	Tribalisme plus ou moins bien organisé, petites autocraties, royautés...
622 - 632	**622** : Hégire marquant le début de l'ère musulmane. **629** : prise de La Mecque. **632** : mort de *Muḥammad*	Péninsule arabique.	*Muḥammad* législateur, chef de la communauté religieuse et commandant des armées.
632 - 661	Début de l'expansion de l'empire.	Péninsule arabique plus Iraq, Mésopotamie, Perse, Syrie, Égypte.	Les quatre califes orthodoxes : *Abū Bakr* (632 - 634), *'Umar* (634-644), *'Uṯman* (644 - 656) et *'Alī* (656 - 661).
661 - 750	**661** : assassinat de *'Alī*. L'empire continue à s'étendre. Sa capitale est Damas. Politique matérielle et profane. Arabisation des administrations publiques (*al-dīwān*).	De l'océan Atlantique et des Pyrénées jusqu'à l'Indus, la frontière de la Chine plus le H̱wārizm, la Transoxiane, l'Afrique du nord et l'Espagne.	Première dynastie de califes : les Umayyades.
750 - 1258	Le calife *al-Mansūr* (754 - 775) fonde la ville de Baġdād et en fait la capitale. Le mouvement de traduction s'accentue. *al-Ma'mūn* (813 - 833) fonde la Maison de la Sagesse où travaille AL-H̱WĀRIZMĪ.		Deuxième dynastie de califes : les Abbassides.
Après 1258	**1258** : prise de Baġdād par les Mongols. Déclin de l'empire déjà amorcé plus tôt. Invasions ottomanes.		

Chapitre 17

L'art de l'algèbre

Préambule

Même si on se limite au ≪ sens classique[1] ≫, les érudits et les mathématiciens semblent très partagés sur le sens qu'ils donnent au mot ≪ algèbre ≫. Dans le *Petit Larousse*, édition 2003, on peut lire ≪ Branche des mathématiques qui, dans sa partie classique, se consacre à la résolution d'équations par des formules explicites, ... ≫. Dans le *Mathematics Dictionary* [96], on apprend que l'algèbre est une généralisation de l'arithmétique. Dans le *Dictionnaire des mathématiques* [28], on trouve : ≪ Issue du calcul pratique sur les nombres et de recherches d'arithmétique élémentaire, l'algèbre s'est d'abord dégagée de ses origines en se développant dans deux directions : remplacement des nombres par des lettres et passage du calcul des formules à la résolution d'équations (c'est-à-dire de formules contenant des nombres inconnus) ≫. Stella Baruk, dans son *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* [18], signale que le mot date de 1554 et qu'il est issu du latin médiéval *algebra*, venant lui-même de l'arabe. Elle écrit encore ≪ L'algèbre est l'art ou la science de résoudre des problèmes en généralisant les méthodes de l'arithmétique par l'emploi de lettres qui représentent des grandeurs ou des nombres inconnus et permettent d'établir des formules ≫. N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee ont édité un ouvrage intitulé *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching* [19]. Dans leur introduction, ils font allusion à diverses approches de cette discipline :

règles pour transformer et résoudre des équations ;

résolutions de problèmes spécifiques ou de classes de problèmes ;

généralisation de lois gouvernant des nombres ;

introduction (plus récente) des concepts de variable et fonction ;

étude des structures algébriques[2].

Pour notre part, tout comme Jacques Sesiano [129], nous dirons simplement que, au sens classique, l'algèbre est ≪ l'art ≫ qui s'occupe de trouver des solutions d'équations et de systèmes d'équations. S'il faut vraiment qu'il y ait des lettres pour pouvoir parler d'algèbre, alors pourquoi de nombreux auteurs, faisant autorité, s'accordent-ils à dire que les Babyloniens faisaient de l'algèbre deux millénaires avant Jésus-Christ ? Il y a confusion entre ce qu'est en fait l'algèbre

[1]Au sens moderne, l'algèbre est aussi l'étude des structures, telles que groupes, ...

[2]Cette approche de la discipline a fortement marqué le curriculum scolaire à partir de la fin des années soixante, sous l'influence des mathématiques modernes.

et... ce qu'elle est devenue de nos jours après la lente élaboration d'un symbolisme simplificateur[3]. Comme le dit fort bien G. G. JOSEPH, dans son ouvrage *The Crest of the Peacock, Non-European Roots of Mathematics* [98], « It is taking too narrow a view to equate the term "algebra" just with symbolic algebra[4]. »

Il nous semble de loin préférable de qualifier l'algèbre au moyen d'attributs qui nous renseignent soit sur l'époque soit sur la manière de la pratiquer. Ainsi, on parle d'*algèbre rhétorique* qui est un mode de résolution d'équations ou de systèmes sans aucun symbolisme, par utilisation d'une langue écrite ou parlée, qu'elle soit savante ou vernaculaire. On peut considérer que cette manière de procéder a perduré plus ou moins jusqu'au milieu du quinzième siècle. C'est à ce moment qu'on voit naître les premiers symbolismes, comme par exemple, en Italie, p̃ pour *plus* (latin) ou *più* (italien) et m̃ pour *minus* ou *meno*. L'algèbre, ainsi enrichie de ces premières tentatives de symbolisme, est souvent qualifiée d'*algèbre syncopée*. Il convient toutefois de signaler que, chez DIOPHANTE – qu'on situe généralement vers 250 après J.-C. –, on rencontre un certain symbolisme algébrique, pour l'inconnue et ses puissances, pour les signes « moins », « égal », ... Mais il faut ajouter qu'on ignore totalement la part de DIOPHANTE dans ce symbolisme qui va complètement disparaître après lui, et ce, jusqu'au XVe siècle.

L'algèbre qui s'enseigne de nos jours est bien sûr de l'*algèbre symbolique*. Le développement de ce symbolisme ne s'est pas opéré qu'en Italie. Il semble clair que le signe « + » nous vient d'Allemagne (XVe siècle) ; c'est une abréviation d'écriture de la conjonction « et ». C'est d'Allemagne aussi que vient l'usage de $\sqrt{\ }$ pour la racine ; on suppose qu'il s'agit d'une déformation de la lettre « r ». Le signe d'égalité est né en même temps à Bologne et en Angleterre au milieu du XVIe siècle. Robert RECORDE, dans son *Whetstone of Witte* (Londres, 1557), justifie l'emploi de deux parallèles pour exprimer l'égalité, *bicause noe 2 thynges can be moare equalle*[5]. Le lecteur intéressé par plus de détails sur le développement du symbolisme algébrique consultera F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations* [34].

Si l'on s'intéresse au livre II des *Éléments* d'EUCLIDE, on y trouve également une forme d'algèbre. L'interprétation de ce livre est d'ailleurs fort discutée. Certains historiens des mathématiques n'hésitent pas à parler d'*algèbre géométrique*, en ce sens que les solutions de certaines classes d'équations particulières[6] sont obtenues par des manipulations géométriques. Ainsi, par exemple, la proposition 11 de ce livre II, d'un point de vue algébrique moderne, revient à résoudre l'équation du second degré $x^2 = a(a - x)$, comme on peut le voir à la page 421.

Dès qu'on pratique une discipline scientifique, même à un niveau relativement modeste, le problème qui se pose très souvent et très concrètement, est de trouver des solutions d'équations ou de ce qui peut être considéré dans les productions anciennes comme l'équivalent de nos équations. C'est une situation à laquelle l'humanité a été très tôt confrontée. Ainsi, l'algèbre est une discipline fort ancienne. Nous allons examiner quelque peu comment se pratiquait l'algèbre à diverses époques et en différents lieux.

[3] *A priori*, la commodité de l'expression algébrique actuelle n'apparaît pas toujours clairement aux élèves.
[4] C'est une vue trop étroite que de prendre le mot « algèbre » seulement dans le sens d'algèbre symbolique.
[5] Parce que 2 choses ne peuvent être plus égales.
[6] Notons cependant que les questions posées par EUCLIDE sont de nature géométrique.

1 Les origines des mathématiques

G. G. JOSEPH [98], pour le citer encore, affirme « It is taking an unnecessarily restrictive view of the history of mathematics to confine our study to written evidence[7]. » Les mathématiques, en effet, sont nées d'un besoin de compter et de retenir des nombres. On rencontre très tôt, dans les sociétés humaines qui ne possèdent pas l'écriture, des formes de comptage ou d'appariement d'une collection d'objets avec un ensemble de « marques au sens large », telles que pierres, nœuds sur une corde ou encoches sur un morceau de bois ou d'os (voir à ce propos le chapitre 15). L'Institut Royal des Sciences Naturelles de Belgique possède un témoignage de ces « proto-mathématiques » : *le bâton d'Ishango*, qui a plus ou moins vingt mille ans. C'est le géologue belge Jean DE HEINZELIN DE BRAUCOURT (1920 - 1998) – professeur aux universités de Bruxelles et de Gand – qui l'a exhumé d'un endroit appelé Ishango, qui se trouve sur les bords du lac Edward, l'une des plus lointaines sources du Nil, aux confins de l'Uganda et de l'ex-Congo belge, à quinze kilomètres seulement de l'Équateur.

Des preuves archéologiques montrent l'existence évidente de transmissions d'« outils agricoles ishango » vers le nord, jusqu'aux frontières de l'Égypte. D'autres témoignages écrits viennent conforter cette origine africaine profonde – en fait, éthiopienne – du peuple égyptien. C'est peut-être une explication du caractère très ancien des mathématiques égyptiennes.

2 L'Égypte

On le sait, l'Égypte est avec la Mésopotamie, l'Inde et la Chine, le berceau d'une des grandes civilisations qui se développent le long des vallées d'Afrique et d'Asie, il y a quelque cinq mille ans. Que s'y est-il passé ?

Sans doute la découverte progressive de « bonnes » méthodes pour contrôler inondations, irrigation et drainage a-t-elle contribué à améliorer la production agricole, ce qui constitue un premier pas vers une sédentarisation. Entre 3500 et 3000 avant Jésus-Christ, les communautés agricoles qui vivent le long des rives du Nil font peu à peu bloc pour former deux royaumes, la Haute et la Basse-Égypte. Une légende raconte que, vers 3100, un certain *Min*, qui vient de Nubie – une partie de l'actuel Soudan –, fonde une longue lignée de Pharaons, en fait trente-deux dynasties, qui vont régner sur une société stable mais assez isolée durant trois mille ans.

C'est notamment dans ce pays que se développent les premières mathématiques écrites. L'historien HÉRODOTE (V^{e} siècle av. J.-C.), dans le livre II – qui s'appelle *Euterpe* – de ses *Histoires* [83][92], nous dit que ce fut *Min* le premier roi d'Égypte qui a fait élever la digue pour créer Memphis. Plus loin, il nous raconte encore que *Sesostris*[8] a partagé le pays entre tous les Égyptiens en donnant à chacun une égale parcelle de terre, pour laquelle il exigeait une taxe annuelle. Tout homme dont la propriété subirait des dommages par le débordement du fleuve irait les déclarer devant le roi, qui enverrait des inspecteurs pour mesurer l'étendue de la perte, de manière qu'à l'avenir, chacun ne paie qu'une taxe proportionnelle à la dimension à laquelle sa propriété a été estimée. Et l'historien ajoute, qu'à son avis, c'est à partir de là que la géométrie fut inventée et passa ensuite en Grèce. Il poursuit en signalant que la connaissance du cadran solaire, du gnomon, et des douze divisions du jour est arrivée en Grèce venant de Babylone.

[7] C'est avoir un point de vue inutilement restrictif sur l'histoire des mathématiques que de confiner notre étude à des documents écrits.

[8] Il s'agit du pharaon *Ramses II*, env. 1300 av. J.-C.

Certes, au départ, il s'agit bien de géométrie, d'arpentage... Mais lorsqu'il faut calculer la nouvelle taxe à payer, on tombe évidemment sur ce que nous appelons une règle de trois, qui va évoluer vers une forme d'algèbre.

Au fur et à mesure du développement de la civilisation égyptienne, le « calcul d'inconnues » trouve d'autres applications, notamment dans les pratiques financières et commerciales. Ce n'est cependant pas en algèbre que la culture mathématique égyptienne culmine – et nous allons tenter d'en comprendre quelque peu le pourquoi –, mais plutôt dans la construction des pyramides.

Il nous reste très peu de témoignages mathématiques de l'Égypte ancienne. La raison en est évidente : le support d'écriture utilisé par le scribe, le papyrus, est très fragile. Les documents les plus importants sont le *papyrus Rhind* et le *papyrus de Kahun*, tous deux conservés au British Museum, ainsi que le *papyrus de Berlin* et le *papyrus de Moscou.*

Le scribe égyptien AHMES, par exemple, qui a recopié le *papyrus Rhind* vers le milieu du seizième siècle avant Jésus-Christ, utilise, comme tous ses « collègues scribes égyptiens », un système de numération décimal non positionnel. Ce système n'est pas plus commode que la numération romaine, par exemple, pour effectuer des multiplications ou des divisions. Aussi, le scribe opère-t-il la multiplication par duplications successives. Quant à la division, il la ramène à une multiplication (également par duplications). Pour diviser a par b, il préfère se poser la question de savoir par quoi il doit multiplier b pour obtenir a.

Les difficultés qu'entraîne l'utilisation d'un tel système n'ont pas permis aux Égyptiens de développer de bons algorithmes de résolution d'équations ou de systèmes, qui d'ailleurs sont presque tous du premier degré. La méthode de recherche de la valeur des inconnues repose sur le principe de fausse position, qui s'enseignait encore dans nos classes primaires au début du vingtième siècle. C'est une technique qui s'appuie sur la théorie des proportions. Une activité sur cette manière de résoudre des équations est proposée dans la publication du CREM, *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur* [48].

On trouve encore l'une ou l'autre équation ou système du deuxième degré dans les papyrus de Berlin et Kahun, mais ce sont des problèmes triviaux. En notation moderne, ces exemples s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcr} x^2+y^2 & = & 100 \\ 4x-3y & = & 0, \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcr} xy & = & a \\ x & = & by. \end{array}\right.$$

3 La Mésopotamie

La Mésopotamie est la vaste région située entre les vallées du Tigre et de l'Euphrate ; elle recouvre des territoires des états actuels de la Syrie et de l'Iraq. C'est là que se sont succédés pendant près de 3 000 ans les civilisations sumérienne, babylonienne et assyrienne. L'écriture cunéiforme[9] y est inventée vers 3200 avant J.-C. par les Sumériens. Vers 2000 avant J.-C., le pays est conquis par les Akkadiens, peuple sémitique qui conservera la culture et l'écriture des Sumériens et établira des lexiques sumériens-akkadiens sans lesquels nous n'aurions sans doute pas eu accès à leurs écrits. Les premières dynasties babyloniennes et assyriennes s'installent à cette époque, et la cité de Babylone ne cessera d'être le principal pôle culturel de la région jusqu'au début de l'ère chrétienne.

C'est un pays où se développent aussi les premières mathématiques écrites, plus ou moins à

[9]Du latin *cuneus*, qui signifie « coin », pour fendre ou pour caler. L'empreinte laissée par le stylet du scribe mésopotamien dans l'argile évoque la forme d'un coin.

la même époque qu'en Égypte. La plupart des textes mathématiques qui nous sont parvenus datent de la période paléo-babylonienne, qu'on situe de 1800 à 1600 avant J.-C.[10] Ils sont écrits en cunéiforme sur des tablettes d'argile ; la langue utilisée est l'akkadien. Les autres écrits mathématiques, moins nombreux, ont été composés durant les trois derniers siècles avant Jésus-Christ, à l'époque séleucide. Il faut encore ajouter qu'on ne sait rien de la genèse des textes de la période paléo-babylonienne.

On peut estimer le nombre de tablettes présentes dans les musées à environ un million, dont une très faible proportion a un rapport avec les mathématiques. Les « tablettes mathématiques » sont de deux types : des tables et des textes de problèmes, parmi lesquels des résolutions d'équations quadratiques, révélant ainsi une certaine forme d'algèbre. Les problèmes étudiés ont leur source dans la vie économique – commerce, poids et mesures, impôts et intérêts, superficie et production – et dans l'activité astronomique – calendrier et astrologie.

Les Sumériens avaient adopté un système de numération sexagésimal et positionnel, que les Babyloniens vont perpétuer dans leurs écrits scientifiques. L'explication du choix de la base soixante est très controversée. La plupart des arguments avancés, comme par exemple le fait que soixante possède de nombreux diviseurs, ou d'autres, liés à l'astronomie, ... ne sont guère convaincants car ce sont toujours des arguments *a posteriori*.

Le Mésopotamien dispose ainsi d'un système de numération positionnel, mélange de base 60 et 10, plus performant que le système égyptien et va donc développer des méthodes de résolutions d'équations. En fait, il résout les équations du deuxième degré par une procédure analogue à la nôtre[11]. Mais, il ne se sert pas de lettres et décrit avec des mots les opérations à effectuer, dans le style « Prends tel nombre, multiplie-le par tel autre... » C'est un exemple type d'algèbre rhétorique (voir aux pages 417 et 419). Il faut cependant remarquer que, sur l'ensemble de toutes les tablettes d'argile recensées à ce jour, on ne trouve jamais de résolution d'une classe de problèmes, mais toujours de problèmes particuliers.

Certains historiens reconnaissent, chez les Mésopotamiens, des traces d'algèbre syncopée. En fait, la géométrie, souvent sous-jacente dans les problèmes traités, a provoqué l'apparition de certains termes pour désigner des quantités inconnues. Le mot *ush* (longueur) s'utilise pour noter l'inconnue x, *lagab* (carré) désigne x^2. Dans les systèmes, le terme *sag* (largeur) représente y et *sukud* (hauteur), z. Enfin, le produit xy est appelé *asha* (aire) et xyz, *sahar* (volume).

Le système positionnel mésopotamien possède plusieurs faiblesses. L'une d'elle est l'absence d'un symbole pour le zéro, qui rend parfois ambiguë la lecture du nombre. En effet, si une place est non occupée, on laisse un blanc mais... de quelle dimension ? Une autre faiblesse est de ne pas posséder de symbole pour séparer la partie entière d'un nombre de sa partie fractionnaire, ce qui induit également une ambiguïté. D'autre part, les Mésopotamiens font un usage intensif de tables : multiplications, carrés, cubes, inverses, racines carrées, ... Les raisons sont diverses. L'une d'elles est que les multiplications ne sont guère aisées en base 60. En effet, pour multiplier mentalement en base 10, il est nécessaire de connaître « par cœur » 36 produits (en éliminant les multiplications banales par 0 et par 1 et en faisant usage de la commutativité) ; par contre, la base 60 exige, elle, la connaissance de 1 711 produits ! Quant aux tables d'inverses, elles sont rendues nécessaires par le fait que la division est traitée comme une multiplication par l'inverse du diviseur.

