POUR UNE CULTURE MATHÉMATIQUE ACCESSIBLE À TOUS

CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Recherche en éducation n° 100/02

Le CREM est engagé depuis une année dans une recherche dont l'intitulé général est *Pour une culture mathématique accessible à tous – Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*. Cette recherche confirme, comme les précédentes, la tradition du CREM qui envisage l'apprentissage des mathématiques dans sa continuité de la maternelle jusqu'à l'âge adulte.

Les auteurs de la recherche sont Michel Ballieu, Jean-Michel Delire, Marie-France Guissard, Philippe Mairesse, Bénédicte Mestag, Jules Miéwis, Jacques Vandekerckhove et Françoise Van Dieren.

Pour certains élèves, le cours de mathématiques est dépourvu de sens parfois dès le début de leur parcours scolaire. Pour éviter l'échec, ils en arrivent à mémoriser un certain nombre de « trucs », de recettes à appliquer pour obtenir une réponse, qui même si elle est correcte n'a pour eux aucun sens. Cette démarche, dont le seul mérite est d'éviter l'échec et le redoublement, n'est en aucun cas profitable à ces élèves. Il est vain de vouloir leur enseigner les mathématiques dans un enseignement en spirale s'il ne reste rien des acquis antérieurs. Plutôt que de leur apprendre des matières qu'ils n'assimilent plus, dont ils ne perçoivent pas l'utilité, ou des techniques qu'ils appliquent sans en comprendre le fonctionnement, il est plus formatif de leur assurer une culture mathématique de base en replongeant certaines notions fondamentales dans un contexte historique et/ou culturel. En fait, nous identifions trois registres susceptibles de rendre le plaisir d'apprendre aux plus démotivés : les lectures de sources historiques, les créations artistiques et les « récréations mathématiques ». Une autre facette de cette recherche, sur laquelle nous voulons également insister, est celle des « mathématiques du citoyen ». Il nous semble important de parvenir à amener un plus grand nombre de jeunes à acquérir des savoirs et des compétences réellement utiles dans leur vie sociale et professionnelle.

1. L'apport de l'histoire

Il va de soi que notre intention n'est nullement d'introduire un cours d'histoire des mathématiques dans le cours de mathématiques. Loin de nous l'idée d'alourdir un programme que l'enseignant – qui doit faire face à de multiples contraintes – a parfois beaucoup de mal à honorer. Il ne s'agit pas non plus de « tartiner » une couche de culture sur une théorie mathématique déjà formalisée ni de se borner à raconter quelques anecdotes, même si cela peut parfois être fort plaisant et contribuer à détendre l'atmosphère de la classe. Nous voulons confronter le professeur et ses élèves à de réelles sources historiques qui renseignent véritablement sur le fond de la matière et l'évolution des concepts au fil du temps. Nous voulons montrer comment on peut introduire une matière par la lecture de textes originaux abordables avec les élèves. Bien sûr, toutes les matières ne s'y prêtent pas.

L'apport de l'histoire est réellement multiple. L'élève démotivé par ses échecs peut trouver un certain réconfort à se rendre compte qu'il se situe dans une continuité historique ; d'autres avant lui ont éprouvé des difficultés comparables aux siennes, ont dû surmonter des défis et… ils y sont arrivés ! C'est aussi l'histoire qui permet de mettre le doigt sur les obstacles épistémologiques, sur les seuils à franchir. Contrairement à l'optique des « mathématiques modernes », nous défendons l'idée qu'un concept ne se construit pas directement dans sa forme définitive ; il doit mûrir, se transformer selon l'âge auquel on le travaille et là encore, l'histoire nous offre des témoignages de la lente évolution qui mène à sa forme finale… Mais est-ce vraiment une forme finale ? L'approche historique permet encore de faire mieux connaître les apports des différentes cultures et civilisations – égyptienne, mésopotamienne, grecque, indienne, chinoise, arabe, … – à la construction des mathématiques. C'est l'histoire qui permet *d'intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste*.

Nous avons privilégié cette approche de la matière pour introduire le théorème dit de PYTHAGORE, pour faire découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré et pour aborder les nombres irrationnels.

Pour bien faire ressentir ce que nous entendons par évolution d'un concept, nous avons fortement mis l'accent sur le fait que l'algèbre qui s'enseigne de nos jours est le résultat d'un long processus de maturation qui trouve ses origines, notamment en Mésopotamie, dans la résolution de problèmes de la vie de tous les jours : arpentage, pratiques commerciales, testaments, creusement de canaux, … Plus tard, au début du neuvième siècle de notre ère, un mathématicien arabe[1], du nom d'al-Khwārizmī met un peu d'ordre dans toutes ces méthodes de praticiens et fait de l'algèbre une science constituée avec ses objets, ses outils, ses algorithmes, ses preuves, ses domaines d'application… L'algèbre, de discipline de praticiens devient discipline savante. Et les problèmes qu'elle va tenter de résoudre ne seront plus tout à fait des problèmes de praticiens, mais des problèmes de théoriciens « savants », comme de généraliser la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à des degrés supérieurs. Il faudra plus de six siècles pour obtenir une formule générale pour n'importe quelle équation des degrés trois et quatre et encore trois siècles de plus pour avoir une démonstration du fait qu'on ne pourra obtenir une formule générale pour des équations de degré supérieur à quatre. Ce faisant, l'algèbre aura intégré de nouveaux objets, les structures (groupes, …), qui lui fournissent de nouveaux sujets de recherche. Tout au long de son histoire, elle n'aura cessé de s'enrichir progressivement d'un symbolisme « simplificateur ».

