ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE

MATHÉMATIQUES

2008

2e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Pistes didactiques

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE
ADMINISTRATION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SERVICE GÉNÉRAL DU PILOTAGE DU SYSTÈME ÉDUCATIF

ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE

MATHÉMATIQUES

2008

2^{e} ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Pistes didactiques

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE
ADMINISTRATION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SERVICE GÉNÉRAL DU PILOTAGE DU SYSTÈME ÉDUCATIF

Ce document de **Pistes didactiques** a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe non certificative 2e secondaire en mathématiques :

Isabelle DEMONTY, Françoise CREPIN, Chercheuses à l'Unité d'analyse des systèmes et des pratiques d'enseignement de l'Université de Liège ;

Anne-Marie BLEUART, Martine MACHTELINGS, Rita MIDAVAINE, Willy DANDOY, Inspecteurs ;

Christiane COLIN, Fabrice BOZZOLAN, Jean HERMANT, Jean-Luc LOZET, Marc STRUCKMEYER, Enseignants ;

Martine HERPHELIN, Directrice générale adjointe du Service général du Pilotage du système éducatif ;

Sébastien DELATTRE, Attaché au Service général du Pilotage du système éducatif ;

Marcel BROOZE, Chargé de mission au Service général du Pilotage du système éducatif.

Table des matières

INTRODUCTION

Ce document fait suite aux résultats de l'évaluation externe en mathématiques menée en février 2008 dans les classes de 2e secondaire. Cette évaluation avait une visée essentiellement diagnostique et formative. L'épreuve avait en effet pour objectif d'établir un bilan précis de l'acquisition de certaines compétences en mathématiques, et de déceler celles qui sont moins bien maitrisées et qui devraient faire l'objet d'une attention particulière.

C'est sur la base des constats présentés dans le document « Résultats et commentaires » que ce recueil de pistes didactiques a été élaboré. Y sont proposées des activités concrètes et des ressources didactiques dans des domaines précis qui ont été pointés comme posant problème à de nombreux élèves.

Le document se présente en deux grandes parties qui concernent respectivement le premier degré commun et le premier degré différencié.

Chacun des points abordés – opérations algébriques et raisonnement déductif en géométrie pour la deuxième commune, numération et calculs d'aires et de périmètres pour la deuxième professionnelle – se structure de la manière suivante :

- quelques grands constats issus de l'épreuve, éclairés par une analyse des erreurs courantes des élèves, permettent de cerner avec précision ce qui pose réellement problème en regard du thème abordé ;
- sont ensuite envisagées quelques hypothèses explicatives des difficultés observées ;
- enfin, des propositions concrètes d'activités sont développées ; elles sont accompagnées de fiches à destination des élèves qui, nous l'espérons, vous donneront quelques idées pour développer, un peu différemment peut-être, ces domaines qui doivent encore être retravaillés pour garantir une meilleure maitrise de compétences essentielles à acquérir au terme du degré.

I. PISTES DIDACTIQUES POUR LE 1er DEGRÉ COMMUN

En deuxième commune, l'analyse des réponses des élèves a permis de dégager quelques tendances en regard des compétences évaluées.

Les sous-scores par domaine font apparaitre des faiblesses principalement dans le domaine des techniques algébriques élémentaires et de leur mobilisation en contexte : à peine la moitié des questions (55%) sont réussies par les élèves. Elles semblaient pourtant bien à leur portée puisque les enseignants de l'échantillon les jugent adaptées (67%) voire trop faciles (14%) pour les élèves en milieu d'année scolaire.
En géométrie, un travail de fond doit être mené dans le domaine du raisonnement déductif.
En grandeurs, on ne peut que s'étonner des difficultés rencontrées dans les situations impliquant le calcul d'un pourcentage, compétence pourtant à entretenir dans l'enseignement secondaire, la certification dans ce domaine relevant du primaire. Enfin, dans le traitement de données, si les aspects de lecture de graphiques sont bien maitrisés, c'est principalement l'interprétation qui doit être approfondie ainsi que le calcul d'une moyenne arithmétique.

Les pistes didactiques s'orientent dans deux directions : l'algèbre et plus spécifiquement les opérations algébriques d'une part et le raisonnement déductif en géométrie d'autre part.

- Les opérations algébriques.

  Afin de mieux comprendre les difficultés rencontrées dans ce domaine par les élèves, nous proposons dans le premier chapitre d'exploiter plus finement les résultats de la question 10 centrée sur les calculs littéraux. Par la suite, des pistes didactiques proposent quelques exemples d'activités pouvant, nous l'espérons, vous donner quelques idées pour travailler ces transformations algébriques :
  - des activités en contexte significatif où les élèves peuvent donner sens aux concepts sous-jacents aux transformations algébriques : sens de la lettre, des expressions algébriques ou de l'égalité ;
  - une proposition d'activité directement centrée sur les transformations algébriques elles-mêmes où il s'agit cette fois d'amener l'élève à mieux comprendre les règles qui sous-tendent ces transformations.

- Le raisonnement déductif en géométrie.

  L'analyse de quelques questions de l'épreuve permet de mieux comprendre l'origine des difficultés des élèves dans le domaine du raisonnement déductif, qu'il s'applique à une situation de construction géométrique (question 30) ou d'argumentation (questions 33 et 36). Les pistes didactiques qui en découlent permettent d'explorer deux facettes du raisonnement déductif :
  - d'une part l'aspect « logique », où les activités se proposent de développer la compréhension de termes logiques élémentaires ainsi que l'établissement de relations logiques entre des informations géométriques ;
  - d'autre part l'aspect « communication » où il s'agit d'amener les élèves à clarifier le vocabulaire géométrique essentiel ainsi que les conventions usuelles en géométrie descriptive.

  Par la suite, quelques situations ciblent plus directement l'argumentation déductive dans des contextes qui, nous l'espérons, sèmeront le doute auprès des élèves. Lors de leur exploitation, l'accent sera mis sur la qualité des arguments avancés : la nécessité de se dégager de la perception visuelle ou de la prise de mesures directes pour développer une justification s'appuyant sur des propriétés ou des théorèmes élémentaires de géométrie descriptive.

1. Les opérations algébriques

1.1. Les constats issus de l'épreuve

Comment expliquer de telles difficultés pour un domaine déjà bien travaillé dans les cours de mathématiques ? Pour approcher cette question, nous proposons d'envisager quelques analyses plus approfondies de la question 10 (centrée sur les calculs littéraux).

a) Des items de difficultés contrastées

Le tableau suivant reprend les pourcentages de réussite pour chacun des items de la question 10, classés du mieux réussi au moins bien réussi.

		% de réussite	**Caractéristiques des items**
Item 25	$7a \,.\, 2a = 14\,a^2$	79%	L'expression réduite ne comporte pas de signe opératoire apparent
Item 23	$5a – a = 4a$	76%	
Item 24	$2a – 7 + a = 3a - 7$	57%	Une seule transformation algébrique à réaliser
Item 30	$-2(a + 3) = -2a - 6$	55%	
Item 29	$4a \,.\, (3 + 5a) = 12a + 20a^2$	47%	
Item 26	$a^2 + a^2 = 2a^2$	42%	
Item 31	$(b + 5)\,(b + 6) = b^2 + 11b + 30$	42%	
Item 27	$(n + 2).2 + 2 = 2n + 4 + 2 = 2n + 6$	29%	Mobilisation de deux transformations algébriques
Item 28	$a - (2 - a) = a – 2 + a = 2a - 2$	25%	

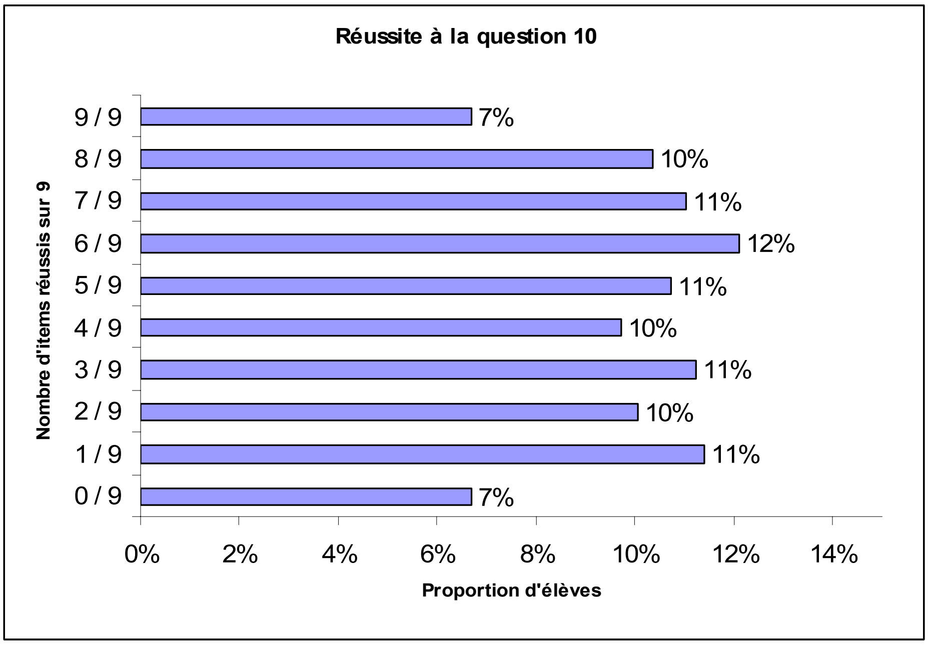
Comment expliquer la hiérarchie qui se dégage des pourcentages de réussite observés ?

- Les items 23 et 25
  Pour ces deux items, l'expression réduite ne présente plus d'opération apparente. Autrement dit, **on peut obtenir une réponse correcte à ces items en considérant, comme c'est souvent le cas en arithmétique, que derrière le symbole d'égalité doit apparaitre une réponse unique** et non une expression comportant encore une opération.
- Les items 24, 30, 29, 26 et 31
  Un premier saut conceptuel doit être réalisé pour réduire correctement ces expressions : **la « solution obtenue » peut encore comporter une opération apparente**. Il faut donc admettre l'idée que le signe d'égalité n'est plus un signe d'amorce d'un résultat, mais qu'il peut être placé entre deux expressions désignant un même nombre. Il faut également admettre qu'une expression comportant encore un signe opératoire apparent peut être une « réponse », alors que très souvent, en arithmétique, la réponse se présente sous la forme d'un seul élément. On constate toutefois une hiérarchie dans le type de procédure à mobiliser, la réduction de termes semblables n'impliquant pas de puissance ainsi que la distributivité simple semblent plus accessibles que la double distributivité ainsi que la réduction de termes semblables impliquant des puissances.
- Les items 27 et 28
  Un second saut conceptuel doit ici être réalisé pour transformer les deux expressions impliquées dans ces items : **plusieurs transformations doivent être réalisées**, ce qui pose alors la question de la priorité des opérations.

Cette analyse centrée sur les items laisse à penser que les élèves doivent réaliser deux sauts conceptuels pour répondre correctement à ces questions. Ce constat se confirme-t-il lorsqu'on s'intéresse aux profils des élèves ? Pas pleinement, c'est en tout cas ce qui ressort des analyses présentées ci-dessous…

b) Des élèves aux profils très contrastés

Les pourcentages de réussite des élèves à l'ensemble de la question sont présentés dans le graphique suivant. Celui-ci fait apparaitre une disparité très importante des résultats à cette question.



Que se cache-t-il derrière ces totaux ? Observe-t-on des profils d'élèves particuliers ? En fonction de l'analyse réalisée au départ des items, on pourrait penser que la plupart des élèves qui ont obtenu 2/9 ont principalement réussi les items 23 et 25. À l'autre extrémité, on pourrait penser que ceux qui ont obtenu 7/9 ont réussi tous les items sauf les deux plus difficiles. Dans les deux cas de figure, le profil qui ressort majoritairement est effectivement celui qui se dégage de l'analyse des items (20% des élèves qui ont obtenu 2/9 ont réussi les items 23 et 25 et 30% des élèves qui ont obtenu 7/9 n'ont pas réussi les items 27 et 28). Toutefois, la variété des autres profils est plus qu'importante : on observe 20 profils différents pour les élèves qui ont obtenu 2/9 et 22 pour ceux qui ont obtenu 7/9.

Seule l'analyse des productions d'élèves de quelques classes permet de mieux approcher la situation. Ainsi, voici les réponses fournies par 3 élèves d'une même classe. Ils illustrent à quel point, dans une même classe, les situations des élèves sont différentes.

<table>
<tr>
<td>Samir ou la volonté de proposer des « solutions » uniques, sans signe opératoire apparent.

Question 10
EFFECTUE les opérations suivantes et réduis si possible.
$5a - a = 4a$
$2a - 7 + a = -4a$
$7a \,.\, 2a = 14a^2$
$a^3 + a^3 = a^6$
$(n + 2) \,.\, 2 + 2 = 6n$
$a - (2 - a) = 2a$
$4a \,.\, (3 + 5a) = 32a^2$
$-2 \,.\, (a + 3) = -6a$
$(b + 5) \,.\, (b + 6) = 3ab^2$</td>
<td>Laetitia ou la maitrise de la dernière technique apprise en classe.

Question 10
EFFECTUE les opérations suivantes et réduis si possible.
$5a - a = 4a$
$2a - 7 + a = 2a - 7a = -5a$
$7a \,.\, 2a = 14a$
$a^3 + a^3 = a^6$
$(n + 2) \,.\, 2 + 2 = 2n + 4 + 2 = 2n + 6$
$a - (2 - a) = -2a + a^2$
$4a \,.\, (3 + 5a) = 12a + 20a$
$-2 \,.\, (a + 3) = -2a + 6$
$(b + 5) \,.\, (b + 6) = b^2 + 6b + 5b + 30 = b^2 + 11b + 30$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Nicolas ou des erreurs qui n'apparaissent pas dans les cas simples mais seulement lorsqu'il faut mobiliser plusieurs procédures…

Question 10
EFFECTUE les opérations suivantes et réduis si possible.
$5a - a = 4a$
$2a - 7 + a = -7 + 3a$
$7a \,.\, 2a = 14a^2$
$a^3 + a^3 = 2a^9$
$(n + 2) \,.\, 2 + 2 = 2n \,.\, 2 = 4n + 2$
$a - (2 - a) = -2$
$4a \,.\, (3 + 5a) = 12a + 20a^2$
$-2 \,.\, (a + 3) = -2a + -6$
$(b + 5) \,.\, (b + 6) = b^2 + 6b + 5b + 30 = b^2 + 11b + 30$</td>
</tr>
</table>

Au vu de cette variété de situations, sans doute est-il essentiel de proposer aux élèves des réponses différentes : pour Samir, un approfondissement des bases de l'algèbre (sens de l'égalité, sens des lettres utilisées) est sans doute incontournable. Pour Laetitia, c'est le retour aux procédures élémentaires qui lui sera sans doute le plus utile. Nicolas quant à lui doit vraiment travailler l'analyse de l'expression algébrique de départ en vue d'en dégager sa structure et de mobiliser ainsi à bon escient les procédures qu'il semble maitriser dans les cas simples.

Cela ne signifie pas pour autant que les activités à proposer aux élèves d'une même classe doivent être nécessairement différentes. En revanche, il parait essentiel qu'à travers ces situations, l'élève soit amené à prendre conscience de ses démarches de raisonnements pour en cerner les atouts et les limites. Cela est sans doute vrai pour une majorité de contenus mathématiques, mais cela parait être crucial en algèbre. En effet, une des forces de l'algèbre est de permettre de transformer des expressions sans devoir à tout moment revenir sur la compréhension du pourquoi de chaque transformation. Ainsi, un mathématicien se permet de faire une confiance aveugle à des règles qu'il connait et ceci tant qu'aucun obstacle ne survient. Toutefois, en cas de difficultés, il a la possibilité d'abandonner ce fonctionnement en « pilote automatique » pour mettre en œuvre d'autres types de procédures. D'après une équipe de chercheurs français (Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal, 1997) qui s'est intéressée aux difficultés des élèves dans les transformations algébriques, cette force est sans doute également à l'origine de la principale difficulté à enseigner l'algèbre : certains élèves ne font jamais référence à une signification quelconque lorsqu'ils transforment des expressions : pour eux, une transformation algébrique est correcte si elle est conforme à la règle apprise. Ainsi, lorsqu'on leur demande pourquoi $(a + b)^2$ n'est pas égal à $a^2 + b^2$, ils n'ont comme seul argument qu'il ne faut pas oublier le double produit. Lorsqu'on leur explique que $(2 + 3)^2$ n'est pas égal à $2^2 + 3^2$, ces élèves ne sont pas convaincus : pour eux, la valeur des expressions n'est pas un critère pertinent.

Bref, amener les élèves à être pleinement conscients :

1) qu'une expression comme $a(2a + 3)$ a une valeur numérique
2) que cette valeur dépend de la valeur de a
3) et qu'elle n'est pas modifiée lorsqu'on applique une transformation conforme aux règles algébriques, comme par exemple $2a^2 + 3a$

est un objectif essentiel pour que les élèves parviennent à réellement donner du sens aux transformations d'expressions qu'ils doivent maitriser au terme du premier degré.

Pour poursuivre cet objectif général, deux types d'activités sont proposés dans cette partie.

1) Une première voie d'entrée consiste à relier les transformations algébriques à des contextes porteurs de sens : ainsi, deux expressions seront considérées comme égales si elles modélisent une même situation ou si, par substitution numérique, elles aboutissent à un même nombre.
   Deux types de contextes seront envisagés :
   - des situations dites « préalgébriques » où l'objectif est d'exprimer à l'aide d'une expression algébrique, un moyen pour généraliser un phénomène ;
   - des situations orientées sur la preuve : à travers une exploration numérique, les élèves sont amenés à constater une solution surprenante. L'algèbre permet de mieux comprendre pourquoi on aboutit toujours à cette solution surprenante.

2) Une autre voie d'entrée que nous développons ici se présente sous la forme d'un entretien directement centré sur les manipulations algébriques : exploitable notamment dans des activités de remédiation, cet entretien un peu particulier présente l'avantage d'aborder les transformations algébriques dans un contexte tout différent de celui envisagé habituellement dans les cours de mathématiques : c'est donc l'occasion d'aborder d'une autre manière les concepts et procédures mathématiques essentiels à maitriser au terme du premier degré.

1.2. L'algèbre au service de raisonnements mathématiques

Des situations pour généraliser

En première secondaire, en vue d'introduire l'algèbre, les élèves sont souvent confrontés à des situations de généralisation : ainsi, plongés au départ dans une situation purement numérique, ils sont amenés à constater qu'on peut, à l'aide d'une expression algébrique, exprimer une méthode pour généraliser un phénomène. Ils découvrent ainsi que, dans ces expressions, la lettre a le statut de nombre généralisé dans la mesure où on peut la remplacer par n'importe quel nombre. Toutefois, ces situations sont assez vite abandonnées dès la fin de la première année.

Nous proposons ici deux situations[1] à destination des élèves de deuxième secondaire (la nature des transformations en jeu étant mieux adaptée à des élèves qui ont déjà une certaine habitude des transformations élémentaires) dont l'objectif ne serait plus de découvrir mais de réinvestir en contexte ces transformations qui continuent à leur poser problème. Ces situations sont ainsi l'occasion, de consolider les premiers acquis dans des contextes variés.

Vous trouverez ci-après les grandes étapes pour mener à bien ces activités, les fiches à destination des élèves ainsi que des exemples d'expressions algébriques qui pourraient émerger lors de l'exploitation en classe de ces situations.

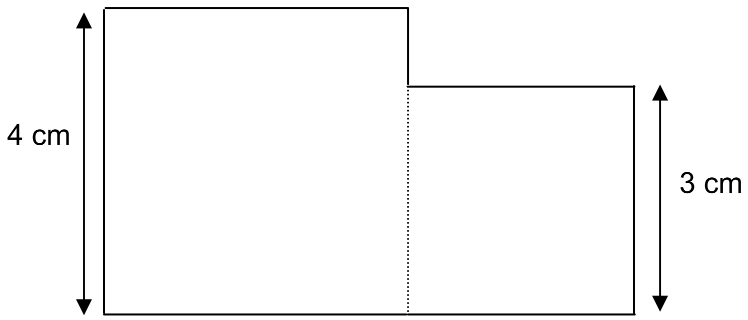
Tableau 1. Les grandes étapes pour mener à bien les activités

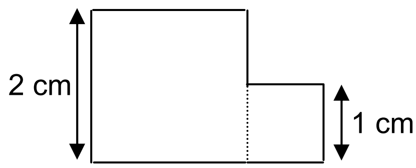
Étape 1 : Recherche	Cette phase de recherche se base sur l'exploitation de cas numériques d'abord très simples puis plus complexes nécessitant une première généralisation dans le cadre purement numérique.
Étape 2 : Généralisation	En fonction du public et des acquis des élèves, la formulation mathématique pourrait être précédée d'une formulation en mots permettant de donner sens à l'utilisation du symbolisme (en particulier, l'emploi nécessaire ou non des parenthèses).
Étape 3 : Exploitation des expressions algébriques	Cette étape vise à valider les diverses expressions algébriques produites par les élèves. Cette validation pourra se réaliser en deux temps : - en référence directe à la situation, dans un premier temps : deux expressions algébriques seront considérées comme égales si elles désignent bien deux moyens pertinents pour calculer le périmètre de la figure envisagée ; - en référence aux techniques de transformations algébriques, dans un second temps : deux expressions seront considérées comme égales si, par un enchainement de transformations algébriques, elles aboutissent bien à la même expression algébrique réduite.

