ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE

MATHÉMATIQUES

2008

2e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Pistes didactiques

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE
ADMINISTRATION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SERVICE GÉNÉRAL DU PILOTAGE DU SYSTÈME ÉDUCATIF

ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE

MATHÉMATIQUES

2008

2e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Pistes didactiques

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE
ADMINISTRATION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SERVICE GÉNÉRAL DU PILOTAGE DU SYSTÈME ÉDUCATIF

Ce document de **Pistes didactiques** a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe non certificative 2^{e} primaire en mathématiques :

Annick FAGNANT, Chercheuse à l'Unité d'analyse des Systèmes et des Pratiques d'enseignement de l'ULg ;

Cathy SOUDANT, Joseph BLESER, Maurice GASPAR, Dominique NOTTEBAERE, Inspecteurs de l'enseignement primaire;

Christine AWOUST, Fabienne DE LESSINES, Sophie LE BOULANGÉ, Loraine PUT, Laurence VAN OOTEGHEM, Mehdi BAILLEZ, Enseignants;

Martine HERPHELIN, Directrice générale adjointe du Service général du Pilotage du système éducatif ;

Sébastien DELATTRE, Attaché au Service général du Pilotage du système éducatif ;

Catherine WILLEMS, Pascal FIEVEZ, Chargés de mission au Service général du Pilotage du système éducatif.

Sommaire

INTRODUCTION

I. DESCRIPTIF DE L'OPÉRATION 2008

En conformité avec le décret du 2 juin 2006, une épreuve d'évaluation externe en mathématiques a été administrée, au mois de février 2008, aux élèves des classes de 2^{e} et 5^{e} années de l'enseignement primaire et aux élèves des classes de 2^{e} année de l'enseignement secondaire.

Les résultats obtenus par les élèves des classes des échantillons ont été analysés et les documents intitulés « Résultats et commentaires » élaborés pour chacune des années concernées ont été envoyés dans les établissements scolaires en mai 2008.

Les constats généraux constituent une base de réflexion à l'élaboration des « Pistes didactiques » qui suivent. L'objectif de ce document est d'apporter un soutien aux enseignants à travers des exemples d'activités concrètes et/ou démarches d'enseignements-apprentissages à exploiter en classe, en vue d'amener tous les élèves à la maitrise des compétences ciblées par l'évaluation et répertoriées dans les Socles de compétences.

Après un rappel des constats principaux issus de l'épreuve, ce document se présente en trois parties correspondant aux trois thèmes mathématiques retenus, à savoir : « les opérations », « les figures géométriques » et « les fractions ».

Comme pour la lecture l'an dernier, l'Institut de Formation en cours de Carrière proposera, dès l'année 2008-2009, des formations relatives à l'exploitation des pistes didactiques et à l'analyse des résultats des évaluations externes non certificatives en mathématiques.

II. SYNTHÈSE DES RÉSULTATS

L'épreuve proposée en 2e année primaire évaluait des compétences essentielles au niveau des premiers apprentissages mathématiques. Elle a globalement été jugée « bien adaptée » par les enseignants. Le score global moyen des élèves était de 80%, attestant d'une bonne maitrise d'ensemble.

A. COMPÉTENCES RELATIVES AUX OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

Une **analyse centrée sur les domaines mathématiques** permet de cerner les compétences spécifiques qui semblent avoir posé le plus de difficultés aux élèves et qui ont donc été privilégiées dans les pistes didactiques qui suivent.

- Les outils de **numération** semblent globalement bien acquis par les élèves, mais que des progrès doivent encore être réalisés dans le domaine des **opérations**, tant au niveau de la résolution des calculs eux-mêmes que de leur utilisation dans des situations variées.

  Les opérations étant généralement travaillées de façon systématique et progressive au cours de la 2e année primaire, c'est essentiellement **sur la résolution de problèmes et sur le sens à donner à ces opérations** qu'il nous semble pertinent de mettre davantage l'accent. C'est donc la compétence intitulée « Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées » qui est retenue comme première thématique ; elle est développée dans la partie 1 de ce document.

- Dans le **domaine des solides et figures**, l'épreuve a révélé que les élèves disposent globalement des connaissances de base : ils connaissent le nom des figures et peuvent les reconnaitre lorsqu'elles sont présentées dans leur position conventionnelle. Le pas à franchir dans ce domaine consiste alors à **amener les élèves à se détacher quelque peu de cette perception visuelle pour reconnaitre les figures dans différentes positions** : un rectangle présenté en oblique, un carré sur pointe… C'est donc cette thématique qui est privilégiée ici. Elle entre dans la compétence « Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer » qui est développée dans la partie 2 de ce document.

- La plupart des compétences évaluées dans le **domaine des grandeurs** sont en construction lors de la première étape de la scolarité : les résultats obtenus dans l'épreuve sont assez positifs, montrant que les élèves disposent de certains acquis pour mesurer, estimer et situer des évènements dans le temps. Parmi les thématiques abordées dans ce domaine, c'est sur l'apprentissage des fractions que le groupe de travail a choisi de se centrer. La compétence « Fractionner des objets en vue de les comparer » est à certifier en fin de première étape et l'épreuve a révélé que les élèves éprouvent quelques difficultés à **donner du sens aux fractions**, notamment dans des situations de la vie courante. Les fractions constituent donc la troisième thématique retenue ; elle est développée dans la partie 3 de ce document.

Le groupe de travail a choisi de ne pas développer le **traitement de données** en tant que contenu spécifique, mais celui-ci devrait trouver sa place dans les autres approches thématiques, notamment parce que certaines situations et démarches d'enseignements-apprentissages proposées visent à accorder une place à la sélection et à l'organisation des informations.

B. Compétences transversales

L'épreuve montre que si les élèves peuvent généralement **appliquer des procédures mathématiques** dans des situations simples, peu ambiguës et pouvant s'appuyer sur une perception directe, ils éprouvent davantage de **difficultés à faire face à des situations moins directes qui nécessitent analyse et interprétation pour mobiliser à bon escient les outils mathématiques adéquats ou pour argumenter une solution**.

Les items les plus complexes de l'épreuve nécessitent en effet la résolution de situations problématiques qui impliquent diverses compétences transversales telles que décrites dans le document Socles de compétences (pp. 24-25).

- Plusieurs compétences transversales reprises sous l'intitulé général « **Analyser et comprendre un message** » entrent notamment en jeu dans la situation du barbecue et dans celle de la salle de spectacle. La résolution du problème du barbecue (question 4, item 17) nécessite de sélectionner les informations pertinentes dans le tarif et de comptabiliser le nombre adéquat de produits de chaque sorte en fonction de la commande. La situation de la salle de spectacle (question 5, item 18) requiert quant à elle de gérer simultanément plusieurs critères pour faire le lien entre la disposition des sièges et la suite ordonnée des nombres pairs et impairs présentés de façon ascendante dans un cas et descendante dans l'autre (ou de gauche à droite pour les nombres impairs et de droite à gauche pour les nombres pairs).
- Certaines compétences de la catégorie « **Résoudre, raisonner et argumenter** » interviennent notamment dans les deux situations nécessitant une argumentation. Dans la situation du spectacle (question 7, item 23), les élèves sont invités à expliquer, en s'appuyant sur la lecture d'un tableau, pourquoi un instrument de musique n'est pas nécessaire. Les élèves doivent également faire appel à l'argumentation pour justifier pourquoi ils estiment qu'un enfant s'est trompé dans la situation proposant des productions d'élèves fictifs face à une tâche requérant de nommer des figures géométriques (question 31, item 85).
- Enfin, la compétence « **Appliquer et généraliser** » intervient notamment dans la situation demandant de trouver les boules de pétanque situées à même distance (question 3, item 16). Résoudre ce problème peut nécessiter de mobiliser un outil mathématique non explicitement demandé.

L'analyse des difficultés rencontrées face à ces situations problématiques a conduit le groupe de travail à soutenir le développement d'une approche méthodologique qui constitue la toile de fond des situations d'enseignements-apprentissages à travailler en classe avec les élèves.

Il s'agit de proposer des situations mobilisatrices (ou situations problématiques) qui invitent les élèves à chercher et à jouer un rôle actif dans la construction de leurs connaissances. L'approche et les situations d'enseignements-apprentissages proposées devraient, à un moment ou à un autre de la démarche, impliquer le développement des diverses compétences transversales susmentionnées.

III. TYPE DE DOCUMENT PROPOSÉ

Chaque partie est structurée en 5 points.

Le premier point rappelle **la compétence spécifique visée** et précise la façon dont elle est développée dans les pistes didactiques.

Le deuxième point présente une **analyse des difficultés rencontrées dans l'épreuve** face aux items relevant de la compétence spécifique qui a été retenue pour les pistes didactiques.

Le troisième point propose **une structuration des apprentissages relatifs au développement de la compétence visée**, en précisant une variété de situations dans lesquelles il parait pertinent de développer cette compétence et en dressant une liste de supports ou de matériel didactique qu'il convient d'inviter les élèves à rencontrer et à manipuler.
Une multitude de séquences peuvent être développées au point de rencontre entre ces situations variées et l'utilisation de ce matériel diversifié.

Le quatrième point tente de permettre à chacun de trouver dans ce document l'inspiration pour son enseignement. Avec le souci de proposer des pistes didactiques concrètes, le groupe de travail a pris le parti de développer **quelques fiches-outils** qui constituent des exemples permettant d'illustrer la démarche proposée. **Il ne s'agit pas de situations totalement « prêtes à l'emploi »** dans la mesure où des adaptations sont toujours nécessaires en fonction des classes, mais les exemples proposés devraient être **suffisamment détaillés pour permettre une transposition assez aisée**.