2. Les créations artistiques

Les réalisations artistiques, telles que frises ou pavages, par exemple, qu'on retrouve dans toutes les cultures et à toutes les époques, permettent de pratiquer de la géométrie à la fois intuitive et rigoureuse. Elles procurent une satisfaction intellectuelle alliée à un plaisir esthétique. Le désir de créer provoque le besoin de comprendre et donc d'analyser les structures géométriques sous-jacentes. L'utilisation de logiciels de dessin est l'occasion de mettre les élèves en contact avec le DAO, domaine où mathématiques, techniques et arts se rencontrent. Nous avons prévu de traiter ce thème durant les derniers six mois de la recherche.

3. Les « récréations mathématiques » ou activités ludiques

Décoder, découvrir quelque chose de caché, expliquer un phénomène, un tour de magie sont des actions qui constituent un ressort psychologique, spécialement chez les jeunes élèves, mais également plus tard dans la scolarité. Nous avons privilégié cette approche dans plusieurs activités que nous proposons. Par la manipulation de compteurs – qui ont un caractère fascinant chez les jeunes de huit à dix ans –, nous tentons d'installer une compréhension en profondeur du passage d'un rang à un autre dans la numération décimale de position. Nous réactivons la familiarisation avec la numération de position par la suite (dix – douze ans) grâce à une activité de décodage de nombres écrits dans différents systèmes de numération. Le but est de comparer ces systèmes de manière à dégager les caractéristiques de chacun : nombre de symboles utilisés, base, présence du zéro, relation entre la

[1] Il serait plus correct de dire un mathématicien qui vivait dans l'empire arabe.

longueur de l'écriture et la valeur du nombre, importance de la position des symboles, limitation supérieure dans la représentation. Les principales compétences qui s'exercent tout au long de ces activités sont

- *dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe,*
- *agir et interagir sur des matériels divers,*
- *identifier et effectuer des opérations dans des situations variées,*
- *classer (situer, ordonner, comparer).*

Dès le début du secondaire, selon le bon principe de l'enseignement en spirale, nous renforçons encore la compréhension de cette notion de numération de position, en proposant à l'élève de tenter d'expliquer des phénomènes numériques qui se présentent comme des « tours de magie ». Une nouvelle compétence s'exerce, *choisir et utiliser avec pertinence le calcul mental, le calcul écrit ou la calculatrice en fonction de la situation.* Par la suite, l'explication du « tour de magie » sera rendue plus aisée par le recours au symbolisme et à un début de formalisme algébrique. On met alors en œuvre d'autres compétences

- *respecter les priorités des opérations,*
- *utiliser les conventions d'écriture mathématique,*
- *transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode,*
- *construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues,*
- *calculer les valeurs numériques d'une expression littérale.*

En arithmétique et en algèbre, il est très utile, pour établir des démonstrations géométriques, de disposer d'une vision des produits remarquables comme relations entre aires de figures planes. Dès 1228, dans le prologue du *Liber abaci*, FIBONACCI faisait remarquer que « géométrie et arithmétique se viennent mutuellement en aide ». L'apprentissage des produits remarquables constitue un seuil à franchir par les élèves. Nous leur en proposons les trois aspects : numérique, géométrique et algébrique. Cette activité aide à la mise en place des compétences reprises ci-après,

- *utiliser les conventions d'écriture mathématique,*
- *transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode,*
- *construire des expressions littérales,*
- *calculer les valeurs numériques d'une expression littérale,*
- *utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations.*

4. Les mathématiques du citoyen

Dire, lire et écrire des nombres ne constitue pas une fin en soi. Encore faut-il pouvoir utiliser ces nombres dans sa vie de citoyen. Une petite enquête préalable, effectuée dans une population d'adultes, nous a confirmé dans l'idée que les pourcentages constituent réellement une pierre d'achoppement, quel que soit le niveau d'études de la personne interrogée. Nous ne pouvions donc pas les contourner, *a fortiori* dans une recherche dont le titre parle de « culture mathématique accessible à tous » et le sous-titre de « compétences citoyennes ».