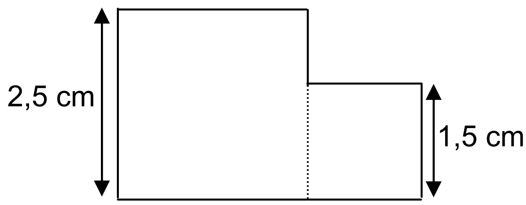
[1] Ces situations sont inspirées de travaux présentés par Pressiat, A., Trouver un fil rouge pour l'enseignement du calcul algébrique. In Actes de l'Université d'été de Saint-Flour (2004).

Fiche 1 - Les carrés accolés

Observe les figures suivantes : elles sont chaque fois composées de deux carrés dont la longueur des côtés diffère de 1cm.







1) Recherche le périmètre d'une figure semblable dont le côté du petit carré a une longueur de :

- 10 cm :

……………………………………………………………………………………………

- 56 cm :

……………………………………………………………………………………………

2) Trouve un moyen qui permettrait de calculer le périmètre de n'importe quelle figure construite sur le même modèle en connaissant la longueur du côté du petit carré.

- Rédige ce moyen avec tes mots.

- Exprime ce moyen à l'aide d'une formule.

Fiche 2 - Le nombre juste au milieu

Complète le tableau suivant

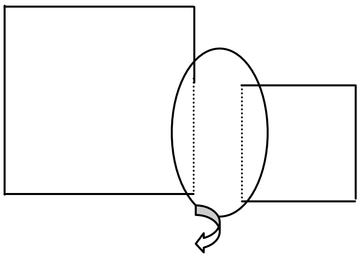
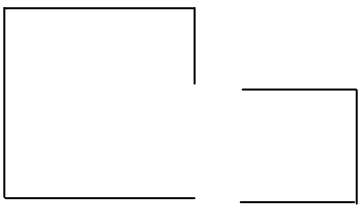
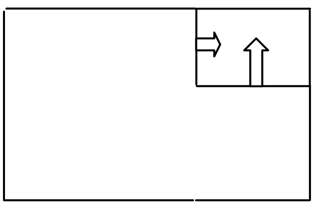
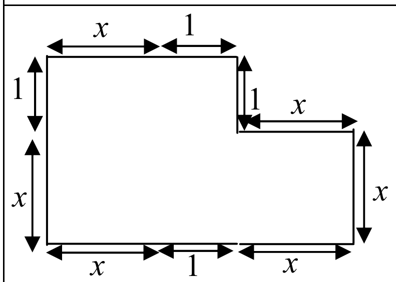
Premier nombre	Deuxième nombre	Nombre situé exactement entre le premier et le deuxième nombre
5	19	
8	24	
9	36	
13	67	

Cherche un moyen permettant de calculer le nombre qui se trouve exactement entre les deux nombres de départ.

- Exprime ton moyen en mots.

- Utilise une expression algébrique qui décrit les opérations à réaliser.

Tableau 2. Quelques exemples de solutions pour la situation « les carrés accolés »

Visualisations du périmètre de la figure	Descriptions du moyen en mots	Formules (x désigne la longueur du petit carré)
	On prend le périmètre du grand carré et on additionne le périmètre du petit carré. Il faut soustraire à cela deux fois la longueur du côté du petit carré.	$(x + 1) . 4 + 4x – 2x$
	On prend 3 fois la longueur du grand carré, trois fois celle du petit et on ajoute 1 cm.	$3(x + 1) + 3x +1$
	Le périmètre de la figure est le même que le périmètre d'un rectangle qui a une longueur de x+1+x et une largeur de x +1.	$2(x + 1 + x) + 2 (x + 1)$ ou $(x + 1 + x + x + 1) . 2$
	Pour calculer le périmètre de la figure, il faut additionner la longueur de 6 segments de longueur x et 4 cm.	$6x + 4$

La validation de ces expressions algébriques peut se faire soit en référence directe à la situation (colonne 1 du tableau), soit par substitution numérique, soit encore en appliquant les transformations d'expressions algébriques. Les élèves sont alors amenés à transformer des expressions complexes nécessitant de mobiliser plusieurs procédures (réduction de termes semblables, distributivité simple).

On peut également amener les élèves à mieux comprendre leurs erreurs de transformations algébriques en comparant deux expressions qui ont été validées en référence à la situation (colonne 1 du tableau).

Par exemple, l'expression *3(x + 1) + 3x + 1* est égale à *6x + 4*, c'est un fait puisque les deux démarches dont elles découlent ont été validées par la classe (colonne 1 du tableau).

Dès lors, les élèves qui pensent que *3(x + 1)* est égal à *3x + 1* (erreur que l'on constate fréquemment) peuvent trouver ici un autre type de justification. En appliquant leur procédure, ils aboutiront à *6x + 2*, ce qui est faux, il faut obtenir *6x + 4* : on ne pourra l'obtenir qu'en distribuant le facteur 3 sur le terme 1 et en ajoutant 1 à ce résultat (*3.1 + 1 = 4*). Dès lors, *3(x + 1)* est bien égal à *3x + 3* et non à *3x + 1*.

Tableau 3. Quelques exemples de solutions pour la situation « le nombre juste au milieu »

Exemples numériques	Descriptions du moyen en mots	Formules (x désigne le plus petit nombre et y, le plus grand)
8 + 13 = 21 21 : 2 = 10,5	Le nombre est en réalité la moyenne arithmétique des deux nombres de départ.	$\frac{x+y}{2}$
13 – 8 = 5 5 : 2 = 2,5 2,5 + 8 = 10,5	Pour retrouver ce nombre, j'additionne la moitié de l'écart entre les deux nombres au plus petit des deux nombres.	$x+\frac{y-x}{2}$
13 – 8 = 5 5 : 2 = 2,5 13 – 2,5 = 10,5	Pour retrouver ce nombre, il faut soustraire du plus grand des deux nombres la moitié de l'écart entre les deux nombres.	$y-\frac{y-x}{2}$

Des situations pour prouver

Ces situations visent à explorer les transformations algébriques orientées dans un but particulier : celui de prouver une conjecture issue de l'exploration numérique. Tout comme dans les activités présentées ci-avant, la lettre a ici un statut de nombre généralisé, qui permet de considérer que, quels que soient les nombres sur lesquels se fondent les raisonnements, la conjecture se vérifiera dans tous les cas.

Quatre situations sont proposées ici :

- Le calendrier
- Un curieux tableau de nombres
- Magie !
- Incroyable mais vrai ?

Vous trouverez ci-après les grandes étapes pour mener à bien ces activités, les fiches à destination des élèves ainsi que quelques exemples de démonstrations pour le problème « Un curieux tableau de nombres ».

Tableau 4. Les grandes étapes pour mener à bien les activités

Étape 1 : Recherche	Proposer aux élèves d'explorer numériquement la situation : s'assurer que divers cas ont été envisagés. Amener les élèves à verbaliser une conjecture.
Étape 2 : Modélisation de la situation par l'algèbre	C'est sans doute à cette étape qu'il vous faudra prendre la part la plus active dans le processus, pour accompagner les élèves dans la démarche de modélisation qui est loin d'être élémentaire à ce niveau de la scolarité. Les deux premières situations amènent à explorer un tableau de nombres. La première est sans doute plus accessible puisqu'elle part d'un support bien connu des élèves. En revanche, il y a un véritable travail de recherche pour tenter de comprendre les liens qui unissent les nombres proposés dans la deuxième activité. On pourrait proposer aux élèves de construire eux-mêmes un tableau du même type pour les aider dans cette phase de modélisation. À la suite des fiches d'activités, vous trouverez diverses démarches efficaces de modélisation pour cette deuxième activité (avec l'utilisation d'une ou de plusieurs variables).
Étape 3 : Transformations algébriques et confrontation des résultats des opérations algébriques avec les explorations numériques réalisées à l'étape 1	Cette étape doit permettre aux élèves de réaliser les transformations algébriques susceptibles de valider la conjecture. Dans de nombreux cas, grâce aux explorations numériques faites en début d'activité, la situation permettra aux élèves de valider les transformations : elles seront correctes si, comme ils l'ont constaté lors des calculs faits sur les nombres, elles aboutissent bien à une constante.

Fiche 3 - Le calendrier

Janvier 09

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	**3**	**4**
5	6	7	8	9	**10**	**11**
12	13	14	15	16	**17**	**18**
19	20	21	22	23	**24**	**25**
26	27	28	29	30	**31**	

Février 09

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	**7**	**8**
9	10	11	12	13	**14**	**15**
16	17	18	19	20	**21**	**22**
23	24	25	26	27	**28**	

Mars 09

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	**7**	**8**
9	10	11	12	13	**14**	**15**
16	17	18	19	20	**21**	**22**
23	24	25	26	27	**28**	**29**
30	31					

Avril 09

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	**4**	**5**
6	7	8	9	10	**11**	**12**
13	14	15	16	17	**18**	**19**
20	21	22	23	24	**25**	**26**
27	28	29	30			

Mai 09

L	M	M	J	V	S	D
				1	**2**	**3**
4	5	6	7	8	**9**	**10**
11	12	13	14	15	**16**	**17**
18	19	20	21	22	**23**	**24**
25	26	27	28	29	**30**	**31**

Juin 09

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	**6**	**7**
8	9	10	11	12	**13**	**14**
15	16	17	18	19	**20**	**21**
22	23	24	25	26	**27**	**28**
29	30					

Juillet 09

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	**4**	**5**
6	7	8	9	10	**11**	**12**
13	14	15	16	17	**18**	**19**
20	21	22	23	24	**25**	**26**
27	28	29	30	31		

Août 09

L	M	M	J	V	S	D
					1	**2**
3	4	5	6	7	**8**	**9**
10	11	12	13	14	**15**	**16**
17	18	19	20	21	**22**	**23**
24	25	26	27	28	**29**	**30**
31						

Septembre 09

L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	**5**	**6**
7	8	9	10	11	**12**	**13**
14	15	16	17	18	**19**	**20**
21	22	23	24	25	**26**	**27**
28	29	30				

Octobre 09

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	**3**	**4**
5	6	7	8	9	**10**	**11**
12	13	14	15	16	**17**	**18**
19	20	21	22	23	**24**	**25**
26	27	28	29	30	**31**	

Novembre 09

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	**7**	**8**
9	10	11	12	13	**14**	**15**
16	17	18	19	20	**21**	**22**
23	24	25	26	27	**28**	**29**
30						

Décembre 09

L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	**5**	**6**
7	8	9	10	11	**12**	**13**
14	15	16	17	18	**19**	**20**
21	22	23	24	25	**26**	**27**
28	29	30	31			

1. Choisis un mois de l'année. Dans ce mois, entoure un cadre de côté 3 jours sur 3 jours. Il comporte 9 nombres.
2. Calcule le produit du premier et du neuvième nombre.
3. Calcule le produit du troisième et du septième nombre.
4. Calcule la différence entre les deux produits que tu as calculés.
5. Applique le même programme de calcul en choisissant un autre cadre. Qu'observes-tu ?

Fiche 4 - Un curieux tableau

Observe le tableau suivant.

10	14	13
9	13	12
6	10	9

Choisis trois nombres. Chacun de ceux-ci doit se trouver sur une ligne et une colonne différente des autres.
Additionne ces trois nombres.
Quelle somme obtiens-tu ?

Choisis trois autres nombres qui appartiennent eux aussi chacun à une ligne et une colonne différente.
Additionne-les.
Que constates-tu ?

Tu t'en doutes, les nombres de ce tableau n'ont pas été choisis au hasard…

Essaie de comprendre comment ils ont été choisis.
Quelles régularités apparaissent entre les nombres de la première colonne et ceux de la deuxième ?

Observes-tu d'autres régularités ?

Comment reproduire un tableau du même type ?

Fiche 5 - Magie !

Essaie les tours suivants puis tente de les expliquer en démontrant le processus.

1) Deviner le nombre correct de points de deux dés.

Le prestidigitateur donne deux dés au spectateur qui les lance une fois sans que le prestidigitateur ne les voie.

Le spectateur doit alors multiplier le nombre supérieur par 2 et ajouter 1.
Il multiplie ensuite la somme obtenue par 5.
Puis il ajoute le nombre de points de l'autre dé à ce nombre et donne la nouvelle somme au prestidigitateur.

Il suffit alors au prestidigitateur de soustraire 5 au nombre donné pour connaitre le résultat affiché par les dés.

2) Deviner le nombre correct réalisé en trois coups avec un dé.

Le spectateur lance un dé une fois sans que le prestidigitateur ne le voie.

Ensuite il multiplie le nombre de points par 2, ajoute 5 et multiplie la somme obtenue par 5. Il écrit le produit.

Le spectateur lance le dé pour la deuxième fois.
Il ajoute le nombre de points augmenté de 10 au produit précédent et il multiplie la somme obtenue par 10. Il écrit ce nouveau produit.

Le spectateur lance le dé pour la troisième fois ; il ajoute le nombre de points au produit précédent et donne la somme au prestidigitateur.

Il suffit alors au prestidigitateur de soustraire 350 au nombre donné pour obtenir un nombre de trois chiffres qui représente les points obtenus à chaque lancé.

Fiche 6 - Incroyable mais vrai ?

1) Thomas pense avoir trouvé un truc pour calculer la différence de deux carrés :

   $9^2 - 8^2 = 9 + 8$
   $3^2 - 2^2 = 3 + 2$

   D'après lui, il suffit d'additionner les deux nombres.

   Dans quels cas son « truc » fonctionne-t-il ? Explique comment c'est possible.

2) La somme de deux nombres impairs est paire. Est-ce toujours vrai ? Explique comment c'est possible.

3) Si on additionne 3 nombres naturels qui se suivent, on obtient toujours un multiple de 3. Comment est-ce possible ?

Quelques exemples de modélisation mathématique de la situation « Un curieux tableau »

Selon le type d'analyse faite au départ du tableau, quatre modélisations mathématiques sont possibles et aboutissent chacune à démontrer la conjecture observée :

- Soit les élèves constatent simplement qu'il s'agit d'une table d'addition : le nombre 10 peut être obtenu par addition de deux nombres, idem pour les nombres 14 et 13 :

10	14	13
9	13	12
6	10	9

+	d	e	f
a	a + d	a + e	a + f
b	b + d	b + e	b + f
c	c + d	c + e	c + f

La contrainte impose de prendre des nombres appartenant à des lignes et colonnes différentes. Dès lors, les diverses possibilités sont les suivantes :

10 + 13 + 9 = **32**	a + d + b + e + c + f = **a + b + c + d + e + f**
10 + 10 + 12 = **32**	a + d + c + e + b + f = **a + b + c + d + e + f**
9 + 14 + 9 = **32**	b + d + a + e + c + f= **a + b + c + d + e + f**
9 + 10 +13 = **32**	b + d + c + e + a + f = **a + b + c + d + e + f**
6 + 14 + 12 = **32**	c + d + a + e + b + f = **a + b + c + d + e + f**
6 + 13 +13 = **32**	c + d + b + e + a + f = **a + b + c + d + e + f**

Pour générer un tableau semblable, il faut choisir six nombres (a, b, c, d, e et f).

- Soit les élèves découvrent une régularité entre les nombres d'une même ligne : pour passer de la première à la deuxième ligne, on soustrait chaque fois 1 unité et pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on soustrait 3 unités :

10	14	13
9	13	12
6	10	9

	a	b	c
-1	a – 1	b – 1	c – 1
-3	a – 4	b – 4	c – 4

Dès lors, les diverses possibilités sont les suivantes :

10 + 13 + 9 = **32**	a + b – 1 + c – 4 = **a + b + c – 5**
10 + 10 + 12 = **32**	a + b – 4 + c – 1 = **a + b + c – 5**
9 + 14 + 9 = **32**	a – 1 + b + c – 4 = **a + b + c – 5**
9 + 10 +13 = **32**	a – 1 + b – 4 + c = **a + b + c – 5**
6 + 14 + 12 = **32**	a – 4 + b + c – 1 = **a + b + c – 5**
6 + 13 +13 = **32**	a – 4 + b – 1 + c = **a + b + c – 5**

Pour générer un tableau semblable, il suffit de choisir trois nombres de départ (a, b et c).

- Soit les élèves découvrent une régularité entre les nombres d'une même colonne : pour passer de la première à la deuxième colonne, on ajoute chaque fois 4 unités et pour passer de la deuxième à la troisième colonne, on soustrait 1 unité :

10	14	13
9	13	12
6	10	9

	+4	– 1
a	a + 4	a + 3
b	b + 4	b + 3
c	c + 4	c + 3

Dès lors, les diverses possibilités sont les suivantes :

10 + 13 + 9 = **32**	a + b + 4 + c + 3 = **a + b + c + 7**
10 + 10 + 12 = **32**	a + c + 4 + b + 3 = **a + b + c + 7**
9 + 14 + 9 = **32**	b + a + 4 + c + 3 = **a + b + c + 7**
9 + 10 +13 = **32**	b + c + 4 + a + 3 = **a + b + c + 7**
6 + 14 + 12 = **32**	c + a + 4 + b + 3 = **a + b + c + 7**
6 + 13 +13 = **32**	c + b + 4 + a + 3 = **a + b + c + 7**

Pour générer un tableau du même type, il s'agit comme dans le cas précédent de choisir trois nombres de départ (a, b et c).

- Soit enfin, les élèves combinent les régularités observées sur les lignes et les colonnes et obtiennent alors la modélisation suivante :

10	14	13
9	13	12
6	10	9

		+4	− 1
	a	a + 4	a + 3
−1	a – 1	a +3	a + 2
−3	a – 4	a	a – 1

Les diverses possibilités sont donc :

10 + 13 + 9 = **32**	a + a + 3 + a – 1 = **3a + 2**
10 + 10 + 12 = **32**	a + a + a + 2 = **3a + 2**
9 + 14 + 9 = **32**	a – 1 + a + 4 + a – 1 = **3a + 2**
9 + 10 +13 = **32**	a – 1 + a + a + 3 = **3a + 2**
6 + 14 + 12 = **32**	a – 4 + a + 4 + a + 2 = **3a + 2**
6 + 13 +13 = **32**	a – 4 + a + 3 + a + 3 = **3a + 2**

Et les élèves ont alors la possibilité de générer un tableau du même type en se basant sur un seul nombre de départ (a).

1.3. L'entretien du faire faux : véritable réflexion centrée sur les transformations algébriques

La technique d'entretien du faire faux a été développée par une équipe d'enseignants-chercheurs français : Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997).

L'entretien s'organise en deux étapes.

- Tout d'abord, on propose à l'élève une expression algébrique à développer et on lui demande de produire une expression qui, à coup sûr, ne sera pas égale à celle proposée par l'enseignant.
- Ensuite, on lui demande si ce qu'il a proposé est toujours faux. Et à ce moment, s'enclenche un dialogue entre l'élève et l'enseignant basé sur un calcul de valeur numérique ou la résolution d'équation.

> ***Exemple de dialogue :***
> (*P est l'enseignant ; E est l'élève*)
>
> P : Donne-moi un peu une expression qui n'est jamais égale à 3 (x + 4).
> E : 4 (x + 4).
> P : Est-ce que l'égalité fausse que tu as produite est toujours fausse?
> E : Euh, oui, puisque dans un cas, on en prend 3 et dans l'autre, 4.
> Si par exemple x vaut 1, on a 3 fois 5 d'un côté et 4 fois 5 de l'autre.
> P : N'est-il jamais possible de prendre 3 fois un nombre et 4 fois un nombre et d'obtenir la même chose ?
> E : C'est presque toujours le cas, sauf si on prend 0 : 3 fois 0 et 4 fois 0, c'est quand même 0.
> P : Et donc, quelle valeur dois-tu donner à x pour que les deux expressions soient égales ?
> E : Bien euh, -4, comme ça x + 4, ça donnera bien 0.