Enfin, pour chaque thématique retenue, un cinquième point intitulé « **Pourquoi ce type d'approche ?** » se propose de positionner le champ conceptuel dans lequel s'inscrivent les apprentissages et d'apporter quelques précisions, plus théoriques cette fois, sur la logique organisationnelle ou développementale des contenus exploités.

Partie 1 – Nombres
Les opérations

I. Compétence spécifique visée

La compétence spécifique visée dans cette partie du document s'intitule « **Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées** ». Dans les pistes didactiques, le groupe de travail a choisi de mettre l'accent sur la construction du sens à donner aux opérations plutôt que sur le développement de techniques de calculs et sur le renforcement d'automatismes (ce qui ne renie en rien l'intérêt de ces apprentissages).

Concrètement, les pistes proposées visent à développer la résolution de problèmes dès les premiers apprentissages pour permettre aux enfants de rencontrer les calculs dans des contextes variés et pour les aider à donner différentes significations aux opérations.

II. Analyse des difficultés rencontrées dans l'épreuve

Trois types de situations étaient proposées dans l'épreuve en lien avec la compétence « Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées ».

❖ <u>Résoudre des calculs additifs et soustractifs.</u>

Dix calculs (5 additions et 5 soustractions) étaient proposés aux élèves (question 16, items 44 à 53). En dessous de la question, une zone de travail était mise à la disposition des élèves qui étaient invités à l'utiliser s'ils le jugeaient nécessaire.

<table>
<tr>
<td>Les résultats mettent en évidence une difficulté croissante en fonction des types de calcul (de U+U ou D+D à DU+DU ou DU-DU).

Les items se hiérarchisent avec des taux de réussite variant de 93% à 52%.</td>
<td>16. <u>Effectue</u> les opérations suivantes.

<table>
<tr><td>7 + 4 =</td><td>10 - 2 =</td></tr>
<tr><td>60 + 20 =</td><td>12 - 4 =</td></tr>
<tr><td>36 + 42 =</td><td>46 - 3 =</td></tr>
<tr><td>59 + 7 =</td><td>72 - 5 =</td></tr>
<tr><td>36 + 24 =</td><td>87 - 45 =</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

❖ Résoudre des problèmes.

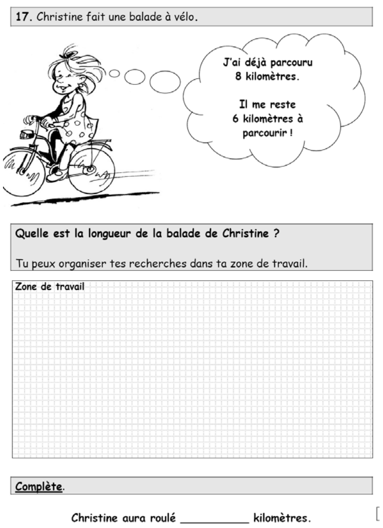
Quatre problèmes étaient proposés aux élèves. Ceux-ci se sont révélés de complexité croissante : les situations les plus simples impliquaient une démarche directe ou induite et la situation la plus complexe nécessitait la sélection et l'organisation d'informations.

Les quatre problèmes sont rappelés et brièvement commentés ci-dessous.

Lorsque le problème nécessite la **mise en œuvre d'une démarche directe** (comme dans la question relative à la balade à vélo, question 17, item 54), les résultats sont très satisfaisants puisque 87% des élèves résolvent correctement la situation. Il est intéressant de noter que les jeunes élèves de 2e primaire ne se fient pas aux mots-clés (« il reste 6 km » pourrait induire une soustraction alors que c'est une addition qui est attendue), alors que ce type de stratégie superficielle est souvent développée par les élèves plus âgés, comme le montrent de nombreuses recherches[1].

Le problème du partage des œufs (question 29, items 80 et 81) est accompagné d'un dessin des 26 œufs à répartir dans des boites de 6. Cette **présentation dessinée induit une démarche de résolution** consistant à entourer les œufs par paquets de 6. Ce problème présente également un taux de réussite appréciable (80% de réussite environ pour les deux items).

Le problème du spectacle et des coulisses (question 6, item 19) implique une **démarche indirecte** (46 = 22 + ?) et semble dès lors un peu plus complexe (75% de réussite).


17. Christine fait une balade à vélo.

J'ai déjà parcouru 8 kilomètres. Il me reste 6 kilomètres à parcourir !

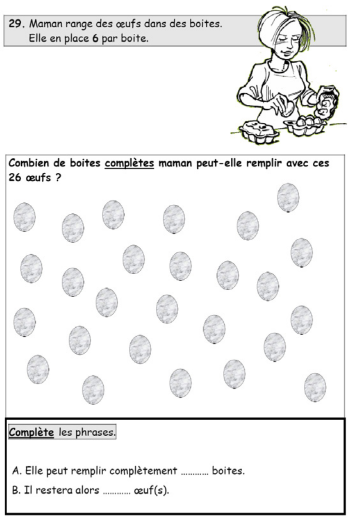
Quelle est la longueur de la balade de Christine ?

Tu peux organiser tes recherches dans ta zone de travail.

Zone de travail

Complète.

Christine aura roulé __________ kilomètres.

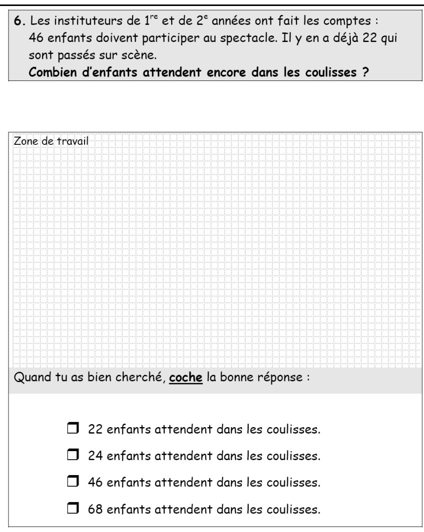

29. Maman range des œufs dans des boites. Elle en place 6 par boite.

Combien de boites complètes maman peut-elle remplir avec ces 26 œufs ?

Complète les phrases.

A. Elle peut remplir complètement .... boites.

B. Il restera alors .... œuf(s).


6. Les instituteurs de 1re et de 2e années ont fait les comptes : 46 enfants doivent participer au spectacle. Il y en a déjà 22 qui sont passés sur scène. **Combien d'enfants attendent encore dans les coulisses ?**

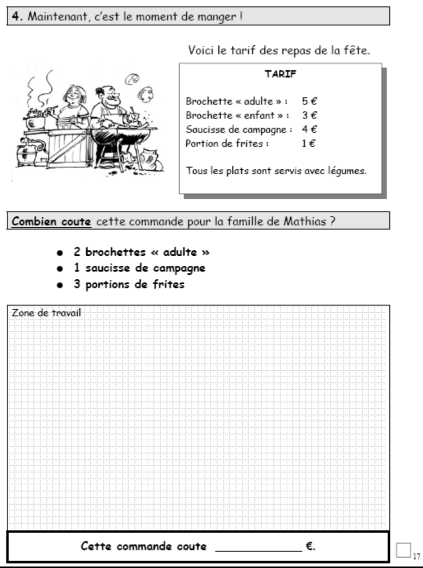
Zone de travail

Quand tu as bien cherché, coche la bonne réponse :

- ❒ 22 enfants attendent dans les coulisses.
- ❒ 24 enfants attendent dans les coulisses.
- ❒ 46 enfants attendent dans les coulisses.
- ❒ 68 enfants attendent dans les coulisses.

Enfin, le problème du barbecue (question 4, item 17) s'est avéré le plus complexe des quatre problèmes proposés dans la mesure où il nécessite la **sélection et l'organisation d'informations**. Cette question a été réussie par 57% des élèves de 2e primaire.

Certains élèves parviennent très bien à analyser la situation, à comprendre ce que l'on attend d'eux et à sélectionner les informations pertinentes ; d'autres éprouvent quelques difficultés à opérer la sélection d'informations (sélectionner les produits adéquats ou tenir compte du nombre de produits de chaque sorte) ; d'autres encore semblent procéder à une analyse superficielle et se contentent d'additionner toutes les données du problème (somme des quantités de la commande ou somme des prix du menu).


4. Maintenant, c'est le moment de manger !

Voici le tarif des repas de la fête.

TARIF

Brochette « adulte » :	5 €
Brochette « enfant » :	3 €
Saucisse de campagne :	4 €
Portion de frites :	1 €

Tous les plats sont servis avec légumes.

Combien coute cette commande pour la famille de Mathias ?

- 2 brochettes « adulte »
- 1 saucisse de campagne
- 3 portions de frites

Zone de travail

Cette commande coute ___________ €.

[1] Voir notamment Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997a). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

❖ Donner du sens aux opérations.

Deux questions invitaient les élèves à réfléchir sur la signification des opérations arithmétiques.