Pour terminer, signalons encore que les observations réalisées par les astronomes babyloniens

[10] *Hammurabi*, dont le code constitue la plus ancienne collection de lois connue, a régné de 1792 à 1750 av. J.-C.
[11] Il faut rester conscient du fait que le Mésopotamien ne connaît pas les nombres négatifs.

pendant des siècles, ont été recueillies et utilisées par les Grecs, qui ont renoncé à convertir cette masse d'informations dans un système décimal de numération. Ainsi, Ptolémée, qui travaillait à Alexandrie de 127 à 141 après J.-C., les mentionne dans son *Almageste*. Plus tard, l'astronomie grecque sera transmise à l'Europe par l'intermédiaire de la civilisation arabo-musulmane. C'est ainsi que nous retrouvons la trace du système babylonien dans la division sexagésimale des degrés et des heures.

Les quelques faits esquissés ci-dessus ont essentiellement pour source *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics)* [98], *The Exact Sciences in Antiquity* [111], *Une introduction à l'histoire de l'algèbre* [129] et *Introduction aux mathématiques babyloniennes* [131].

4 L'empire arabe

4.1 Introduction

Le chapitre 16 brosse un rapide survol des événements qui ont favorisé la naissance et la rapide expansion de l'empire arabe et met en exergue quelques faits marquants qui s'y sont déroulés.

Le principe de numération décimale positionnelle et les chiffres que nous utilisons de nos jours nous ont été transmis par les Arabes, vers la fin du X^e siècle, notamment à l'occasion des croisades. Mais cette apparition est, au début, très timide : la numération romaine sera encore longtemps utilisée par la suite. C'est à tort que nous appelons ces chiffres « arabes » car les Arabes eux-mêmes n'en ont jamais revendiqué la paternité ; ils parlent au contraire de « calcul indien » et de « figures indiennes ». L'expression « chiffres indo-arabes » est ainsi plus appropriée. De nos jours, il y a deux formes de chiffres indo-arabes, ceux d'Occident et ceux d'Orient. Ce sont deux déformations des « figures indiennes » d'origine ; il n'est d'ailleurs pas difficile de leur trouver certaines ressemblances :

Occident	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Orient	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Le premier ouvrage arabe que nous connaissons, dans lequel ce système et les opérations de calcul qui s'y rapportent sont décrits, est le *kitāb al-ḥisāb al-hindī* (الكتاب الحساب الهندي) c'est-à-dire le *Livre du calcul indien*. Son auteur est Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī (محمّد بن موسى الخوارزمي), littéralement Muḥammad, fils de Moïse, qui vient du Ḫwārizm[12]. Cette région est située au sud de la mer d'Aral, comme on peut le voir sur la carte à la page 506. Le « surnom de provenance », *al-Ḫwārizmī* va donner naissance au mot latin *algorismus*, titre des traités produits par les compilateurs d'Europe qui ont traduit en latin les ouvrages écrits en langue arabe. Une déformation de ce terme aboutit au mot français « algorithme ». al-Ḫwārizmī a vécu plus ou moins entre les années 780 et 850 de notre ère. Il travaille à Baġdād, à la Maison de la Sagesse fondée par le calife abbasside al-Ma'mūn, qui règne de 813 à 833.

Le *Livre du calcul indien* ne nous est parvenu que dans une traduction latine peut-être commencée au XII^e siècle, mais le seul manuscrit connu à ce jour date du XIII^e siècle. Il est conservé

[12]Certains historiens des mathématiques pensent qu'il est né dans une région de l'Iraq actuel, et que ses ancêtres sont originaires du Ḫwārizm.

à la bibliothèque de l'Université de Cambridge [6]. Il ne semble pas être une traduction fidèle de l'arabe ; on y trouve des erreurs, il y a des « blancs »... Il commence par les mots *Dixit Algorismi*, c'est-à-dire « Algorismi a dit... » et se termine au milieu d'un exemple sur la multiplication des fractions.

4.2 Le contenu du « traité d'*al-ğabr* »

Avant d'écrire le traité d'arithmétique en question, AL-ḪWĀRIZMĪ a composé un opuscule intitulé الكتاب المختصر في حساب الجبر و المقابلة, *al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr w-al-muqābala*, ce qui signifie le *Livre abrégé sur le calcul par le ğabr et la muqābala*[13] [5].

Dans sa préface, l'auteur fait la traditionnelle louange à *Allah*. Il a également une pensée émue pour tous ceux qui sont maintenant morts et qui ont consacré une partie de leur vie à écrire des ouvrages de science. Il remercie l'Imam al-Ma'mūn, protecteur de la science, Commandeur de la Foi, qui l'a encouragé à écrire ce petit ouvrage sur le *Calcul par la restauration et la comparaison* ; c'est cette dédicace qui permet de dater le livre d'avant l'année 833, année qui marque la fin du califat d'al-Ma'mūn. La préface se termine par l'énoncé du contenu de l'opuscule, à savoir tout ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique, ce dont on a besoin dans les cas d'héritages, de legs, de partages, d'actions en justice, de commerce, dans les relations entre les hommes, la mesure des terres, le creusement de canaux, le calcul géométrique et d'autres choses variées... Ce texte a été établi et traduit en anglais par F. ROSEN[14] [5]. Le texte arabe de cette version bilingue comporte cent vingt-deux pages ; cette préface y occupe les deux premières pages.

Ensuite, AL-ḪWĀRIZMĪ présente un bref rappel du système décimal et fait observer que les nombres qui sont requis dans le calcul par la restauration et la comparaison, sont de trois types, à savoir des racines, des *māl(s)* et des nombres simples, qui n'ont aucun lien avec la racine ou le *māl*[15]. Tout nombre, dit-il, appartenant à l'une de ces trois classes peut être égal à un nombre d'une autre classe ; on peut dire, par exemple « des carrés sont égaux à des racines » ou « des carrés sont égaux à des nombres » ou « des racines sont égales à des nombres ». Dans notre formalisme moderne, ce sont les trois cas $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, où a, b et c sont bien sûr strictement positifs[16]. L'auteur indique alors comment agir dans ces trois cas relativement simples, en ramenant à l'unité le coefficient du carré ou de la racine. À la page 5, il signale que les trois types, à savoir, racines, carrés et nombres, peuvent se combiner entre eux et que cela fait apparaître trois espèces composées qui sont « des carrés et des racines sont égaux à des nombres », « des carrés et des nombres sont égaux à des racines », « des racines et des nombres sont égaux à des carrés ». En formalisant, cela donne $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$,

[13] Nous verrons plus loin qu'il s'agit de deux opérations mathématiques, que l'on peut traduire par les mots *restauration* et *comparaison*.

[14] Comme il a été dit au chapitre 13, ROSEN a établi le texte arabe à partir du seul manuscrit disponible à son époque ; il s'agit du manuscrit de la *Bodleian collection* à Oxford. Il est contenu dans le volume numéroté CMXVIII. *Hunt.* 214, *fol.*, et porte la date de la transcription A.H. 743 (1342 après J.-C.). A.H. 743 signifie année 743 de l'hégire.

[15] Le mot arabe *māl* (مال) signifie bien, argent, richesse, capital, fortune, troupeau... Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. Dans le texte qui suit, nous dirons désormais « carré ».

[16] Ce n'est qu'au XVII^e siècle que les quantités négatives acquerront – et au prix de quelles difficultés ! – le statut de nombres. Zéro n'est pas un nombre, mais seulement un symbole. Par conséquent, 0 ne peut être racine d'une équation. Ainsi l'équation $5x^2 = 10x$ devient $x^2 = 2x$ qui a comme unique racine $x = 2$.

$bx + c = ax^2$, où a, b et c sont strictement positifs[17]. Pour chacune de ces formes, AL-ḪWĀRIZMĪ traite un ou plusieurs exemples ; il explique l'algorithme à utiliser sur l'exemple puis l'énonce de manière générale, dans le genre « prends la moitié du nombre des racines, multiplie-la par elle-même, … » Lorsque le cas s'y prête, il discute le nombre de racines (positives, évidemment) selon le signe de ce que nous avons coutume d'appeler Δ. Finalement, il démontre chacun des algorithmes par des arguments géométriques. Un des cas est développé et commenté à la page 408 du présent ouvrage ; c'est une manière d'introduire dans les classes la résolution de l'équation du deuxième degré. Nous sommes ainsi arrivés à la page 15 de l'ouvrage et la « théorie » est terminée… Pendant plus de cinq siècles, on enseignera les équations dans le même ordre que celui du traité d'AL-ḪWĀRIZMĪ, et en se référant aux mêmes exemples, devenus des paradigmes. On les trouve notamment dans le *Liber abaci* de FIBONACCI, dont la première édition [70] remonte à 1202 ou la *Summa* de 1494 de Luca PACIOLI [114].

De la page 15 à la page 24, l'auteur enseigne à faire les multiplications que nous écririons aujourd'hui $(10-x)(10+x)$, $(x\pm a)(y\pm b)$, … à additionner, soustraire et diviser des expressions avec des radicaux carrés.

De la page 25 à la page 48, on trouve toute une série de problèmes qui débouchent sur des équations à résoudre. Nombreux sont ceux dont l'énoncé commence par « j'ai divisé dix en deux parties et… » et on manipule ces deux parties : on les multiplie entre elles, on les ajoute ou soustrait, ce qui donne un certain résultat. Évidemment, à partir de là, il faut retrouver les parties.

Les pages 48 à 50 traitent rapidement des transactions commerciales, qui ne sont jamais que des problèmes de proportionnalité entre quatre nombres : une quantité de référence, un prix, une quantité à acquérir et le total à payer. Trois de ces nombres sont connus et il faut déterminer le quatrième.

Les pages 50 à 64 de l'ouvrage s'intéressent à la géométrie ; on y trouve des formules d'aires et de volumes, mais aussi des problèmes issus de la tradition d'arpentage, comme « Une terre triangulaire a, sur chacun de ses deux flancs[18], dix coudées, et sur la base, douze ; quelle doit être la longueur du côté d'un carré qu'on construirait à l'intérieur du triangle ? » Il faut bien entendu que deux des sommets du carré soient sur la base et chacun des deux autres, sur un des deux « flancs ». Dans la résolution, AL-ḪWĀRIZMĪ appelle شيء (*šaī'*) le côté du carré. Ce terme sera traduit en latin par *res*, en italien par *cosa*, en français par *chose*. Il désigne l'inconnue que nous notons aujourd'hui x.

De la page 65 à la page 98, l'auteur résout des problèmes de partage de legs et l'ouvrage se termine par un chapitre sur le calcul des retours. L'idée de ces « retours » est de protéger les héritiers et les parents proches, en limitant le pouvoir d'un testateur malade, qui lègue des biens ou émancipe un esclave. Le calcul des retours permet de fixer le montant que vont récupérer les proches en cas de décès relativement immédiat dudit testateur.

Voilà donc le contenu un peu inattendu de l'opuscule que de nombreux historiens des mathématiques s'accordent à considérer comme le « texte fondateur » de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application.

[17] Le cas $ax^2+bx+c=0$ n'apparaît pas, car une somme de quantités strictement positives ne peut pas être égale à « rien ». Il faut bien être conscient que c'est parce qu'il ne dispose pas des nombres négatifs qu'AL-ḪWĀRIZMĪ se trouve devant trois cas distincts. Le mathématicien Simon STEVIN, dans ses *Livres d'arithmétiques* [130], affirme, contrairement à STIFEL et CARDAN, qu'on peut résoudre les trois cas avec une seule règle en utilisant des quantités négatives. Il ne considère toutefois pas les racines négatives de l'équation comme solutions.

[18] Ce sont les termes utilisés par AL-ḪWĀRIZMĪ, termes issus du langage des corporations.

4.3 L'algèbre comme « science constituée »

Quel a été le rôle exact d'AL-ḪWĀRIZMĪ, qu'a-t-il vraiment inventé ? Quelles sont ses sources ? Nous allons tenter de donner un début de réponse à ces questions. Mais pour cela, il faut examiner quelque peu la situation à cette époque.

Il existe une algèbre chinoise ; on la trouve notamment dans *Les neuf chapitres sur l'art du calcul* ; ce traité date du premier siècle après J.-C., et il a été commenté au troisième siècle par LIU HUI. Il a été récemment réédité [99] ; on y trouve des résolutions de systèmes par des méthodes tout à fait comparables aux triangulations de matrices ! Il n'y a pas trace de cela chez les Arabes au IX^e siècle. L'algèbre chinoise n'est donc pas une source plausible.

Une influence euclidienne semble être également à rejeter, car on ne trouve pas de références précises aux propositions des *Éléments* d'EUCLIDE qui pourraient étayer les raisonnements.

La tradition indienne est très riche en algèbre, en particulier chez deux auteurs antérieurs à AL-ḪWĀRIZMĪ, à savoir ĀRYABHAṬA (né en 476 apr. J.-C.) et BRAHMAGUPTA (né en 598 apr. J.-C.). Mais les Arabes ne signalent jamais l'influence indienne en algèbre, or, on l'a vu, ils en parlent pour les chiffres par exemple, ou pour l'astronomie. Une hypothèse émise par A. DJEBBAR est la suivante : si les Arabes, qui ont eu de nombreux contacts avec l'Inde, ne parlent pas des méthodes indiennes, c'est que celles-ci ne les ont pas étonnés, et cela parce qu'ils connaissaient déjà les procédures qui existaient dans le « Croissant fertile », dans la tradition babylonienne...

Le rôle d'AL-ḪWĀRIZMĪ a été de rassembler toutes les procédures de calcul qui s'utilisaient dans ces contrées et d'« abréger » tout cela, d'où le titre de son opuscule. On l'a vu, les Mésopotamiens ne résolvaient pas des classes de problèmes, mais des énoncés au coup par coup. AL-ḪWĀRIZMĪ, lui, va réduire tous les problèmes (de degré au plus 2) à six classes, par l'utilisation de deux opérations. La première est *al-ǧabr* – qui a donné naissance au vocable algèbre. Ce mot vient de la racine trilitère *ǧbr*, qui donne l'idée de « restaurer, réparer, redresser » ; nous dirons donc *restauration*. La seconde opération est *al-muqābala* ; le *mu* est un préfixe passif, quant à la racine *qbl*, elle donne l'idée d'*opposition*, de *comparaison*, d'où l'expression *calcul par la restauration et la comparaison*.

Par exemple, soit l'équation que nous écririons $4x^2 - 9x + 5 = 3x^2 + 2x + 4$. AL-ḪWĀRIZMĪ dirait « quatre *māl* diminués de neuf *ǧiḏr* et augmentés de cinq *dirhams*[19] sont égaux à trois *māl* augmentés de deux *ǧiḏr* et de quatre *dirhams* ». Nous allons faire agir la première opération, *al-ǧabr*, pour restaurer les quantités soustraites. Cela peut se faire en ajoutant, en langage moderne, $9x$ au deux membres. Il vient alors $4x^2 + 5 = 3x^2 + 11x + 4$. S'il y a d'autres quantités soustraites à restaurer, on procède de la même manière[20]. Ensuite, on utilise la deuxième opération, *al-muqābala*. On compare l'espèce des *māl* et on enlève $3x^2$ de chaque membre (il faut n'avoir que des nombres positifs). Il vient $x^2 + 5 = 11x + 4$. On compare enfin l'espèce des *dirhams* et on ôte 4 de chaque côté, ce qui donne $x^2 + 1 = 11x$ qui est bien une des six formes canoniques, la cinquième, en l'occurrence.

Signalons encore qu'il existait une autre méthode – qu'AL-ḪWĀRIZMĪ ne mentionne pas dans son traité – pour résoudre des équations ou systèmes linéaires, appelée méthode de fausse position

[19] L'unité de monnaie a coutume de désigner ce que nous appelons le terme indépendant.

[20] Dans un article non encore paru, intitulé *The Vocabulary of Early Arabic Algebra*, Jeffrey A. OAKS de l'université d'Indianapolis, donne une nouvelle interprétation de l'utilisation du mot *al-ǧabr*. Il considère l'équation $10x - x^2 = 21$ et explique qu'on ne restaure pas x^2, mais bien $10x$; car $10x - x^2$ est un « $10x$ » diminué et il doit donc être restauré en ajoutant x^2. OAKS n'est pas le seul à défendre cette interprétation.

(simple ou double). Les Arabes l'utilisent mais ne disent pas qu'ils l'ont inventée. Elle existe aussi chez les Indiens et les Chinois. Cette méthode va perdurer jusqu'au XVI^e^ siècle chez les Arabes et jusqu'au XX^e^ chez nous. Son intérêt est qu'elle permet de ne pas manipuler trop vite des fractions dans le processus de résolution du problème. Le lecteur intéressé peut consulter, à ce sujet, une publication précédente du CREM [48] où le procédé est présenté et discuté.

4.4 L'algèbre après al-H̱wārizmī

Nous l'avons déjà dit, si al-H̱wārizmī a démontré certains procédés de calcul par la géométrie, il ne cite pas explicitement de propositions puisées dans *Les Éléments* d'Euclide. Le grand mathématicien sabéen[21] Ṯābit ibn Qurra (ثابت بن قرّ), mort en 901, introduit, lui, la géométrie euclidienne dans l'algèbre ; il connaît fort bien le texte d'Euclide, puisqu'il en est un des nombreux traducteurs.

Un peu plus tard, l'égyptien Abū Kāmil (ابو كامل), mort en 930, va faire une tentative pour se dégager de la géométrie ; il ne tient plus compte de l'homogénéité dans la manipulation des grandeurs : parfois le carré de l'inconnue est représenté par un segment. Deux de ses ouvrages nous sont parvenus, *Le livre complet en algèbre* et *Les choses rares en algèbre*.

Le monde musulman va connaître bien d'autres grands algébristes que nous ne mentionnerons pas ici. Disons encore toutefois que ibn al-Bannā (بن البنّا), mort en 1321, donne lui, des démonstrations, sans se référer du tout à la géométrie, mais plutôt à la tradition du calcul mental.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que d'équations de degré au plus deux. Des tentatives vont être réalisées pour résoudre des équations du troisième degré.

4.5 'Umar ibn Ibrāhīm al-H̱ayyām et les équations du troisième degré

'Umar ibn Ibrāhīm al-H̱ayyām (عمر بن ابراهيم الخيّامى) est né vers 1048 à *Nayšabūr*[22] dans le *H̱urāsān*, une partie de l'Iran actuel. C'est dans cette même ville qu'il mourra en 1131, après avoir beaucoup voyagé.