Cette technique d'entretien présente plusieurs intérêts :

1) Le fait de demander aux élèves de produire quelque chose de faux plonge l'élève dans une situation tout à fait nouvelle : habituellement, il justifie les transformations algébriques en citant une règle apprise (on n'additionne que des termes semblables, il faut distribuer le facteur sur chacun des termes, …); or, dans ce cas, l'élève n'a jamais appris à produire quelque chose de faux. Il est donc obligé de rentrer pleinement dans une réflexion mathématique (très souvent, la première réponse produite par l'élève consiste à modifier un signe d'opération ou un coefficient numérique). Dans l'extrait d'entretien ci-dessus, on voit que s'enclenche très vite une réflexion mathématique (sur le rôle du zéro dans la multiplication, puis, par la suite sur la résolution d'une équation).
2) Les élèves doivent pleinement donner sens aux expressions algébriques et rencontrent, lors de cet entretien, deux statuts différents de la lettre. Dans un premier temps, la lettre a un statut d'indéterminée. Ensuite, lorsqu'il se pose la question de savoir si l'égalité produite sera toujours fausse, la lettre acquiert le statut d'inconnue spécifique (on cherche alors la valeur de l'inconnue qui rendra l'égalité vraie).
3) Cette technique peut amener les élèves à verbaliser que les transformations algébriques correctes ont cette particularité de conserver l'égalité dans tous les cas, quelles que soient les valeurs attribuées à la lettre. À l'inverse, dans les équations, l'égalité n'est conservée que pour certaines valeurs attribuées aux lettres. Cette connaissance, si elle peut paraitre élémentaire aux enseignants, est loin d'être une évidence pour les élèves débutant en algèbre.

Toutefois, cet entretien du faire faux n'est pas la panacée. Les auteurs soulignent d'ailleurs à cet égard que « pour certains élèves, ça ne donne rien ». Il faut en effet que l'élève accepte en quelque sorte de « jouer le jeu » : il est amené, dans ce type de situation, à devoir penser par lui-même, sans avoir une démarche à laquelle se raccrocher d'emblée. Le rôle de l'enseignant est ici primordial car il doit vraiment adapter ses interventions aux réactions de l'élève : il s'agit de le laisser penser et d'accompagner l'élève pour que lui-même apprenne à s'observer penser et agir, ce qui, nous l'espérons, l'amènera vers une plus grande autonomie de pensée…

Il s'agit donc d'un entretien qui peut réellement donner ses fruits en situation de remédiation individualisée. Il n'est évidemment pas incompatible avec des démarches d'apprentissage plus collectives mais, à partir du moment où les interventions de l'enseignant suivent véritablement la pensée de l'élève, il est difficile de généraliser ce type d'approche à une classe entière.

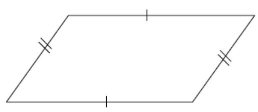
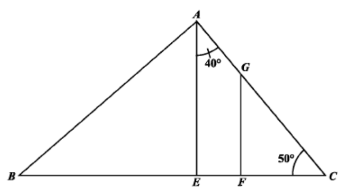
2. Le raisonnement déductif en géométrie

2.1. Les constats issus de l'épreuve

Le raisonnement déductif en géométrie, source de difficultés à plus d'un égard…

Trois questions nécessitaient la mobilisation du raisonnement déductif, dans le cadre d'une construction géométrique (question 30) ou d'une argumentation (questions 33 et 36). Elles sont globalement mal réussies par les élèves.

Tableau 5. Résultats aux questions de l'épreuve centrées sur le raisonnement déductif en géométrie

Questions	Descriptions	% de réussite
Question 30 **SITUE le point *A* pour que le triangle *ABC* soit isocèle de base *[BC]* et que le triangle *ADC* soit rectangle en *D*.** *Réalise les constructions au crayon et ne les efface pas.* *Trace les triangles en bleu.* *B* . . *D* *C*	Dans ce cas, le positionnement du point *A* ne peut se faire directement. Il faut déduire de l'énoncé les éléments suivants : • le point *A* doit appartenir à la médiatrice de *[BC]* puisque le triangle *ABC* est isocèle ; • le point *A* doit aussi appartenir à la droite *AD* qui, elle-même est perpendiculaire à la droite *DC* puisque le triangle *ADC* est rectangle.	40%
Question 33 Héloïse affirme que « tout parallélogramme est aussi un losange ». Pablo construit la figure suivante et dit : *« C'est faux car voici un parallélogramme qui n'est pas un losange ».*  **Pablo a-t-il raison ?** ………….. *Explique ta réponse.* ……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………	La recherche d'un contre-exemple est ici au cœur de la question : il s'agit de verbaliser le fait qu'un seul contre-exemple suffit pour infirmer une hypothèse (différentes formulations étaient acceptées).	47%
Question 36  Dans le triangle *ABC* ci-dessus, on sait que • l'angle $\widehat{BCA}$ mesure 50° ; • *E* est un point du segment $[BC]$ et l'angle $\widehat{EAC}$ mesure 40° ; • *F* est un point du segment $[BC]$ et les droites *GF* et *BC* sont perpendiculaires. **JUSTIFIE chacune des affirmations suivantes.** • L'angle $\widehat{AEC}$ est droit car …………………………………… ……………………………………………………………… ……………………………………………………………… • La droite *AE* est parallèle à la droite *FG* car …………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………	Dans cette question, on place véritablement l'élève en situation de preuve : il s'agit, dans chaque cas, de mobiliser une propriété géométrique et de la relier à des informations explicitement fournies dans l'énoncé.	• L'angle $\widehat{AEC}$ est droit : 32% • La droite *AE* est parallèle à la droite *FG* : 26%

Comment expliquer ces difficultés ?

Les difficultés rencontrées par les élèves sont, semble-t-il, de plusieurs ordres (Marot, 2000).

Tout d'abord, les élèves éprouvent des difficultés pour analyser la situation qui leur est proposée : identifier les contraintes du problème, organiser leurs recherches, présenter les résultats de leurs réflexions. Toutes ces compétences relèvent d'une véritable activité de résolution de problèmes qui est loin d'être évidente pour les élèves.

Une autre difficulté relève de l'image que bon nombre se font au sujet de la preuve en géométrie : ils ne comprennent pas pourquoi il est nécessaire de démontrer, pourquoi le stade de la vue ou de la mesure n'est pas suffisant pour prouver ce que l'on avance.

Une troisième source de difficultés relève de la compréhension des règles du jeu mathématique par rapport à l'argumentation déductive : comprendre le sens du mot « justifier », discerner le rôle de l'exemple du contre-exemple, comprendre la notion de condition nécessaire et suffisante, le sens d'une implication, … sont autant d'activités qui demandent un entrainement à l'explication s'appuyant sur des propriétés établies.

A. Élaborer un raisonnement déductif, une véritable activité de résolution de problèmes

Élaborer un raisonnement déductif constitue pour un élève du premier degré du secondaire une véritable activité de résolution de problèmes qui nécessite d'analyser en profondeur la situation, d'organiser sa démarche de résolution et de communiquer, dans un langage particulier, les résultats de sa réflexion.

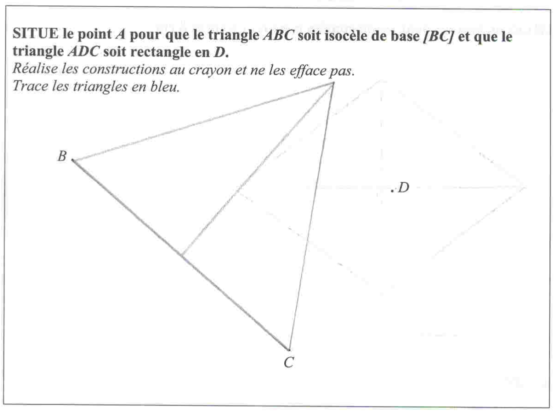
L'analyse des réponses de quelques classes (78 élèves au total) face à la question 30 montre à quel point l'étape d'analyse de la situation de départ est centrale pour situer correctement le point *A*. L'identification de l'ensemble des contraintes à respecter est effectivement un élément clé pour parvenir à réaliser la construction demandée. Les réponses fournies par les élèves ont pu être classées en quatre catégories.

- **Certains ne rentrent pas du tout dans la situation**.
  Ils omettent de répondre ou tracent simplement le triangle *BCD*.

- **D'autres élèves ne prennent en compte qu'un critère (soit la présence d'un triangle isocèle, soit la présence d'un triangle rectangle)**.

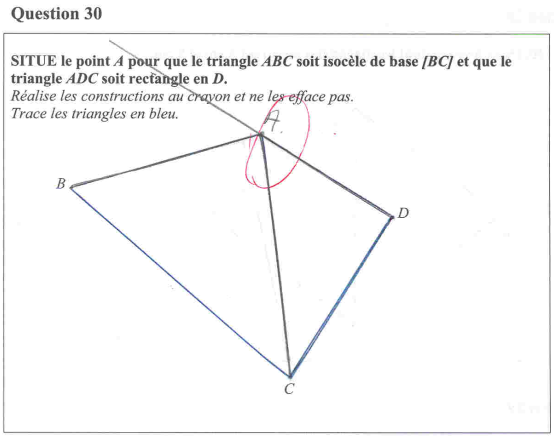
  Certains tracent le triangle isocèle sans s'occuper du point *D* ou le triangle rectangle sans s'occuper du point *B*.

Question 30



Un seul triangle apparait ici : le triangle isocèle *ABC*.

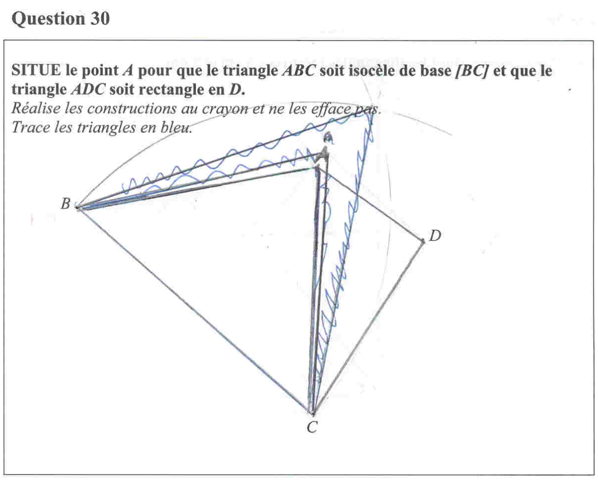
D’autres encore relient *D* ou *B* au sommet *A* sans s’occuper de la nature du triangle *ADC* ou *ABC*.



L’élève n’a également respecté qu’une des deux contraintes imposées : le triangle *ADC* est rectangle ; le triangle *ABC* est, quant à lui, scalène.

- **Certains élèves partent sur une seule contrainte et modifient leurs constructions pour faire en sorte que la deuxième contrainte soit respectée**.

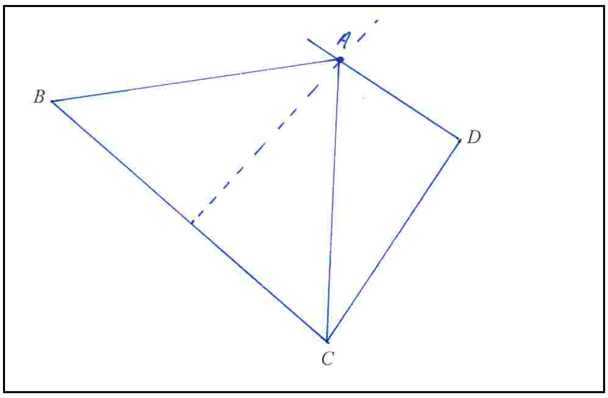
  L’exemple suivant illustre particulièrement bien cette technique. Cette stratégie aboutit à la solution correcte par un raisonnement de type « essais/erreurs ». Nous ne l’avons retrouvé que dans quelques copies (3 au total sur les 78 copies analysées).



Le tracé de trois triangles isocèles de base BC a été ici nécessaire avant de trouver celui ayant un sommet commun avec le triangle rectangle *ADC*.

- **D’autres enfin tiennent compte d’emblée de l’ensemble des contraintes définies**.

  Ils appliquent alors la méthode des deux lieux qui nécessite de redéfinir le problème : on ne trace pas d’emblée des triangles mais des droites remarquables de ces triangles.



Le point *A* est ici considéré comme le point d’intersection de deux droites.

B. Donner sens à la démarche de preuve : le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive

Les données issues de la recherche (notamment la théorie génétique de Inhelder et Piaget, celle du développement du raisonnement géométrique de P. et D. Van Hiele ou d'Arsac) montrent qu'au fur et à mesure de l'avancement dans la scolarité, la démarche de preuve évolue.

Tableau 6 : Trois manières d'envisager la preuve, de la maternelle au premier degré du secondaire

Géométrie perceptive Est vrai ce que je vois Boite à outils géométriques : l'œil	Les élèves les plus jeunes (en maternelle et au début de l'enseignement primaire) considèrent comme vrai ce qui découle directement de la perception visuelle. Ainsi, un enfant considèrera qu'une figure est un carré car, en la regardant, elle a bien la forme d'un carré.
Géométrie instrumentée Sont vraies les propriétés que je peux vérifier à l'aide d'instruments Boite à outils géométriques : instruments de mesure tels que la règle graduée, le compas, l'équerre, le gabarit, …	En primaire, une propriété est considérée comme vraie si l'on peut la vérifier à l'aide d'instruments. Ainsi, l'élève justifiera le fait que la somme des amplitudes des angles d'un triangle vaut 180° car il le vérifie dans plusieurs situations. À cette étape de l'argumentation, les élèves ne comprennent pas bien la notion de condition nécessaire et suffisante : pour eux, pour vérifier qu'une figure est un carré, il faut à la fois mesurer la longueur des quatre côtés et l'amplitude des quatre angles. Ils ne conçoivent pas qu'une fois la longueur des côtés mesurés, on peut se contenter de mesurer l'amplitude d'un seul angle.
Géométrie déductive Est vrai ce que je démontre Boite à outils géométriques : théorèmes, définitions, axiomes	On entre ici pleinement dans le raisonnement déductif. L'élève comprend que son argumentation doit se baser sur les données de l'énoncé et que, même si une figure accompagne celui-ci, aucune propriété ne pourra se justifier par recours direct à l'observation de la figure. La référence à des théorèmes, définitions ou axiomes garantira la pertinence de la preuve.

Au début de l'enseignement secondaire, les élèves sont donc amenés à passer d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive. Selon Tanguy (2006), ce passage ne se fait pas sans rupture : pour certains problèmes « évidents », le recours à la preuve parait tout à fait gratuit. À l'inverse, certains élèves pensent que la preuve ne s'applique qu'au cas particulier de la figure qui accompagne la démonstration. D'autres encore ont besoin, pour se convaincre pleinement, de vérifier par le tracé, une propriété qu'ils viennent pourtant de prouver à l'aide de théorèmes.

C. Comprendre les règles du jeu mathématique par rapport à l'argumentation déductive

Différencier une implication d'une réciproque, discerner les rôles de l'exemple ou du contre-exemple, comprendre ce qu'est une condition nécessaire et suffisante, utiliser un vocabulaire approprié (parce que, si… alors, on en déduit que, cela implique…) sont autant d'apprentissages auxquels les élèves doivent se confronter tout au long du degré.

En analysant les copies des élèves face à la question 36, il apparait que les élèves éprouvent des difficultés à comprendre réellement ce qu'on leur demande. Pour beaucoup, il semble que la consigne « **justifie** » est perçue comme un synonyme de « **explique** » : ils expliquent que l'angle est droit car il mesure 90°, ou que les droites sont parallèles car même si on les prolonge, elles ne se rencontreront jamais …

Les pistes que nous développons dans cette partie visent à confronter les élèves à des activités multiples les amenant d'une part à passer d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive et d'autre part, à développer progressivement une meilleure maitrise du raisonnement déductif. Vous y trouverez :

- des activités visant à développer deux facettes essentielles à mobiliser dans les activités d'argumentation : la logique et la communication. Dans ces diverses situations, la construction est au cœur du processus soit pour valider une propriété et réfléchir ainsi au rôle de l'exemple et du contre-exemple, soit pour donner sens à un raisonnement de communication ;

- des activités d'argumentation qui, nous l'espérons, susciteront véritablement le débat dans la mesure où une approche par la géométrie instrumentée aboutit à des résultats différents d'une approche déductive.

D'après Marot (2000), proposer aux élèves ce type d'activités implique également des méthodologies d'enseignement particulières :

- sur l'exploitation des situations : la confrontation des démarches des élèves est ici essentielle. C'est par cette confrontation qu'on amènera les élèves à prendre conscience qu'un contre-exemple suffit pour conclure, que plusieurs exemples vrais ne suffisent pas pour généraliser, que la référence directe aux données de l'énoncé et la sélection des propriétés à utiliser pour justifier sont plus importantes que la mesure (qui peut constituer une première approche, mais qui s'avère tout à fait insuffisante dans le cadre d'un raisonnement hypothéticodéductif) ;

- sur les exigences en matière de production écrite : il est essentiel d'amener les élèves à exprimer leur raisonnement par écrit, à confronter leurs propositions pour dégager que telle ou telle formulation est plus pertinente que d'autres …

Il faut également garder à l'esprit que ces apprentissages doivent s'envisager dans le long terme : l'évolution de certains dans ce domaine est lente et longue. Une pratique régulière est dans ce cas essentielle pour réellement les accompagner vers cet apprentissage complexe de la démonstration qui est, à ce niveau de la scolarité, en pleine construction.

2.2. Des situations centrées sur les facettes essentielles intervenant dans le raisonnement déductif

Des situations pour développer la composante logique

Nous proposons ici des situations[2] visant à développer deux aspects de cette composante.

- Comprendre les termes logiques de base : distinction entre les connecteurs « et » et « ou » ; compréhension des notions de « toujours », « parfois » et « jamais » en géométrie.
- Établir des relations logiques entre des informations géométriques : identifier les conditions nécessaires et suffisantes pour définir un objet géométrique ; analyser un schéma à main levée en vue de réaliser des déductions simples.

  Travailler sur des dessins à main levée a pour principal avantage d'éviter que les élèves ne se basent sur leur perception visuelle. On focalise ainsi l'attention sur les déductions qui peuvent se réaliser au départ de l'analyse des données fournies dans le texte.

Vous trouverez ci-après les grandes étapes pour mener à bien ces activités ainsi que les fiches à destination des élèves.

Tableau 7. Bref descriptif des grandes étapes des activités centrées sur la composante logique

Étape 1 : Recherche	Cette étape, essentiellement individuelle, permet de faire émerger les conceptions spontanées des élèves qui seront alors confrontées à l'étape suivante.
Étape 2 : Validation des solutions	Cette deuxième étape vise à développer des compétences essentielles dans le domaine de l'argumentation. En cas de désaccord sur la solution apportée à une question, il est essentiel que les élèves justifient leur point de vue et, dans un second temps, comparent les arguments proposés. Ainsi, petit à petit, on amène les élèves à comprendre qu'un contre-exemple suffit pour conclure et qu'à l'inverse, plusieurs exemples vrais ne suffisent pas pour généraliser une propriété.
Étape 3 : Synthèse	La synthèse amènera à une mise au point sur le sens mathématique des termes exploités ainsi que sur la valeur des exemples dans une démarche d'argumentation. L'exploitation de la fiche 3 pourrait également sensibiliser les élèves sur le rôle d'un schéma à main levée dans l'élaboration d'un raisonnement déductif.

[2] Ces situations sont inspirées de travaux réalisés par Jehin, M. & Chenu, F. (1999).

Fiche 7 - Un peu de vocabulaire…

1. Complète soit par « ou », soit par « et ». Justifie dans chaque cas ta réponse.

   a) Toute droite qui n'est pas tangente à un cercle est sécante à ce cercle (2 points d'intersection) ………… extérieure à ce cercle.

   Justification :

   b) Dans un même plan, deux droites sont sécantes ……………… parallèles.

   Justification :

2. Complète par « est parfois », « est toujours » ou « n'est jamais »

   a) Un triangle isocèle qui a un angle de 45° …..………………….. rectangle.

   Justification :

   b) Un triangle rectangle qui a un angle de 45° ………………….isocèle.

   Justification :

   c) Un triangle rectangle qui a un angle de 30° ………………….isocèle.

   Justification :

Fiche 8 - Nécessaire ou suffisant ?