La question 28 (items 78 et 79) demande **d'interpréter une multiplication** : il s'agit de trouver à quelle autre opération (addition réitérée) et à quel résultat elle peut correspondre. Dans le premier item, la solution « 7 » peut entrainer une confusion avec l'addition (4 + 3 = 7). Les deux items présentent respectivement des taux de réussite de 71% et 77%.	**28. Barre** ce qui est faux. A. **4 × 3** = 7 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12 ☐ 78 B. **2 × 5** = 5 + 5 = 2 + 2 + 2 + 2 = 10 ☐ 79
La question 14 (item 42) a été réussie par 64% des élèves. Résoudre ce type d'exercices nécessite de **donner du sens aux opérations :** il faut que l'enfant reconnaisse les signes (p. ex. « **:** » représente un partage ; il ne faut pas confondre « × » et « + », etc.) et qu'il attribue une signification aux opérations (16 **+ 4** implique une augmentation ; 16 **- 4,** une diminution, etc.). Si l'élève a une bonne compréhension des opérations, il peut **estimer l'ordre de grandeur du résultat** et, dès lors, résoudre l'exercice qui lui est proposé, et ceci, même sans effectuer tous les calculs (il peut déduire que c'est 16 × **4** qui vaut 64, et ceci, même s'il avait été incapable de réaliser ce calcul posé de façon habituelle : 16 × 4 = ?).	**14. Place** le signe qui convient. Chaque signe ne peut être indiqué qu'une seule fois. → Choisis parmi : **+** **-** **:** **×** **16 ☐ 4 = 4** **16 ☐ 4 = 12** **16 ☐ 4 = 64** **16 ☐ 4 = 20**

III. STRUCTURATION DES APPRENTISSAGES RELATIFS AU DÉVELOPPEMENT DE LA COMPÉTENCE VISÉE

Comme mentionné en introduction de ce point, les pistes didactiques relatives au domaine des nombres se centrent sur la compétence « Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées ». Plus spécifiquement, il est proposé de **développer la résolution de problèmes dès les premiers apprentissages** de façon à permettre aux enfants de **rencontrer les opérations dans divers contextes significatifs** et ainsi les aider à **construire du sens**. Le développement de techniques de calculs et le renforcement d'automatismes ne sont pas envisagés ici.

Comme indiqué dans les Socles de compétences, il convient de développer les opérations **« dans des situations variées »**. Celles-ci pourraient s'organiser selon quatre axes :

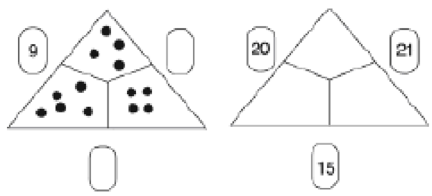
- S1 ⬄ les situations en lien avec la vie réelle ;
- S2 ⬄ les jeux mathématiques ;
- S3 ⬄ les situations problèmes (la situation proposée prend la forme d'un énoncé qui peut être présenté de façon orale ou sous forme d'un texte écrit) ;
- S4 ⬄ les opérations décontextualisées.

Au niveau **du matériel** sur lequel s'appuyer, il semble pertinent de proposer aux élèves d'utiliser divers supports, comme notamment :

- M1 ⬄ le **matériel authentique** (euros, calendriers, tarifs de snacks, catalogues de magasins, etc.) ;
- M2 ⬄ le **matériel représenté** (sous forme d'images ou de dessins) **ou symbolique** (des petits personnages et une boite en plastique pour jouer à la situation de la piscine) ;
- M3 ⬄ le **matériel mathématique** (les réglettes Cuisenaire, les dés, les bouchons ou divers objets manipulables représentant les unités à dénombrer ; divers outils tels que les arithmogones[2], les murs de nombres, les arbres, les tapis, etc.).

Pour permettre aux élèves de rencontrer les opérations dans divers contextes significatifs et ainsi les aider à construire du sens, on peut aisément imaginer l'intérêt de développer, tout au long du cycle 5-8 et même encore par la suite, une variété de séquences d'enseignements-apprentissages qui se situent à la rencontre de ces situations variées et de ce matériel diversifié.

[2] Les arithmogones (vient de l'anglais arithogons) sont des triangles séparés en trois parties qui permettent de réaliser des opérations ou de décomposer des nombres. On trouve notamment ce type d'activités dans des manuels allemands. Certains ont été « traduits » par un inspecteur belge, J. Maquoy (*Faire des maths* publié aux éditions Erasme).



Le tableau suivant rend compte des interactions possibles et, à titre illustratif, propose quelques exemples de mises en relation en précisant les fiches d'activités qui sont développées dans les pages qui suivent. Plusieurs activités, moyennant certaines adaptations, peuvent être développées tout au long du cycle 5-8 et nombre d'entre elles peuvent s'adresser aux élèves de 3^{e} primaire.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">S1 ⇔ les situations en lien avec la vie réelle</th><th>S2 ⇔ les jeux mathématiques</th><th colspan="2">S3 ⇔ les situations problèmes</th><th>S4 ⇔ les opérations décontextualisées</th></tr>
<tr><td>M1 ⇔
le matériel authentique</td><td rowspan="2">Fiche 1 –
Le snack.</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">Fiche 5 –
Construire des problèmes en faisant varier de nombreux éléments.</td><td></td></tr>
<tr><td>M2 ⇔
le matériel représenté ou symbolique</td><td>Fiche 2 –
À la piscine.</td><td></td><td rowspan="2">Fiche 4 –
Les problèmes de type combinaison, changement et comparaison.</td><td></td></tr>
<tr><td>M3 ⇔
le matériel mathématique</td><td colspan="2"></td><td>Fiche 3 –
Le jeu des trésors.</td><td>Fiche 6 –
Calculons, calculons…, mais comment ?</td></tr>
</table>

Les six fiches présentées sont assez diversifiées.

- Les fiches 1 à 3 proposent de petites séquences d'enseignements-apprentissages au départ de situations de vie ou de jeux mathématiques. Les activités invitent les élèves à développer et à mettre en œuvre les opérations mathématiques (les concepts, les procédures et les symbolisations) dans des situations concrètes qui leur donnent du sens.
- Les fiches 4 et 5 présentent une méthodologie générale et une structuration des apprentissages pour développer la résolution de problèmes dans des situations plus classiques que l'on pourrait qualifier de « leçons de problèmes ». La fiche 4 donne quelques lignes d'actions qui devraient permettre de dépasser les exercices de type « opérations habillées » (visant à appliquer les opérations apprises en classe) pour proposer de véritables problèmes aux élèves, nécessitant réflexion et analyse et leur permettant de développer des démarches informelles de résolution. La fiche 5 propose une réflexion visant à aider l'enseignant à construire des problèmes en faisant varier de nombreux éléments.
- La fiche 6 propose une série d'exercices visant à travailler ce que l'on pourrait appeler du « calcul réfléchi » en amenant les élèves à se questionner sur le sens des opérations et à développer l'estimation.

Des compétences transversales interviennent également dans la plupart des situations.

Par exemple, dans les fiches 2, 4 et 5, la compétence *« Appliquer et généraliser »* est sollicitée dans la mesure où les élèves doivent *« se servir dans un contexte neuf, de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes ».* Dans le cadre des opérations, il s'agit ici de mobiliser à bon escient les outils mathématiques adéquats ; autrement dit, d'utiliser l'opération arithmétique appropriée face à un problème donné. En effet, face à une situation problème, l'enfant est amené à se construire une représentation appropriée pour découvrir l'opération adéquate, et non simplement à appliquer des opérations.

Dans de nombreuses situations, les élèves pourront aussi être amenés à *« utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents ».* En effet, l'utilisation de représentations-outils comme les diagrammes, la droite numérique, les représentations sagittales, les schèmes, etc. peut également s'avérer utile face à certaines situations.

La compétence « Analyser et comprendre un message » (« *distinguer, sélectionner les informations utiles des autres ; percevoir l'absence d'une donnée nécessaire et la formuler* », « *revivre la situation, la raccorder à son environnement, ses domaines d'intérêt, à d'autres objets étudiés, à son vécu* ») intervient dans toutes les situations mais c'est principalement dans la fiche 1 (ainsi que face à certains problèmes qui pourraient être créés au départ des fiches 4 et 5) que l'organisation d'informations joue un rôle crucial.

La compétence *« Résoudre, raisonner et argumenter »* (« *s'exprimer dans un langage clair et précis ; citer l'énoncé que l'on utilise pour argumenter, ….* », « *distinguer 'ce dont on est sûr' de 'ce qu'il faut justifier'* » et « *exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres et avec une estimation préalable* ») pourrait être travaillée dans toutes les situations d'apprentissages proposées dans les fiches. L'approche d'enseignement développée devrait en effet conduire les élèves à argumenter pour expliquer leur démarche de résolution ou pour justifier leur solution. Il s'agit en effet de confronter les démarches développées par les élèves, de prendre conscience que plusieurs démarches sont possibles, de justifier pourquoi telle ou telle démarche est correcte ou ne l'est pas, etc.

Pour une évaluation formative des apprentissages réalisés.

Deux types d'évaluations peuvent être développés face aux différentes activités proposées :

- **une évaluation en cours d'apprentissage** qui consiste à observer et à analyser les démarches développées par les élèves lors des travaux en petits groupes (Quelles stratégies mettent-ils en œuvre ? Existe-t-il plusieurs démarches correctes ? Quelles difficultés rencontrent-ils ? Etc.) ;

- **une évaluation en fin d'apprentissage** qui pourrait se présenter sous une forme papier-crayon et proposer des exercices proches des situations rencontrées en cours d'activité (un nouveau menu et une commande dont il faut trouver le total, en lien avec la fiche 1).

IV. Quelques fiches-outils

Fiche n° 1 - Le snack.

Fiche n° 2 - À la piscine.

Fiche n° 3 - Le jeu des trésors.