On connaît peu de choses sur sa vie. Il avait une double formation de mathématicien et de philosophe. Pour cette dernière discipline, il était élève de بهمنيار (Bahmanyār), lui-même disciple direct de الرءيس ابن سينا, c'est-à-dire le Maître Ibn Sīnā, plus connu sous le nom d'Avicenne.

L'historien بن الاثير (Ibn al-Aṯīr) nous rapporte, qu'en l'année 467 de l'hégire (1074-1075), al-H̱ayyām était à *Isfahan*, dans l'équipe des astronomes au service du Sultan seldjoukide[23] ملكشاه (Malikšāh) et de son vizir نظام الملك (Niẓām al-Mulk). Malikšāh souhaitait une réforme du calendrier.

[21] Le Saba' (سبأ) est un ancien royaume préislamique du sud-ouest de l'Arabie, correspondant à l'actuel Yémen.

[22] On l'écrit souvent Nichāpur.

[23] Les Seldjoukides sont membres d'une tribu d'origine turque qui a émigré du Turkestan vers le Proche-Orient et a établi son pouvoir sur l'Asie Mineure du milieu du XI^e^ à la fin du XIII^e^ siècle. C'est la première dynastie turque dans l'Orient méditerranéen.

'Umar AL-ḪAYYĀM a écrit de nombreux ouvrages scientifiques et philosophiques, dont la paternité ne laisse aucun doute. Nous ne nous intéresserons ici qu'à son *Traité d'algèbre et d'al-muqābala*.

Après la traditionnelle louange à Allah, on peut y lire

> Une des théories mathématiques dont on a besoin dans la partie des sciences philosophiques connue sous le nom des sciences mathématiques, c'est l'art de l'algèbre, lequel a pour but la détermination des inconnues, soit numériques, soit géométriques. Il se rencontre dans cette science des problèmes, dépendant de certaines espèces très difficiles de théorèmes préliminaires, dans la solution desquelles ont échoué la plupart de ceux qui s'en sont occupés. Quant aux anciens, il ne nous est pas parvenu d'eux d'ouvrages qui en traitent ; peut-être, après en avoir cherché la solution et après les avoir étudiés, n'en avaient-ils pas pénétré les difficultés ; ou peut-être leurs recherches n'en exigeaient pas l'examen ; ou enfin leurs ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits dans notre langue. Quant aux modernes, c'est الماهاني (AL-MĀHĀNĪ) qui parmi eux conçut l'idée de résoudre algébriquement le théorème auxiliaire employé par ARCHIMÈDE dans la quatrième proposition du second livre de son traité *De la sphère et du cylindre* ; or il fut conduit à une équation renfermant des cubes, des carrés et des nombres, qu'il ne réussit pas à résoudre, après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On déclara donc que cette résolution était impossible, jusqu'à ce que parût ابو جعفر الخازن (ABŪ ǦA'FAR AL-ḪĀZIN), qui résolut l'équation à l'aide des sections coniques. Après lui tous les géomètres avaient besoin d'un certain nombre des espèces[24] des susdits théorèmes, et l'un en résolut une, et l'autre une autre. Mais aucun d'eux n'a rien émis sur l'énumération de ces espèces, ni sur l'exposition des cas de chaque espèce, ni sur leurs démonstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, que je ne manquerai pas de faire remarquer. Moi, au contraire, je n'ai jamais cessé de désirer vivement de faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi que de distinguer parmi les cas de chaque espèce, les possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur des démonstrations ; car je savais combien est urgent le besoin de ces théorèmes dans les difficultés des problèmes. [...]

Afin de situer quelque peu ces événements dans le temps, signalons que AL-MĀHĀNĪ est mort en 880, et ABŪ ǦA'FAR AL-ḪĀZIN, plus ou moins vers 970. Peu de temps après, إبن الهيثم (IBN AL-HAYṮAM) – mort vers 1039 –, connu sous le nom d'ALHAZEN en Occident, résout le problème d'ARCHIMÈDE à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole. AL-ḪAYYĀM, lui, classe toutes les équations de degré inférieur ou égal à trois en vingt-cinq espèces et donne, pour chacune d'elles, la solution générale. Il signale clairement les espèces qui ne peuvent se traiter que par intersection de courbes coniques. Il ne parviendra cependant pas à donner une formule de résolution des équations du troisième degré.

[24] C'est-à-dire d'autres cas d'équations de degré 3.

5 L'algèbre en Occident

Les travaux des mathématiciens arabes ont été connus en Europe occidentale, notamment par l'intermédiaire de l'Espagne et du sud de l'Italie.

On voit se développer en Occident des tentatives pour trouver une formule de résolution de l'équation du troisième degré, par exemple chez Paolo Gerardi (1328), chez Dardi de Pise, à la fin du XIV$^{\text{e}}$ siècle et chez Luca Pacioli à la fin du XV$^{\text{e}}$ siècle.

C'est vers 1510 que Scipione dal Ferro (1465–1528), qui enseigne à l'Université de Bologne dès 1496, découvre la formule qui permet de résoudre l'équation $x^3 + px = q$, où p et q sont bien sûr positifs. Un peu avant sa mort, il confie cette formule à son élève Antonio Maria Fior.

À l'époque, en Italie, l'obtention d'une « chaire » à l'université dépendait de concours ou « tournois », en l'occurrence ici mathématiques. Fior, en possession de la formule de son maître, imagine donc, afin d'assurer sa « carrière académique », de défier un mathématicien qui avait déjà une certaine renommée et qui par là, était un rival sérieux. Ce mathématicien s'appelait Nicolò Fontana, surnommé Tartaglia (env. 1500–1557). Fior lui propose trente problèmes dont six débouchent sur une équation du type $x^3 + px = q$.

Piqué au vif, se consacrant à fond à la recherche des solutions demandées, Tartaglia finit par trouver, le 12 février 1535, c'est-à-dire huit jours avant l'échéance fixée, non seulement les réponses aux problèmes posés par Fior, mais en plus, une extension de la formule de résolution au cas $x^3 = px + q$, ignoré par Fior. Ceci met définitivement fin aux prétentions de ce dernier. Mais, malheureusement pour lui, Tartaglia va rencontrer Girolamo Cardano (1501–1576).

Cardan est en fait un personnage fort bizarre : médecin, mécanicien, mathématicien, joueur, astrologue − il a même tenté de dresser l'horoscope de Jésus. Fâcheuse idée sous l'Inquisition, qui le fait incarcérer en 1570. Sa réputation scientifique lui permet cependant de se retrouver quelques mois plus tard à Rome, avec une pension papale !

Cardan, ayant appris que Tartaglia connaît les formules de résolution des cas $x^3 + px = q$ et $x^3 = px + q$, le prie de les lui communiquer. Après un premier refus, Tartaglia est finalement contraint, par certaines circonstances, à confier les formules à Cardan qui promet de les garder secrètes. Il les publiera cependant en 1545, dans son *Ars Magna* [35], en citant quand même le nom de Tartaglia. Cela mettra cependant fin aux « bonnes » relations entre les deux compères !

Ainsi, au chapitre onze de l'*Ars magna*, qui s'intitule *Sur le cube et la première puissance égale au nombre*, Cardan écrit :

« Il y a bien près de trente ans que Scipio Ferro de Bologne a découvert la règle et l'a transmise à Antonio Maria Fior de Venise, dont la compétition avec Niccolò Tartaglia de Brescia a donné à Niccolò l'occasion de la découvrir. Lui [Tartaglia] me l'a donnée en réponse à mes demandes instantes, mais sans la démonstration. Armé de cette aide, j'ai recherché sa démonstration sous <différentes> formes. Ce fut très difficile. Ma version de celle-ci suit… »

Cardan, aidé de son élève Ludovico Ferrari (1522–1565) va poursuivre les recherches et aboutir à une autre formule, cette fois pour résoudre l'équation du quatrième degré.

Et au-delà du quatrième degré ? Les succès dont nous venons de rendre compte ont incité les mathématiciens à rechercher des formules permettant de résoudre des équations de degré 5 ou plus. En fait, il est toujours possible de résoudre une équation de degré 2, 3 ou 4 en se ramenant, par un changement de variable, à une équation de degré moindre. Une idée assez naturelle est donc d'essayer d'appliquer cette même méthode aux équations de degrés 5, 6, ... Très vite, on s'aperçoit que pour résoudre de telles équations, les calculs intermédiaires semblent toujours faire appel à une équation de degré supérieur à celui de l'équation de départ.

L'Italien P. Ruffini (1755–1822) démontre, de manière imparfaite, qu'on ne peut résoudre, à l'aide d'une formule générale, n'importe quelle équation de degré supérieur à 4.

N. Abel (1802–1829), de nationalité norvégienne, pense avoir trouvé une solution générale de l'équation du cinquième degré. Mais il y a une erreur dans son raisonnement, erreur qu'il finit par déceler et qui le conduit à démontrer l'impossibilité de trouver une formule algébrique donnant la solution générale de n'importe quelle équation du cinquième degré.

C'est finalement Évariste Galois (1811–1832) qui, partant d'une idée de Lagrange, finit par régler définitivement le problème en démontrant qu'il n'existe pas de formule algébrique donnant la solution générale de n'importe quelle équation de degré n, où $n > 4$. Ce faisant, il introduit la théorie des groupes. C'est à partir de ce moment que l'algèbre va progressivement s'intéresser à l'étude des structures (groupes, anneaux, corps, ...)

Nous dirons un dernier mot sur l'équation du troisième degré, qui a en quelque sorte poussé les mathématiciens à donner un statut aux nombres imaginaires.

Dans la résolution de l'équation du troisième degré, au moyen de la formule dite de Cardan, il apparaissait parfois une racine carrée d'un nombre négatif, ce qui posait évidemment problème à l'époque. Ainsi, par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 = 51x + 104$ (écrite ici en notation moderne), dont une solution est $x = 8$, il vient l'équation auxiliaire $u^2 - 104u + 17^3 = 0$. On constate que le degré de cette dernière équation n'est plus que 2 ! On calcule son discriminant qui vaut $-2\,209$, ce qui conduit aux solutions (toujours en notation moderne) $u_1 = 52 + 47\sqrt{-1}$, $u_2 = 52 - 47\sqrt{-1}$. La formule de Tartaglia-Cardan nous enseigne alors qu'une solution de l'équation du troisième degré est $\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} = 4 + \sqrt{-1} + 4 - \sqrt{-1} = 8$. En fermant les yeux au bon moment, tout va pour le mieux ! C'est Raphaël Bombelli (1526–1572) qui le premier, donnera une définition des opérations (addition, soustraction, multiplication) sur ces quantités « imaginaires », sous une forme proche de celle que nous connaissons. Dans son *Algèbre* datée de 1572, on trouve la comptine suivante :

Più via più di meno fa più di meno,
Meno via più di meno fa meno di meno,
Più via meno di meno fa meno di meno,
Meno via meno di meno fa più di meno,
Più di meno via più fa meno,
Più di meno via meno di meno fa più,
Meno di meno via più di meno fa più,
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Le lecteur n'aura sans doute pas trop de mal à continuer la traduction : $(+) \cdot (+i) = +i$, $(-) \cdot (+i) = -i$, ...

Chapitre 18

L'évolution de la pensée géométrique, des problèmes d'arpentage à l'étude des espaces

Préambule

Ce chapitre n'a nullement l'intention d'esquisser une histoire – même modeste – de la géométrie. Il veut simplement poser quelques jalons qui permettent d'appréhender plus aisément cet aspect des mathématiques et de mieux s'imprégner de l'évolution de la pensée géométrique. Ces jalons vont marquer une période qui s'étend des premiers essais de représentation de l'espace, des problèmes d'arpentage, en passant par les différents apports des mondes grec et hellénistique, jusqu'à la géométrie qui se pratique aujourd'hui, géométrie qui étudie non plus les figures de l'espace mais les espaces eux-mêmes et leur structure, par le biais de la théorie des groupes.

1 Les débuts de la géométrie

On trouve, par exemple à Lascaux, dans le sud de la France, et à Altamira, dans le nord de l'Espagne, des centaines de peintures remarquables datant d'environ quinze mille années. Le bon niveau artistique de ces peintures rupestres témoigne d'une certaine compréhension de l'espace et des formes ; il ne s'agit pas encore vraiment de géométrie, mais plutôt de protogéométrie, une première étape dans la représentation non abstraite des grandeurs, de l'espace et du temps.

Les mathématiques et en particulier la géométrie qui nous sont familières, sont fort probablement le résultat d'un besoin, besoin sans doute créé par des sociétés qui évoluent vers une vie sédentaire. L'homme va, petit à petit, acquérir des biens qu'il voudra gérer, pratiquer l'agriculture qui nécessitera le creusement de canaux ou la construction de digues, ... C'est ce phénomène qui se produit dans les civilisations qui se sont développées dans les vallées de l'Indus et du Gange, du Tigre et de l'Euphrate et du Nil.

Rappelons un extrait du livre II des *Histoires* [92] [83] de l'historien grec Hérodote, qui a vécu au V$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C., extrait que nous avons déjà évoqué dans le chapitre 17.

> Ce fut *Min*[1] qui a fait élever la digue pour créer Memphis.
> [...]
> *Sesostris*[2] a partagé le pays entre tous les Égyptiens en donnant à chacun une égale parcelle de terre, pour laquelle il exigeait une taxe annuelle. Tout homme dont la propriété subirait des dommages par le débordement du fleuve irait le déclarer devant le roi, qui enverrait des inspecteurs pour mesurer l'étendue de la perte, de manière qu'à l'avenir, chacun ne paie qu'une taxe proportionnelle à la dimension à laquelle sa terre a été estimée.
> [...]
> C'est à partir de là que la géométrie[3] fut inventée et passa ensuite en Grèce.

Outre ces problèmes d'arpentage, les Égyptiens vont développer d'autres aspects de la géométrie et acquérir ainsi les connaissances nécessaires pour bâtir des pyramides et des temples à l'architecture complexe.

En Mésopotamie, on trouve également très tôt des traces d'une activité géométrique. Plusieurs tablettes d'argile témoignent de la connaissance de ce que nous appelons le théorème de PYTHAGORE. Nous donnons une description complète de la tablette YBC 7289[4] dans le chapitre 20.

En Inde, la construction des temples et des autels sacrificiels engendrera aussi une réflexion géométrique peu connue en Occident, mais pourtant bien réelle.

2 La géométrie dans le monde grec

Les sources concernant les débuts des mathématiques grecques sont rares. Néanmoins, les historiens s'accordent à dire que THALÈS DE MILET (Θαλῆς), ionien, né en 624 av. J.-C., fut l'un des fondateurs de la science grecque et de la philosophie. Il a voyagé de nombreuses années en Égypte et était familier de l'astronomie et des mathématiques de la vallée du Nil. Sur la base de connaissances égyptiennes empiriques, il a initié la géométrie abstraite. On lui attribue divers résultats géométriques, même s'il ne reste de lui aucun écrit.

On dit d'un de ses élèves, ANAXIMANDRE DE MILET (Ἀναξίμανδρος), né vers 610 et mort vers 545, qu'il a introduit l'usage du gnomon. On lui attribue un abrégé de géométrie.

PYTHAGORE DE SAMOS (Πυθαγόρας) a vécu dans les années 530 av. J.-C. et est mort à Métaponte vers 497. Selon IAMBLIQUE, il aurait lui aussi visité l'Égypte et y serait resté assez longtemps pour assimiler les coutumes, l'astrologie et la géométrie égyptiennes. Plus tard, il serait retourné à Samos où son enseignement, inspiré de celui des Égyptiens, trop abstrait et symbolique, n'aurait pas été accepté. Il serait alors parti pour Crotone, dans le sud de l'Italie où il aurait fondé une espèce de « secte » qui se développera en école scientifique.

[1] Une légende raconte que *Min*, originaire de Nubie, est venu vers 3100 av. J.-C. en Égypte, où il va fonder une lignée de pharaons, en fait, trente-deux dynasties.

[2] Plus connu sous le nom de *Ramses II* (environ 1300 av. J.-C.).

[3] Le vocable géométrie vient des mots grecs γαῖα (terre) et μέτρον (mesure), qui ont donné γεωμετρία, signifiant arpentage, mesure de la terre.

[4] Il s'agit de la tablette répertoriée 7289 dans la *Yale Babylonian Collection*.

Il est très difficile de distinguer ses propres théories de celles de son école. On lui attribue de nombreuses découvertes géométriques, bien qu'il ne reste de lui aucun écrit. Les premiers pythagoriciens ont attaché une grande importance aux mathématiques et les ont élevées au rang de science. Ils sont considérés comme les fondateurs de la théorie des nombres, de l'étude mathématique de l'acoustique et de la musique. Ils se sont intéressés aux constructions à la règle et au compas et à la résolution de problèmes algébriques par des moyens géométriques. Ils connaissaient l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du pentagone.

C'est à la même époque qu'Eupalinos de Megara (Εὐπαλῖνος), ingénieur grec qui travaillait à Samos, a construit l'aqueduc dont on a retrouvé les ruines en 1882. Il s'agit d'un tunnel d'environ mille mètres de long, un mètre septante-cinq de haut et de large, qui a été creusé à partir de chacune de ses deux extrémités. Une ≪ stratégie ≫ avait été développée pour assurer la rencontre des deux équipes au milieu de la colline.

Platon (Πλάτων), né vers 428 et mort à Athènes vers 348, est un disciple de Socrate. Philosophe et mathématicien, il a fondé l'*Académie* dont la fameuse devise était ≪ Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ≫. Il prônait la valeur éducative des mathématiques et a introduit des définitions rigoureuses pour la ligne droite, la surface plane, le solide, ... Il a commencé l'étude de ce que nous appelons, de nos jours, le nombre d'or et a établi de nouvelles règles pour trouver des nombres carrés qui sont la somme de deux carrés.

Aristote (Ἀριστοτέλης), né en 384 et mort vers 322, est disciple de Platon et devient le précepteur d'Alexandre. Il fonde le *Lycée* d'Athènes vers 335 (école péripatéticienne). Il fut l'un des très grands philosophes et scientifiques de son temps ; il a préparé la systématisation de la géométrie par des investigations de ses aspects les plus fondamentaux et philosophiques – en particulier, par l'introduction de meilleures définitions – et par des discussions de concepts de continuité et d'infinité.