1. Quelle(s) propriété(s) suffit-il de donner à un parallélogramme pour qu'il soit un rectangle ?
   Attention, il y a peut-être plusieurs solutions…

   ☐ Deux côtés consécutifs de même longueur
   ☐ Deux diagonales de même longueur
   ☐ Un angle droit
   ☐ Deux diagonales perpendiculaires
   ☐ Deux médianes perpendiculaires

   Justifie ta ou tes réponses.

2. Quelle(s) propriété(s) suffit-il de donner à un triangle pour qu'il soit isocèle ?
   Attention, il y a peut-être plusieurs solutions…

   ☐ Un axe de symétrie
   ☐ Deux côtés de même longueur
   ☐ Deux angles de même amplitude
   ☐ Un angle droit

   Justifie ta ou tes réponses.

3. Quelle(s) propriété(s) suffit-il de donner à un triangle pour qu'il soit équilatéral ?
   Attention, il y a peut-être plusieurs solutions…

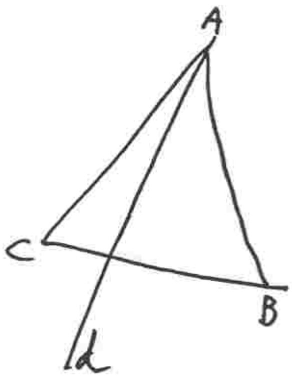
   ☐ 3 côtés de même longueur
   ☐ 2 angles d'amplitude égale à 60°
   ☐ Un angle de 60° et deux côtés de même longueur
   ☐ Deux axes de symétrie

   Justifie ta ou tes réponses.

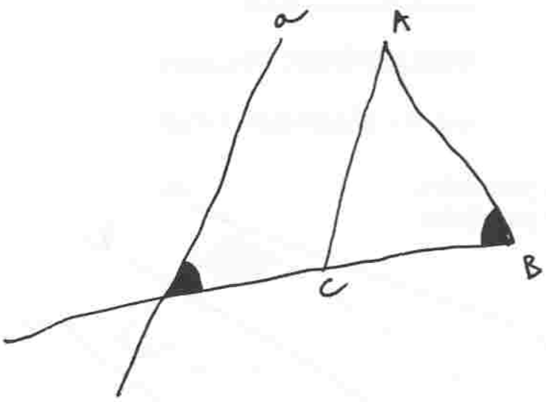
Fiche 9 - Des dessins à main levée…

1. Le schéma ci-dessous, réalisé à main levée, représente un triangle *ABC* qui admet un axe de symétrie d.

   Place, sur ce schéma, tous les signes conventionnels que tu peux déduire de la situation. Justifie tes annotations.



2. Sur le schéma ci-dessous, réalisé à main levée, on sait que :
   - *ABC* est un triangle isocèle de sommet *A.*
   - La droite *a* est parallèle au segment *AC*.



   Sur base des informations fournies, que peux-tu dire des angles marqués en noir ? Justifie ta réponse.

Des situations pour développer la composante « communication »

Les activités qui visent à développer cette facette communication de la justification ont, pour objectif principal, d'amener les élèves à verbaliser les conventions géométriques élémentaires dans divers contextes : pour décrire une figure (fiche 10), pour réaliser un programme de construction (fiche 11) ou pour communiquer un raisonnement plus élaboré (fiche 12)[3]. L'intérêt est ici de confronter les productions spontanées des élèves en vue de se mettre d'accord sur des conventions et un vocabulaire commun.

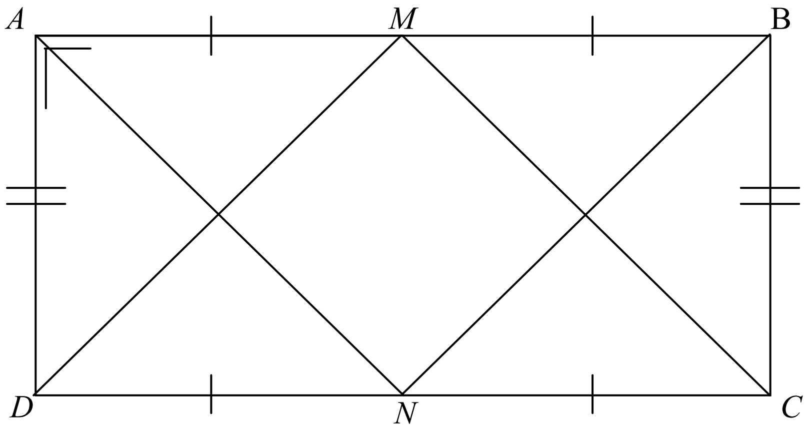
Tableau 8. Bref descriptif des grandes étapes des activités centrées sur la composante « communication »

Étape 1 : Recherche	Cette étape a pour but de faire émerger les démarches spontanées des élèves.
Étape 2 : Identification d'un thème et exploitation de quelques productions d'élèves autour de ce thème	Il semble nécessaire d'analyser les productions spontanées des élèves en vue de focaliser l'exploitation collective sur un aspect particulier à la fois (par exemple, la manière d'indiquer deux éléments identiques - côtés de même longueur, angles de même amplitude - ou de préciser la nature d'un objet géométrique : point, droite, quadrilatère …). Lors de l'exploitation, on pourrait également faire référence à des ressources extérieures aux élèves (comme par exemple, un manuel, un dictionnaire de mathématiques ou une recherche sur Internet) pour les sensibiliser à un vocabulaire admis plus largement que celui sur lequel on pourrait se mettre d'accord à l'échelle de la classe.
Étape 3 : Retour aux productions spontanées des élèves	Etant donné que seules quelques productions ont pu être analysées avec l'ensemble des élèves, il est sans doute utile d'inciter chaque élève à revoir sa propre production sur la base de la réflexion commune développée à l'étape 2.

[3] Les situations présentées dans les fiches 10 et 12 sont inspirées de travaux réalisés par Jehin, M. & Chenu, F. (1999), celle proposée dans la fiche 11 est inspirée de Marot (2000).

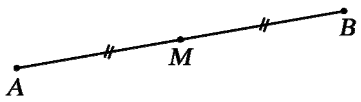
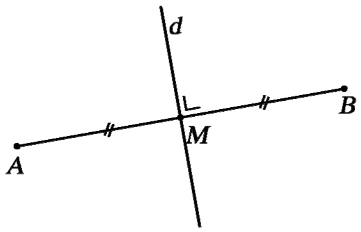
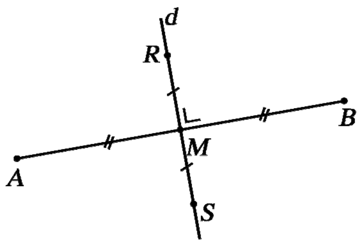
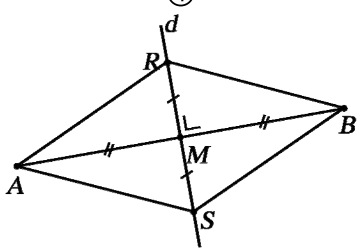
Fiche 10 - Description d'une figure

Décris la figure suivante en écrivant les informations nécessaires pour la reproduire.



Fiche 11 - Élaborer un programme de construction

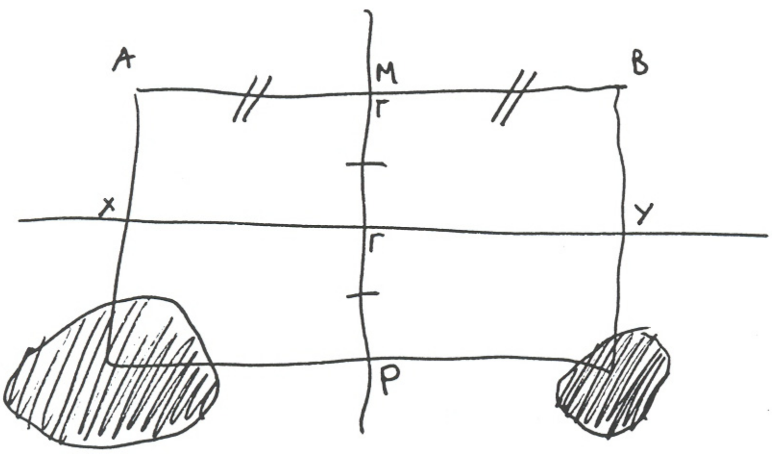
Voici une illustration des diverses étapes permettant la construction d'un losange de diagonale *[AB]*. Écris au fur et à mesure ce que l'on a fait.

Étapes de la construction	Description en mots de l'étape
① 	……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ………………………………………………………
② 	……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ………………………………………………………
③ 	……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ………………………………………………………
④ 	……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ……………………………………………………… ………………………………………………………

Fiche 12 - Communiquer un raisonnement

Comment retrouver les axes de symétrie du rectangle ci-dessous qui a été en partie caché ?

Loïc a réalisé un schéma à main levée pour solutionner ce problème.



Rédige un programme de construction permettant de reproduire avec précision la solution proposée par Loïc.

2.3. Des activités d'argumentation

Les quelques situations présentées dans cette section ont pour but de sensibiliser les élèves à la démonstration dans des situations variées[4]. Les débats à mener autour de ces situations sont indispensables pour permettre aux élèves de progresser dans le domaine : il est essentiel de faire porter la réflexion collective sur la nature des justifications fournies (raisonnement basé sur le mesurage ou une figure particulière versus raisonnement plus élaboré basé sur des propriétés géométriques).

La forme des explications fournies ne devra pas prendre le pas sur leur contenu qui, dans un premier temps, est essentiel. La formulation est une compétence qui se développe petit à petit, sur base de la confrontation des productions « spontanées » des élèves.

Tableau 9. Bref descriptif des grandes étapes des activités d'argumentation

Étape 1 : Recherche	Cette étape a pour but de faire émerger les démarches spontanées des élèves.
Étape 2 : Confrontation des solutions et des arguments qui les valident	Il s'agira ici, en fonction des productions des élèves : • de classer les différents types d'argumentations selon qu'elles relèvent de la géométrie instrumentée ou déductive ; • de sensibiliser les élèves à la puissance de l'argumentation déductive. C'est également l'occasion d'amener les élèves à prendre pleinement conscience du rôle des propriétés dans l'argumentation : elles ne servent plus uniquement à décrire un objet géométrique mais constituent des outils indispensables pour justifier des affirmations et les rendre irréfutables.
Étape 3 : Synthèse	La synthèse, élaborée elle aussi très progressivement, visera à garder trace des sauts conceptuels qui auront été mis à jour dans les débats menés à l'étape 2.

[4]Les situations proposées dans les fiches 14 (exercice 1) et 15 sont inspirées de Marot (2000) : Une approche de la démonstration en classe de sixième in Repères–Irem n°39 (pp. 21-34). Les situations présentées dans la fiche 13 sont quant à elles inspirées des travaux menés par Jehin & Chenu (1999).

Fiche 13 - La raison du plus fort…

1)

On a construit un triangle ABC tel que :

$$\begin{cases} \overline{AB} = 5 \text{ cm} \\ \widehat{ABC} = 53° \\ \widehat{BAC} = 38° \end{cases}$$

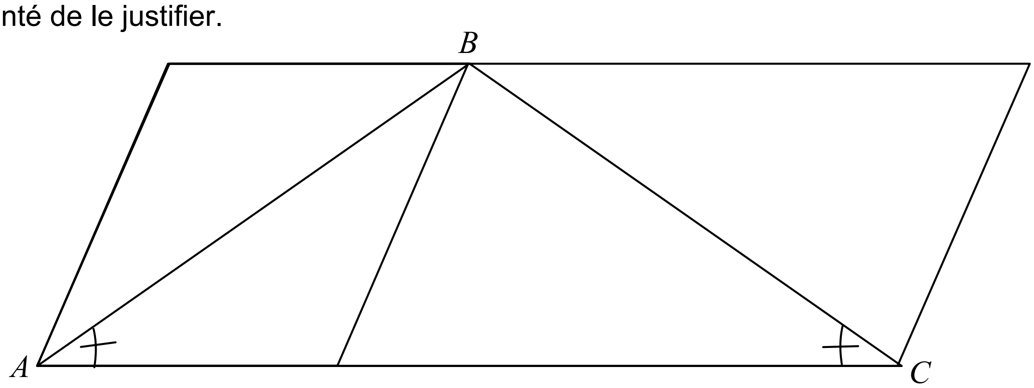
Sandro affirme que le triangle est rectangle : il l'a vu en utilisant son équerre.

Ali pense que le triangle n'est pas rectangle : il affirme que, par calcul, il pourrait le montrer.

Qui a raison ? Pourquoi ?

2)

En observant la figure ci-dessous, Tom, Louis et Lucien ont émis un constat et ont tenté de le justifier.



Tom : La longueur du segment [AB] est inférieure à la longueur du segment [BC] : on le voit directement en regardant la figure.

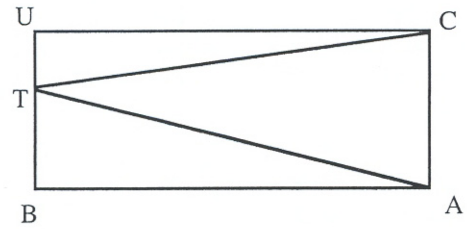
Louis : Si on mesure, on voit bien que les deux longueurs sont égales.

Lucien : On n'a même pas besoin de mesurer ; rien qu'en regardant les données du dessin, on peut en déduire que les segments ont la même longueur.

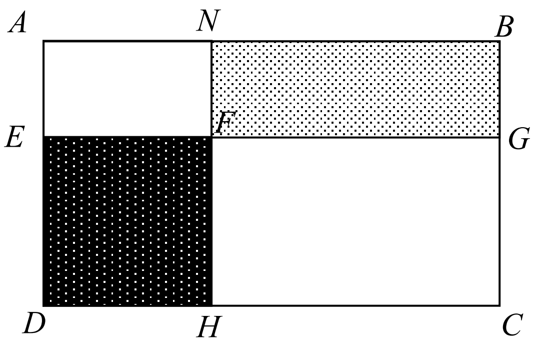
Qui a raison ? Quels sont les arguments les plus convaincants ?

Fiche 14 - Comparer des aires

1) L'aire du triangle *TAC* vaut la moitié de celle du rectangle *UCAB*. Que penses-tu de cette affirmation ? Explique.



2) Dans la figure ci-dessous, *ABCD* est un rectangle et le point *F* appartient à la diagonale [*AC*].
Compare les aires des rectangles *EFHD* et *NBGF*. Justifie ton choix.

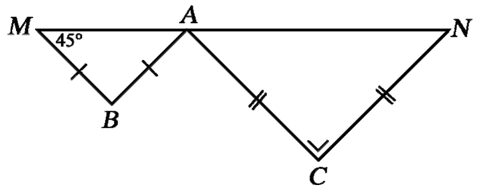


Fiche 15 - Autour de l'argumentation…

1) Dans la figure ci-dessous, les points *M*, *A* et *N* sont alignés.

   Steve prétend que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

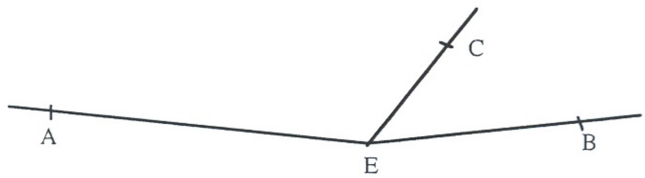
   Qu'en penses-tu ? Justifie ta réponse.



2) Reproduis le dessin suivant. L'angle $\widehat{AEC}$ mesure 122° et l'angle $\widehat{CEB}$ mesure 58°.

   Trace la bissectrice [*EX* de l'angle $\widehat{AEC}$ et la bissectrice [*EY* de l'angle $\widehat{CEB}$.

   Quelle est l'amplitude de l'angle $\widehat{XEY}$? Justifie ta réponse.



   Reproduis la construction en modifiant les amplitudes des angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CEB}$:

   - l'angle $\widehat{AEC}$ mesure 27° et l'angle $\widehat{CEB}$ mesure 153° ;
   - l'angle $\widehat{\mathrm{AEC}}$ mesure 98° et l'angle $\widehat{\mathrm{CEB}}$ mesure 82°.

   Que constates-tu ?

   Comment choisir l'amplitude des angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CEB}$ pour aboutir au même constat ?

3) Combien peut-on construire de triangles isocèles dont l'un des côtés mesure 6 cm et dont le périmètre est égal à 32 cm ?

   Justifie ta réponse en l'argumentant par une propriété.

II. PISTES DIDACTIQUES POUR LE 1er DEGRÉ DIFFÉRENCIÉ

En 2^{e} professionnelle, l'analyse des réponses fournies aux différentes questions par les élèves a abouti aux grands constats suivants :

- les questions relevant du domaine des grandeurs sont les moins bien réussies (46%). Singulièrement, l'identification et l'utilisation de **démarches pour calculer des aires, des périmètres et des volumes** posent des problèmes importants ;
- dans le domaine des nombres, ce sont les acquis de base menant à la connaissance et la **compréhension du principe de la numération décimale** de position qui font le plus défaut ;
- dans le domaine des solides et des figures, les résultats aux questions qui impliquent le **tracé de figures** simples sont alarmants.

Dans ces pistes, nous proposons d'explorer plus finement deux aspects qui font véritablement défaut à un nombre important d'élèves : d'une part la numération et d'autre part, les notions d'aires et de périmètres. Le tracé de figures, s'il n'est pas exploré en tant que tel, sera sollicité dans les activités centrées sur les aires et périmètres. Ce sera donc l'occasion pour les élèves d'aborder, dans ce contexte, la manipulation des instruments de mesurage.

1. La numération

« Dire, lire, écrire des nombres » ou « *Classer (situer, ordonner, comparer) des nombres naturels et des décimaux »* sont des compétences que trop peu d'élèves maitrisent réellement. Avec certains d'entre eux, un travail approfondi visant la compréhension du système de numération de position semble constituer un préalable indispensable au développement de compétences plus complexes.

1.1. Travail sur les naturels

« Au moment où ils vont devoir prolonger les nombres entiers à l'aide des nombres décimaux, il est particulièrement important de donner les moyens à ceux qui n'ont pu encore le faire de bien comprendre les principes de cette numération ».[5]

[5] ERMEL. *Apprentissages numériques,* (5 vol.). Hatier. Paris (1991)

Les constats issus de l'épreuve

Question 1

ECRIS ces nombres uniquement en chiffres.

douze mille trois cent quatre unités cinquante et un centièmes		1
cent quatre mille trente unités		2
douze unités douze millièmes		3

Taux de réussite moyen : item 1 : 42%
item 2 : 53%
item 3 : 46%

Une analyse des réponses à la première question de l'épreuve montre que, dans la plupart des cas, les chiffres nécessaires à l'écriture correcte du nombre sont présents mais les élèves commettent des erreurs de rang, ils n'utilisent pas le zéro ou l'utilisent à mauvais escient. Dans d'autres cas, moins nombreux, les chiffres utilisés pour écrire les nombres sont incorrects ce qui pourrait être le signe de difficultés au niveau de la lecture des nombres.

Il peut donc s'avérer utile de vérifier dans quelle mesure c'est la lecture qui pose problème à certains élèves. Cette vérification peut être réalisée en comparant les réponses des élèves qui écrivent en chiffres des nombres lus par eux et d'autres dictés à voix haute par l'enseignant. Attention toutefois dans ce dernier cas, une difficulté supplémentaire peut apparaitre s'il s'agit de grands nombres que les élèves devraient idéalement mémoriser complètement avant de se lancer dans l'écriture.

Faire exprimer à voix haute des nombres naturels et décimaux écrits en chiffres et inviter systématiquement l'élève à formuler correctement les nombres contribuent à renforcer sa maitrise du système de numération : 104,21 doit être exprimé par *cent-quatre unités vingt-et-un centièmes* et non par *cent-quatre virgule vingt-et-un.*

Au-delà d'éventuelles difficultés de lecture, c'est toute la compréhension du système de numération de position qui est en cause. Les décimaux posent problème (absence de virgule, *cinquante et un centièmes* écrit *51* suivi de *100…*) mais les naturels également. La réponse erronée la plus fréquente à l'item 2 est *104 30* et d'autres réponses incorrectes telles que 104,30 – 104 000 30 – 1430 … indiquent qu'un travail de fond doit être entrepris avec certains élèves.

Sur la base de ce constat, nous proposons une série d'activités sur les systèmes de numération égyptienne, romaine et décimale, issues du document du CREM, *Pour une culture mathématique accessible à tous* (2004) et qui vise la compréhension de notre système de numération décimale de position par la découverte et la comparaison des principes propres à d'autres systèmes de numération.