Fiche n° 4 - Les problèmes de type combinaison, changement et comparaison.

Fiche n° 5 - Construire des problèmes en faisant varier de nombreux éléments.

Fiche n° 6 - Calculons, calculons…mais comment ?

Compétence ciblée dans les fiches-outils (partie nombres - les opérations)

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées

Note.

Quelques explications théoriques sont proposées au point V de cette partie.
Elles permettent sans doute d'éclairer certains aspects développés dans les fiches-outils. Un aller-retour entre ces deux parties est donc conseillé.

LE SNACK

Mise en situation

Les élèves sont invités à jouer « au snack ».

Aujourd'hui, quelques amis ont décidé d'aller manger un petit bout ensemble au snack « Chez Farid » (voir annexe 1) ou au snack « Chez Lili » pour les plus petits (voir annexe 2). Ils vont recevoir le menu et la somme dont ils disposent pour manger. Chacun devra faire son choix en ne dépassant pas la somme reçue. Certains élèves joueront le rôle de clients et d'autres le rôle de serveurs.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

- Il s'agit essentiellement de calculer le total des consommations (l'addition) dans un snack. Combien vais-je payer pour telle et telle consommation ? Que puis-je acheter avec telle somme d'argent ? Combien me rendra-t-on ? Etc.

Compétences transversales

Analyser et comprendre un message : revivre la situation, la rattacher à son environnement ; distinguer, sélectionner les informations utiles des autres, etc.

- Les élèves devront se mettre à la place d'un client, comme dans une situation de la vie réelle. Ce client dispose d'une somme d'argent.
- En fonction des contraintes de la situation, ils devront sélectionner les informations pertinentes dans le menu qui leur est proposé.

Résoudre, raisonner et argumenter : estimer le résultat et vérifier sa plausibilité ; exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres…

- Une fois le total des consommations calculé, il faut pouvoir en vérifier la plausibilité en comparant par exemple avec une estimation préalable.
- Dans certaines situations, les élèves devront argumenter leurs solutions en référence aux contraintes posées.

Progression de l'activité

Avant l'activité.

Placer les élèves par groupes de quatre (trois clients et un serveur). Le serveur distribue les menus du snack (voir annexe 1 ou annexe 2) et l'enseignant distribue à chaque élève son portemonnaie avec la somme dont il dispose (p. ex. un portemonnaie avec une somme globale, voir annexes 3 et 4 ou une enveloppe avec des pièces de 1 euro, voir annexe 6).

Variations possibles :

- chacun a la même somme (en plusieurs pièces ou en somme totale) ;
- chacun a une somme différente ;
- on peut prêter de l'argent à un(e) ami(e) ;
- chacun à son tour devient le serveur ;
- …

Activité 1. Jouer la situation en petits groupes.

Dans un premier temps, les élèves choisissent dans le menu ce qu'ils désirent et paient au fur et à mesure avec leurs pièces de 1 euro. Chaque élève passe tour à tour commande et paie son addition pendant que les autres vérifient l'opération.

Dans un second temps, les élèves doivent anticiper la somme à payer (le nombre de pièces nécessaires) avant de passer leur commande complète. Ils doivent ainsi s'assurer d'avoir assez d'argent dès le départ.

Les clients écrivent ce qu'ils commandent sur une feuille (soit en recopiant le nom des plats sur le menu soit, pour les plus petits, en collant les images correspondant aux plats commandés – voir annexe 3) et préparent à l'avance l'argent pour le serveur. Lorsqu'il reçoit les commandes, celui-ci rédige les additions de chacun et, en groupes de 4, les élèves vérifient si chaque total correspond à la prévision de chacun.

Une variante est de trouver toutes les commandes possibles que l'on peut faire avec la somme dont on dispose (avec les euros reçus).

> *Il peut être intéressant d'examiner les commandes écrites et les additions, et de dégager les erreurs communes avant de passer à l'activité 2.*

Activité 2. Travailler individuellement.

Dans un premier temps, les élèves sont invités à réaliser individuellement le même type de tâches que celles qu'ils viennent de réaliser en petits groupes : sachant qu'ils disposent d'une somme d'argent donnée, ils commandent ce qu'ils veulent par écrit ou ils calculent l'addition d'un client fictif dont on leur soumet la commande.

Au fur et à mesure de la progression de l'activité, plusieurs contraintes peuvent être introduites de façon à complexifier la tâche :

- vous commandez ce que vous voulez mais vous devez dépenser exactement la somme de 12 euros ;
- avec l'argent que vous avez, vous devez prendre un plat, une boisson et un dessert ;
- le serveur apporte l'addition globale pour 3 clients et, connaissant la commande de chacun, vous vérifiez qu'il n'a pas commis d'erreur et vous calculez la part que chacun doit payer ;
- même situation, mais cette fois vous imaginez que les clients décident de partager simplement le total en 3 parts équivalentes ;
- le serveur apporte une addition incorrecte et vous devez retrouver l'erreur ;
- etc.

Après la phase de travail individuel, l'enseignant propose de mener collectivement une confrontation et une analyse des démarches ainsi qu'une vérification des solutions.

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Les erreurs principales risquent de se rencontrer au niveau de la sélection des données pertinentes (c'est-à-dire au niveau de la sélection des prix correspondant aux plats commandés).	- Confrontations entre élèves lors des travaux en petits groupes : pourquoi as-tu compté ce prix alors qu'il correspond à des plats que tu n'as pas commandés ? N'as-tu pas oublié de compter les boissons ?
- Des erreurs peuvent également survenir lors du calcul des sommes à payer.	- Pour la vérification du total, une fois que l'on s'est assuré d'avoir sélectionné les bons prix, on peut inviter le serveur à avoir recours à une calculatrice.
- Des difficultés supplémentaires apparaitront probablement dans les situations nécessitant de respecter une ou plusieurs contraintes.	- Lors des phases de confrontation collective poursuivant le travail individuel, il conviendra d'amener les élèves à argumenter leurs solutions en référence à ces contraintes.

Matériel

- ► Les menus du snack (voir annexe 1 pour un exemple de menu écrit « Chez Farid » et annexe 2 pour un exemple de menu imagé « Chez Lili » pouvant être utilisé avec les plus jeunes élèves).
- ► Des images correspondant aux plats et boissons du menu imagé « Chez Lili » (pour aider les plus jeunes à réaliser les commandes, sans devoir écrire le nom des plats – voir annexe 3).
- ► Les portemonnaies comprenant différentes sommes d'argent (voir annexes 4 et 5).
- ► Des pièces de 1 euro (voir annexe 6) et des enveloppes pour y glisser ces pièces.
- ► Des feuilles vierges qui serviront de « tickets » pour réaliser les additions.

Remarque : pour utiliser du matériel authentique, on peut aussi utiliser le vrai menu d'un snack du coin, jouer avec de vraies pièces, etc.

Organisation de la classe

- Pour la première activité, les élèves sont placés par groupes de 4 (trois clients et un serveur). On peut aussi proposer une phase de travail par deux, un client et un serveur.
- Pour la deuxième activité, on propose un travail individuel, puis une confrontation en groupe classe. On peut aussi intercaler une phase de confrontation des solutions en duo avant le collectif, voire une phase de travail en duo si les problèmes s'avèrent trop complexes à gérer en individuel.

Notes et réflexions

Cette activité peut s'adapter à d'autres situations du type « jeu du magasin » ou « commandes dans un catalogue » de matériel scolaire, de jouets, de vêtements, etc. Il est possible et intéressant de faire ce genre d'activités tout au long du cycle 5-8 et par la suite également, avec modifications de différents paramètres.

Cette activité s'inspire d'une approche développée par des chercheuses de l'Université de Liège. Pour en savoir plus, voir Fagnant, A., Hindryckx, G. & Demonty, I. (2008). *La résolution de problèmes au cycle 5-8. Présentation d'un outil méthodologique à l'usage des enseignants. Informations pédagogiques, 60, 3-14.*

SNACK CHEZ FARID

Plats

Sandwichs (thon, américain, fromage, …)	3 €
Potage aux brocolis	2 €
Couscous aux 4 viandes	8 €
Tagliatelles aux 4 fromages	7 €
Quiche aux légumes	4 €
Tartines de fromage frais et saumon	3 €
Lasagne aux courgettes	7 €
Poulet à l'estragon et riz	10 €
Omelette du chef (fromage, tomates, aubergines)	4 €
Salade niçoise (salade, thon, œuf, tomates, olives)	6 €
Salade paysanne (salade, jambon, fromage, maïs)	8 €
Chicons au gratin	9 €
Boulettes sauce tomate et pâtes	8 €
Assiette de légumes du marché (variable selon la saison)	5 €

Desserts

Soufflé aux pommes	4 €
Crème au thé vert	5 €
Sorbet aux fraises (1 boule)	1 €
Fruit au choix (Pomme ou banane ou poire)	1 €
Tarte aux figues	2 €

Boissons

Eau plate	1 €
Eau pétillante	1 €
Eau grenadine	1 €
Cola	2 €
Orangeade	2 €
Citronnade	2 €
Menthe à l'eau	2 €
Jus d'orange	2 €
Jus d'orange pressé	3 €
Café	2 €
Thé, infusion (menthe, jasmin, tilleul…)	2 €
Chocolat chaud ou froid	2 €