Euclide (Εὐκλείδης) a vécu à Alexandrie, probablement sous Ptolémée I, roi d'Égypte, entre les années 323 et 285. Mathématicien et physicien, il a sans doute étudié à l'*Académie*. Il a collecté et systématisé le corpus entier des mathématiques connues en son temps (et pas seulement la géométrie) dans les treize livres des *Éléments* (στοιχεῖα), qui sont restés, jusqu'à nos jours, la base de l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Son œuvre n'est pas qu'une compilation, mais une synthèse, au plus haut niveau, dans l'élaboration de laquelle il a fait preuve d'un très grand génie. Elle est basée sur une idée fondamentale, qui est l'une des plus importantes en mathématiques : la méthode hypothético-déductive. Toutes les propriétés géométriques et les théorèmes connus doivent être déduits à partir d'un ensemble de vérités initiales évidentes par elles-mêmes, appelées *postulats*, par le biais de lois logiques de raisonnement. Le nombre de postulats doit être le plus petit possible. La géométrie d'Euclide est basée sur cinq ≪ notions communes ≫ et cinq postulats. Les nombreuses tentatives infructueuses pour démontrer le cinquième postulat (celui des parallèles) à partir des précédents, d'une part, et le développement des géométries non euclidiennes, d'autre part, rendent hommage à sa clairvoyance.

3 Les géométries non euclidiennes et le programme d'Erlangen

L'œuvre d'Euclide figure parmi celles qui ont réellement marqué les mathématiques. En matière de géométrie, elle reste une référence. Chez les savants du monde arabe, c'est le traité qui sera le plus souvent traduit. Comme on l'a déjà dit, de nombreux mathématiciens, même de tout grands, vont s'attaquer au cinquième postulat, persuadés de pouvoir le déduire des précédents, mais sans succès… et pour cause !

Au XVII^e siècle, grâce aux travaux de René DESCARTES et Pierre de FERMAT, la géométrie s'≪ algébrise ≫. Qualifiée d'analytique, elle résout des problèmes de géométrie en utilisant des procédés de type algébrique ; elle est bien adaptée au traitement de certaines catégories de questions. L'un des grands inconvénients cependant réside dans le fait qu'il est souvent pratiquement impossible de saisir le sens géométrique des expressions algébriques utilisées. Dès 1679, LEIBNIZ recherchait un nouveau type de calcul qui opérerait directement sur les figures afin de pallier cet inconvénient. L'entreprise fut longue, puisque les vecteurs n'apparaîtront que dans la seconde moitié du XIX^e siècle.

C'est encore au XIX^e siècle, que des changements très importants se profilent, non seulement en géométrie, mais au sein même de toute la mathématique.

Les règles de la perspective en peinture, apparues au début du XV^e siècle en Italie (ALBERTI, PIERO DELLA FRANCESCA), ont intéressé des mathématiciens comme PASCAL et DESARGUES. Les bases de la géométrie projective sont dès lors jetées. L'habitude de voir, de contempler des peintures ou des dessins respectant les règles de la perspective à point de fuite, ont sans doute engendré un certain penchant à considérer comme identiques la figure primitive et toutes les images qui peuvent s'en déduire par projection, à énoncer certaines propriétés ne dépendant pas des modifications apportées par la projection, … C'est ainsi que s'installe la géométrie projective, qui obtient son statut de ≪ corps de doctrine ≫ grâce à PONCELET (1822).

Parallèlement, et suite aux travaux de LAMBERT et GAUSS, entre autres, LOBATCHEVSKI (à partir de 1829) et BOLYAI (en 1832) imaginent une géométrie où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits[5] et montrent qu'elle est logiquement cohérente. La première géométrie non euclidienne est née.

En 1854, RIEMANN élabore une géométrie où la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits[6]. Il semble que ce soit BELTRAMI qui, en 1868, a le premier mis en évidence la nature commune des géométries de BOLYAI-LOBATCHEVSKI et de RIEMANN. Et c'est KLEIN, pense-t-on, qui a le premier remarqué la nature projective des géométries non euclidiennes de BOLYAI-LOBATCHEVSKI et de RIEMANN, ainsi que de la géométrie euclidienne, en établissant qu'il s'agit de trois cas particuliers d'un modèle plus général imaginé par CAYLEY.

Dans cette géométrie en mutation, il faut encore citer bien d'autres grands mathématiciens, parmi lesquels CHASLES, GRASSMANN, STAUDT, HELMHOLTZ, JORDAN, LIE, sans oublier GALOIS, le ≪ père ≫ de la théorie des groupes, …

On ne se focalise plus sur l'étude des figures de l'espace, mais plutôt sur l'étude de l'espace lui-même ; la notion de dimension va se généraliser à plus de trois, notamment grâce aux travaux de CAYLEY.

C'est tout cet ensemble de faits qui constitue la genèse de ce qu'on a appelé *Le programme d'Erlangen* [102], dont le titre complet est *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Il s'agit d'une dissertation présentée en 1872, par le mathématicien allemand Felix KLEIN, alors âgé de 23 ans, lors de la rentrée académique à l'université d'Erlangen.

[5]Signalons que ceci est encore équivalent à ≪ Par un point extérieur à une droite donnée, on peut mener une infinité de parallèles à cette droite ≫.

[6]Comme dans le cas des triangles sphériques sur une sphère.

KLEIN défend l'idée d'un principe général qui permet d'engendrer non seulement la géométrie euclidienne et la géométrie projective, mais encore, les autres géométries (non euclidiennes) auxquelles, dit-il, il faut accorder les mêmes droits. Les notions essentielles sur lesquelles il se base sont, d'une part, celle de *groupe de transformations de l'espace*, issue des travaux de GALOIS (1830), et, d'autre part, celle d'*invariant*, introduite par CAYLEY et SYLVESTER dans les années 1850-1860.

KLEIN en arrive ainsi à caractériser une géométrie par un groupe de transformations de l'espace. Le problème qu'il propose d'étudier est le suivant,

> Étant donnés une multiplicité, c'est-à-dire un ensemble de points, et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.

Selon le groupe de transformations qui agit sur la multiplicité, on obtient les géométries euclidienne, projective, de BOLYAI-LOBATCHEVSKI, de RIEMANN, ...

On voit donc apparaître le rôle fondamental de la notion de groupe. KLEIN inaugure ainsi la domination que la théorie des groupes va petit à petit exercer sur l'ensemble de toutes les mathématiques ainsi que la fusion de plus en plus étroite des concepts issus de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse, qui constitue l'une des principales caractéristiques de la mathématique d'aujourd'hui.

Retenons que la mutation profonde, qui s'exerce au XIX^{e} siècle, est que la géométrie n'est plus considérée comme science des figures de l'espace, mais bien comme la science qui étudie les espaces (par le biais de leur groupe de transformations).

Chapitre 19

Le développement de la trigonométrie

Préambule

Selon Edward S. KENNEDY[1] [100] [101], la trigonométrie, sans doute plus que toute autre branche des mathématiques, s'est développée grâce à un va-et-vient continuel et fertile. Il s'agit en fait d'une offre et d'une demande – offre de théories mathématiques et de techniques utilisables en toutes circonstances et demande pressante d'une science appliquée, l'astronomie. La relation trigonométrie – astronomie fut tellement intime que, jusqu'au treizième siècle, les deux sujets ne formeront qu'une seule entité.

KENNEDY perçoit le même type d'interactions diverses entre théorie et application au sein même de la trigonométrie, si bien que, pour lui, l'histoire de la trigonométrie exhibe, en elle-même, la croissance embryonnaire de trois divisions classiques des mathématiques : l'algèbre, l'analyse et la géométrie.

Les débuts du développement de la trigonométrie se perdent dans la nuit des temps ; on peut considérer qu'au départ, elle a produit les premières suites numériques faisant correspondre une longueur d'ombre à un moment de la journée. Ces concepts, qui ont vu le jour dans des contrées à l'est de la Méditerranée, ont été rapportés par des gens écrivant en grec et se sont bien implantés dans des régions plus occidentales au deuxième siècle de notre ère. Nous verrons que le pôle de l'activité va alors se déplacer en Inde – la fonction « corde » y sera remplacée par plusieurs espèces de fonctions « sinus » – et de là, il retournera en partie vers son lieu d'origine. Entre le neuvième et le quinzième siècle, dans la région s'étendant de la Syrie à l'Asie centrale, la nouvelle fonction sinus et les vieilles fonctions ombres vont être tabulées en sexagésimal. C'est de ce développement qu'émerge vraiment la trigonométrie, en ce sens que l'objet d'étude devient le triangle sphérique ou plan, ses côtés et ses angles. Lorsque le centre d'activité de l'astronomie se déplace en Europe, il en va de même de la nouvelle trigonométrie et les scientifiques européens poursuivent le travail de leurs prédécesseurs orientaux, à savoir le calcul de tables et la découverte de relations fonctionnelles entre les éléments du triangle.

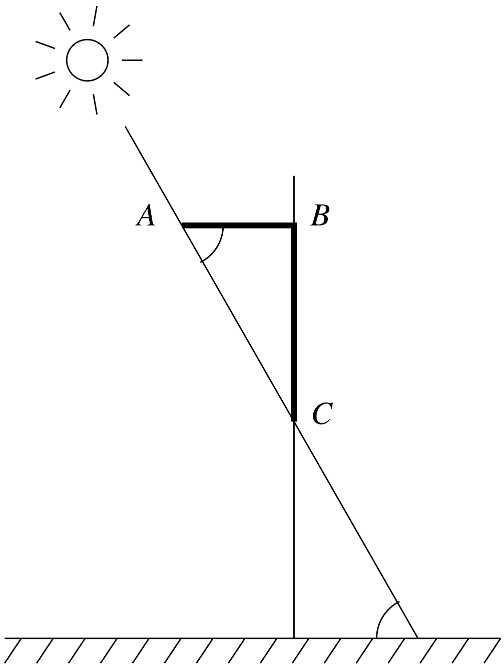
L'invention du calcul infinitésimal, qui n'arrive que plus tard, précipite la fin rapide de la trigonométrie – considérée comme branche indépendante des mathématiques. Avec la naissance et l'exploitation des nombres complexes, la plus grande partie de la théorie est engloutie dans l'analyse. À la fin du dix-huitième siècle, Léonard EULER et d'autres mathématiciens présentent

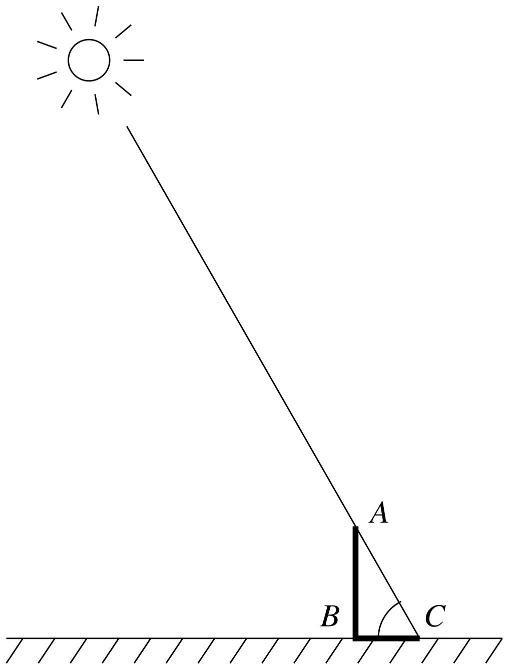
[1] Edward S. KENNEDY est professeur émérite de l'Université américaine de Bayrūt ; il est considéré comme l'un des tout grands spécialistes de l'histoire de l'astronomie en pays d'Islam.

tous les théorèmes de la trigonométrie comme corollaires de la théorie des fonctions complexes. La trigonométrie ne conserve son identité séparée que comme sujet scolaire et comme utilitaire particulièrement apprécié des arpenteurs et navigateurs.

1 Les balbutiements

Très tôt, on trouve les ancêtres légitimes des fonctions « tangente » et « cotangente ». Il s'agit en fait de la mesure de l'ombre d'un bâton ou *gnomon*.





Si le gnomon AB est fixé horizontalement sur un mur vertical, alors son ombre BC (sur le mur) est la tangente de l'angle de visée du soleil, si on prend la longueur du bâton AB pour unité. Dans ces mêmes conditions, si le gnomon est fixé verticalement dans le sol, son ombre BC (sur le sol) est la cotangente de l'angle de visée du soleil.

Otto Neugebauer et Richard Parker signalent, par exemple, l'existence d'une table dont on peut voir une transcription « en notation moderne » ci-contre. Il s'agit d'une inscription datant du treizième siècle avant Jésus-Christ, découverte à Abydos, en Haute-Égypte. On trouve des documents du même type en Perse, en Inde, en Chine, en Mésopotamie, en Grèce, … à différentes époques de l'histoire. Ces schémas sont bien sûr naïfs – les longueurs des « heures » qu'ils indiquent sont inégales, la longueur des ombres varie avec la latitude géographique et avec les saisons – mais ils sont cependant les témoins que l'homme utilise explicitement la notion de fonction au moins depuis trois mille ans.

Fin de l'heure	Ombre
2	30
3	18
4	9
5	3
Midi	0

Dans le long cheminement qui mène à la trigonométrie, l'outil de base ne sera pourtant pas l'ombre du gnomon qui débouche plus tard sur la notion de tangente, mais plutôt la fonction « corde », qui s'apparente, comme on le verra, à notre sinus. Son calcul est facilité par un bon système de numération positionnel ; depuis le deuxième millénaire avant Jésus-Christ, les Mésopotamiens ont développé un tel type de système, qui mélange les bases dix et soixante.

Comme on va le voir, le développement de la trigonométrie est intimement lié aux besoins de l'astronomie, qui fut l'un des sujets d'étude de prédilection en Mésopotamie. C'est là que de nombreuses tables d'observations astronomiques ont été dressées en utilisant le système sexagésimal. On peut raisonnablement conjecturer que ce sont les Grecs de l'époque hellénistique[2] qui, les premiers, ont calculé des « rapports trigonométriques » mais ils ne disposaient que d'un mauvais système littéral de numération. Ils ont donc effectué les calculs en sexagésimal.

2 D'Aristarque à Ptolémée

Aristarque de Samos (Ἀρίσταρχος) vivait à l'époque d'Euclide (Εὐκλείδης), époque que l'on peut vraisemblablement situer sous Ptolémée I, roi d'Égypte[3] de 323 à 285. Il est astronome et mathématicien. Selon Th. Heath [80] et G. Sarton [125], on peut, sans nul doute, le considérer comme le premier à défendre l'hypothèse héliocentrique. Il a écrit *Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*, traité intéressant du point de vue mathématique car il y calcule des rapports qui sont en fait des rapports trigonométriques.

L'astronome, mathématicien, géographe Hipparque (Ἵππαρχος) exerce l'essentiel de son activité à Rhodes et à Alexandrie, entre les années 160 et 125 av. J.-C. Selon Sarton, il a probablement inventé ou utilisé la projection stéréographique ainsi que certains instruments habituellement attribués à Ptolémée. Il est en tout cas le premier observateur grec à diviser en 360 degrés les cercles des instruments qu'il utilise[4]. Il réalise un grand nombre d'observations astronomiques très précises, ce qui lui permet de construire le premier globe céleste. Malheureusement il est très conservateur et c'est essentiellement à cause de lui que le système géocentrique continuera à être le plus utilisé. Hipparque peut être considéré comme le fondateur de la trigonométrie, tant sphérique que plane ; il établit une table de la fonction « corde[5] », ce qui pourrait impliquer qu'il connaissait le théorème dit de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, ou… une proposition équivalente. Il critique la géographie d'Ératosthène (Ἐρατοσθένης) et tente de fixer astronomiquement les positions des lieux sur le globe terrestre par leurs latitudes et longitudes, longitudes qu'il détermine par l'observation des éclipses.

C'est à Rome, vers 98 – à l'époque de Pline l'Ancien –, que le mathématicien, astronome, physicien grec Menelaos d'Alexandrie (Μενέλαος) réalise des observations. Il a écrit six livres (perdus) sur le calcul des cordes et trois sur les sphériques, qui nous sont parvenus dans des traductions arabes, hébraïques et latines. Ces livres sur les sphériques sont en fait un traité de trigonométrie sphérique ; il est le premier à libérer la trigonométrie de la stéréométrie et de l'astronomie. C'est dans le livre III que l'on trouve le célèbre théorème dit de Menelaos, relatif

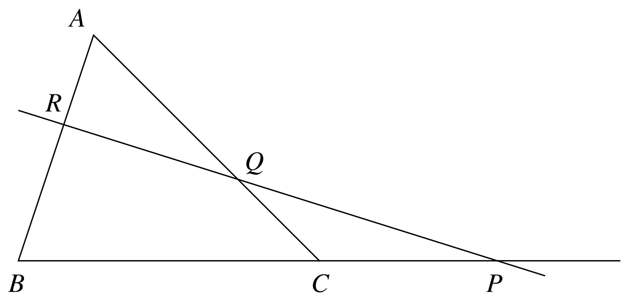
[2]Rappelons que cette civilisation s'est développée en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C.) et qu'elle n'était pas limitée au seul territoire grec.

[3]Ptolémée I est le fondateur de la dynastie des Lagides, seize souverains grecs qui vont régner sur l'Égypte après la mort d'Alexandre le Grand jusqu'en 30 av. J.-C. Il ne faut pas les confondre avec le mathématicien, astronome Claude Ptolémée, mort en 161 de notre ère.

[4]Une histoire du calendrier n'a pas sa place ici. Nous tenons néanmoins à signaler que la quantité « 360 » est liée aux premières formes de calendrier, comme le babylonien, entre autres, qui comportait douze mois de trente jours ; et on ajustait en fin d'année… C'est sans doute là qu'il faut chercher l'explication de l'utilisation du système sexagésimal.

[5]La fonction « corde d'un angle α » vaut en fait le double du sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$.

aussi bien aux triangles sphériques qu'aux triangles plans.



C'est une relation entre six quantités, d'où son nom aussi de *regula sex quantitatum*. Avec les notations de la figure ci-contre, ce théorème peut s'énoncer, en trigonométrie plane :
les points P, Q, R sont alignés si et seulement si
$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1.$$

Nous connaissons le traité par plusieurs traductions en arabe qui s'étaleront du neuvième jusqu'à la fin du treizième siècle ; nous en mentionnerons une plus loin. Dans la deuxième moitié du douzième siècle, le texte arabe est traduit en latin par Gérard de Crémone et, environ un siècle plus tard, en hébreu par Jacob ben Machir ibn Tibbon.