Comprendre notre système de numération de position par la comparaison avec d'autres systèmes de numération

L'objectif n'est pas de faire apprendre d'autres types de numérations écrites, ni de faire calculer les enfants dans ces systèmes de numération - cela n'aurait aucun sens de systématiser des pratiques qui ne leur sont pas utiles -, mais bien de les amener à découvrir les caractéristiques de notre système et à comprendre les raisons pour lesquelles il a été adopté de manière quasi universelle.

<u>De quoi s'agit-il ?</u>
Traduire des nombres des écritures égyptienne et romaine dans notre système de numération.
Traduire des nombres écrits dans notre numération vers ces systèmes.
Découvrir des principes propres à chaque numération.
Compléter un tableau récapitulatif reprenant les principes des différents systèmes de numération rencontrés ainsi que du nôtre.

<u>Enjeux</u>
Mettre en évidence les caractéristiques de notre système de numération.
Approfondir la distinction entre nombre et chiffre.
Découvrir les avantages d'une numération positionnelle de base décimale.

<u>Compétences</u>
Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe.

En sous-groupes, les élèves examinent les reproductions de documents égyptiens et romains et tentent de découvrir la signification des symboles. Le fait de faire travailler les élèves en groupes plutôt qu'individuellement présente l'avantage de les amener à exprimer oralement la valeur des symboles, les nombres lus ou à découvrir.

Quand les élèves se sont mis d'accord sur la signification des symboles, ils complètent le tableau récapitulatif.

Une fois le travail sur les numérations égyptienne et romaine terminé, il convient de passer à la recherche des caractéristiques des différentes numérations. Cette phase est importante parce que c'est à ce moment que les élèves vont pouvoir dégager les caractéristiques de notre propre système de numération.

En s'appuyant sur les découvertes, les questions suivantes doivent trouver réponses.

Combien de symboles différents y a-t-il ?
Quelle est la base utilisée ?
Y a-t-il un zéro ?
La longueur du nombre est-elle en rapport avec sa valeur ?
La position des symboles a-t-elle de l'importance ?
Jusqu'à quel nombre peut-on aller ?

Sur base des documents proposés, les enfants complètent le tableau de synthèse.

Voici ce qui devrait être dégagé dans chacune des numérations.

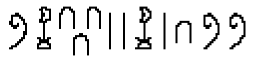
Numération égyptienne

Les Égyptiens utilisent sept symboles qui correspondent chacun à une puissance de 10.
La direction vers laquelle sont tournés les symboles indique le sens de lecture.


sens de lecture

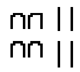

sens de lecture

Ils utilisent une numération décimale.
Ils n'ont pas besoin d'un zéro.
La position des symboles n'a pas d'utilité chez eux - bien qu'ils les disposent souvent dans l'ordre décroissant et de droite à gauche - puisqu'on peut même imaginer un nombre égyptien avec les symboles en désordre sans que cela n’affecte sa transcription, comme dans l'exemple suivant.

 → 2343

L'écriture des nombres est en général assez longue et ne reflète pas la valeur du nombre.
Ainsi, il faut deux symboles pour écrire 1 000 001 et huit symboles pour écrire 44.


1 000 001


44

Les nombres égyptiens ne dépassent pas 9 999 999. En effet, ils utilisent au maximum neuf fois chacun des sept symboles.

Numération romaine

Nous avons utilisé ici la numération romaine d'origine. C'est pourquoi nous avons écrit IIII et non IV, car cette dernière écriture ne date que du XVe siècle.
Dans les exemples envisagés, les Romains utilisent sept symboles représentés par des lettres majuscules.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Dans ce système, la position des symboles n'a aucune importance pour la compréhension des nombres. Elle ne le deviendra que lorsque sera introduite la règle indiquant qu'un symbole placé à gauche d'un autre de valeur supérieure s'en retranche.

Les Romains fonctionnent en base décimale avec la base cinq comme auxiliaire.

Il n'y a pas de zéro dans la numération romaine.

La limite de représentation des nombres romains est de 4 999, car ils utilisent chacun des sept symboles au maximum quatre fois.

L'écriture des nombres est souvent longue et ne correspond pas à la valeur du nombre. Ainsi, 1 001 s'écrit à l'aide de deux symboles, tandis qu'il en faut sept pour écrire 29.

MI
1 001

XXVIIII
29

Fiche 16 - Comprendre notre système de numération de position par la comparaison avec d'autres systèmes de numération

LA NUMÉRATION ÉGYTIENNE

La figure 1 est une reproduction de la partie frontale du soubassement d'une statue égyptienne qui représente un nombre d'ennemis massacrés au cours d'une bataille :
42 209 hommes furent tués.

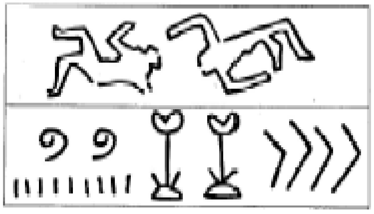


Fig. 1

La figure 2 indique le nombre d'hommes, de chèvres et de bœufs capturés au cours d'une bataille gagnée par le pharaon de Hiérakonpolis, soit : 120 000 hommes, 1 422 000 chèvres et 400 000 bœufs.

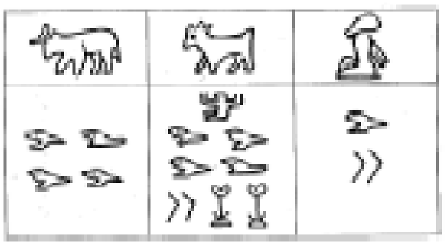


Fig. 2

La figure 3 fait l'inventaire des richesses d'une basse-cour : 121 200 pigeons, 11 110 oies, 121 022 canards et 111 200 grues.

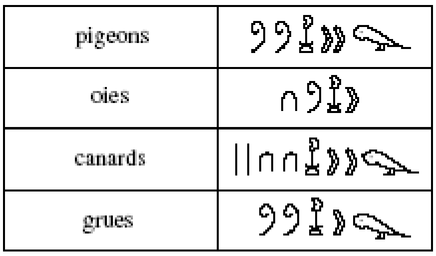
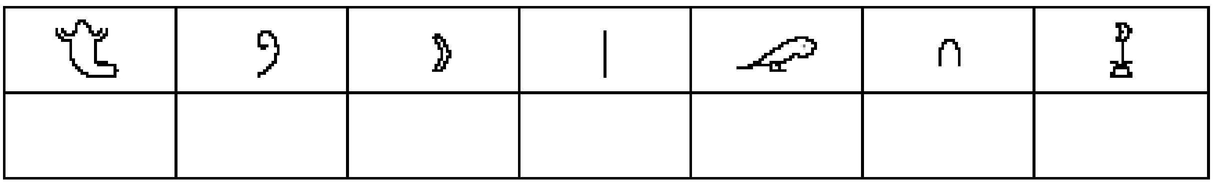


Fig. 3



À l'aide de la description des trois figures, découvre la signification des symboles et complète le tableau récapitulatif.

𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

À partir du tableau ci-dessus, écris les nombres égyptiens suivants dans notre système.

𓏺𓏺𓎆𓎆𓍢		𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓆼𓆼𓆼𓆼𓂭𓂭𓂭𓂭	
𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆		𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓆼𓆼𓂭𓂭𓂭𓂭	
𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺		𓂭𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	
𓏺𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓆼𓆼		𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓍢𓆼𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓆐𓆐	
𓆼𓆼𓆼𓆼𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺		𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓆼𓆼𓆐𓆐𓁨	

Écris les nombres suivants dans le système égyptien.

54		26 214	
387		12 543	
1 376		331 205	
5 555		3 100 000	
8 004		5 000 034	

LA NUMÉRATION ROMAINE

Observe bien les documents qui te sont proposés. Tu as certainement déjà rencontré ce type d'écriture. C'est comme cela que les Romains représentaient leurs nombres. Nous les avons traduits dans notre système de numération.

ligne 4	LI	51
ligne 5	LXXIIII	74
ligne 5	CXXIII	123
ligne 6	CLXXX	180
ligne 7	CCXXXI	231
ligne 7	CCXXXVII	237
ligne 8	CCCXXI	321
ligne 12	DCCCCXVII	917

V	X	C	I	M	L	D

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

À partir du tableau ci-dessus, écris les nombres romains suivants dans notre système.

VII	
XXVI	
XXXVIII	
LXVI	
CLXXVI	
CCXXII	

CCCLII	
CX	
MDCLXVI	
MMMDLVI	
MDCCLXVII	
MLI	

Écris les nombres suivants dans le système romain.

9	
17	
67	
238	
361	
512	

1 340	
2 585	
4 003	
3 326	
2 781	
4 657	

LA RECHERCHE DES CARACTÉRISTIQUES DES DIFFÉRENTES NUMÉRATIONS

	Nombre de symboles	Base employée	Existence d'un zéro	Importance de la position	Longueur des écritures	Nombre le plus grand possible
Numération égyptienne						
Numération romaine						
Notre numération						

1.2. Travail sur les décimaux

Les constats issus de l'épreuve

L'analyse des réponses aux questions 2 et 6, portant sur le classement des nombres décimaux, révèle que lorsque les élèves n'ont à comparer entre eux que deux nombres, les difficultés sont moindres : 68 à 76% de réussite aux items 4 à 7. Notons tout de même que 24% des élèves se sont montrés incapables d'indiquer que 235,6 > 23,56. On constate que les élèves ne tombent pas trop massivement dans le piège classique de considérer séparément ce qui se trouve devant et derrière la virgule et d'affirmer ainsi que 7,20 est plus grand que 7,3. L'item 8 est quant à lui mal réussi (37%) : il semble que la connaissance de la valeur de $\frac{1}{8}$ n'est pas acquise.

Question 2

ECRIS le signe qui convient :

< (est plus petit que) = (est égal à) > (est plus grand que)

0,58		$\frac{6}{10}$	4
$\frac{1}{2}$		0,2	5
7,20		7,3	6
235,6		23,56	7
$\frac{3}{8}$		0,375	8

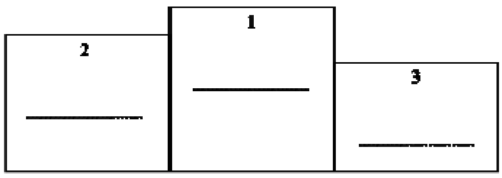
Dans la question 6 (taux de réussite moyen : 35%), des difficultés de différents ordres apparaissent. Pour classer correctement les nombres décimaux, les élèves doivent :

- éviter le piège classique de considérer la virgule comme un séparateur de deux nombres, ce qui pourrait leur faire dire que 16,45 est plus grand que 16,5 ;
- comparer entre eux, pour les classer, plus de deux nombres décimaux ;
- lire et utiliser des données présentées sous forme de tableau ;
- faire preuve d'une compréhension globale de la situation impliquant de tenir compte du fait que le vainqueur au « 100 mètres » est celui qui réalise le temps le plus court, il convient donc d'opérer un classement par ordre croissant.

Lors d'une compétition, voici les temps de quatre élèves au « 100 mètres ».

Prénom	Boris	Elodie	Martin	Leila
Temps (en secondes)	16,03	16, 5	16,45	16,2

Ecris dans le bon ordre le prénom des trois premiers sur le podium.



Ces différents types de difficultés se reflètent dans les réponses des élèves. L'erreur la plus fréquente consiste à établir le classement – Leila (16,**2**) – Boris (16,0**3**) – Elodie (16,**5**). Une autre erreur souvent commise consiste à établir un classement par ordre décroissant, signe d'une mauvaise compréhension de la situation. Une proportion non négligeable d'élèves cumule les deux types de difficultés.

Les résultats contrastés aux questions 2 et 6 soulignent l'importance de varier les situations et le format des questions.

Il peut en outre s'avérer intéressant de proposer des situations proches, de difficulté équivalente mais où les élèves ont à opérer des classements par ordre tantôt croissant, tantôt décroissant afin de vérifier dans quelle mesure ils sont capables de décoder les éléments de la situation ; comme dans l'exemple ci-dessous.

Complète le tableau de classement de ces 3 athlètes au saut en longueur.

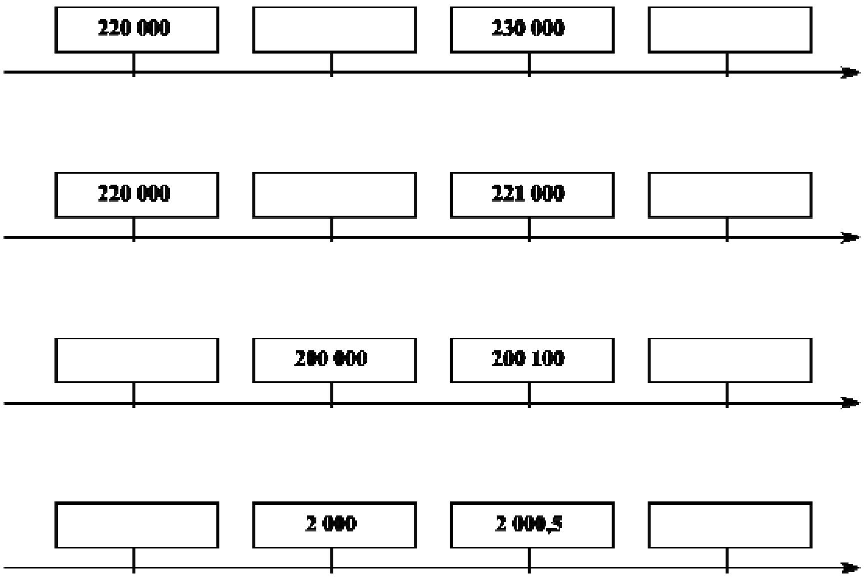
Nom	**Longueur du saut en mètres**
Malika	**6,49**
Igor	**6,5**
Simon	**6,09**

	CLASSEMENT
	Nom
Premier	
Deuxième	
Troisième	

En examinant les réponses erronées à la question 4, on constate que beaucoup d'élèves ne voient pas qu'il s'agit d'une droite graduée et qu'ils n'identifient pas l'unité du repère.

Question 4

COMPLETE ces **quatre** droites graduées.



Taux de réussite et réponses erronées courantes

69% *220 500*	**67%** *230 500*
50% *220 999*	**49%** *222 000*
35% *199999 ou 190 000*	**78%**
35% *1999 ou 1000,5*	**35%** *2000,1 ou 3000*

Selon Coquin et Camos[6], un obstacle important dans l'acquisition des décimaux est qu'ils sont souvent considérés comme des mesures, c'est-à-dire qu'ils ont le statut de deux entiers naturels séparés par une virgule. Cette conception renvoie aux décimaux de la vie sociale et provoque des erreurs caractéristiques puisque 3,46 mètres = 3 mètres et 46 centimètres ou que 7,50 euros = 7 euros 50 centimes. Cette conception permet encore d'écrire que 2,750 kg = 2750 g mais ceci n'est vrai que si le nombre reste étroitement lié à l'unité de mesure. Le danger est qu'elle permet également de penser que 2,65 est plus petit que 2,493 puisque 65 est plus petit que 493. C'est encore cette conception du nombre comme mesure qui laisse penser aux élèves qu'il n'y a pas de nombre entre 16,40 et 16,41 puisqu'entre 40 et 41 centimes il n'y a rien. Les auteurs proposent alors « d'introduire les décimaux comme de nouveaux nombres qui présentent leur propre relation d'ordre telle qu'entre deux décimaux il est toujours possible d'en intercaler un troisième… ».

Sur la base de ces constats, nous proposons différentes activités au départ de droites graduées, de segments de droites qui présentent des graduations différentes, d'encadrements, de reconstitution de droites graduées. Certaines de ces situations ont été pensées en progression, d'autres plongent d'emblée les élèves en situations plus complexes. Cette variété vous permettra, nous l'espérons, de trouver quelques idées qui pourront s'adapter au mieux aux réels besoins de vos élèves…

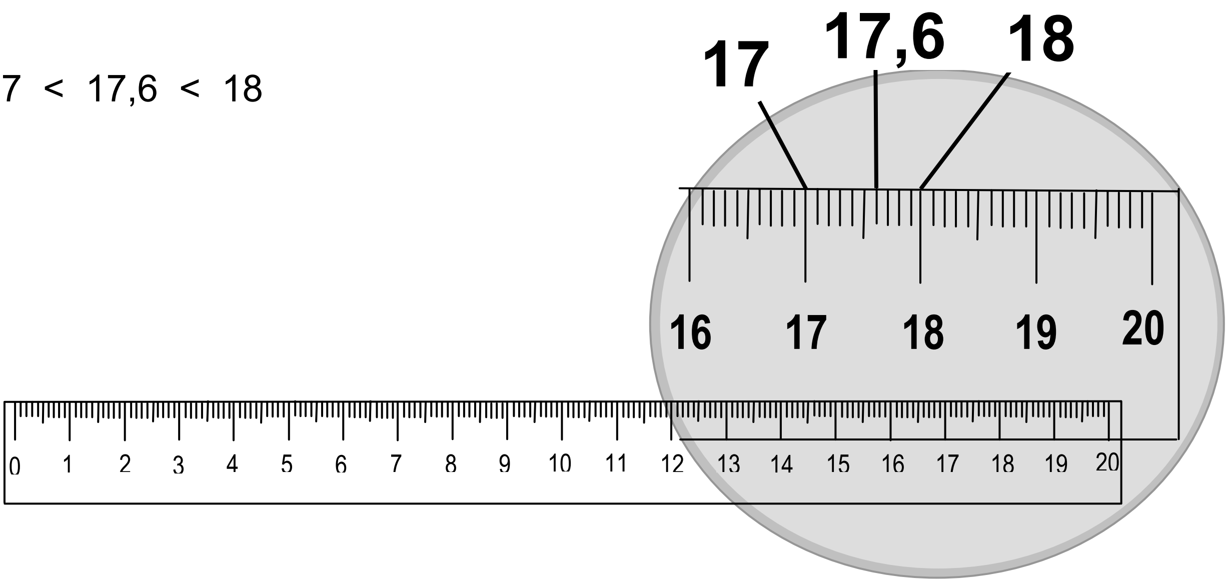
[6] Coquin, D. & Camos, V., Décimaux et fractions. *La cognition mathématique chez l'enfant.* Marseille. Solal Editeurs (2006).

Fiche 17 - Encadrer un nombre

Encadrer un nombre, c'est trouver une valeur inférieure (plus petite) et une valeur supérieure (plus grande) à ce nombre.

Avec une règle graduée, on encadre 17,6 par deux nombres naturels consécutifs.

17 < 17,6 < 18



Situe sur ta règle graduée puis encadre de la même façon.

…… < 7,1 < ……

…… < 11,7 < ……

…… < 15,4 < ……

Écris un nombre situé entre les deux nombres donnés.

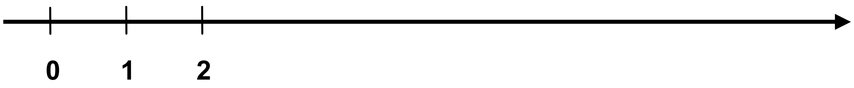
9 < …….. < 10

12 < …….. < 13

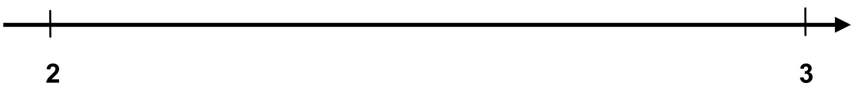
18 < …….. < 19

Fiche 18 - Situer avec précision un nombre sur une droite graduée

Tu dois situer avec précision le nombre **2,46** sur la droite graduée. Le nombre 2,46 se trouve entre les nombres 2 et 3. Situe le nombre 3.



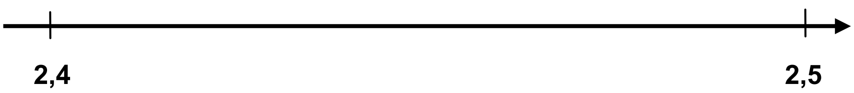
Imagine que tu regardes la portion de la droite comprise entre les nombres 2 et 3 avec une loupe qui agrandit 10 fois. Tu obtiens alors ce dessin.



Divise ce segment en 10 parties égales et note les nombres sous les points obtenus (2,1 ; 2,2 ; etc.)

Le nombre **2,46** se trouve entre les nombres **2,4** et ....

Imagine que tu regardes la portion de la droite comprise entre les nombres 2,4 et 2,5 avec une loupe qui agrandit 10 fois. Tu obtiens alors ce dessin.