SNACK Chez Lili

Plats

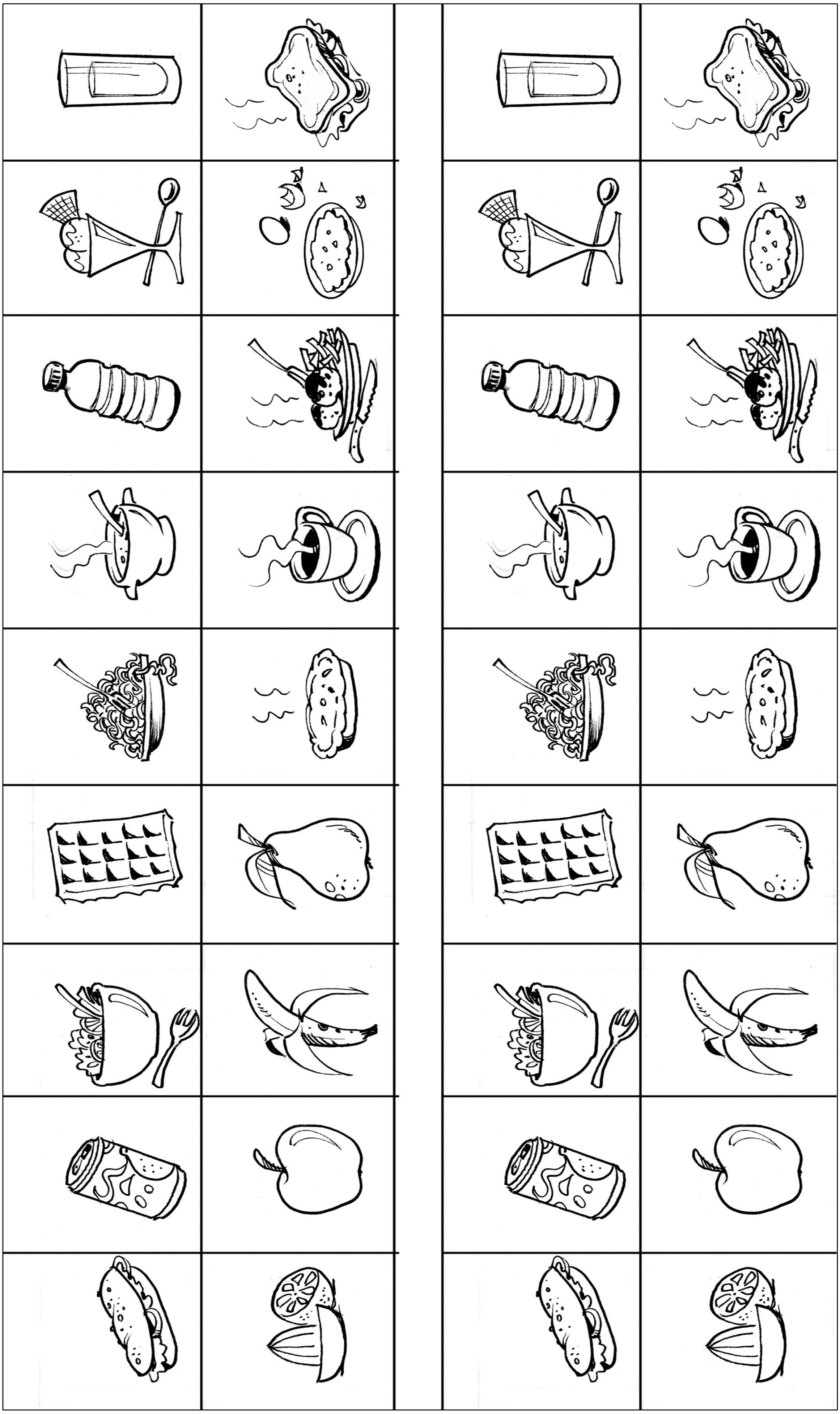
- 7 € Spaghetti
- 6 € Salade variée
- 4 € Omelette du chef
- 3 € Sandwich
- 2 € Potage
- 4 € Quiche végétarienne
- 8 € Boulettes sauce tomates