Claude Ptolémée (Πτολεμαῖος), dont le nom est sans doute le plus connu parmi ceux qui jalonnent l'histoire de la trigonométrie, est né en Égypte et exerce son activité à Alexandrie durant le deuxième quart du deuxième siècle de notre ère. Il meurt en 161. Il est astronome, mathématicien, géographe, physicien, « chronologiste ». Son influence – presque comparable à celle d'Aristote – est marquante jusqu'au seizième siècle. Il possède une tournure d'esprit euclidienne et, quoique trois siècles les séparent, on le croirait proche collaborateur d'Hipparque, ce dont il se prévaut la plupart du temps. Son œuvre principale porte le titre de *Traité de mathématiques*, en grec, *ἡ μαθηματικὴ σύνταξις* ou *μεγάλη σύνταξις τῆς ἀστρονομίας*, dont la contraction des deux premiers mots a donné, en passant par une traduction en arabe, *Almageste*. Cette encyclopédie de l'astronomie, dont pratiquement tout le contenu est basé sur les travaux d'Hipparque, fait autorité jusqu'en 1543[6]. Les observations personnelles de Ptolémée s'étalent de 127 à 151, mais selon Sarton, il n'était pas un observateur très fin ; sa contribution principale semble avoir été sa théorie très élaborée des planètes et la découverte d'une deuxième inégalité dans le mouvement périodique de la lune, qu'on appelle de nos jours *évection*. Son système est purement géocentrique ; l'élaboration de la trigonométrie – le remplacement de diagrammes par des calculs – consacre l'astronomie comme discipline mathématique. Le catalogue d'étoiles de Ptolémée en répertorie 1 028 et est probablement fort proche de celui d'Hipparque, mais ce dernier étant perdu, c'est celui de Ptolémée qui constitue la plus ancienne description précise du ciel, en fait la seule jusqu'au quinzième siècle ; en cela, il est d'une valeur inestimable.

L'*Almageste* contient un très bel exposé des trigonométries plane et sphérique ; en outre, Ptolémée y explique comment construire une table de cordes, et il en fournit une allant de $\frac{1}{2}^{\circ}$ à 180°, par pas de $\frac{1}{2}^{\circ}$. Le théorème dit de Ptolémée, sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, fournit une formule équivalente[7] à celle qui donne $\sin(a \pm b)$.

Signalons encore que Ptolémée a tenté de démontrer le cinquième postulat d'Euclide et que son *Traité de géographie*, *γηωγραφικὴ ὑφήγησις* vient en second sur le plan de l'importance de ses œuvres. Il a influencé les progrès de la géographie presque aussi profondément et longtemps que ne l'a fait l'*Almageste* pour les mathématiques et l'astronomie.

[6]L'année 1543 est ici prise symboliquement ; c'est celle de la mort du fondateur de l'astronomie moderne, Nicolas Copernic. En 1530, il avait achevé sa grande œuvre *De Revolutionibus*, dans laquelle il affirmait que la terre tournait autour de son axe en un jour et faisait le tour du soleil en un an.

[7]Ce théorème peut s'énoncer : dans tout quadrilatère inscriptible, la somme des produits des mesures des côtés opposés est égale au produit des mesures des diagonales.

3 La trigonométrie dans le monde indien

Les *siddhānta*, véritables traités théoriques par opposition à des ouvrages de nature plus pratique comme les *karaṇas*[8] et les tables, sont probablement les plus anciens travaux scientifiques indiens d'astronomie. On en cite souvent cinq, qu'il est impossible de dater avec précision. Il y a cependant assez de différences entre eux pour étayer l'hypothèse qu'ils furent écrits à des époques différentes. SARTON pense qu'on peut plus ou moins dater ces *siddhānta* à partir de la première moitié du cinquième siècle de notre ère.

Seul le premier, le *Sūrya-Siddhānta*, nous est parvenu dans sa forme originale ; on y trouve de nombreuses traces de l'influence grecque, mais on ignore encore par quel canal l'astronomie grecque a pu arriver en Inde. Divisé en quatorze chapitres, il est écrit en *ślokas*[9].

Selon AL-BĪRŪNĪ (البيروني), mathématicien, astronome arabe mort en 1048, il aurait été écrit par LĀṬA, mais il se peut que ce dernier n'ait rédigé que des commentaires sur le *Sūrya-Siddhānta*, comme il l'aurait fait à propos de deux autres *siddhānta*, selon des témoignages de l'époque. Les vers qui introduisent le texte affirment que celui-ci fut écrit par SŪRYA, le Dieu Soleil, à *Romaka* (Rome ?, Alexandrie ?). Les principales théories astronomiques qu'on y trouve sont grecques même si l'auteur a tenté d'y préserver les vieux usages indiens, tout en demeurant cohérent autant que possible.

La caractéristique la plus marquante du traité est l'utilisation du *ǧyā*[10] c'est-à-dire du sinus à la place de la corde. On y rencontre également une des premières mentions du sinus verse[11].

Un autre texte, le *Pauliśa-Siddhānta*, peut être considéré comme un des fondements de la trigonométrie indienne. Il introduit la notion de sinus et contient une table de vingt-quatre sinus et sinus verses par pas de $3^\circ\ 45'$. Au départ, le sinus de $3^\circ\ 45'$ est supposé égal à son arc, appelé *kramaǧyā* et les autres valeurs de la table sont calculées grâce à une formule de récurrence.

C'est au mathématicien et astronome indien ĀRYABHAṬA, né à *Kusumapura* près de *Pāṭaliputra*, l'actuelle Patna, vers 476, que l'on doit le traité intitulé *Āryabhaṭīya* ou *Laghv-Āryabhaṭīya*, qui représente une sorte de systématisation des résultats contenus dans les *siddhānta*. Il date de l'année 3600 de *Kaliyuga*, ce qui correspond à l'an 499 de notre ère. Il est écrit en vers et divisé en quatre parties :

Daśagītikāsūtra, système d'écriture des nombres ;

Gaṇitapāda, traité mathématique en 33 stances ;

Kālakriyāpāda, éléments de chronologie astronomique ;

Golapāda, considérations qui concernent les sphères célestes.

Cet ouvrage comporte plusieurs formules concernant les suites arithmétiques, mais également

[8]Les *karaṇas* sont plutôt des manuels d'astronomie pratique qui n'ont pas la prétention d'un véritable traité.

[9]Les *ślokas* sont des vers, souvent écrits en sanskrit. On y trouve généralement une connotation religieuse et une prière dédiée à une déesse ou un dieu particuliers.

[10]Lorsque les traducteurs arabes ont rencontré ce mot *ǧyā*, ils l'ont translittéré dans leur alphabet, ce qui donna lieu a une ≪ mauvaise ≫ interprétation. Le mot arabe جيب, *ǧaīb*, signifiant entre autres ≪ cavité ≫, en était fort proche du point de vue de l'écriture. Si on ajoute à cela que la langue arabe ne note pas nécessairement la vocalisation brève, on trouve l'explication du fait que le vocable mathématique ≪ sinus ≫ traduction latine du mot arabe *ǧaīb* désigne également la cavité nasale, par exemple.

[11]Le sinus verse d'un angle vaut 1 moins le cosinus de cet angle.

une valeur très précise de π – à savoir $3\,\dfrac{177}{1250} = 3,1416$ – ainsi que des tables de sinus et de sinus verses. Les concepts astronomiques sont du même type que dans le *Sūrya-Siddhānta*, excepté le fait qu'Āryabhaṭa enseigne que la rotation journalière du ciel n'est qu'apparente ; elle est due à la rotation de la terre autour de son axe. Cette hypothèse, très osée, ne sera pas admise par des astronomes indiens postérieurs comme par exemple, Brahmagupta au septième siècle.

4 La trigonométrie dans le monde musulman

Il existait, dans le monde arabe, avant l'Islam, une « astronomie populaire » qui englobait la connaissance des saisons, quelques phénomènes météorologiques, les positions des étoiles fixes, ... Jusqu'au IX^{e} siècle et même au X^{e}, ces rudiments, qui ne reposaient sur aucun calcul mais seulement sur l'accumulation des expériences, étaient consignés dans ce qu'on appelait des *Livres des saisons* ou *kutub al-āwina* (كتب الاونة).

L'avènement de l'Islam exige des réponses rapides aux besoins liés à la pratique du culte : connaissance des moments des cinq prières quotidiennes, détermination de la direction de La Mecque ou *qiblā* (القبلة) et fixation du début et de la fin du *ramaḍān* (رمضان). On voit apparaître deux nouveaux types d'ouvrages, d'une part les *kutub al-mawāqīt* (كتب المواقيت) ou livres de détermination des temps (détermination basée sur la technique du gnomon le jour et sur le déplacement de la lune durant la nuit), d'autre part, les *Dalā'il al-qiblā* (دلائل القبلة) ou indicateurs de la direction de La Mecque (techniques fondées sur les levers et couchers astronomiques). En ce qui concerne le *ramaḍān*, le problème est tellement complexe que pendant longtemps, on se contentera d'observer, depuis une élévation (montagne, tertre, ...) et à l'œil nu, l'apparition du croissant de lune.

La religion n'est cependant pas le seul moteur du développement de l'astronomie. Les humains en général, *a fortiori* ceux qui occupent un poste important dans la société, ont toujours éprouvé un « certain besoin » d'avoir des renseignements sur leur avenir ; cela explique le succès que connaît l'astrologie. On peut vraiment considérer que l'astrologie a été un facteur de développement de l'astronomie, en ce sens que l'astrologie astronomique repose effectivement sur le principe énonçant que le monde sublunaire et tous les êtres vivants qui le composent sont soumis aux effets des mouvements des astres.

Un troisième facteur est sans doute le besoin qu'éprouve l'homme de comprendre le monde dans lequel il vit et, par conséquent, de tenter de rechercher les lois qui régissent l'univers, le mouvement des corps célestes, ...

On possède des témoignages du fait que les premiers astronomes de l'Islam ont eu connaissance, bien avant que ne démarre la période de traduction[12], de certains aspects de l'astronomie babylonienne, grecque ou indienne, notamment par le biais de spécialistes syriaques. L'un des très célèbres est, par exemple, l'évêque nestorien Severus Sebōḫt, originaire de Nisibe mais qui travaille au cloître de Kenešra dans la haute vallée de l'Euphrate ; en 661, année de la prise du pouvoir par les Umayyades, il écrit un *Traité des constellations*.

Un siècle plus tard, la découverte plus en profondeur de la science indienne va pousser les savants de Baġdād à s'intéresser de très près à l'astronomie. Voici ce qu'on peut lire, dans le

[12] Voir à ce sujet le chapitre 16, à la page 498.

Dictionnaire des savants, de Abū-l-Ḥasan al-Qifṭī (ابو الحسن القفطي) qui a vécu de 1172 à 1288.

> En l'année 156 de l'hégire[13], il arriva de l'Inde à Baġdād un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. Cet homme possédait la méthode du *Sind hind* (سندهند)[14], relative aux mouvements des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les éclipses, ainsi que le lever des signes du zodiaque. Il avait composé un abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince nommé Figar[15]. Dans cet écrit, les *Kardaga*[16] étaient calculées par minutes. Le calife[17] ordonne qu'on traduise le traité indien en arabe, afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. Le soin de la traduction fut confié à Muḥammad, fils de Ibrāhīm al-Fazārī (محمّد بن ابراهيم الفزاري), le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez les astronomes, sous le titre de *Grand Sind hind*[18].

On sait, par les astronomes eux-mêmes et non pas par les historiens, que l'astronomie indienne contenait des outils trigonométriques, comme la notion de sinus, que les Arabes vont préférer à celle de corde utilisée par les Grecs. On y trouve également de petites tables fournissant les valeurs des sinus et sinus verses pour des angles donnés, ainsi que des algorithmes de calcul de certains paramètres permettant la constitution de tables astronomiques et des procédés de mesure pour déterminer, par exemple, le méridien en un lieu.

Par contre, les biobibliographes fournissent des informations très pointues sur le contenu, les traductions, … de l'ensemble des connaissances astronomiques qui viennent du monde grec. Par exemple, il est rapporté que l'*Almageste* de Ptolémée a d'abord été traduit du syriaque en arabe, dès le huitième siècle, par al-Ḥasan ibn Qurayš (الحسن بن قريش). À la fin de ce même siècle, Yaḥya ibn Ḫālid al-Barmakī (يحيى بن خالد البرمكي) ordonne d'en faire une traduction à partir d'un texte grec, mais ce sont finalement deux autres traductions qui vont nous parvenir, l'une de al-Haǧǧāǧ ibn Maṭar (الحجّاج بن مطر), mort en 830 et l'autre de Isḥāq ibn Ḥunayn (اسحاق بن حنين), mort en 910. Cette dernière sera revue par Ṯābit ibn Qurra (ثابت بن قرّ), mort en 901. Les *Sphériques* de Menelaos seront également traduites par Isḥāq ibn Ḥunayn sous le titre *al-aškāl al-kuriya* (الاشكال الكري), ce qui signifie littéralement *la forme des globes*.

[13] Cela correspond à l'année 773 de notre ère chrétienne.

[14] C'est le terme utilisé par les Arabes pour le mot indien *siddhānta*.

[15] Ce nom est peut-être une déformation arabe du patronyme du souverain indien *Vyagramuḫa*, sous le règne duquel *Brahmagupta* a composé son *siddhānta*.

[16] Il s'agit vraisemblablement de l'*arthağya* indien ou ligne des sinus.

[17] Ce calife est *al-Mansūr* (المنسور), deuxième de la dynastie des abbassides.

[18] On dit aussi *Zīğ al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Zīğ du Grand Sind hind*. La question de savoir lequel des *siddhānta* fut ainsi traduit est encore sans réponse.

Connu pour un célèbre « traité d'algèbre » (cf. chapitre 17, section 4), ABŪ 'ABD ALLĀH MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḪWĀRIZMĪ (ابو عبد الله محمّد بن موسى الخوارزمي), qui vivait au début du neuvième siècle, a établi des tables astronomiques et des tables trigonométriques. Elles ont été revues, durant la seconde moitié du dixième siècle, par MASLAMA AL-MAĞRĪṬĪ (مسلم المجريطي) et traduites en latin, dès 1126 par ADELARD DE BATH. Elles figurent parmi les premières tables de l'empire musulman ; elles contiennent non seulement la fonction « sinus », mais aussi la fonction « tangente ». Cette notion de tangente, qui est en fait l'ombre d'un gnomon fixé horizontalement sur un mur vertical, semble avoir été introduite par ḤABAŠ AL-ḤĀSIB (حبش الحاسب), qui a fait des observations entre 825 et 835. AL-ḪWĀRIZMĪ a probablement participé aux travaux de mesure du méridien terrestre, ordonnés par le calife *al-Ma'mūn* (المأمون), et a amélioré la géographie de PTOLÉMÉE, tant en ce qui concerne le texte que les cartes.

AL-BATTĀNĪ (البتّاني), né avant 858 et mort en 929, mérite également d'être cité. Son nom a été latinisé en ALBATE(G)NIUS. Son œuvre principale est un traité d'astronomie avec des tables, traduit en latin sous les titres *De scientia stellarum* et *De numeris stellarum et motibus*. Cet ouvrage a influencé notre astronomie jusqu'à la Renaissance. AL-BATTĀNĪ a déterminé, avec une grande précision, de nombreux coefficients astronomiques tels que la précession ou l'inclinaison de l'écliptique, ... Le troisième chapitre de son astronomie est consacré à la trigonométrie. Il utilise surtout les sinus qu'il préfère aux cordes grecques. Il travaille également avec les fonctions ombres, *umbra extensa* et *umbra versa*, ombre d'un gnomon vertical sur le sol et ombre d'un gnomon horizontal sur un mur vertical, ce qui correspond, on l'a déjà dit, à notre cotangente et à notre tangente. Il connaissait la relation entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, relation que nous exprimons de nos jours par la formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Un autre grand nom parmi les savants du monde musulman est ABŪ-L-WAFĀ' (الو الوفاء), l'un des derniers traducteurs arabes et commentateurs des œuvres grecques. Il est né en 940 et a travaillé à Baġdād, où il est mort vers 998. Outre ses apports en géométrie, en arithmétique, en astronomie, il développe très fort la trigonométrie. Il donne une nouvelle méthode pour construire des tables de sinus, détermine, par exemple, la valeur de $\sin 30'$ avec huit décimales correctes et calcule une table de tangentes. Il connaît des formules de trigonométrie équivalentes à celles que nous enseignons encore sur le sinus d'une somme ou d'une différence ou sur les sinus et cosinus des angles doubles...

D'origine égyptienne, IBN YŪNUS (بن يونس), qui est mort au Caire en 1009, a aussi apporté une contribution considérable à la trigonométrie. Il résout de nombreux problèmes d'astronomie sphérique au moyen de projections orthogonales et introduit certaines formules indispensables avant l'invention des logarithmes, telles que, par exemple, l'équivalent de $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Au XI^{e} siècle, un pas important est franchi avec l'obtention d'un théorème qui va permettre de se passer de celui de MENELAOS. Ce dernier est en effet d'un emploi très lourd lors des calculs, puisqu'il fait intervenir six quantités. Grâce au *théorème des sinus*, le nombre de quantités va se réduire à quatre. Dans le monde musulman, il porte le nom de *al-šakal al-muġnī* (الشكل المغني), littéralement, la *forme qui dispense* (de l'utilisation du théorème de MENELAOS). En trigonométrie plane, si A, B, C sont les trois angles d'un triangle dont les côtés respectivement opposés sont désignés par a, b et c, on a[19]

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\,.$$

La découverte de cette relation a provoqué une polémique à propos de la paternité du résultat. Ce fait nous est rapporté par AL-BĪRŪNĪ dans son ouvrage *al-kitāb maqālīd 'ilm al-haiy'a* (الكتاب مقاليد علم الهيئة), qu'on peut traduire par *le livre des propos sur la science de l'astronomie*. Cet épisode nous permet de découvrir un réseau d'échanges scientifiques et une coopération à distance. Parmi les chercheurs qui ont permis d'arriver à ce résultat, on peut citer ABŪ-L-WAFĀ' et IBN YŪNUS pour le centre de l'empire, AL-BĪRŪNĪ, pour l'Asie centrale et ǦĀBIR IBN AFLAH (جابر بن افله) pour l'Espagne.

Il est impossible de donner une liste exhaustive des hommes de science qui se sont occupés d'astronomie – et, par là-même, de trigonométrie – dans les pays du monde arabe, tant cette activité a connu de succès. Nous dirons encore que, dès le dixième siècle, de nombreuses relations étaient établies entre les six nombres trigonométriques classiques, qui tous étaient tabulés. Il faut se rendre compte que ces relations ne constituaient pas un jeu de l'esprit, mais étaient utilisées essentiellement pour simplifier les calculs.