Divise ce segment en 10 parties égales et note les nombres sous les points obtenus (2,41 ; 2,42 ; etc.)

Tu as donc pu situer avec précision le nombre **2,46** sur la droite graduée. Écris-le en rouge.

Encadre par deux nombres décimaux consécutifs.

…… < 2,64 < ……

…… < 2,46 < ……

…… < 2,21 < ……

Écris un nombre situé entre les deux nombres donnés.

2 < …….. < 2,4

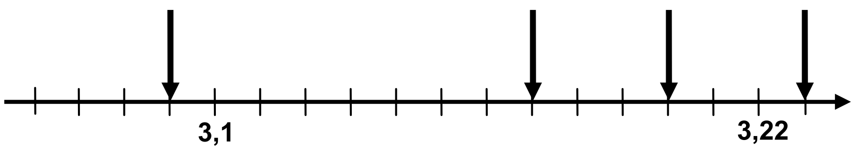
2,41 < …….. < 2,5

2,6 < …….. < 3

À toi de jouer !

Situe avec précision les nombres suivants : 8,3 et 2,7.

Quels sont les nombres situés aux emplacements désignés par une flèche ?



Reconstituer des droites graduées[7]

Les élèves doivent reconstituer des droites graduées à l'aide de segments de même échelle mais qui présentent des graduations différentes.

La première droite à reconstituer fait intervenir les nombres naturels.

Pour reconstituer la deuxième droite graduée, les élèves doivent situer et ordonner des nombres décimaux.

Après avoir découpé les segments de la première droite graduée, les élèves doivent trouver les « raccords » adéquats pour la reconstituer de 100 à 1100. Pour ce faire, ils peuvent procéder par recouvrement de certaines parties ou par découpage et élimination des segments superflus. Ils peuvent aussi ajouter des graduations (en vue d'harmoniser les graduations des différents segments) avant de procéder aux raccords.

Une fois la droite reconstituée, on peut suggérer aux élèves de la graduer toutes les 10 unités (s'ils ne l'ont pas fait spontanément) ou leur demander de situer quelques nombres non encore indiqués sur la droite.

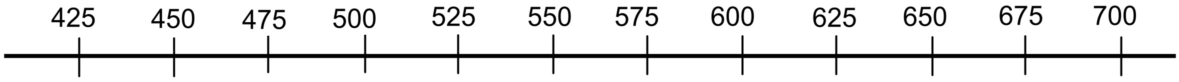
Les élèves procèdent de la même façon pour reconstituer la deuxième droite graduée de 0 à 7,5.

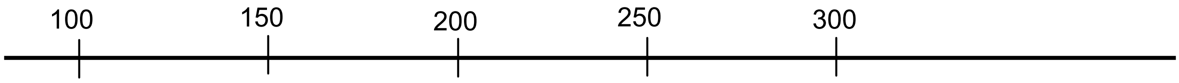
Prolongement

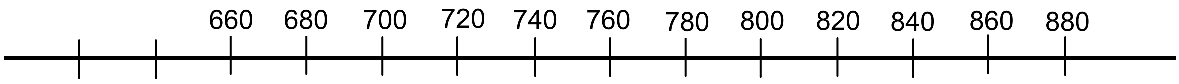
Si les élèves ont bien maitrisé cette activité, on peut les inviter à construire eux-mêmes quatre ou cinq segments de droite graduée de même échelle et présentant des graduations différentes qu'ils s'échangeront, après vérification de l'enseignant, pour la reconstitution.

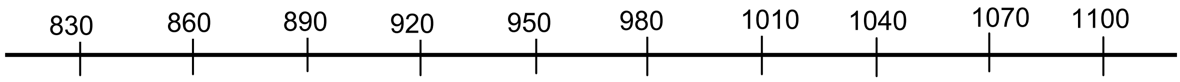
[7] Cette activité est inspirée du document *Des jeux, des activités… Outils pour construire les nombres* élaboré conjointement par le Conseil de l'enseignement des communes et des provinces et l'Université de Liège, Service de pédagogie expérimentale et Service de didactique générale (1997).

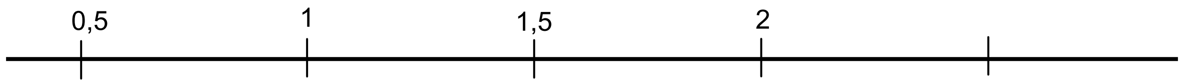
Fiche 19 - Reconstituer des droites graduées

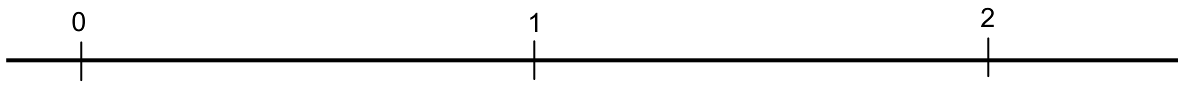


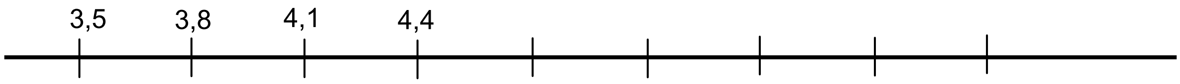


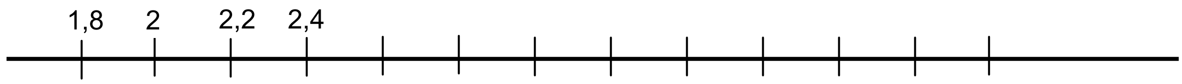


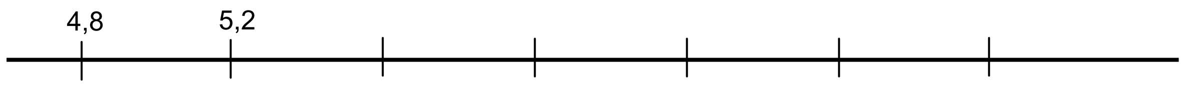


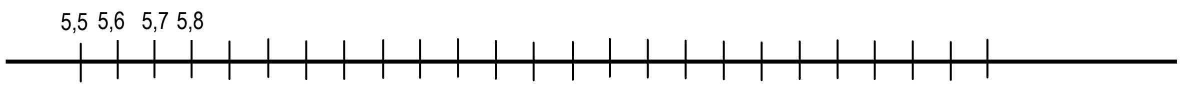












Situer des nombres décimaux dans un intervalle[8]

Pour chaque nombre décimal proposé, les élèves doivent estimer s'il est possible de les situer sur différents segments de droite présentés et noter leurs réponses en complétant le tableau à double entrée.

Le premier exercice fait intervenir des nombres décimaux limités aux centièmes. Dans le second, on introduit des décimaux limités aux millièmes.

Dans une première phase, les élèves travaillent individuellement. Lors de la mise en commun, il convient de faire émerger quelques constats de l'analyse des tableaux de réponses.

À titre d'exemples à propos du premier exercice, les questions suivantes peuvent amorcer la réflexion :

- Pourquoi n'y a-t-il aucun nombre situé à la fois sur les segments C et D ?
- Faire constater que tous les nombres situés sur le segment B sont compris également dans le segment A. Pourquoi ?
- Trouver des nombres qui ne peuvent être situés que sur le segment D, à l'exclusion de tout autre, etc.

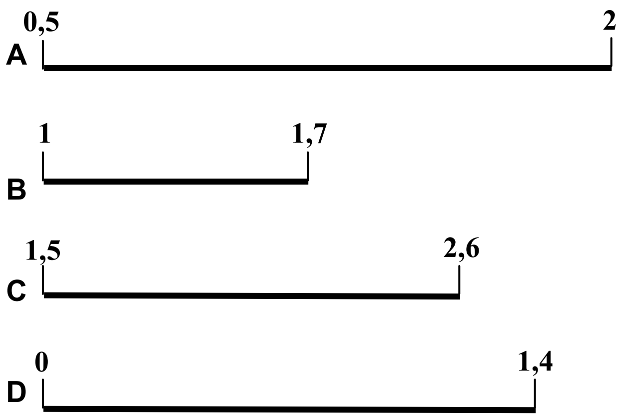
Si les élèves ne trouvent pas la réponse à ces questions, il est intéressant de leur faire découper les quatre segments et de les inviter à procéder au recouvrement des différents segments (quand c'est possible).

Parce que toutes les occasions de faire tracer précisément à l'aide des instruments doivent être saisies, on peut démarrer l'exercice en faisant tracer aux élèves les segments de droite sur la base des consignes données oralement par l'enseignant. Par la même occasion, on vérifiera la capacité des élèves à comprendre et à exécuter des consignes. On ne leur fournira ensuite que les tableaux à compléter. Dans ce cas, il convient que l'enseignant vérifie l'exactitude des tracés des élèves avant de poursuivre l'exercice.

[8] Cette activité est inspirée du document *Des jeux, des activités… Outils pour construire les nombres* élaboré conjointement par le Conseil de l'enseignement des communes et des provinces et l'Université de Liège, Service de pédagogie expérimentale et Service de didactique générale (1997).

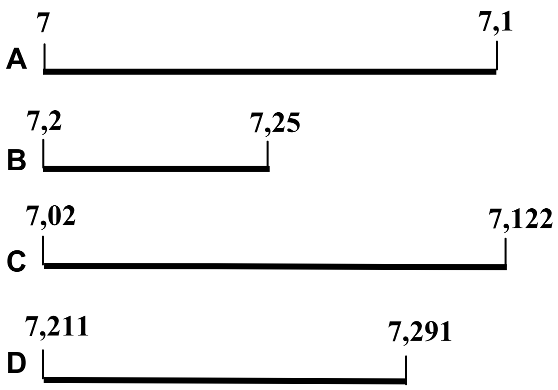
Fiche 20 - Situer des nombres décimaux dans un intervalle

Dans quel(s) segment(s) de droite peux-tu situer ces nombres ? Fais une croix dans le tableau chaque fois que c'est possible.



	A	B	C	D
0,4				
1,62				
1,25				
0,8				
1,46				
2,01				
1				
2,66				

Dans quel(s) segment(s) de droite peux-tu situer ces nombres ? Fais une croix dans le tableau chaque fois que c'est possible.



	A	B	C	D
7,1				
7.12				
7,102				
7,022				
7,202				
7,222				
7,05				
7,216				

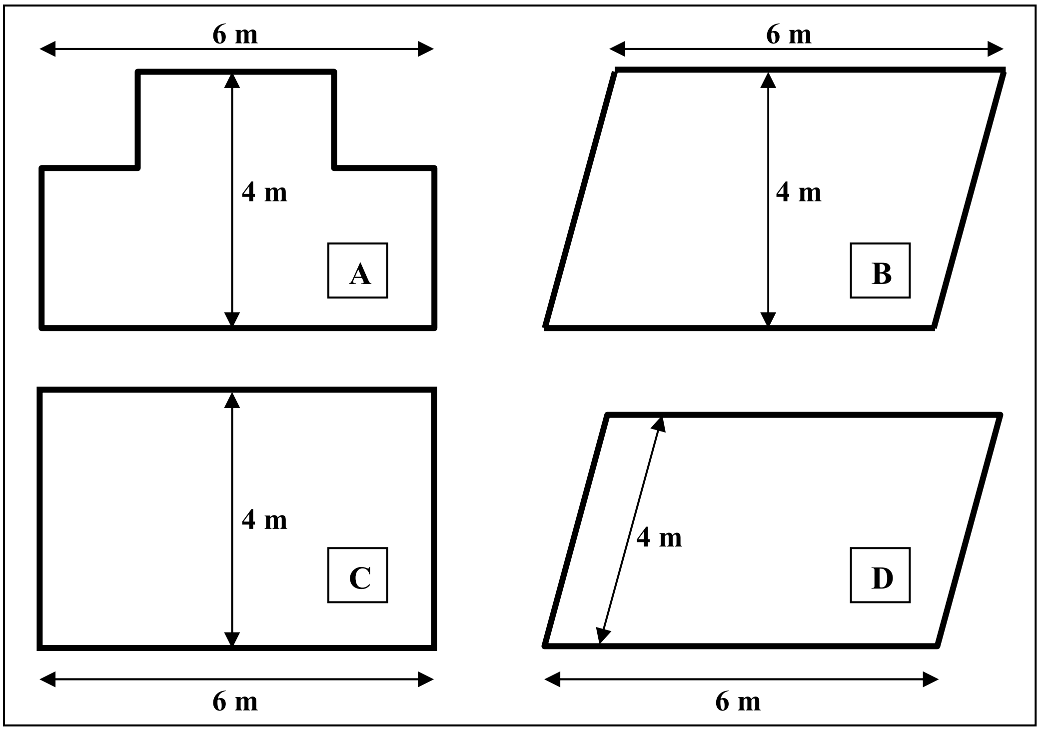
2. Aires et périmètres

L'aire et le périmètre représentent des contenus mathématiques enseignés dès la troisième année de l'enseignement primaire. Les notions qui gravitent autour de ces thèmes sont fondamentales, à la fois dans la vie quotidienne, et dans de nombreux métiers que les élèves seront amenés à exercer.

Or, les résultats à l'épreuve indiquent que la confusion entre les notions d'aire et de périmètre est fréquente. En outre, un simple calcul d'aire ou de périmètre représente déjà un obstacle pour certains. Dans ces domaines, il est essentiel de permettre aux élèves de dépasser l'application strictement mécanique de formules et de les amener à construire eux-mêmes et à utiliser des démarches significatives à portée de plus en plus générale.

2.1. Les constats issus de l'épreuve

Dans le domaine des grandeurs, de très nombreux élèves ont buté sur les questions qui mettaient en jeu la compétence *Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires, des périmètres et des volumes.*



Question 17

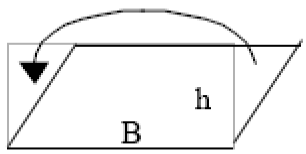
OBSERVE ces quatre figures.

COMPLÈTE ces phrases. Taux de réussite

La figure **C** a un **périmètre** de ...... m.	34%
La figure **A** a un **périmètre** de ...... m.	17%
La figure **C** a la **même aire** que la figure	22%
La figure ...... **a une aire plus PETITE** que la figure **B**.	64%

Calculer le périmètre d’un rectangle dont la longueur et la largeur sont fournies de façon explicite est à la portée de 34% des élèves seulement. Dès lors, le très faible taux de réussite au deuxième item (périmètre de la figure A), qui impliquait une analyse préalable de la figure n’est guère surprenant.

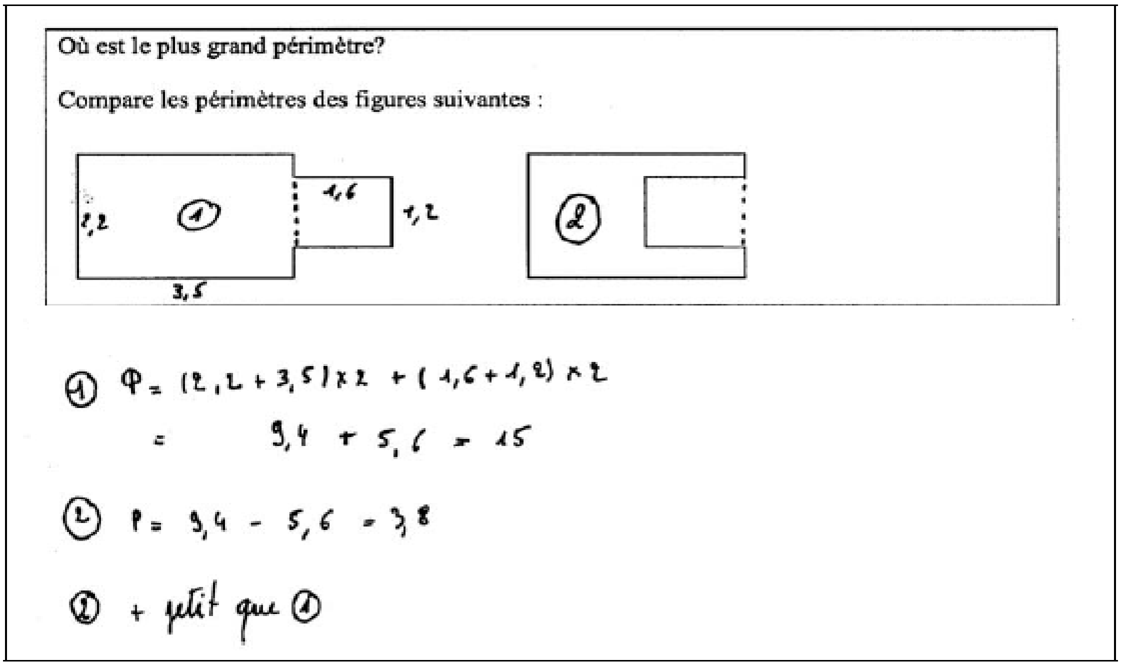
Dans le cas de la figure B, la grande majorité des élèves n’ont pas pu appliquer l’un des deux raisonnements suivants : application directe de la formule (base x hauteur) sans tomber dans le piège posé par la figure D ou décomposition-recomposition mentale qui permet de conclure à l’équivalence des aires du rectangle C et du parallélogramme B.



Sur la base de ces constats, nous proposons un travail visant en premier lieu la **dissociation des concepts d’aire et de périmètre**. Les démarches faisant appel aux **mesures** viendront dans un second temps. Enfin, si les **formules** ne sont pas à rejeter, encore faut-il que celles-ci soient significatives, c’est-à-dire qu’elles soient tirées de démarches qui les précèdent et dont elles sont l’expression en termes synthétiques. Les activités amenant les élèves à analyser, à comparer, à transformer des figures devraient les aider à construire des démarches de calcul plutôt qu’à appliquer (pas toujours à bon escient) des formules (parfois) apprises.

2.2. Dissociation des concepts d’aire et de périmètre

Une difficulté souvent constatée consiste à se laisser piéger par son intuition immédiate sur certaines figures. Face aux deux figures ci-dessous[9], la plupart des élèves considèrent que celle de gauche a un périmètre supérieur à celle de droite.



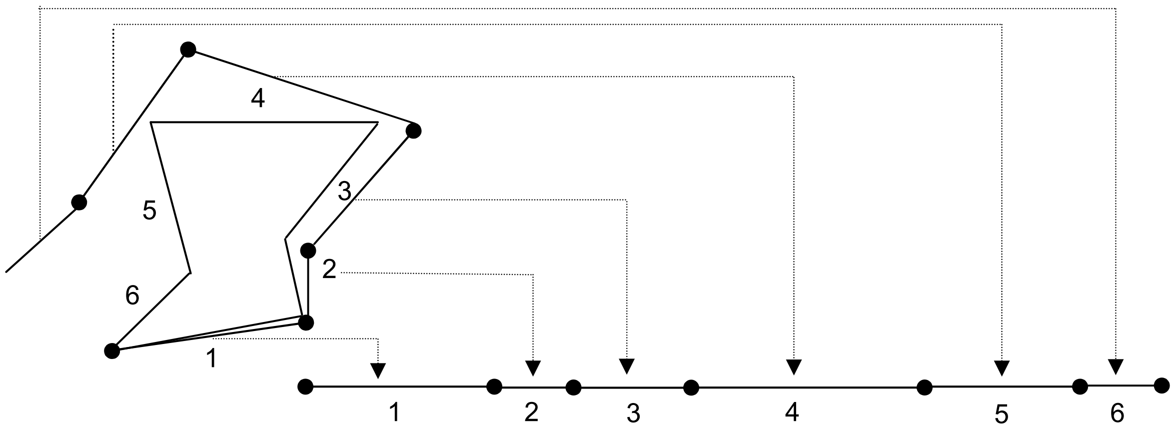
La figure 1 est perçue comme un grand rectangle augmenté d’un petit rectangle alors que la figure 2 est perçue comme un grand rectangle amputé d’un petit. Ceci est exact en termes de décomposition et recomposition. Appliqué à l’aire, ce raisonnement est correct. Mais cette

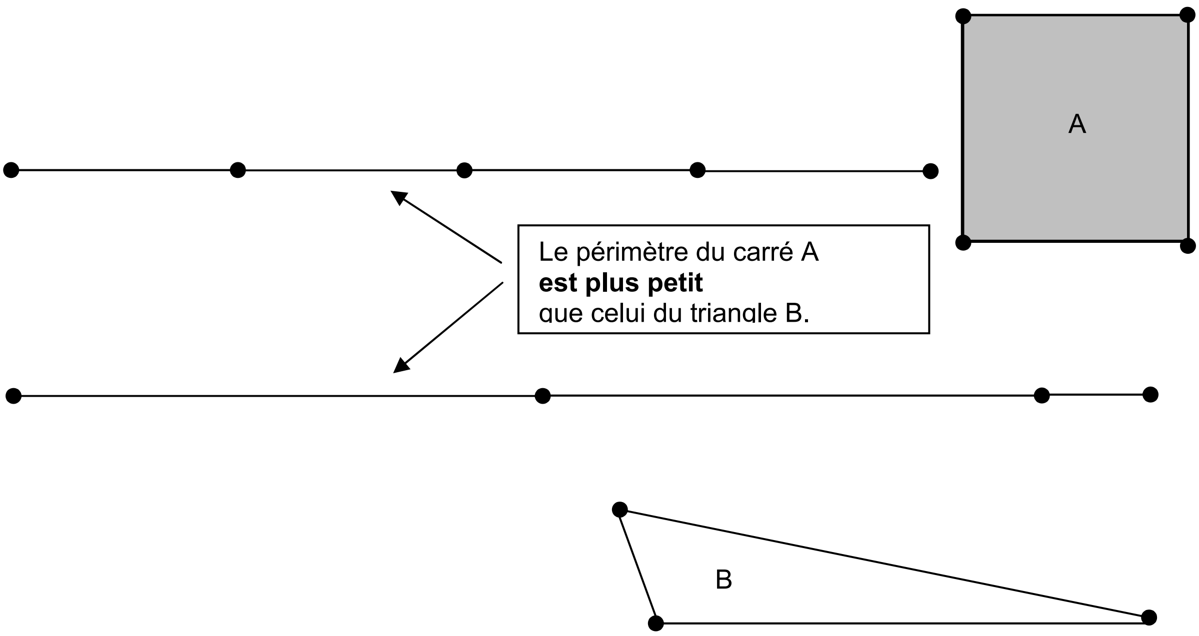
9 Production d’un élève de 3e professionnelle.