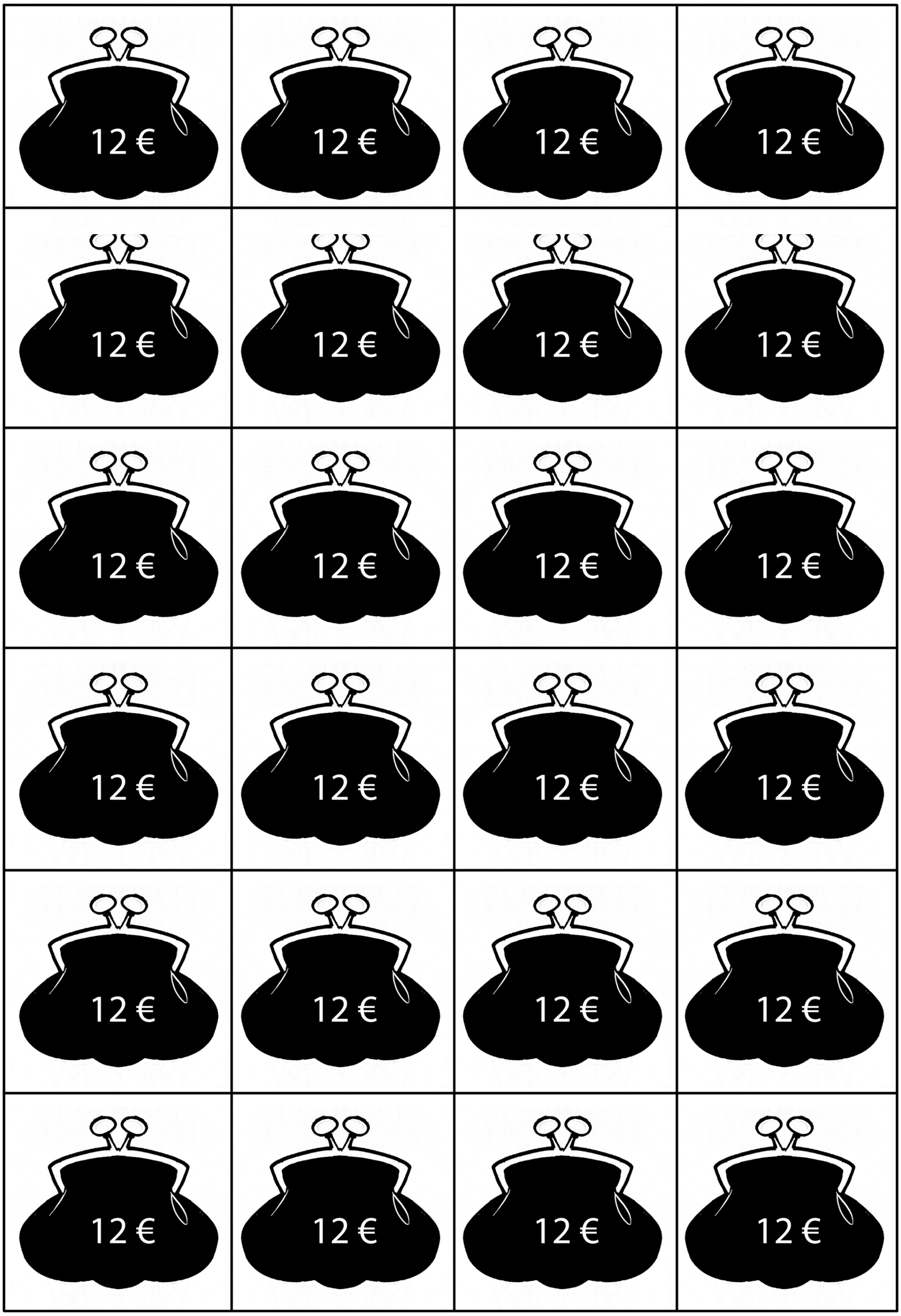
Boissons

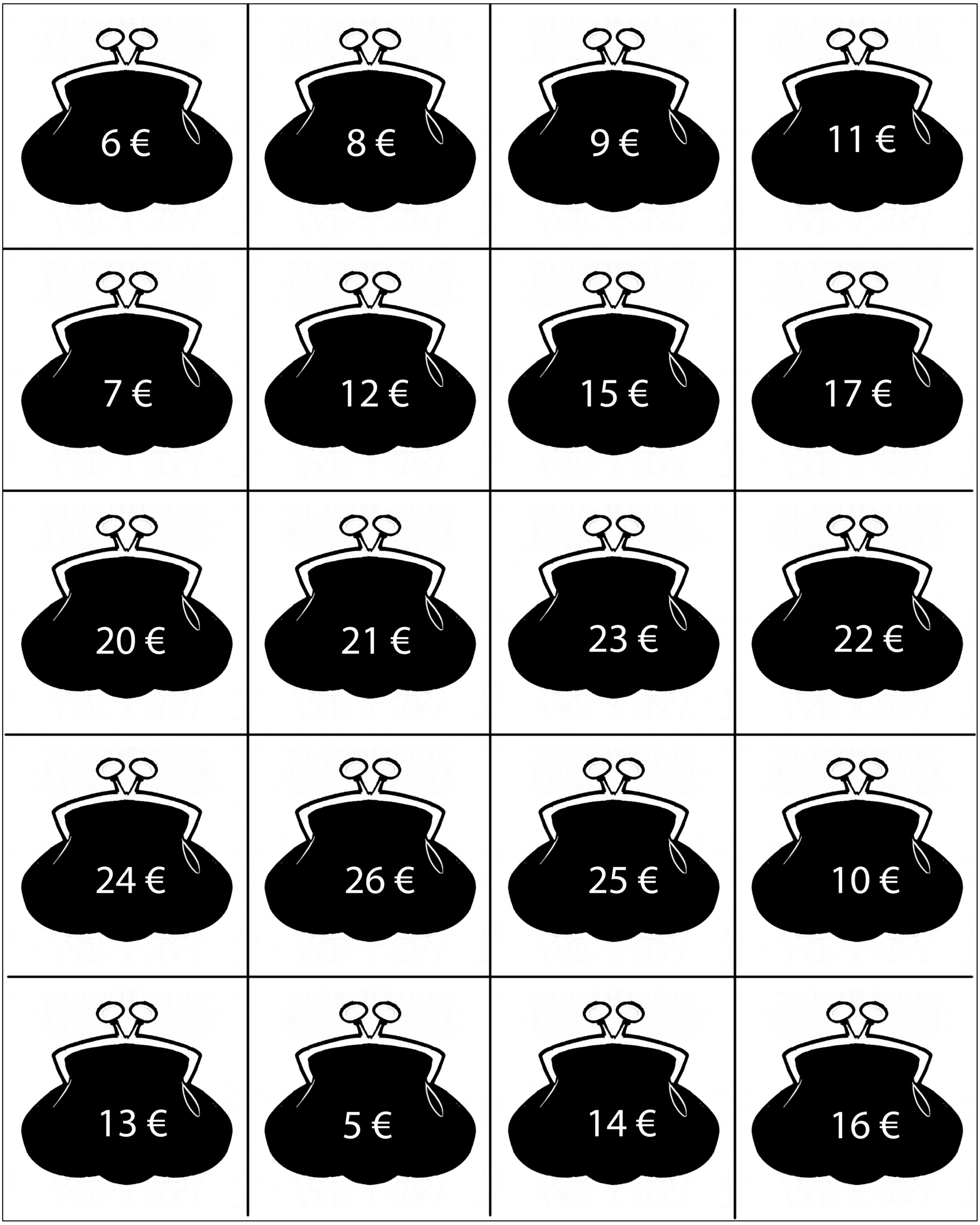
- 1 € Verre de lait
- 2 € Soda
- 3 € Jus d'orange pressé
- 2 € Grande bouteille d'eau
- 2 € Café

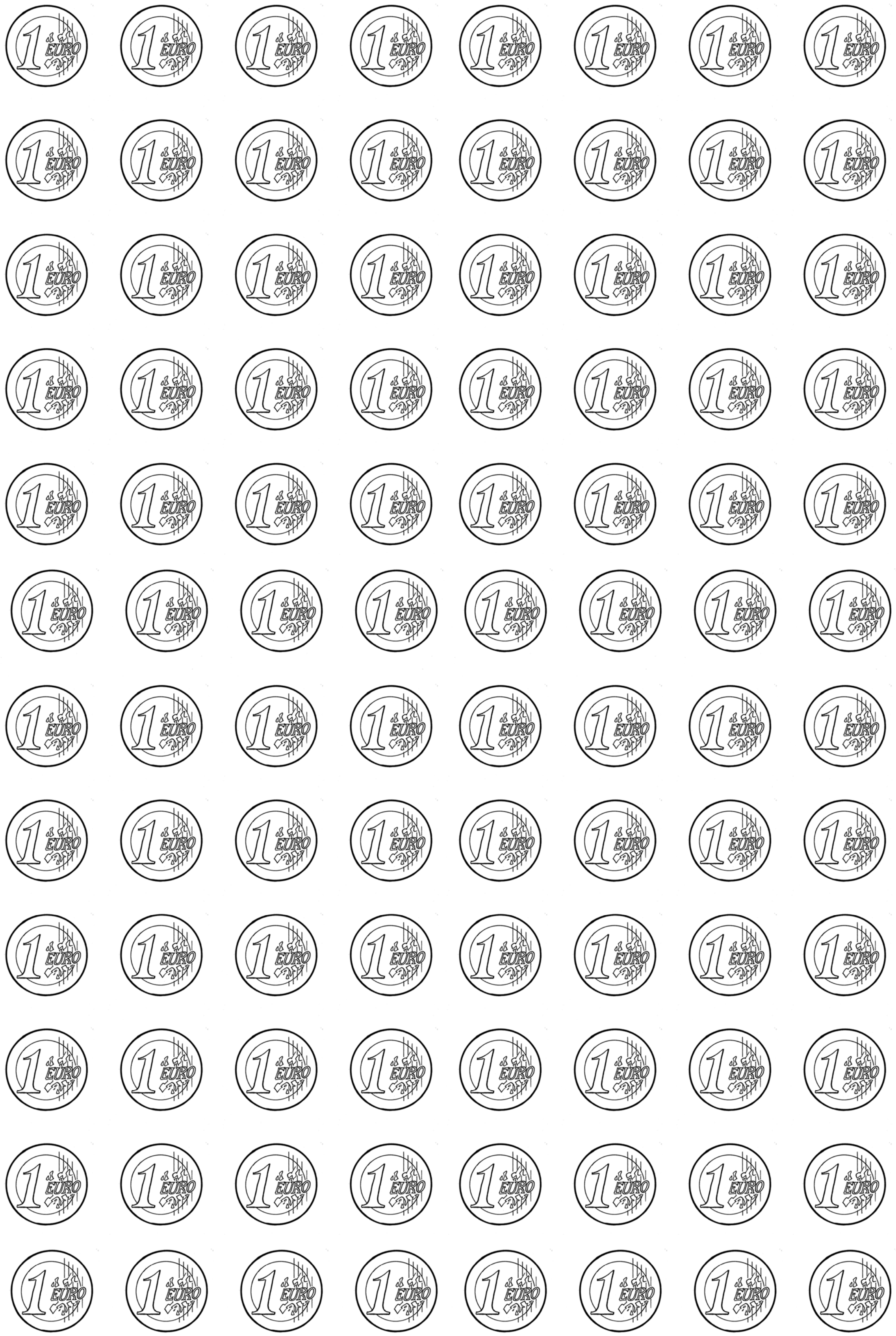
Desserts

- 1 € Pomme
- 2 € Sorbets citron
- 1 € Poire
- 1 € Gaufre
- 1 € Banane




12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €
12 €


6 €
8 €
9 €
11 €
7 €
12 €
15 €
17 €
20 €
21 €
23 €
22 €
24 €
26 €
25 €
10 €
13 €
5 €
14 €
16 €



À LA PISCINE

Mise en situation

La situation simule une activité qui se déroule à la piscine où des nageurs entrent et sortent de l'eau. L'objectif est de trouver le nombre de nageurs présents dans l'eau à la fin de la situation racontée ou de trouver ce qui s'est passé lors d'une des étapes intermédiaires.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

- Les problèmes proposés ici combinent de multiples transformations : il s'agit de comptabiliser ces actions et, pour ce faire, de trouver différentes façons de symboliser (de façon informelle, à l'aide d'un dessin ou de façon plus formelle, à l'aide de calculs) les différentes actions d'ajout et de retrait.

Compétences transversales

Résoudre, raisonner et argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres.

- Les élèves devront expliquer leurs démarches et argumenter leurs solutions.

Appliquer et généraliser : « se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes ».

- Il s'agit de mobiliser à bon escient les outils mathématiques adéquats ; autrement dit, d'utiliser les opérations mathématiques qui correspondent au déroulement de la situation racontée et aux diverses actions d'ajout et de retrait qui surviennent.

Progression de l'activité

L'enseignant raconte une situation à ses élèves et leur demande d'imaginer différentes démarches pour trouver la solution.

Exemple de situation à raconter.

La piscine ouvre à 9 heures du matin. Il y a 5 nageurs qui entrent dans l'eau. Après une demi-heure, 2 nageurs supplémentaires arrivent. À 10 heures, 6 personnes s'ajoutent aux nageurs déjà présents. Combien y a-t-il, maintenant, de nageurs dans l'eau ?

(Autre question possible : combien y avait-il de nageurs avant 10 heures du matin ?)

Plusieurs idées peuvent être formulées :
- on dessine la situation ;
- on compte au fur et à mesure ce qui se passe ;
- on joue la situation ;
- …

1re étape : vivre la situation.

Les élèves vivent la situation concrètement au fur et à mesure que l'enseignant la raconte (ex. déposer une corde au sol pour délimiter l'espace de la piscine). À la fin de la situation, on peut compter le nombre de nageurs présents dans la piscine.

2e étape : résoudre la situation.

L'enseignant propose de nouvelles situations du même genre, en modifiant le nombre d'entrées et de sorties de la piscine.

Les situations proposées doivent être simples de manière à ce que les élèves puissent les résoudre par comptage mental, par comptage verbal ou en comptant sur leurs doigts.

Les situations sont jouées symboliquement par un ou plusieurs élèves (boite opaque en plastique avec un fond d'eau + bouchons de liège), ce qui permettra la vérification de la solution *a posteriori*.

Une boite opaque en plastique avec un fond d'eau fera office de piscine miniature et les bouchons de liège représenteront les nageurs. Les élèves ne devront pas voir l'intérieur de la piscine ; ce n'est qu'à la fin qu'ils découvriront la solution en dénombrant les nageurs qui sont encore dans l'eau.

3e étape : représenter la situation.

L'enseignant présente maintenant des situations plus complexes afin de motiver le recours à des représentations dessinées. Des situations plus complexes peuvent être obtenues en augmentant le nombre d'actions survenant entre le début et la fin de la situation, en augmentant le nombre de personnes entrant ou sortant de la piscine lors des différentes étapes ou en changeant la position de l'inconnue (ex. il reste maintenant 11 personnes dans la piscine, combien de personnes en sont sorties ?).