5 La trigonométrie dans le monde occidental

Les résultats obtenus en astronomie et en trigonométrie vont pénétrer le monde occidental par le même biais que les autres sciences. C'est ce que nous avons appelé la troisième phase de transmission des savoirs à la fin du chapitre 16. Les savants européens vont poursuivre le travail déjà bien entamé par leurs collègues orientaux. Nous nous contenterons de citer quelques faits importants.

À la Renaissance, des mathématiciens allemands élaborent des tables trigonométriques d'une très grande précision, que l'on paie très cher, étant donné la masse de calculs à effectuer, sans instrument performant. CAJORI [33] n'hésite pas à affirmer, même si c'est un peu caricatural, que l'invention des logarithmes a doublé la vie des astronomes en diminuant leur labeur. Les logarithmes ont été inventés par l'écossais John NAPIER[20], Baron de Merchiston, qui a vécu de 1550 à 1617. L'anglais Henry BRIGGS (1556-1631), admirateur de NAPIER, suggère quelques améliorations qui sont approuvées par ce dernier, ce qui donnera lieu à l'appellation *logarithme de Briggs*. En 1624, BRIGGS publie son *Arithmetica logarithmica*, qui contient les logarithmes à 14 places décimales des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Le trou est comblé par le Hollandais Adriaan VLACQ (1600 ?-1667), qui a passé dix ans à Londres comme libraire et éditeur.

La première publication des logarithmes de Briggs des fonctions trigonométriques est réalisée en 1620 par Edmund GUNTER (1581-1626), un collègue londonien de BRIGGS.

Il y aurait encore beaucoup de choses à dire sur l'histoire de la trigonométrie, mais nous pensons que ce qui précède brosse un tableau assez significatif de l'évolution de cette branche des mathématiques. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à la bibliographie.

[19] En trigonométrie sphérique, on a $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$, où les côtés a, b et c sont des arcs de grand cercle.

[20] Ce surnom apparaît avec de nombreuses orthographes ; il est fort probable qu'à l'époque, il s'écrivait NEPER.

Chapitre 20

Le défi de l'irrationalité

1 Logistique et arithmétique

Les mathématiques ont d'abord été une manipulation de nombres : ceux-ci permettaient le dénombrement de collections finies, mais ils intervenaient également pour exprimer la mesure de grandeurs géométriques comme la longueur, l'aire, le volume ou l'amplitude d'angles. Ce rôle attribué aux nombres se retrouve aussi bien au Proche-Orient qu'en Grèce, et pour ce que l'on en sait, en Inde.

Les Babyloniens en particulier ont fait un effort pour poser et résoudre des problèmes de géométrie au moyen de segments rationnels et de proportions numériques. La seule distinction qui est faite est celle entre nombres qui s'expriment exactement (en base 60) et nombres ≪ qui n'existent pas ≫ et qui sont remplacés par une valeur approchée, sans donner aucune explication (voir [46]).

Les Grecs distinguaient la partie noble des activités numériques sous le nom d'≪ arithmétique ≫ et la partie pratique sous celui de ≪ logistique ≫. Cette partie maintenait actifs les procédés numériques d'approximations déjà connus des Babyloniens et des Égyptiens. Un système d'écriture des nombres sous forme décimale basé sur l'usage de l'alphabet grec est connu, mais il ne permet pas un calcul aisé ; aussi de nombreuses opérations continuent à être exécutées en utilisant le système babylonien d'écriture des fractions (voir [52]).

Dès le V$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C., l'école philosophique regroupée autour de PYTHAGORE[1] appuie ses principes sur l'expérience des mathématiciens eux-mêmes, et notamment sur l'usage des proportions numériques dans la résolution de nombreux problèmes.

Le pythagorisme explicitait pour le mathématicien le sens de son travail, à savoir la connaissance par le nombre de la réalité des choses. Le pythagorisme a intégré la mathématique à la ≪ philosophie ≫, c'est-à-dire, en l'occurrence, à une doctrine de la nature, pour qui $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ *(mathéma)* ne signifie autre chose que la connaissance immédiate de cette nature par les nombres.

[1]PYTHAGORE DE SAMOS, né dans la première moitié du VI$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C. à Samos, petite île en face de Milet où il étudie à l'école fondée par THALÈS. Il visite Alexandrie avec son père commerçant. En 529 av. J.-C., il fonde une école à Crotone en Italie du Sud. On y pratique la philosophie, les mathématiques, les sciences naturelles, la musique et des rites secrets. Il meurt à Métaponte, chassé de sa ville par une révolte contre sa ≪ secte ≫.

L'indifférenciation régnant encore entre physique et mathématique explique et même légitime le fait que ce soit dans une doctrine de la nature qu'apparaisse le « fondement ». Le principe des choses est le nombre entier, et par suite, la connaissance des rapports des nombres est suffisante pour celle des grandeurs physiques, c'est-à-dire « géométriques » (voir [37]).

On possède peu de données historiques sur l'origine et les causes de la recherche de démonstrations rigoureuses. Tout au plus, peut-on replacer cette quête dans le contexte de civilisation qui confère à l'argumentation dans la vie publique grecque, un rôle qu'elle ne tenait sans doute pas dans les civilisations de l'Orient.

Les « logisticiens » mettaient en évidence les difficultés particulières à effectuer certaines opérations, assorties toutefois de l'espoir d'y parvenir par quelque ingénieux procédé, ou bien en poursuivant assez longtemps un processus opératoire dont les résultats partiels seraient sans cesse meilleurs.

En émettant des doutes quant à la vraie nature de la difficulté éprouvée, c'est-à-dire quant à la cause de l'impuissance opératoire,

> est-ce une difficulté relative et temporaire, que la maladresse dans le choix d'un procédé ou l'arrêt prématuré des calculs, bref des raisons subjectives, n'ont pas permis de surmonter ?
>
> est-ce au contraire une impossibilité objective, tenant à la « nature des choses », et dans ce cas comment s'en assurer ?

les « arithméticiens » orientaient la recherche vers l'établissement de la preuve de cette impossibilité objective (voir [37]).

L'éclosion de cette science positive, détachée mais intégrant les collections de résultats empiriques des civilisations antérieures, conduira certes à une mathématique plus abstraite, mais surtout déductive. À une période de découvertes sporadiques va succéder une ère d'inventions systématiques. Celles-ci ont débouché sur la rédaction de textes démonstratifs et déductifs caractérisés par une charpente logique et par un choix judicieux des « notions premières » qui servent de fondements.

Les *Éléments* d'EUCLIDE[2], étaient de loin les plus complets et les plus achevés, aussi bien sur le plan de la méthode que de la forme. Considérés comme un modèle de rigueur, ils constituent l'apogée de la création mathématique en Grèce classique et ont exercé une influence durable sur le développement des mathématiques ultérieures (voir [52]).

2 Grandeurs et nombres.

Une grandeur en mesure une autre de même nature si la seconde est obtenue en juxtaposant un nombre entier de fois la première. L'égalité de deux grandeurs est perçue comme la possibilité de les faire coïncider. Dans ce contexte, le nombre reste une « pluralité d'unités » dans une opération de comptage.

[2] EUCLIDE D'ALEXANDRIE a écrit les *Éléments* en treize livres. Il vécu vers 300 av. J.-C. (voir [110]). Ces textes regroupent tous les résultats antérieurs tout en ajoutant des recherches originales : PROCLUS affirme au V^e siècle après J.-C. qu'en rassemblant les *Éléments*, EUCLIDE « en a coordonné beaucoup d'EUDOXE, perfectionné beaucoup de THÉÉTÈTE et qu'il a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montrés d'une manière relâchée » (voir [52]).

Fig. 1

La grandeur de gauche mesure la grandeur de droite ; le nombre lié à cette mesure est 5.

Deux grandeurs sont *commensurables* lorsque leur rapport (*ratio*) se ramène à un rapport de deux nombres entiers : ainsi la notion de nombre englobe aussi celle de fraction (voir [46]). La similitude de deux figures s'exprime alors directement par l'existence d'un rapport unique et bien défini entre segments homologues.

Fig. 2

Le rapport de la grandeur de gauche à la grandeur de droite s'exprime par la fraction $\frac{2}{5}$.

Certaines grandeurs ne peuvent pas s'exprimer par rapport à une autre par l'usage d'une fraction de nombres : c'est par exemple le cas de la diagonale d'un carré par rapport à son côté (figure 3), ou encore la diagonale d'un pentagone par rapport à son côté (figure 4). Il faut donc adjoindre au système d'opérateurs dont on disposait pour les grandeurs, à savoir les entiers et les rapports $\frac{m}{n}$, un opérateur nouveau, qui n'est plus un rapport numérique, mais une « raison » entre grandeurs.

On dit que de telles grandeurs sont *incommensurables* entre elles, que leur raison est *inexprimable* par une fraction, qu'elle est *irrationnelle*[3].

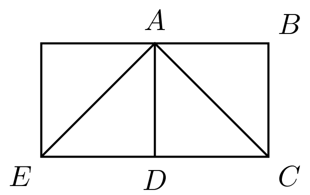


Fig. 3

Les triangles AEC et BAC sont tous deux rectangles isocèles : ils sont semblables et pourtant le rapport des grandeurs AC et AB est inexprimable par une fraction. La « raison » vaut $\sqrt{2}$.

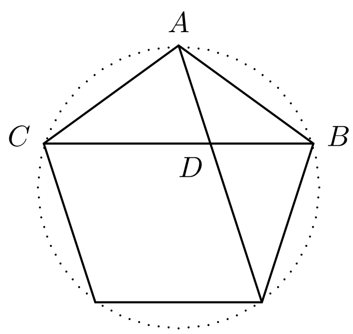


Fig. 4

Soit un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle. Les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ ont même amplitude (car ce sont des angles inscrits égaux à 36°). Les triangles isocèles ABC et DAB sont semblables. Le rapport des grandeurs BC et AB est inexprimable par une fraction. La « raison » vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour la théorie subtile du *rapport* exposée dans les *Éléments*, ce sont des grandeurs géométriques qui sont *irrationnelles* (d'où le féminin). Il ne s'agit pas de « nombres » irrationnels, ce qui n'a pas de sens pour les mathématiques grecques où le vocable nombre désigne toujours

[3] Il existe trois mots grecs pour ces trois notions qui sont conceptuellement différentes, mais qui dans le cadre de cette étude peuvent être considérées comme synonymes.

un nombre entier pendant la période classique puis un nombre entier ou fractionnaire à partir de la période hellénistique (voir [46]).

3 Légende ?

Un des grands triomphes de la mathématique grecque fut la découverte et le traitement des grandeurs irrationnelles. L'histoire de cette découverte ne nous est parvenue que par des textes postérieurs de près de sept siècles à l'époque de PYTHAGORE.

IAMBLICHUS (ou IAMBLIQUE) né vers 250 à Chalcis au Liban et mort vers 330 a écrit une *Vie de Pythagore*. Il situe cette découverte des irrationnelles non pas pour la diagonale du carré, mais pour le partage d'un segment en extrême et moyenne raison.

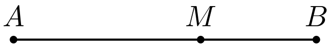


Fig. 5

Soit $AB = 1$. On cherche M pour que $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$.
La « raison » vaut $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

PAPPUS D'ALEXANDRIE, qui vécut à la fin du III^e siècle après J.-C. a écrit une *Collection mathématique* en huit livres ; il situe la découverte des irrationnelles dans la secte pythagoricienne à propos de la diagonale du carré, et l'attribue à HYPPASIUS[4].

PROCLUS DIADOCHUS, né en 411 à Constantinople et mort en 485 à Athènes, dans ses *Commentaires sur* EUCLIDE, attribue la découverte à PYTHAGORE.

Les textes de PLATON et ARISTOTE plus proches des pythagoriciens la situent dans la secte pythagoricienne et parlent de la diagonale du carré (voir la duplication du carré à partir d'un texte extrait du *Ménon* de PLATON, page 182).

Ce qui a frappé les contemporains, ce qui est nouveau et distingue la « raison » de la « ratio », c'est que cette propriété d'incommensurabilité des segments ne peut en aucune manière être constatée sur le dessin, la conviction de sa véracité ne pourra donc se faire que par une preuve, une démonstration. De plus, il y a incommensurabilité des segments (le rapport de la diagonale au côté du carré est $\sqrt{2}$), mais pas des surfaces (le rapport du carré construit sur la diagonale au carré construit sur le côté est 2). Comme le dit CAVEING [37],

> Ce qui allait se révéler dans la découverte de l'irrationalité, c'était la richesse insoupçonnée du champ opératoire ainsi naïvement soumis d'abord à la loi « discontinue » du nombre. Du fait de la divisibilité indéfinie de la grandeur et de la possibilité d'inexistence d'une partie aliquote commune, le domaine des opérations effectuables grâce au rapport d'entiers ne pouvait plus être posé comme coextensif à celui des opérations requises par la mesure des grandeurs. Ainsi la fonction opératoire du nombre se détachait-elle d'une essence circonscrite étroitement par tradition à la « pluralité d'indivisibles ».

La découverte de l'incommensurabilité de certaines longueurs entre elles fut-elle, dès lors, un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement comme le pense PAUL TAN-

[4] HYPPASE DE MÉTAPONTE, né vers 500 av. J.-C., aurait découvert les irrationnelles en considérant des pentagones emboités. D'après JAMBLIQUE, c'est lui le disciple de PYTHAGORE qui aurait péri noyé, puni des dieux pour avoir révélé au monde l'existence des grandeurs irrationnelles.

NERY (voir [132]) ? Constitués en mouvement que nous qualifierions aujourd'hui de mouvement sectaire – basé sur l'adoration du principe ultime « Tout est nombre » (sous-entendus, entiers ou fractionnaires) –, il a dû être difficile aux adeptes pythagoriciens de remettre en cause leurs conceptions.

Pourtant, l'effort de reconstruction de l'édifice d'EUCLIDE sera rapidement mené à bien par EUDOXE DE CNIDE, qui vécut entre 400 et 350 av. J.-C. Comptemporain de PLATON, échangeant des idées sur plusieurs sujets dans une atmosphère de respect mutuel (voir [44]), c'est lui qui formulera la définition 5 du livre V des *Éléments* d'EUCLIDE au sujet de l'égalité des rapports.

> Des grandeurs sont dans le même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, quand, de tout équimultiple de la première et de la troisième quel qu'il soit, et de tout équimultiple de la deuxième à la quatrième quel qu'il soit, les premiers équimultiples sont excédents, sont égaux, ou sont plus petits que les derniers équimultiples considérés en ordre correspondant.

Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si, étant donné m et n entiers, toutes les fois que $ma < nb$, alors $mc < nd$, ou si $ma = nb$, alors $mc = nd$, ou si $ma > nb$, alors $mc > nd$. Cette définition offre l'avantage d'être applicable, non seulement aux nombres, aux grandeurs commensurables ou non, mais également à des grandeurs géométriques distinctes comme par exemple un rapport de volume de sphères égal à un rapport de cube de segments (voir [44]).

Chez des philosophes comme PLATON et ARISTOTE, l'étonnement initial devant le fait de l'irrationalité avait déjà fait place à une certaine admiration devant la difficulté vaincue.

À la lecture d'HIPPOCRATE DE CHIO[5], auteur du seul document mathématique actuellement disponible sur la mathématique du Ve siècle, FREUNDENTHAL n'y trouve aucun indice de crise (voir [71]). HIPPOCRATE ne considère que des rapports très particuliers et peut se passer d'une théorie générale des proportions et de la similitude ; il connaît les lignes incommensurables et les considère comme indirectement commensurables par la médiation des aires des carrés construits sur elles. L'existence connue de l'irrationalité n'empêche pas le géomètre de poursuivre ses recherches.

4 La numérisation des rapports

Une première trace de la numérisation des rapports se rencontre dans une définition de l'égalité de deux rapports, due à 'Umar AL-ḪAYYĀM, qui a beaucoup étudié EUCLIDE (voir [46]).

[5]HIPPOCRATE DE CHIO qui vécut vers 430 av.J.-C., s'est rendu célèbre en réalisant la quadrature de certaines lunules. On lui doit la première quadrature d'une surface curviligne effectuée rigoureusement dans l'histoire des mathématiques (voir [44]). Plusieurs fois, il compare des segments de cercles semblables dont il sait que le rapport de leur aire est le même que le rapport des carrés de leurs cordes. Il montre ainsi que le rapport de l'aire de deux cercles s'énonce avec des nombres entiers p et q si les diamètres sont en « raison » $\sqrt{p}/\sqrt{q}$. Les deux diamètres sont pour lui « potentiellement commensurables ». Nous avons gardé un fragment original de son œuvre qu'il nous est possible de comparer avec des commentaires et versions ultérieures. Il est également le premier à avoir écrit des *Éléments*, malheureusement perdus.

Étant données quatre grandeurs telles que la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien telle que la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien telle que la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique.

Exprimé en notations modernes, les égalités de rapports suivantes

$$\begin{aligned} a = b \quad &\text{et} \quad c = d; \\ a = \frac{b}{n} \quad &\text{et} \quad c = \frac{d}{n}; \\ a = \frac{mb}{n} \quad &\text{et} \quad c = \frac{md}{n}; \end{aligned}$$

permettent de conclure que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La naissance d'une nouvelle conception du nombre embrassant à la fois tous les nombres réels positifs ne peut être repérée qu'au début du X^{e} siècle dans l'emploi d'un même mot العدد (al-a'dad), signifiant nombre, pour les nombres rationnels العدد المنطق (al-a'dad al-manṭiqa, *nombre logique*) et les nombres irrationnels العدد اصمّا (al-a'dad aṣammā, *nombre sourd*). Le projet d'AL-KARAǦĪ[6] et d'AL-SAMAW'AL[7] d'étendre les opérations d'arithmétique, y compris les extractions de racines carrées aux quantités algébriques irrationnelles, conduira à un élargissement du champ du calcul qui concernera à la fois nombres et grandeurs. Ce point de vue entraînera d'ailleurs une réinterprétation des *Éléments* (voir [52]).

La première construction historique des nombres réels sera proposée en 1858 par RICHARD DEDEKIND[8]. Il suppose bien fondée l'arithmétique des nombres rationnels et rien d'autre. Il montre que l'on peut constater dans les nombres rationnels des phénomènes qui peuvent être employés à compléter ce domaine par une création unique de nombres irrationnels : le phénomène dont il parle est la *coupure*.