Les activités qui introduisent les pourcentages permettent de développer les compétences suivantes,

- en ce qui concerne les nombres : *écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale, fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser,*
- en ce qui concerne les grandeurs : *calculer des pourcentages, déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse, additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées,*
- en ce qui concerne le traitement des données : *interpréter un tableau de nombres, un graphique, un diagramme.*

Nous poursuivons l'étude des pourcentages par des situations-problèmes agencées de manière à mener à une conceptualisation progressive, guidée par le contexte. Cela conduit à la mise en place de modes de pensée, de techniques de calcul et de formules qui donnent accès à la compréhension et à la critique de données telles qu'elles sont souvent présentées dans les *media*.

Une première séquence de problèmes proposés a été construite à partir d'une exploration sur l'Internet. Les questions posées aux élèves portent sur les données elles-mêmes. Il s'agit d'en saisir la portée, de comprendre comment on passe d'un relevé de données brutes à des taux ou à des pourcentages et de pouvoir se servir de ces calculs pour comparer des situations, analyser une évolution. Les compétences exercées sont

- *acquérir les savoir-faire et les savoirs essentiels relatifs à la construction d'une représentation interdisciplinaire de l'environnement,*
- *comprendre la présentation de sondages ou d'enquêtes, connaître différentes formes de représentations statistiques,*
- *pouvoir calculer des proportions, des pourcentages, un taux, utiliser à bon escient une calculatrice et la manipuler avec aisance.*

Ces compétences sont encore mises en œuvre par l'analyse de graphiques extraits du magazine de défense des consommateurs *Test Achats*. Les élèves sont amenés, pour comprendre ces graphiques à calculer des pourcentages successifs d'un même nombre, ce qui conduit à la construction de séquences de calcul efficaces, adaptées à la calculatrice.

5. Histoire et épistémologie

Nous avons prévu, dans le rapport de recherche, une partie consacrée aux aspects historiques et épistémologiques des problèmes que nous abordons. Notre intention est de fournir à l'enseignant une information historique, de seconde main, certes, mais cependant fiable, car nous nous sommes imposés de travailler à partir des textes originaux eux-mêmes et de ne pas nous borner à ne consulter que des ouvrages généraux d'histoire des mathématiques, fussent-ils excellents… Nous savons que l'accès à ces ressources n'est pas aisé pour un enseignant de terrain, pas plus que la possibilité d'assister à des séminaires d'histoire des mathématiques et d'y rencontrer des spécialistes. Nous essayons de faire le lien entre les spécialistes et les praticiens et de présenter à ceux-ci un discours abordable.

Nous essayons aussi, dans cette partie, d'apporter une réflexion de nature épistémologique. Par exemple, en ce qui concerne l'algèbre, on peut se poser un certain nombre de questions. Qu'est-ce que l'algèbre ? D'où vient-elle ? Comment l'enseignait-on ? Depuis quand existe-t-elle ? Que faisait-on autrefois en algèbre ? Comment a-t-elle évolué ? Que fait-on de nos jours en algèbre ? …

6. Particularités de la recherche

Comme dans tous les travaux du CREM qui ont précédé, cette recherche envisage la scolarité dans son ensemble et sa continuité, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit ainsi d'un travail de synthèse dégageant un fil conducteur qui souligne les étapes successives de l'apprentissage des mathématiques : numération, calcul, formalisation, structures. La méthodologie que nous utilisons est assez originale, en ce sens que nous pratiquons le débat permanent entre enseignants de tous les niveaux : instituteurs, régents, licenciés, docteurs. Chacun des membres du groupe de recherche présente son travail, ciblé sur la tranche d'âge pour laquelle il est le plus compétent, et l'ensemble du groupe participe à la discussion, ce qui confère à nos travaux une portée longitudinale.

Dans un deuxième temps, nous présentons nos écrits à des enseignants du terrain, qui nous font part de leurs avis. Cela se pratique par le biais des formations continuées. Les observations de ces enseignants sont intégrées dans les textes de nos rapports. À cela s'ajoutent également des expérimentations que nous faisons personnellement avec les élèves dans des classes qui acceptent de nous accueillir.

Au travers de l'ensemble de toutes les situations-problèmes, les chercheurs ont eu un constant souci de développer les quatre compétences transversales :

- *analyser et comprendre un message ;*
- *résoudre, raisonner et argumente ;*
- *appliquer et généraliser ;*
- *structurer et synthétiser.*

Disponibilité du rapport de recherche sur l'Internet

Les versions provisoires des chapitres 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11 et 12 sont d'ores et déjà téléchargeables sur le site `http://www.enseignement.be`

Ces chapitres seront éventuellement remaniés et complétés pour la version définitive, mais les textes déjà disponibles ne subiront probablement plus de profondes modifications.

Les autres chapitres (1, 5, 6 et 9) sont en cours d'élaboration. L'ensemble du rapport, dans sa version définitive, sera accessible à partir du mois de mai 2004.