Des feuilles et des crayons sont mis à disposition des élèves de façon à leur permettre de représenter la situation par dessin et/ou de réaliser divers calculs.

Il est intéressant que la situation soit toujours jouée en parallèle avec le matériel symbolique (la boite et les bouchons) pour permettre une vérification a posteriori.

L'enseignant raconte de nouvelles situations et les élèves essaient de les représenter et de les résoudre individuellement.

4e étape : inventer de nouvelles situations.

Un élève invente une situation et la raconte à son groupe ; les trois autres essaient de la représenter par un dessin et de la résoudre. L'élève qui invente la situation la joue en même temps à l'aide de la boite en plastique et des bouchons, sans montrer ses manipulations aux élèves de son groupe (placer un écran du genre classeur,…).

Lorsque le problème est résolu, les élèves du groupe confrontent leurs dessins, leurs calculs et leurs solutions. Ils confrontent également les solutions avec la réponse obtenue par l'élève qui a joué l'histoire avec la boite en plastique et les bouchons.

Chacun des élèves du groupe inventera une situation à tour de rôle.

Exemple de situation plus complexe.

La piscine ouvre à 9 heures du matin. Il y a 8 nageurs qui entrent dans l'eau. Une demi-heure plus tard, une classe de 2e primaire arrive et il y a seulement 15 élèves de la classe qui vont nager car les autres sont malades. Au même moment 3 nageurs sortent de l'eau. Des 15 élèves nageurs, 7 doivent passer leur brevet tandis que les autres sortent de l'eau et vont s'habiller.
Combien y a-t-il de nageurs dans l'eau maintenant ?
Combien y a-t-il eu de nageurs en tout ce matin ?
Combien d'élèves ont été s'habiller car ils ne passaient pas le brevet ?
Sur les 8 premiers nageurs, combien sont restés dans l'eau après l'arrivée de la classe de 2e primaire ?

Types d'erreurs anticipées	**Gestion de ces erreurs**
- Utilisation de certaines données inutiles (ex. 9h) ou oubli de certaines données importantes (ex. oubli d'une action comme « 3 nageurs sortent de la piscine »). - Indications peu claires ou inexistantes des actions d'ajout ou de retrait (ex. dessiner les personnages cités, mais sans que l'on puisse identifier s'ils entrent dans la piscine ou s'ils en sortent). - Erreurs de dénombrement. - Difficulté à traduire le dessin réalisé en une suite de calculs. - Difficulté dans la compréhension de la situation, surtout lorsque la position de l'inconnue est modifiée (ex. trouver ce qui s'est passé à telle heure sachant qu'il y a 13 personnes dans la piscine à la fin).	- L'incitation des élèves à produire des représentations dessinées et l'exploitation de ces représentations devraient aider les élèves à prendre conscience des éléments importants à prendre en compte lorsque l'on tente de se représenter un problème. - À chaque étape, le recours au matériel symbolique permet de vérifier la solution finale. En cas de désaccord, on peut rejouer l'histoire avec ce matériel et vérifier au fur et à mesure le dessin réalisé, de façon à déterminer à quelle étape l'erreur s'est produite. - Par ailleurs, la recherche de différentes façons de symboliser les actions d'ajout et de retrait devrait aussi aider à donner du sens aux opérations additives et soustractives.

Matériel

► Une corde.

► Des boites opaques en plastique (piscine) et des bouchons de liège (nageurs).

► Une feuille et un crayon ordinaire par élève pour représenter la situation par dessin et pour réaliser divers calculs.

Organisation de la classe

- Pour l'étape 1, délimiter à l'aide d'une corde un espace libre qui représenterait la piscine et désigner les élèves qui vont représenter les nageurs.
- Pour les étapes 2 et 3, les élèves peuvent travailler individuellement et la confrontation - correction peut se mener de façon collective.
- Pour l'étape 4, il est proposé de mettre les élèves en petits groupes.

Notes et réflexions

Ce genre d'activité peut se faire tout au long du cycle 5-8 et aussi par la suite, en modifiant la complexité des situations. En troisième maternelle, on favorisera le dénombrement et les représentations dessinées.
Dès la première primaire, les élèves seront invités à réaliser des opérations de façon à donner du sens aux soustractions et aux additions en lien avec les situations jouées et représentées.

Cette activité s'inspire d'une activité proposée dans un article scientifique s'intéressant à la production de symbolisations informelles par les enfants : Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L. & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research, 39,* 41-58. Pour en savoir plus, voir aussi Fagnant, A., Hindryckx, G. & Demonty, I. (2008). *La résolution de problèmes au cycle 5-8. Présentation d'un outil méthodologique à l'usage des enseignants. Informations pédagogiques, 60, 3-14.*

LE JEU DES TRÉSORS

Mise en situation

Les élèves sont invités à jouer au jeu des trésors. L'enseignant présente le jeu et demande aux enfants d'émettre des hypothèses sur la manière de jouer.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

- Le jeu proposé nécessite de reconnaitre des opérations additives et soustractives et de les résoudre.

Compétences transversales

Il est difficile de préciser d'emblée les compétences transversales mobilisées dans cette activité, cela dépendra du type d'exploitations qui en sera fait.

Progression de l'activité

Règles du jeu

Le jeu peut se jouer à 2, 3 ou 4 joueurs.
Le gagnant est celui qui possèdera le plus de trésors à l'arrivée (plateau de jeu – voir annexe 1)

Les joueurs déterminent ensemble, parmi les objets possibles, ceux qui représenteront les trésors (boutons, bouchons, dessins, etc. ou voir annexe 2).

Chaque joueur lance le dé. Celui qui a obtenu le plus grand nombre commence.
Ensuite, l'ordre des joueurs est déterminé par le sens des aiguilles d'une montre.
A tour de rôle, chaque joueur lance le dé et avance son pion du nombre de cases indiqué par le dé.

Si le pion s'arrête sur une case « opération » (ex. « + 3 »), le joueur concerné gagne ou perd le nombre de trésors indiqué.

Si le pion s'arrête sur une case « **+** ? » ou « **-** ? », le joueur relance le dé pour déterminer le nombre de trésors gagnés ou perdus.

Le plateau de jeu présente certains « raccourcis ».

Si le pion s'arrête sur la case 4, il faut le déplacer sur la case 11.
Si le pion s'arrête sur la case 10, il faut le déplacer sur la case 17.
Si le pion s'arrête sur la case 19, il faut le déplacer sur la case 9.
Si le pion s'arrête sur la case 25, il faut le déplacer sur la case 22.
Si le pion s'arrête sur une case « soustraction » et que le joueur n'a pas assez de trésors, il doit rendre ceux qu'il possède et retourner à la case « départ ».

Variantes

- Définir, par un lancer de dé en début de partie, le nombre de trésors que l'on attribue à chacun avant de débuter.

- Remplacer le dé par un jeu de cartes (cartes de 1 à 10 sans les cartes-figures). Placer ce paquet retourné sur la table, prendre la 1re carte de ce paquet. Cette carte indique le nombre de cases dont il faut avancer (ici de 1 à 10).

- Pour terminer le jeu, être obligé d'arriver exactement sur la case « arrivée ». Si ce n'est pas le cas, continuer par un retour en arrière (comme au jeu des petits chevaux).

- Demander aux enfants de modifier les règles du jeu.

Activités

Présenter le jeu (plateau et matériel – voir annexes 1 et 2) et demander aux enfants d'émettre des hypothèses sur la manière de jouer (les règles).

Les enfants découvrent ensuite les règles (voir annexe 3) et jouent quelques parties pour bien les intégrer.

Ensuite quelques activités peuvent être proposées :

- un enfant observe une partie et la commente en insistant bien sur les opérations réalisées ;
- faire expliquer, par un enfant, quelques étapes (ex. Julie possède 5 trésors au départ. Son dé indique 4. Que se passe-t-il ?) ;
- demander d'expliquer une phase de jeu dont le résultat serait par exemple 7 trésors (Luc a déjà 8 trésors et se trouve sur la case 10. Il obtient 1 avec son dé et va alors sur la case 11 qui indique « + 2 ». Au tour suivant, il obtient « 2 » au lancer de dé et se déplace alors sur la case 13 qui indique « -3 ». Il lui reste alors 7 trésors) ;
- un observateur prend note de tout le parcours de chaque joueur afin de vérifier en fin de partie si le nombre de trésors de chaque enfant est correct ;
- trouver un chemin possible effectué par un joueur sachant qu'il n'avait pas de trésor au départ et 7 trésors (par exemple) à l'arrivée.

Types d'erreurs anticipées	**Gestion de ces erreurs**
- Oublier de respecter certaines consignes.	- Relire la règle concernée avec l'enfant.
- Ne pas effectuer correctement l'opération (erreur de calcul).	- Vérifier le résultat : dénombrer les trésors (manipulation).
- Se tromper d'opération (inversion +/-).	- Vérifier l'intitulé de la case.
- Erreur de déplacement.	- Vérifier le nombre indiqué sur le dé et sur le parcours du jeu.