En se laissant guider par l'intuition géométrique qu'un point intérieur à un segment divise celui-ci en deux parties, DEDEKIND appelle coupure C_1, C_2 des rationnels, toute partition des rationnels en deux classes C_1 et C_2 non vides, disjointes et telles que tout nombre de la première C_1 est strictement inférieur à tout nombre de la seconde C_2.

Si d'aventure, il existe un plus grand élément dans C_1 ou un plus petit élément dans C_2, alors la coupure définit un nombre rationnel. Ainsi la coupure C_1, C_2 où C_1 est l'ensemble des rationnels

---

[6] AL-KARAǦĪ, mathématicien de la fin du X^{e} siècle, né en Iran actuel, écrit *Le livre suffisant sur la science de l'arithmétique*. On y découvre entre autre la loi de formation du triangle de PASCAL.

[7] Élève du précédent, ce juif marocain est un médecin réputé et un mathématicien de premier plan. Son *Livre lumineux sur l'arithmétique*, écrit à l'age de dix-neuf ans, témoigne d'une grande familiarité avec les nombres réels, qu'il écrit au moyen des chiffres indiens. Il étudie les fractions décimales et l'extraction de racines n-ièmes.

[8] RICHARD DEDEKIND, mathématicien allemand (Brunswick, 1831 – Brunswick, 1916), propose une construction axiomatique des naturels, précise la structure des rationnels et comble le fossé entre la géométrie grecque et les nombres irrationnels permettant enfin de parler de *droite numérique*. On lui doit également le symbole $\mathbb{Z}$ pour les entiers relatifs et la structure de corps (Zahlkörper).

inférieurs ou égal à 3, et C_2 est l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à 3 définit rigoureusement le rationnel 3.

Il existe des coupures qui n'ont pas cette propriété, c'est-à-dire où C_1 n'a pas de plus grand élément et C_2 n' a pas de plus petit élément. Prenons comme exemple la coupure définie par C_1 qui représente l'ensemble comprenant tous les rationnels négatifs et les rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2, et C_2 tous les autres rationnels. Un plus grand élément x dans C_1 signifierait que $x^2 = 2$, ce qui est impossible avec x rationnel. Cette coupure C_1, C_2 crée donc un nouveau nombre irrationnel a tel que $a^2 = 2$.

À une coupure correspond donc exactement un réel, qu'il soit rationnel ou irrationnel. Dedekind montre ensuite que ses coupures vérifient toutes les propriétés que l'on est en droit d'attendre des réels pour l'ordre, l'addition et la multiplication[9] (voir [52]).

5 Calculs approchés de $\sqrt{2}$

5.1 Tablette mésopotamienne

Il existe dans la collection des antiquités babyloniennes de l'Université de Yale une petite tablette circulaire[10] d'à peine 7 cm de diamètre. Elle représente un carré et ses diagonales où trois séries de nombres sont gravés. La gravure se faisait par pression plus ou moins prononcée d'un roseau taillé dans un pain d'argile malléable. Les encoches avaient la forme de coins (*cuneus* en latin) semblables à des *clous* ou des *chevrons* ; d'où le nom de *cunéiforme* donné à ce type d'écriture. Une fois le texte écrit, l'argile était chauffée et prenait la consistance d'une brique, ce qui garantissait une certaine pérennité de l'information.

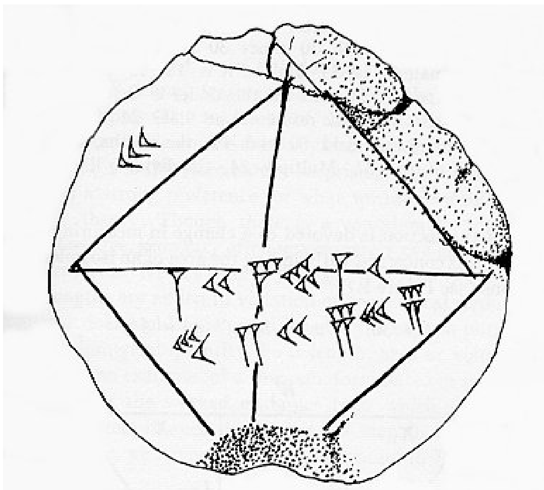


Fig. 6 : YBC7289

[9] En termes de la mathématique des structures, les coupures forment avec l'addition et la multiplication un corps commutatif totalement ordonné.

[10] Yale Babylonian Collection, YBC7289, datée de la première dynastie babylonienne, entre 1728-1530 av.J.-C.

L'interprétation des signes mathématiques est assez simple si l'on connaît les quelques règles qui régissent leur écriture[11]. Tête en haut et le corps fortement marqué, le *clou* représente l'unité.

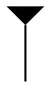


Fig. 7 : Représentation de 1 en cunéiforme.

Ces marques, regroupées par série de trois, sont utilisées pour indiquer les unités, de 1 à 9. Seuls les clous de la série du bas gardent une grande empreinte du corps. Voici par exemple la représentation du nombre 4.

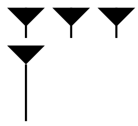


Fig. 8 : Représentation de 4 en cunéiforme.

Tête vers la gauche sans marque du corps, le *chevron* représente la dizaine. Ces chevrons sont utilisés par leur éventuelle répétition pour marquer les dizaines de 10 à 50.

Fig. 9 : Représentation de 10 en cunéiforme.

On juxtapose les symboles et on additionne leurs valeurs. Par exemple 24 se représente par deux chevrons (20) et quatre clous (4).

La base du système de numération est 60, mais le système sert aussi bien à la représentation des entiers qu'à celle des fractions ayant pour dénominateur une puissance de 60 (voir [27]) ; un bloc de deux chevrons et quatre clous suivi un peu plus loin d'un bloc de 5 chevrons et 1 clou s'interprétera soit par le nombre $24 \times 60 + 51$, soit par le nombre $24 + \frac{51}{60}$, car il n'y a pas de signe équivalent à notre virgule pour départager les deux cas. On se trouve donc obligé de recourir à la vraisemblance et au contexte pour comprendre de quels nombres il s'agit (voir [115]).

Examinons de plus près les trois nombres gravés sur la tablette mésopotamienne. Interprétons tout d'abord le nombre écrit près du côté supérieur gauche du carré. Composé de 3 chevrons, ce nombre ne peut être égal qu'à 30.

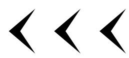


Fig. 10 : Représentation de 30 en cunéiforme.

Déchiffrons à présent le nombre inscrit au travers de la diagonale du carré. Nous lisons successivement de gauche à droite :

[11]Plusieurs manières de positionner les différents signes les uns par rapport aux autres ont été constatées sur différentes tablettes. Pour plus de détails, voir [79].

– 1 clou ;
– un bloc constitué de 2 chevrons et de 4 clous ;
– un bloc constitué de 5 chevrons et de 1 clou ;
– 1 chevron.

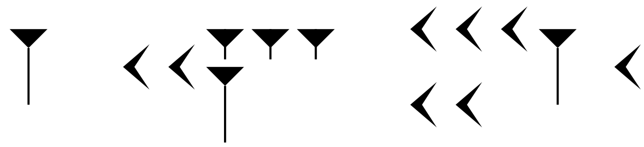


Fig. 11 : Le nombre inscrit au travers de la diagonale.

Plusieurs valeurs sont possibles :

– soit $1 \times 60^3 + 24 \times 60^2 + 51 \times 60^1 + 10 \times 60^0 = 305\,470$;

– soit $1 \times 60^2 + 24 \times 60^1 + 51 \times 60^0 + 10 \times 60^{-1} = 5\,091{,}166\,667$;

– soit $1 \times 60^1 + 24 \times 60^0 + 51 \times 60^{-1} + 10 \times 60^{-2} = 84{,}852\,778$;

– soit $1 \times 60^0 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3} = 1{,}414\,212\,963$.

Cette petite tablette ≪ aide-mémoire ≫ fournit donc dans un contexte de carré et de ses diagonales, une excellente approximation de $\sqrt{2}$, puisque l'erreur relative n'est que de $4 \cdot 10^{-7}$. Une telle précision ne peut provenir d'une mesure physique effectuée sur une figure même très soignée. Il faut donc en conclure que le scribe était conscient du fait que ce nombre avait pour carré 2, et qu'il disposait d'une technique de calcul des racines.

Gilles Godefroid [76] pense qu'une méthode proche de celle connue sous le nom d'algorithme de Héron[12] pouvait avoir été utilisée par les babyloniens. La voici :

Considérons a proche de $\sqrt{2}$: dans ce cas

$$2 = a^2 + h$$

avec h assez petit. Si nous considérons la somme de ces deux termes comme le début d'un carré, nous avons

$$\left(a + \frac{h}{2a}\right)^2 = a^2 + h + \frac{h^2}{4a^2}.$$

Et puisque h est petit, on a

$$\left(a + \frac{h}{2a}\right)^2 \simeq a^2 + h$$

et donc

$$\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + h} \simeq a + \frac{h}{2a}.$$

On remarque ensuite que

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + h}{a}\right) = a + \frac{h}{2a}$$

[12] Voir chapitre 14, page 451.

ce qui nous conduit à l'approximation

$$\sqrt{2} \simeq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

En partant de $a = 1$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{3}{2}$ qui s'écrit dans la notation babylonienne $1 + \frac{30}{60}$.

En partant de $a = \frac{3}{2}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{17}{12}$ qui s'écrit dans la notation babylonienne $1 + \frac{25}{60}$.

En partant de $a = \frac{17}{12}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{577}{408}$ dont l'écriture dans la notation babylonienne commence par $1 + \frac{24}{60}$.

En partant de $a = \frac{577}{408}$, on trouve comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la fraction $\frac{665\,857}{470\,832}$ dont l'écriture dans la notation babylonienne commence par $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

Revenons à notre tablette : le troisième nombre comporte les blocs 42, 25 et 35.

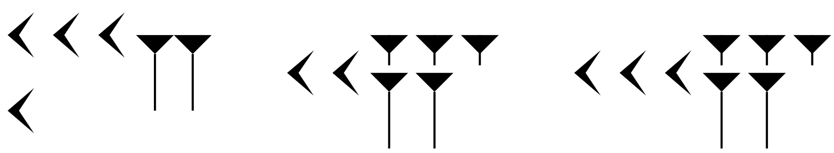


Fig. 12 : Le nombre inscrit sous la diagonale.

Effectuons le produit, en base 60, de 30 (la mesure du côté du carré) par $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$. On trouve successivement :

$30 \times 1 = 30$

$30 \times \frac{24}{60} = \frac{720}{60} = 12$

$30 \times \frac{51}{60^2} = \frac{1\,530}{60^2} = \frac{25 \times 60 + 30}{60^2} = \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2}$

$30 \times \frac{10}{60^3} = \frac{300}{60^3} = \frac{5}{60^2}$

$30 \times \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right) = 30 + 12 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2} + \frac{5}{60^2} = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$

Le troisième nombre doit donc se lire $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42,426\,388$ et représente, avec une erreur relative de $4 \cdot 10^{-7}$, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 30.

Le grand spécialiste du déchiffrement des tablettes babyloniennes, O. Neugebauer (voir [113]), pense également que l'extraction avec une telle précision de la racine carrée de deux se faisait par la méthode qui vient d'être indiquée. Il soutient que les Mésopotamiens semblent avoir eu d'extraordinaires capacités à manipuler les nombres de toutes sortes de manières, manipulations dont ils consignaient soigneusement les résultats. Si la tablette YBC 7289 montre incontestablement que le scribe savait que la diagonale d'un carré de côté c est égale à $c\sqrt{2}$, elle ne permet pas de conclure à la connaissance du théorème de Pythagore dans le cas général. Que l'aire de la surface carrée $(AEFC)$ construite sur la diagonale (AC) d'un autre carré $(ABCD)$ est égale au double de l'aire de la surface de celui-ci, est immédiatement visible sur la figure 13.

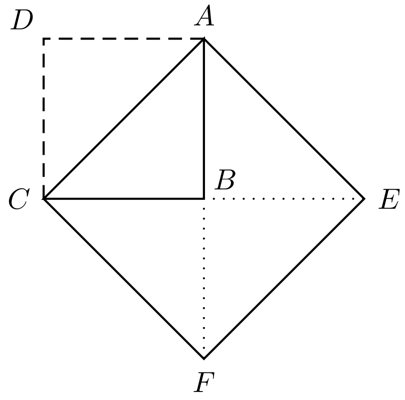


Fig. 13

5.2 Les Śulbasutras

Vers le III^e millénaire av. J.-C., des Aryens, originaires des steppes d'Eurasie, envahissent l'Inde et parviennent à dominer le peuple hindou. Ils installent en Inde du Nord une riche civilisation qui va développer une littérature savante écrite en sanscrit. Entre 1500 et 500 avant J.-C., les textes sacrés de l'hindouisme vont être rédigés et compilés dans une œuvre monumentale : la *Véda*[13]. Ce terme qui signifie « science, savoir » recouvre de nombreux recueils disparates destinés aux « fonctionnaires » du culte.

Les prescriptions et les connaissances requises pour construire les temples sont regroupées dans des *Sutras* (ensemble de règles rituelles). Les *Śulbasutras* (littéralement : règles des cordes, celles qu'emploient les géomètres pour mesurer) sont une section des Sutras consacrée à certaines règles mathématiques régissant la construction et la forme des autels sacrificiels. Ces « sacrifices » étaient des offrandes constituées de récoltes ou de bétail : les nombreux dieux hindous pouvaient ainsi mieux veiller à la marche correcte du monde.

Nous disposons de quatre textes complets d'auteurs différents : Baudhayana et Apastamba, antérieurs au V^e siècle av. J.-C., Manava et Katyayana, antérieurs au III^e siècle av. J.-C. Malgré la similitude entre les problèmes étudiés par Euclide et les problèmes abordés dans les *Śulbasutras*, ces derniers restent peu connus[14]. Ils présentent pourtant l'originalité d'être de simples annexes d'un rituel long et compliqué. Ils étaient tellement peu perçus comme textes mathématiques que l'on trouve difficilement leur influence chez les auteurs indiens postérieurs présentant une mathématique plus structurée comme Āryabhaṭa[15] et Brahmagupta[16].

Dans ses *Śulbasutras*[17], Baudhayana explique comment construire un carré d'aire double d'un carré donné, ce qui conduit à une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (voir [98] et [57]). Il suggère

[13] Ce terme donnera son nom à cette période historique de l'histoire indienne : la période de l'Inde *védique*.

[14] La première traduction anglaise de G. Thibaut date de 1877 à 1882 et ne se trouve que dans de rares bibliothèques spécialisées. Une nouvelle traduction a été publiée en 1983 par S. N. Sen et A. K. Bag, *The Śulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava*, New Dehli, Indian National Science Academy.

[15] Āryabhaṭa, vivait à Patna sur le Gange ; il a écrit en 499 après J.-C. un petit livre descriptif des règles de calcul usuelles en astronomie, sommaire des connaissances de l'époque. Il utilise l'écriture décimale et se sert d'un « trou » qui joue le rôle du zéro.

[16] Brahmagupta, vivait à Ujjain dans le centre de l'Inde ; dans son recueil *Le système révisé de Brahma* écrit en 628, quelques chapitres sont consacrés aux mathématiques. Il étudie les équations, parle d'inconnues, et considère zéro comme un nombre à part entière. C'est aussi à lui que l'on doit le plus ancien essai connu pour trouver la solution d'une équation à l'aide de fractions continuées (voir [42]).

[17] Baudhayana, *Śulbasutra*, I, 62.

qu'on augmente le côté du carré d'un tiers et cela de son quart diminué du trente-quatrième de lui-même.

Concrètement, cela revient à transformer un carré de côté 1 pour en faire un gnomon que l'on adjoint à un autre carré de côté 1 pour obtenir un carré dont l'aire sera 2. Le côté de ce nouveau carré devrait être $\sqrt{2}$ si la construction était exacte. L'auteur suggère de prendre comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, la valeur

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{3}\right)$$

c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}.$$

Le découpage du carré de côté 1 et la construction du gnomon, donnée par Joseph [98] permettent de justifier cette valeur approchée[18].

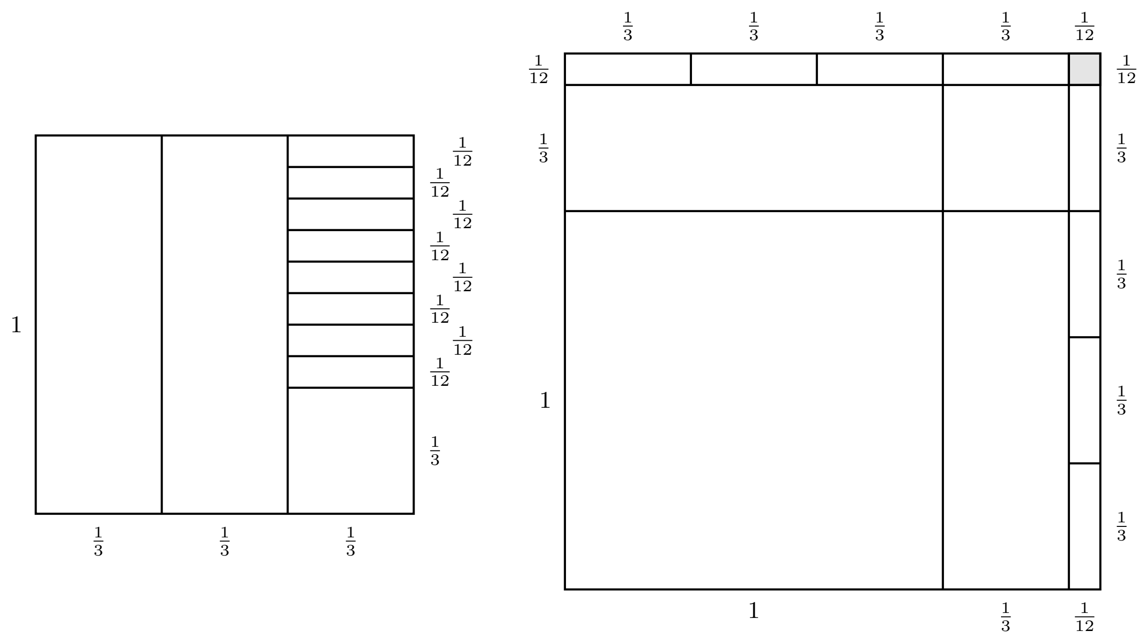


Fig. 14 : Découpage du carré et constitution du gnomon.