« logique » conduit certains élèves à proposer comme calcul du périmètre de la figure 1 une opération du type : périmètre du grand rectangle + périmètre du petit rectangle. Et pour la figure 2 : périmètre du grand rectangle – périmètre du petit rectangle.
Il importe avant tout que les élèves conçoivent clairement le périmètre d'une figure (son contour) comme la somme de tous ses côtés. Ce bref rappel pourra être plus efficace s'il s'applique dans un premier temps à des figures irrégulières, pour lesquelles le recours direct à une formule est impossible. Ce n'est qu'ensuite qu'on amènera les élèves à passer d'une démarche additive à une démarche multiplicative (économique et rationnelle) dans le cas des figures régulières.

La ficelle demeure un outil privilégié pour faire prendre conscience de la notion de périmètre-contour.

Le principe du déroulement

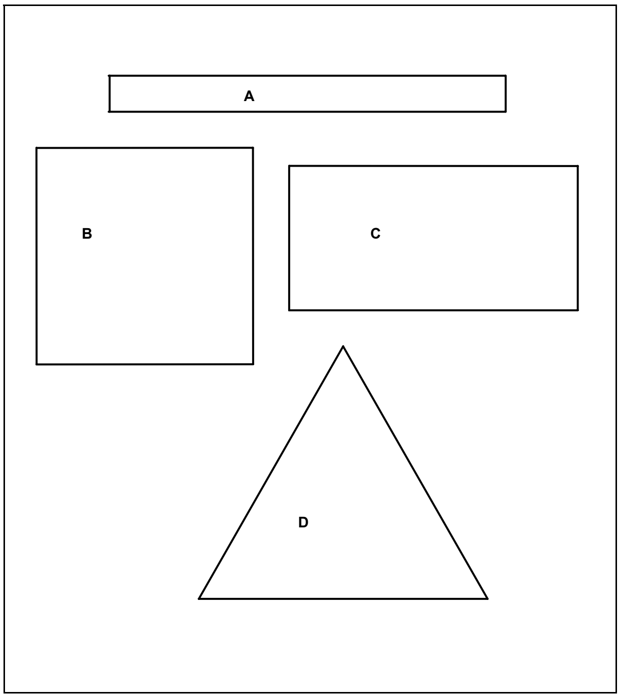




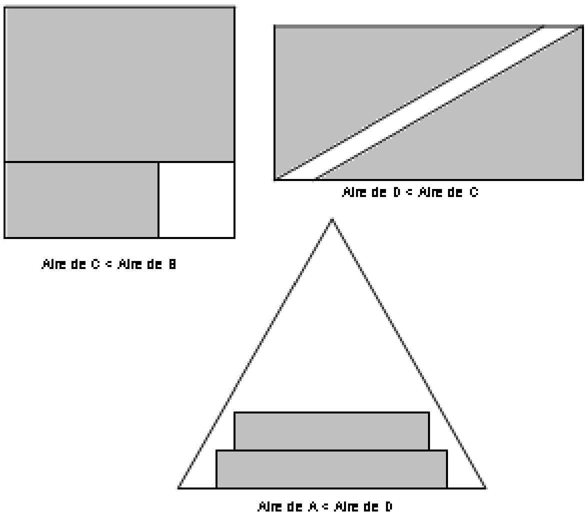
Travail à périmètre constant[10]

Dans un premier temps, les élèves comparent le périmètre des figures pour aboutir au constat que les quatre figures proposées ont le même périmètre.

Dans un second temps, les élèves ont à comparer deux à deux les figures A, B, C et D selon leur aire. Pour ce faire, ils procèdent par découpage et recouvrement ou par dessin. Dans cette activité, la démarche qui consiste à calculer directement l'aire des figures en ayant recours aux formules est à déconseiller dans la mesure où on veut pousser les élèves à analyser les figures, à les transformer, à les comparer deux à deux de façon à ce que, progressivement, ils soient en mesure d'effectuer ce travail d'analyse et de transformation face à des figures moins habituelles.



Exemples de découpages-recouvrements



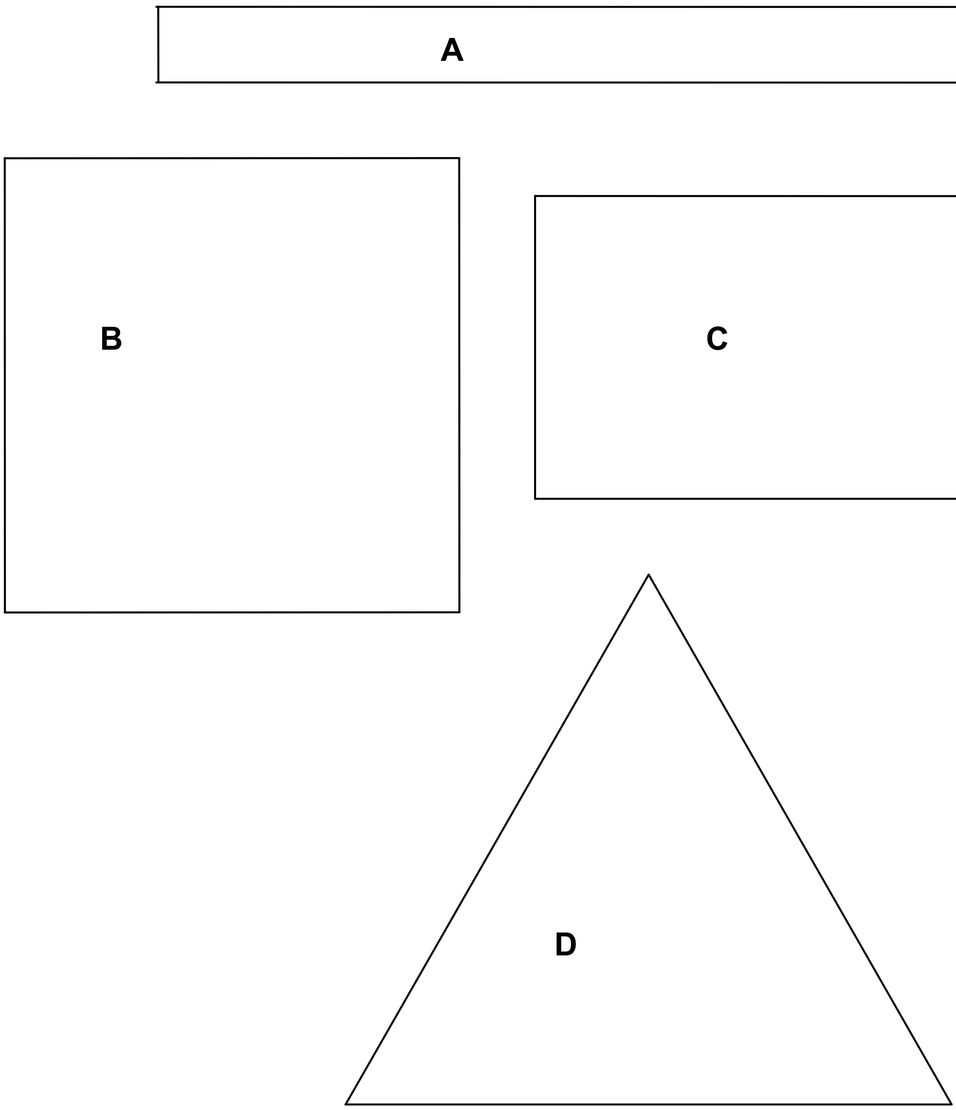
Enfin, les élèves classeront les figures de la plus petite à la plus grande d'après leur aire.

[10] L'activité qui suit est inspirée des travaux menés par le groupe national français de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais. Un dossier « Aire et périmètre » est disponible sur le site : www.eduscol.education.fr (titre « Sommaire », rubrique « Collège », sous-rubrique « Dispositifs relais »)

Fiche 21 - Comparer des figures

Mesure (avec de la ficelle ou avec ta règle graduée) le **périmètre** des figures A, B, C et D. Indique ce que tu as observé.

………



Compare deux à deux les figures A, B, C et D selon leur **aire**. Utilise les signes **<** , **>** .

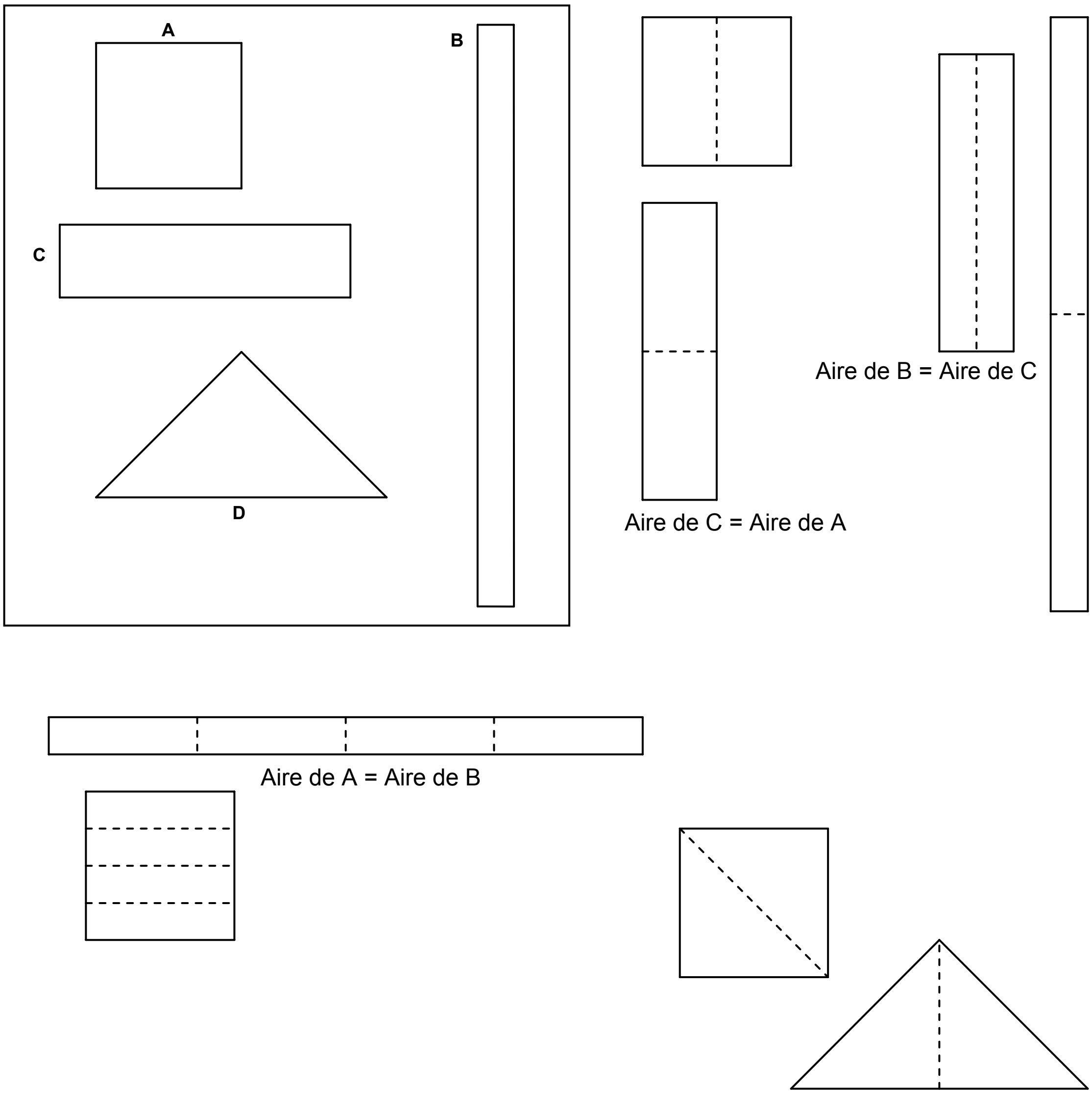
Aire de A …… Aire de B	Aire de A …… Aire de C	Aire de A …… Aire de D
Aire de B …… Aire de C	Aire de B …… Aire de D	
Aire de C …… Aire de D		

Classe, d'après leur **aire**, ces figures de la plus petite à la plus grande.

Aire de ……… < Aire de ……… < Aire de ……… < Aire de ………

Travail à aire constante[11]

Dans cette activité, complémentaire de la précédente, les élèves comparent les figures A, B, C et D selon leur aire. Ils procèdent par découpage et recouvrement ou par dessin. Ils doivent constater que les quatre figures ont la même aire.

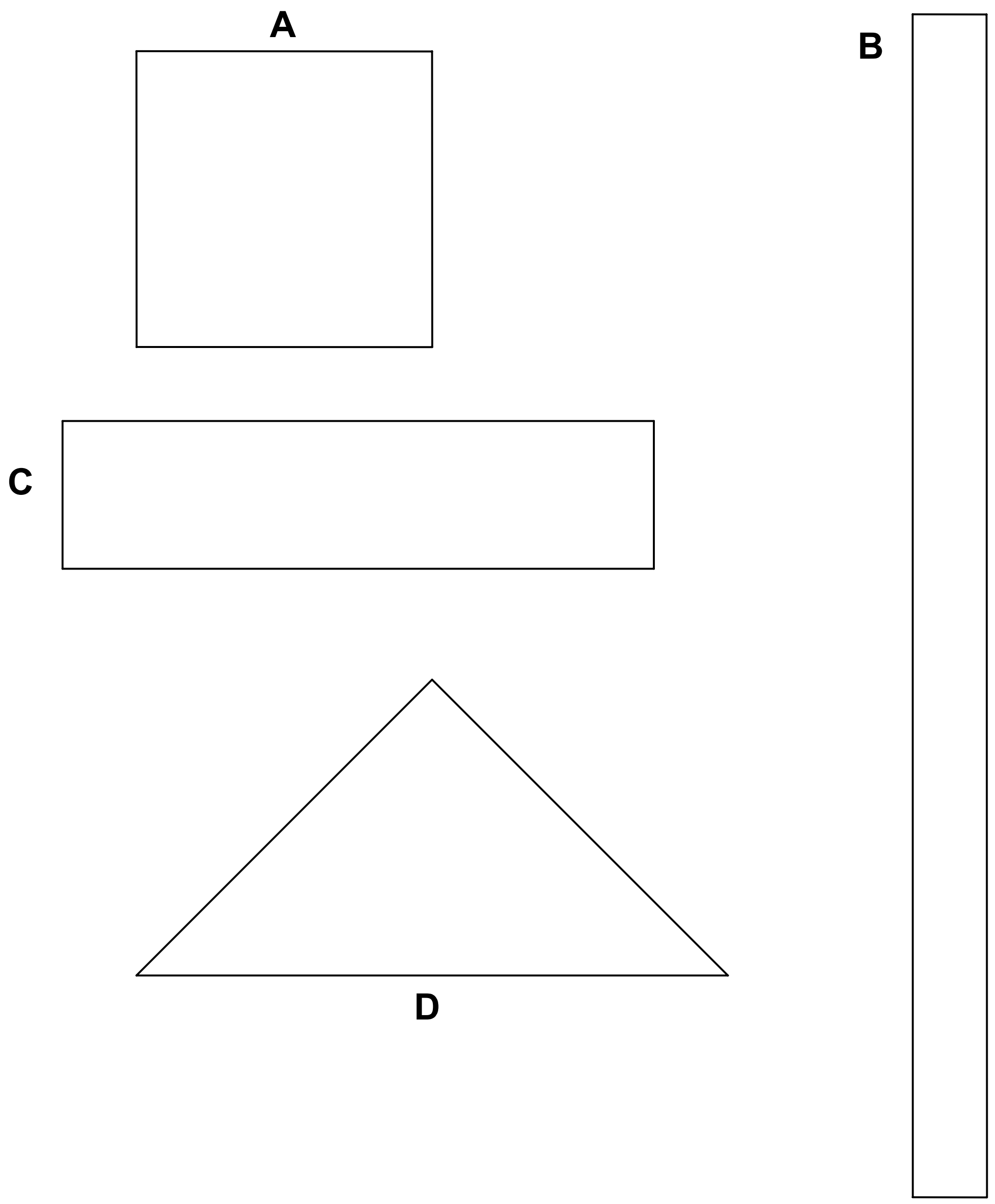


Ils comparent alors les figures deux à deux selon leur périmètre, mesuré à la ficelle ou à l'aide de la règle graduée. Ils opèrent ensuite le classement des figures de la plus petite à la plus grande selon leur périmètre.

[11] L'activité qui suit est inspirée des travaux menés par le groupe national français de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais. Un dossier « Aire et périmètre » est disponible sur le site : www.eduscol.education.fr (titre « Sommaire », rubrique « Collège », sous-rubrique « Dispositifs relais »)

Fiche 22 - Comparer des figures

Compare les figures A, B, C et D selon leur **aire**. Procède par découpage ou par dessin.
Indique ce que tu as observé.
………



Compare deux à deux les figures A, B, C et D selon leur **périmètre**. Utilise les signes **<** , **>** .

Périmètre de A …. Périmètre de B	Périmètre de A …. Périmètre de C	Périmètre de A …. Périmètre de D
Périmètre de B …. Périmètre de C	Périmètre de B …. Périmètre de D	
Périmètre de C …. Périmètre de D		

Classe, d’après leur **périmètre**, ces figures de la plus petite à la plus grande.

Périmètre de ……… < Périmètre de ……… < Périmètre de ……… < Périmètre de ………

Variation du périmètre et de l'aire[12]

Il s'agit ici de faire préciser les variations du périmètre et de l'aire quand on passe de la figure de départ à la figure d'arrivée (voir fiche élève). L'idée est que les élèves aboutissent au constat qu'une augmentation du périmètre n'est pas nécessairement liée à une augmentation de l'aire et inversement.

Il peut être utile de réaliser la première, voire les deux premières analyses avec les élèves en procédant comme suit :

- Qu'est-ce qui a changé quand on passe de la figure de départ à la nouvelle figure ?
- Comment varie le périmètre ? Est-ce qu'il augmente (↗) ? Est-ce qu'il diminue (↘) ? Est-ce qu'il est équivalent (=) ?
- Comment varie l'aire ? Est-ce qu'elle augmente (↗) ? Est-ce qu'elle diminue (↘) ? Est-ce qu'elle est équivalente (=) ?

On notera, dans les trois premiers cas, la présence d'une indication pour aider les élèves à repérer plus facilement la transformation.

Prolongement

Les activités qui précèdent peuvent être prolongées en proposant aux élèves une question plus générale visant notamment à globaliser les constats.

> Lucien affirme que si deux figures ont la même aire et le même périmètre, on peut toujours les superposer. Anna n'est pas d'accord.
>
> Qui a raison ? Explique ta réponse.

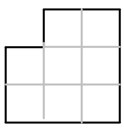
Dans un premier temps, il convient de laisser les élèves réfléchir de façon autonome. On les encouragera éventuellement à travailler sur du papier quadrillé.