Un carré d'aire unité est découpé en deux grands rectangles d'aire un tiers, un carré d'aire un neuvième et huits petits rectangles d'aire un trente-sixième. Ces onze « pièces » sont assemblées pour former un gnomon autour d'un autre carré d'aire unité (figure 14). Ce gnomon est malheureusement incomplet, car un petit carré de côté un douzième n'est pas couvert en haut à droite de l'assemblage.

Le grand carré de droite, de côté $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ est d'aire légèrement plus grande que 2, exactement $2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2$.

[18] Par ailleurs, on ne connaît pas avec certitude la justification indienne sur laquelle les spécialistes ne sont pas d'accord.

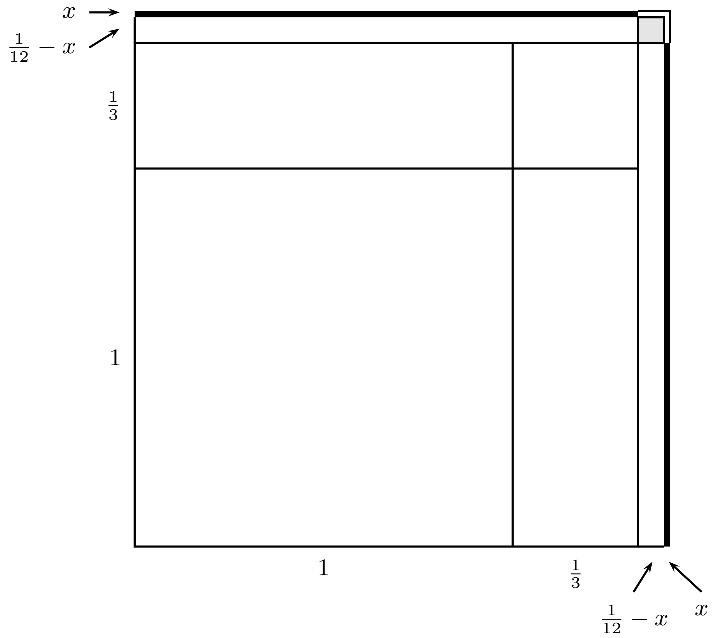


Fig. 15 : Second gnomon

On va enlever sur deux côtés du carré, un second gnomon très fin dont l'aire compensera en partie ce petit carré de côté $\frac{1}{12}$.

Les aires de chacun des rectangles très fins et allongés valent $\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot x$. Le côté du petit carré ombré intérieur au carré de côté $\frac{1}{12}$ obtenu avec le premier gnomon ne vaut plus que $\frac{1}{12}-x$. La largeur x des rectangles effilés (en haut et à droite sur la figure 15) sera choisie pour que les aires se compensent exactement.

Pour trouver la valeur de x, on résout

$$\begin{aligned} 2\left(1+\frac{1}{3}\right)x &= \left(\frac{1}{12}-x\right)^2, \\ 2\frac{4}{3}x &= \frac{1}{144}-\frac{1}{6}x+x^2. \end{aligned}$$

En négligeant x^2 qui est petit, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{3}+\frac{1}{6}\right)x &= \frac{1}{144}, \\ \frac{17}{6}x &= \frac{1}{144}, \\ x &= \frac{1}{12\cdot 34}. \end{aligned}$$

Ce découpage justifie la formule d'approximation donnée par la *Śulbasutra*. Le côté du carré après enlèvement des rectangles effilés est donc bien de

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12\cdot 34}.$$

Le terme x^2 qui a été négligé donne une indication de l'erreur absolue qui est commise dans cette valeur approchée de $\sqrt{2}$. Elle est de l'ordre de $\left(\frac{1}{12\cdot 34}\right)^2 \approx 6\times 10^{-6}$. L'erreur relative est de l'ordre de 1×10^{-6}.

6 Le pair et l'impair chez Aristote.

Aristote dit que si la diagonale était commensurable avec le côté, alors un même nombre serait pair et impair. On suppose que la diagonale et le côté sont commensurables, et que l'unité de longueur est contenue m fois dans la diagonale et n fois dans le côté, les entiers m et n n'étant pas tous les deux pairs car sinon on utiliserait une unité double. D'après le théorème de Pythagore, on a $m^2 = 2n^2$, ce qui montre que m^2 est pair et donc que m est pair. En posant $m = 2p$ et en reportant dans l'égalité, on obtient en simplifiant par 2 l'égalité $2p^2 = n^2$ qui montre que n est pair et ceci est en contradiction avec l'hypothèse que m et n ne sont pas tous les deux pairs. Cette démonstration n'utilise que des connaissances arithmétiques des pythagoriciens.

7 Fractions continuées.

Si le terme *continued fraction* n'est introduit pour la première fois que par John Wallis[19] en 1655, le concept en est beaucoup plus ancien. On en relève de premières traces chez Āryabhaṭa en 499, Brahmagupta en 628 et chez Raffaele Bombelli[20] vers 1560 (voir [32]). La *fraction continuée* est un outil mathématique assez remarquable qui a eu beaucoup de succès avant l'apparition des calculatrices.

Une expression telle que

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

est une *fraction continuée* : elle se représente plus simplement par

$$< q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots > .$$

Les nombres q_1, q_2, q_3, q_4, … sont les *quotients incomplets* ou *partiels* de la fraction continuée. Si la suite des quotients incomplets est interrompue après q_n, on obtient la *réduite*

$$< q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_n > .$$

La fraction continuée est dans ce cas *limitée*, sinon elle est *illimitée*. En instituant la théorie des fractions continuées, Euler a montré que tout réel peut s'écrire sous forme d'une fraction continuée : aux rationnels correspondent des fractions continuées limitées ; aux irrationnels correspondent des fractions continuées illimitées. Si l'irrationnel est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers, alors la fraction continuée est *périodique* (voir [53]).

La suite des *réduites*

$$\begin{array}{l} < q_1 > \\ < q_1, q_2 > \\ < q_1, q_2, q_3 > \\ \cdots \end{array}$$

[19] John Wallis, (Ashford, 1616 –Oxford, 1703). Connu pour son *Tractatus de sectionibus conicis*, un important traité d'analytique des coniques où est formulée pour la première fois la définition algébrique des coniques. Il s'intéressa également à l'analyse infinitésimale et rencontra les fractions continuées en cherchant des valeurs approchées de π.

[20] Cet ingénieur de talent, (Bologne, 1526 – Rome, 1573) publie une *Algèbre* où il solutionne l'équation du troisième degré en utilisant les nombres imaginaires.

de la fraction continuée correspondant à un nombre irrationnel converge vers ce nombre irrationnel.

Voyons comment Bombelli aborde la recherche de $\sqrt{2}$. Il écrit que :

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1).$$

Il remarque ensuite que

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1.$$

Ainsi, il peut écrire

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

En remplaçant à son tour $\sqrt{2}$ au dénominateur du terme de droite par sa valeur, à savoir $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, il trouve

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}},$$

et, en continuant de la même manière

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}.$$

L'écriture de $\sqrt{2}$ sous forme de *fraction continuée* est

$$\sqrt{2} = < 1, 2, 2, 2, \ldots > .$$

La suite des *réduites* est

$< 1 > = 1$,

$< 1, 2 > = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$< 1, 2, 2 > = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$,

$< 1, 2, 2, 2 > = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$,

...

D'une manière générale, pour n un nombre naturel au moins égal à 1, si une réduite s'écrit $u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$, on constate que la réduite suivante $u_n = \frac{x_n}{y_n}$ se calcule par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{y_{n-1}+x_{n-1}}{y_{n-1}}} = 1 + \frac{y_{n-1}}{y_{n-1} + x_{n-1}} = \frac{y_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1}}{y_{n-1} + x_{n-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \end{aligned}$$

et on retrouve les équations de récurrence de l'algorithme de Théon (voir page 444).

8 L'algorithme (graphique) de Newton

Dans son traité *Tractatus de latitudinibus formarum* (Traité de la latitude des formes) publié vers 1350, Nicole Oresme[21] expose pour la première fois une méthode de représentation graphique des variations d'une grandeur, par exemple l'évolution de la chaleur d'un corps en fonction du temps qui s'écoule. Cette discipline (l'analyse), qui interprète de manière nouvelle pour l'époque la physique et la géométrie, va à son tour s'intéresser à l'irrationalité.

Newton développe en 1671, dans sa *Méthode des fluxions* [112], un algorithme général de recherche d'une valeur approchée d'un zéro d'une fonction, algorithme toujours utilisé de nos jours. Appliqué à une fonction particulière, les valeurs fournies par cet algorithme reproduisent de manière inattendue les résultats connus de Héron.

L'algorithme s'applique à une fonction réelle continue, deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$, qui admet un et un seul zéro z dans l'intervalle $]a, b[$ (ce qui est le cas de la plupart des fonctions polynômes et fonctions usuelles). Si en b par exemple, le produit $f(b) \cdot f''(b)$ est positif, la tangente à la courbe au point d'abscisse b rencontre l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_1 compris entre z et b. En réitérant le procédé à partir de l'intervalle $[a, a_1]$, on définit une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de valeurs qui s'approchent de plus en plus de celle de z (voir [28]).

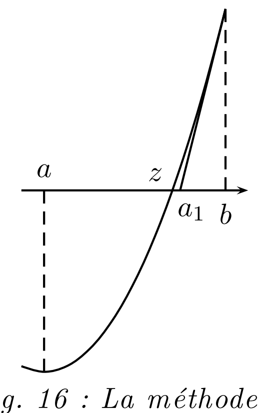


Fig. 16 : La méthode de Newton

La figure 16 montre comment on trouve a_1, la première valeur approchée du zéro z de la fonction : c'est le résultat d'une première itération de l'algorithme de Newton pour laquelle on construit la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse b.

Soit la valeur approchée a_i obtenue après i itérations de l'algorithme de Newton ; voyons comment est calculé a_{i+1} ($i \in \mathbb{N}_\circ$). Le point du graphe d'abscisse a_i est $(a_i, f(a_i))$. L'équation de la tangente au graphe en ce point est donnée par

$$y - f(a_i) = f'(a_i)(x - a_i).$$

Cette tangente coupe l'axe horizontal en un point d'abscisse a_{i+1} qui vérifie

$$-f(a_i) = f'(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

[21] Nicole Oresme (Allemagne sur Orne, 1348 – Lisieux, 1382) est un des grands penseurs du XIV$^{\text{e}}$ siècle. Grand-maître au Collège de Navarre en 1356, secrétaire et conseiller du Roi Charles V, évêque de Lisieux en 1378, il s'est intéressé à l'astronomie, aux mathématiques, à la théologie et à l'économie politique. Il a produit des versions latines et françaises de ses œuvres, donnant ainsi une impulsion certaine au développement de la langue française comme outil intellectuel.

ou encore

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)}.$$

C'est l'équation de récurrence de l'algorithme de NEWTON.

Puisque $\sqrt{2}$ est le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ pour laquelle $f'(x) = 2x$, on peut écrire l'équation de récurrence de l'algorithme de NEWTON dans ce cas particulier. On peut écrire

$$a_{i+1} = a_i - \frac{a_i^2 - 2}{2a_i} = \frac{2a_i^2 - a_i^2 + 2}{2a_i} = \frac{a_i^2 + 2}{2a_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2 + 2}{a_i}\right) = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{2}{a_i}\right).$$

On retrouve exactement la récurrence donnée page 456 par l'algorithme de HÉRON (voir [76]).

9 L'algorithme (numérique) de NEWTON

Cette méthode[22], également due à NEWTON, est un algorithme qui détermine successivement les chiffres de la racine d'un nombre en partant de ceux d'ordre le plus élevé.

Le nombre de chiffres de la racine carrée a d'un nombre naturel non nul A comporte autant de chiffres qu'il y a de tranches de deux chiffres dans le nombre A donné, la dernière tranche à gauche pouvant être incomplète.

En effet, si a s'écrit avec n chiffres, on a

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n.$$

Puisque $a \geqslant 1$, on a également

$$10^{2n-2} \leqslant a^2 < 10^{2n},$$

ce qui montre que a^2 s'écrit avec $2n - 1$ ou $2n$ chiffres[23].

Ayant fait cette remarque, NEWTON suppose qu'à une étape du processus, d est déjà déterminé et que l'on cherche le plus grand u possible pour que

$$A = (10d + u)^2 + R,$$

où R est le reste le plus petit possible ($R \geqslant 0$). Ceci sera vérifié si, en remplaçant dans la relation précédente u par $u + 1$, on obtient une valeur de R négative. On a

$$(10d + (u + 1))^2 = 100d^2 + 2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + 2 \cdot 10 \cdot d + u^2 + 2u + 1$$

et

$$(10d + u)^2 = 100d^2 + 2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + u^2.$$

Il faut donc que $R < 2 \cdot 10 \cdot d + 2u + 1$, ou encore $R \leqslant 2(10d + u)$.

En retranchant $100d^2$ de A, il vient $2 \cdot 10 \cdot d \cdot u + u^2 + R$, donc pour trouver R, il faut encore retrancher $(2 \cdot 10d + u) \cdot u$ pour la plus grande valeur de u possible telle que $R \leqslant 2(10d + u)$.

[22] Cette technique était enseignée chez nous jusqu'à l'apparition des calculatrices au début des années 1970 (voir [82]).

[23] Le nombre 14 s'écrit avec deux chiffres et son carré 196, avec trois ; 85 s'écrit avec deux chiffres et son carré 7 225, avec quatre.

Examinons cette technique pour calculer la racine carrée approchée de $A = 200$. La racine carrée approchée a de ce nombre s'écrit avec deux chiffres. Puisque le nombre de la tranche incomplète de gauche (2) est compris entre le carré 1 de 1 et le carré 4 de 2, on peut affirmer que le premier chiffre (d) de a est un 1. On calcule $A - 100d^2 = 200 - 100 = 100$. Testons maintenant successivement les valeurs de u pour trouver celle qui vérifie la condition sur R.

u	$2 \cdot 10 \cdot d + u$	$(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$	R	$R \leqslant 2 \cdot 10 \cdot d + u$
0	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 0 = 20$	$20 \cdot 0 = 0$	$100 - 0 = 100$	$100 \leqslant 20$? NON
1	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 1 = 21$	$21 \cdot 1 = 21$	$100 - 21 = 79$	$79 \leqslant 21$? NON
2	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 = 22$	$22 \cdot 2 = 44$	$100 - 44 = 56$	$56 \leqslant 22$? NON
3	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 3 = 23$	$23 \cdot 3 = 69$	$100 - 69 = 31$	$31 \leqslant 23$? NON
4	$2 \cdot 10 \cdot 1 + 4 = 24$	$24 \cdot 4 = 96$	$100 - 96 = 4$	$4 \leqslant 24$? OUI

Le deuxième chiffre (u) est donc 4 et on a $200 = 14^2 + 4$. La racine carrée approchée de 200 est 14, d'où l'on déduit que la racine carrée approchée de 2,00 est 1,4.

Newton a également proposé une « présentation » des calculs sous une forme qui rappelle celle de la division écrite. Avec un peu de pratique, les différents essais pour u ne doivent pas tous être notés puisque seul le dernier est utile.

$$\begin{array}{r|l} 2\;\;0\;0 & 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Le nombre 200 (A) dont on cherche la racine carrée est écrit à la position qu'occupe le dividende dans une division ; les chiffres successifs de la racine carrée s'écriront à la position occupée par le diviseur ; les différentes valeurs des produits $(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ seront testées à l'endroit traditionnel du quotient.
On partage le nombre 200 en tranches de deux chiffres en commençant par la droite : la tranche de gauche se compose du seul chiffre 2.

$$\begin{array}{r|l} 2\;0\;0 & 1 \\ \cline{2-2} 1\;\;\;\;\; & \\ \hline 1\;0\;0 & \end{array}$$

Le plus grand nombre carré inférieur à 2 est 1 ; on écrit ce premier chiffre d de la racine carrée de 200 en haut à droite de la potence. On effectue ensuite $A - 100d^2$ à gauche de la potence.

$$\begin{array}{r|r} 2\;0\;0 & 1\;4 \\ \cline{2-2} 1\;\;\;\;\; & 2\;4 \\ \cline{1-1} 1\;0\;0 & 4 \\ \cline{2-2} & 9\;6 \end{array}$$

On teste les différentes valeurs de u possibles pour que le calcul $(2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ donne un reste qui vérifie la condition $R \leqslant 2(10d + u)$. On sait ici que $u = 4$ convient. On recopie ensuite le deuxième chiffre de la racine en haut à droite de la potence.

$$\begin{array}{r|r} 2\;0\;0 & 1\;4 \\ \cline{2-2} 1\;\;\;\;\; & 2\;4 \\ \cline{1-1} 1\;0\;0 & 4 \\ 9\;6 & \\ \cline{1-2} 4 & 9\;6 \end{array}$$

On effectue $A - 100d^2 - (2 \cdot 10 \cdot d + u) \cdot u$ à gauche de la potence pour trouver le reste R.
L'opération peut être poursuivie en « abaissant » une nouvelle tranche de deux zéros ce qui donnera une valeur approchée de la racine carrée de 20 000.

On peut poursuivre l'algorithme pour rechercher les 5 premiers chiffres significatifs de $\sqrt{2}$.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{lllll}
\overline{2} & \overline{0\ 0} & \overline{0\ 0} & \overline{0\ 0} & \overline{0\ 0} \\
1 & & & & \\
\cline{1-1}
1 & 0\ 0 & & & \\
 & 9\ 6 & & & \\
\cline{1-2}
 & \ \ \ 4 & 0\ 0 & & \\
 & \ \ \ 2 & 8\ 1 & & \\
\cline{2-3}
 & \ \ \ 1 & 1\ 9 & 0\ 0 & \\
 & \ \ \ 1 & 1\ 2 & 9\ 6 & \\
\cline{2-4}
 & & \ \ \ 6 & 0\ 4 & 0\ 0 \\
 & & \ \ \ 5 & 6\ 5 & 6\ 4 \\
\cline{3-5}
 & & & 3\ 8 & 3\ 6
\end{array}
&
\begin{array}{c|c|c|c}
\multicolumn{4}{l}{1\ 4\ 1\ 4\ 2} \\
\hline
2\ 4 & 2\ 8\ 1 & 2\ 8\ 2\ 4 & 2\ 8\ 2\ 8\ 2 \\
4 & 1 & 4 & 2 \\
\hline
9\ 6 & 2\ 8\ 1 & 1\ 1\ 2\ 9\ 6 & 5\ 6\ 5\ 6\ 4
\end{array}
\end{array}
$$

On a :

$$200\,000\,000 = 14\,142^2 + 3836$$

ou encore

$$2 = 1,4141^2 + 0,000\,038\,36.$$