Si un ou plusieurs élèves découvrent la réponse accompagnée d'une explication pertinente, on les invitera à exposer leur démarche pour en discuter collectivement.

Si ce n'est pas le cas, on peut fournir des indices successifs.

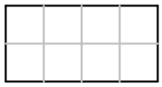
1er indice : quand Lucien dit « on peut toujours les superposer », il veut dire que deux figures qui ont même aire et même périmètre sont toujours deux figures isométriques. A-t-il raison ?

2e indice : Anna a tracé deux figures pour montrer à Lucien qu'elle n'est pas d'accord. Voici la première figure.



[12] L'activité qui suit est inspirée des travaux menés par le groupe national français de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais. Un dossier « Aire et périmètre » est disponible sur le site : www.eduscol.education.fr (titre « Sommaire », rubrique « Collège », sous-rubrique « Dispositifs relais »)

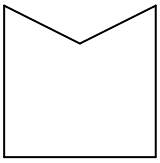
3^{e} indice : voici la deuxième figure.



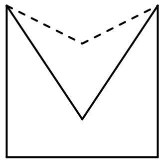
On invitera ensuite les élèves à rechercher d’autres contre-exemples mais on profitera également de l’occasion pour indiquer aux élèves qu’en mathématiques, l’existence d’un seul contre-exemple est suffisant pour infirmer une proposition.

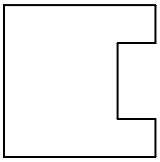
Fiche 23 – Variation du périmètre et de l'aire

Dans chaque cas, précise la variation de l'aire et du périmètre.

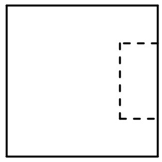


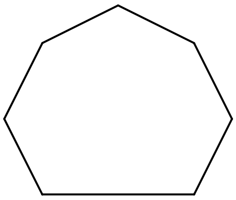
	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



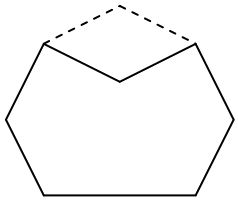


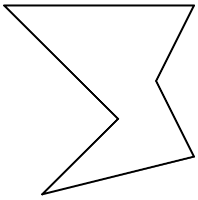
	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



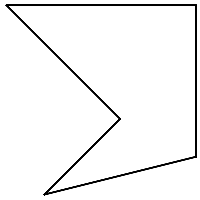


	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			

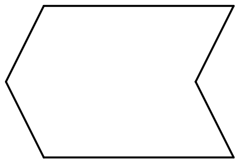


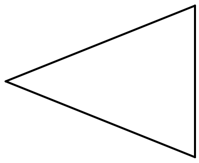


	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			

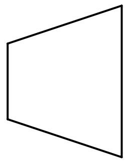


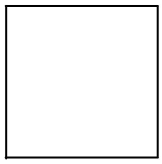
	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



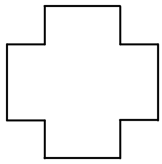


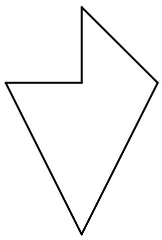
	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



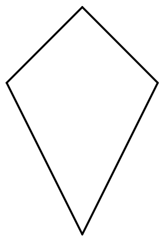


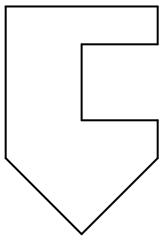
	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



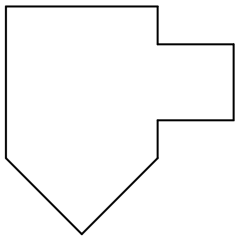


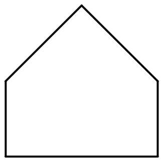
	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



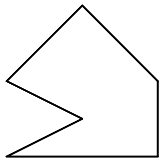


	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			





	↗	↘	=
Aire			
Périmètre			



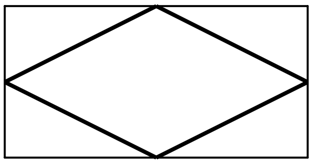
2.3. Mises en relation entre démarches de recherches d'aires et formulations[13]

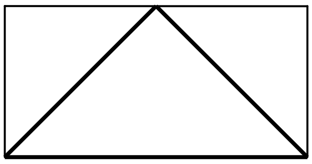
Il est essentiel de provoquer des mises en relation nombreuses entre les démarches de recherche d'aires et les formules qui les accompagnent afin notamment de faire émerger le principe général suivant : *la recherche de l'aire de tout polygone implique l'utilisation de deux dimensions perpendiculaires au moins.*

À ce niveau d'enseignement, nous considérons que les élèves ont construit et intériorisé la démarche de recherche d'aire du rectangle. Il convient toutefois de vérifier, avant de poursuivre, que c'est effectivement le cas pour tous les élèves. Ce rappel pourra être réalisé très rapidement à l'aide du papier quadrillé : nombre de petits carrés (d'étalons) dans une rangée, nombre de rangées dans le rectangle → longueur x largeur.

Il est important de vérifier également dans quelle mesure les élèves sont capables d'analyser les figures, de les comparer, de les transformer. Les manipulations et constructions par pliage et découpage, réalisées en amont, ont dû asseoir ces démarches mais il peut être intéressant d'y revenir brièvement avant de passer aux démarches de traçages des droites utiles et enfin aux formules pour quantifier l'aire d'une figure.

Exemples de mise en relation :



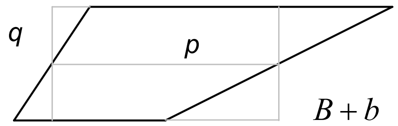


Face à ces figures comparées au rectangle d'aire double, l'élève est amené à concevoir et à exprimer que :

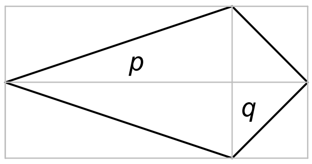
- l'aire du losange vaut ½ de l'aire du rectangle ;
- l'aire du triangle vaut ½ de l'aire du rectangle ;
- le losange et le triangle ont même aire ;
- les droites utiles pour mesurer l'aire du losange sont la grande diagonale (équivalente à la longueur du rectangle) et la petite diagonale (équivalente à la largeur du rectangle) : deux dimensions perpendiculaires ;
- les droites utiles pour mesurer l'aire du triangle sont la base (équivalente à la longueur du rectangle) et la hauteur (équivalente à la largeur du rectangle) : deux dimensions perpendiculaires ;
- la démarche de recherche d'aire du losange est la même que celle de recherche d'aire du triangle ;
- la formulation traditionnelle pour la recherche d'aire du losange est **($D \times d$) : 2 ;**
- la formulation traditionnelle pour la recherche d'aire du triangle est **($B \times h$) : 2 ;**
- les deux formulations sont différentes alors que les démarches sont identiques ;
- les deux formulations peuvent se fondre en une seule plus générale **($p \times q$) : 2.**

[13] Les commentaires et activités qui suivent sont inspirés de Dandoy, W. Recherche de l'aire et du volume. L'école des années 2000. Nov-déc 2002.

On peut amener l'élève au même type de conclusions au départ d'autres figures. Examinons par exemple ce qui se passe pour les formules du trapèze quelconque et du rhomboïde (cerf-volant).



$$\frac{B+b}{2} \times h$$



$$\frac{D \times d}{2}$$

Le travail de rectangulation fait apparaitre la démarche générale commune aux deux figures : $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ (*p* et *q* sont perpendiculaires). Pour le trapèze, on a une dimension moyenne (grande base + petite base sur 2) équivalente à la longueur du rectangle de référence.

Recherche de l'aire d'une figure en comparaison à une autre figure

Dans l'activité qui suit, l'élève est invité à rechercher l'aire de différentes figures en les comparant à l'aire d'une figure donnée. L'indispensable travail d'analyse peut s'accompagner du tracer des droites dont l'élève estime avoir besoin pour comparer les figures. Attention, dans cette étape du travail, il s'agit bien de déduire l'aire (par l'analyse) par rapport à celle donnée pour la figure en pointillé et non de prendre les mesures pour calculer directement (ce qui conduirait à une réponse erronée, l'échelle utilisée dans l'illustration n'étant pas le cm). L'élève peut néanmoins être amené à vérifier avec sa règle graduée la longueur de certaines droites ou segments de droites des deux figures à comparer.

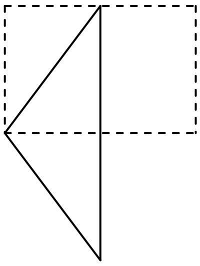
Dans la deuxième partie de l'activité, il est demandé à l'élève de tracer les droites nécessaires et d'en prendre la mesure pour calculer l'aire des figures proposées. Dans certains cas, l'élève aura à décomposer la figure en plusieurs autres pour pouvoir calculer l'aire en plusieurs étapes. Pour le calcul de l'aire du trapèze, il convient d'ajuster la consigne selon que les élèves disposent ou non de la formule adéquate et selon qu'ils reconnaissent ou non la figure comme étant un trapèze. De toute façon, ils peuvent décomposer le trapèze en un carré et un triangle accolé ou en un rectangle amputé d'un triangle. Dans tous les cas, on profitera de l'occasion pour souligner que plusieurs démarches peuvent conduire à la réponse correcte. Les élèves pourraient faire eux-mêmes ce constat lors d'une mise en commun si certains d'entre eux ont utilisé des démarches différentes.

À propos des trois dernières figures, il sera sans doute très utile de revenir un moment au calcul du périmètre et de mettre à nouveau en évidence le fait que la démarche qui consiste à additionner le périmètre du carré et celui du triangle (par exemple pour le trapèze) conduit à une erreur.

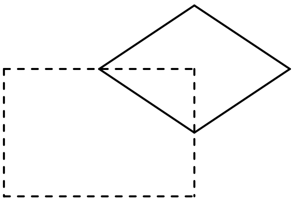
Fiche 24 – Rechercher l'aire

Recherche l'aire des figures en les comparant aux figures en pointillé.

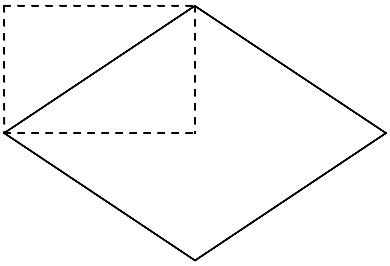
Aire du rectangle en pointillé : 6 cm^2



Aire de la figure en cm^2 :

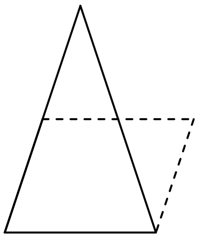


Aire de la figure en cm^2 :



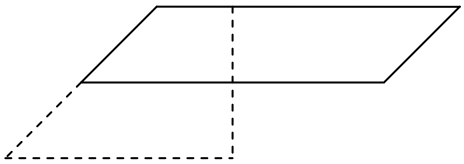
Aire de la figure en cm^2 :

Aire du parallélogramme en pointillé : 4 cm^2



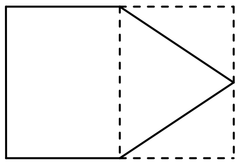
Aire de la figure en cm^2 :

Aire du trapèze en pointillé : 5 cm^2



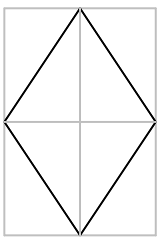
Aire de la figure en cm^2 :

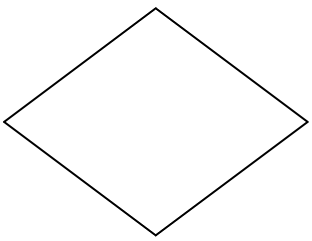
Aire du rectangle en pointillé : 4 cm^2



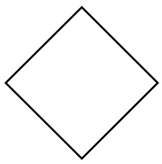
Aire de la figure en cm^2 :

Trace les droites dont tu as besoin puis mesure pour calculer l'aire des figures en cm^2. Dans les trois derniers cas, tu peux d'abord décomposer la figure en deux autres figures pour pouvoir calculer l'aire.

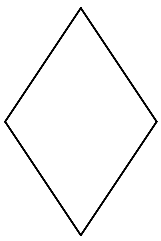




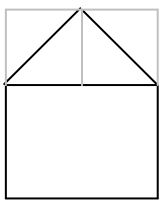
Aire de la figure en cm^2 :

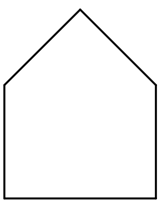


Aire de la figure en cm^2 :

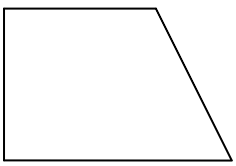


Aire de la figure en cm^2 :

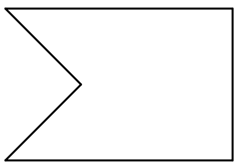




Aire de la figure en cm^2 :



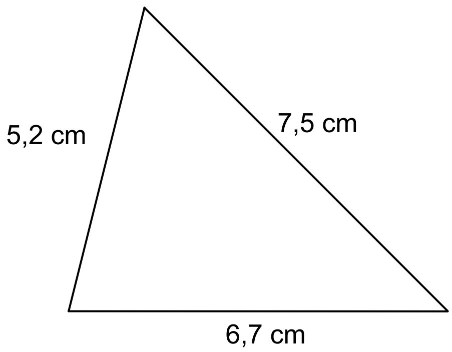
Aire de la figure en cm^2 :



Aire de la figure en cm^2 :

2.4. Le point sur les formules

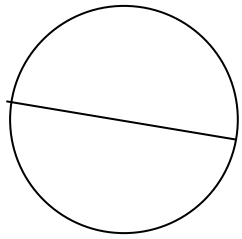
Si les élèves disposent d'un répertoire de formules, ou s'ils le construisent progressivement, il est essentiel que ce dernier ne se limite pas à une liste mais qu'il précise également la manière d'identifier les différents paramètres à dégager des figures pour appliquer ces formules. Les difficultés rencontrées par les élèves pour prendre les mesures nécessaires pour disposer des nombres sur lesquels vont pouvoir s'appliquer les formules sont courantes comme l'illustrent les reproductions de travaux d'élèves ci-dessous.



P = 5,2 + 7,5 + 6,7 = 19,4

$A = \dfrac{6,7 \times 5,2}{2} = 17,42$

L'élève confond hauteur et côté dans la formule de l'aire du triangle.



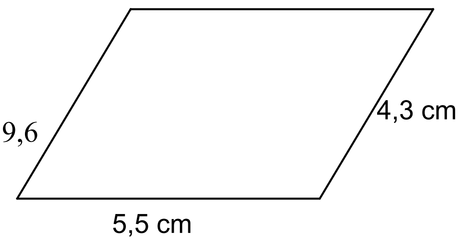
$P = 2\pi \times 3,2 = 20,1$

$A = \pi \times 3,2^2 = 32,15$

L'élève utilise une dimension inadéquate dans les formules de la circonférence et de l'aire du cercle.

P = 2 x 5,5 + 2 x 4,3 = 19,6

$A = 5,5 \times 4,3 = 23,65$



L'élève confond hauteur et côté dans la formule de l'aire du parallélogramme.

2.5. Une situation problématique

Cette activité amène les élèves à utiliser les concepts d'aire et de périmètre dans un contexte plus proche de la réalité. C'est aussi l'occasion de mettre en relation des compétences dans différents domaines mathématiques : l'élève aura à mettre en œuvre des stratégies de résolution de problèmes (analyse de la situation et des questions, sélection des données fournies, recherche des données manquantes, communication de la solution…), il devra identifier et effectuer des opérations dans des situations variées et bien entendu il devra construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres et des aires.

Selon le contexte et l'habitude qu'ont les élèves de se trouver face à une situation complexe, on proposera d'emblée le problème et on laissera les élèves rechercher la solution de façon autonome ou bien on guidera les élèves en décomposant le problème en plusieurs sous questions.

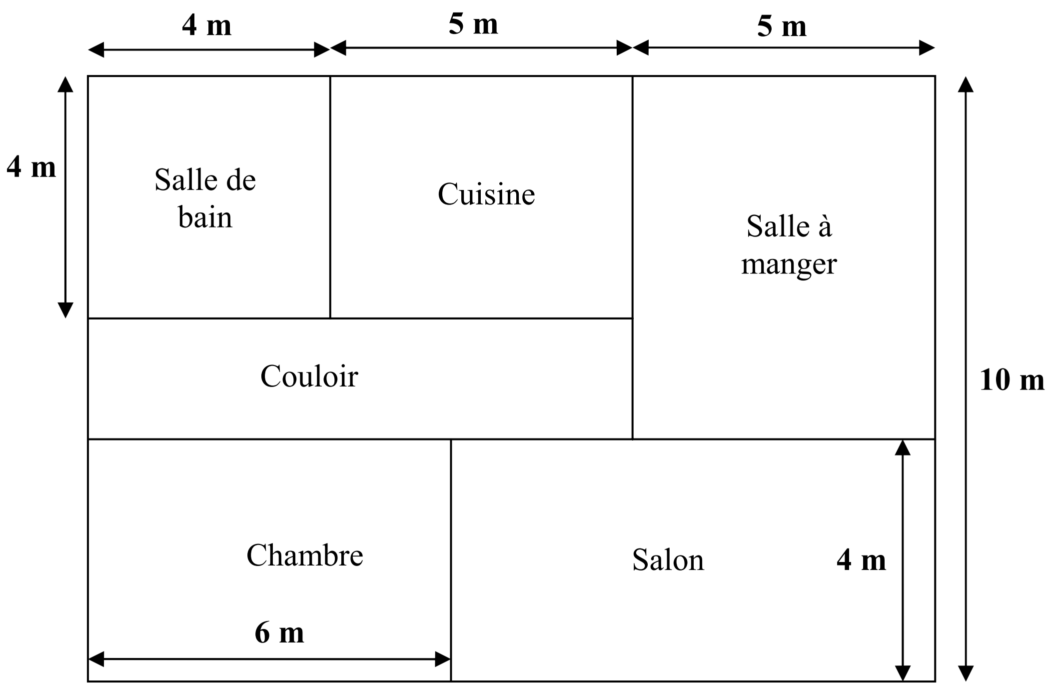
Les données (prix des matériaux et dimensions) ont été choisies de façon à ce que les opérations à effectuer soient relativement simples. Il importe avant tout d'observer la pertinence des démarches utilisées par les élèves pour résoudre le problème et leur capacité à tenir compte de tous les paramètres sans oublier la réponse à la question finale. Toutes ces données peuvent être adaptées (par exemple, si l'on souhaite mettre l'accent sur les opérations avec des grands nombres ou avec des décimaux limités aux centièmes, on peut également fournir le prix du carrelage pour un pavé de 50 sur 50…).

Fiche 25 – Une maison à aménager

Voici le plan simplifié d'une maison. Toutes les pièces sont rectangulaires ou carrées.

Certains travaux ne sont pas terminés :

- il faut installer une gouttière tout autour de la maison ;
- il faut poser du carrelage dans la cuisine ;
- il faut poser de la moquette dans le couloir.



L'entrepreneur propose :

- un modèle de gouttière en PVC à 2,50 € le mètre ;
- du carrelage à 9,50 € le m^2 ;
- de la moquette à 6 € le m^2.

Les propriétaires veulent savoir combien ils devront débourser pour l'achat de tous ces matériaux.

Calcule le prix total des matériaux en indiquant toutes les étapes de ton travail.

BIBLIOGRAPHIE

CECP, *Des jeux, des activités… Outils pour construire les nombres*, Conseil de l'Enseignement des Communes et des Provinces et l'Université de Liège, service de pédagogie expérimentale et service de didactique générale (1997).

Coquin, D. & Camos, V., Décimaux et fractions, *La cognition mathématique chez l'enfant*, Marseille, Solal Editeurs (2006).

CREM, *Pour une culture mathématique accessible à tous* (2004).

Dandoy, W., *Recherche de l'aire et du volume*, L'école des années 2000 (nov-déc 2002).

Ermel, *Apprentissages numériques,* 5 vol., Hatier, Paris (1991).

Marot, *Une approche de la démonstration en classe de sixième*, In Repères-Irem, n°39, pp 21-34 (2000).

Pressiat, A., *Trouver un fil rouge pour l'enseignement du calcul algébrique*, In Actes de l'Université d'été de Saint-Flour (2004).

Notes

Notes

Notes

Notes

Ministère de la Communauté française
A.G.E.R.S. - Service général du Pilotage du système éducatif

D/2008/9208/7