Matériel

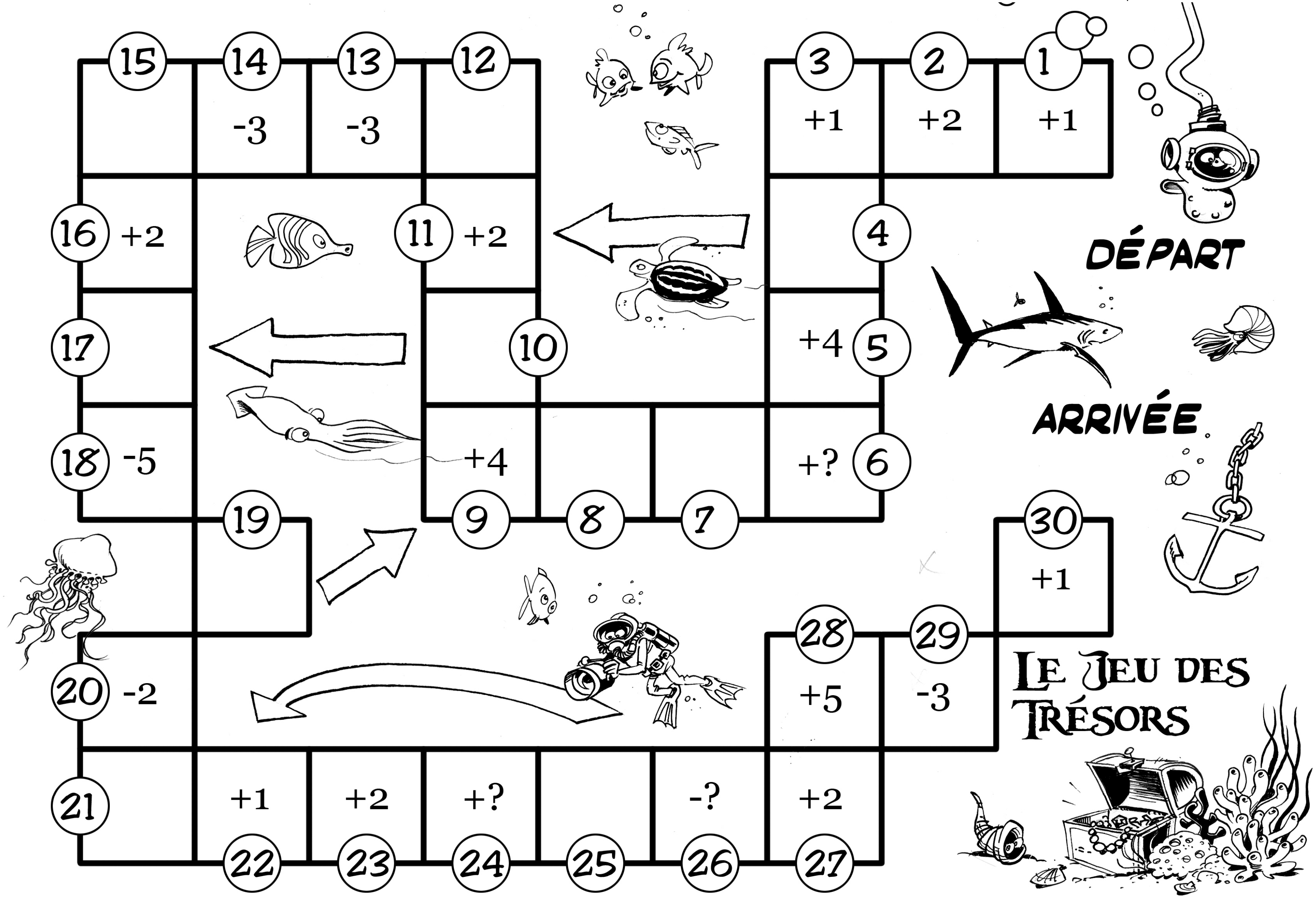
► Un grand plateau de jeu pour la présentation (A4 à photocopier en A3 – voir annexe 1).
► Plusieurs plateaux de jeu (un par groupe d'enfants).
► Un dé ou des cartes à jouer.
► Un pion par élève.
► Des trésors (à définir avec les enfants ou voir annexe 2).
► Quelques feuilles blanches et des crayons.
► La règle du jeu (voir annexe 3)

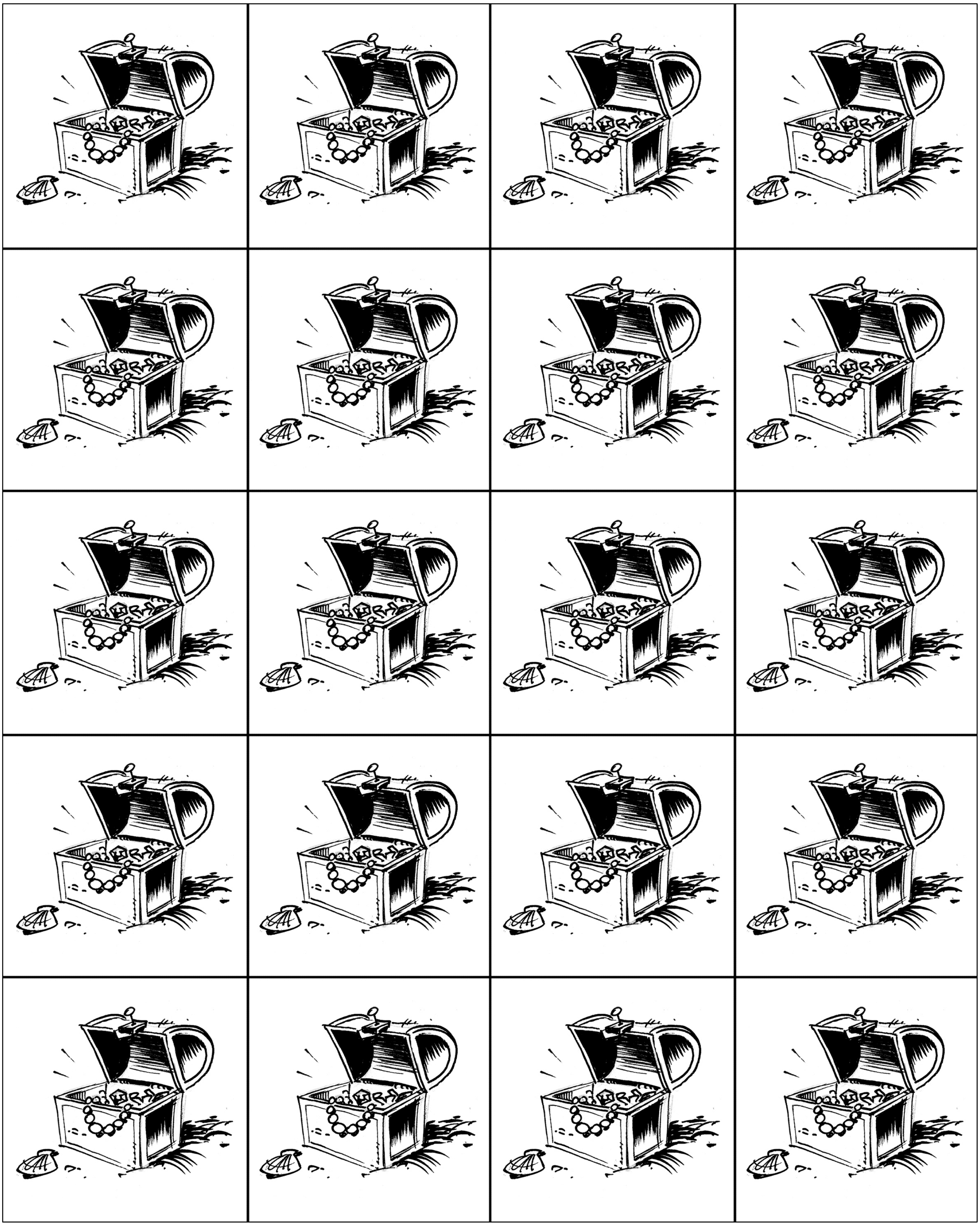
Organisation de la classe

- En groupe classe avec le plateau de jeu en format A3 pour la découverte du jeu.
- En petits groupes avec plusieurs plateaux en format A4 pour les phases de jeu et les autres activités.

Notes et réflexions

Des activités mathématiques s'appuyant sur des jeux de plateau peuvent être développées tout au long de la scolarité. Une autre activité de ce type avait été proposée dans les pistes didactiques de 2005/2006 (mars 2006) téléchargeable sur le site enseignement.be à l'adresse suivante :http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=2780


DÉPART
ARRIVÉE
LE JEU DES TRÉSORS
1 +1
2 +2
3 +1
4
5 +4
6 +?
7
8
9 +4
10
11 +2
12
13 -3
14 -3
15
16 +2
17
18 -5
19
20 -2
21
22 +1
23 +2
24 +?
25
26 -?
27 +2
28 +5
29 -3
30 +1



Règles du jeu

LE JEU DES TRÉSORS

MATÉRIEL

Le plateau de jeu.
Les trésors.
Les dés ou les cartes à jouer.
Les pions.

NOMBRE DE JOUEURS

De 2 à 4 joueurs.

BUT DU JEU

Le gagnant est celui qui possèdera le plus de trésors à l'arrivée.

DÉROULEMENT DU JEU

Chaque joueur lance le dé. Celui qui a obtenu le plus grand nombre commence.

Ensuite, l'ordre des joueurs est déterminé par le sens des aiguilles d'une montre.

A tour de rôle, chaque joueur lance le dé et avance son pion du nombre de cases indiqué par le dé.

Si le pion s'arrête sur une case « opération » (exemple : « +3 » ou « - 3 »), le joueur concerné gagne ou perd le nombre de trésors indiqué.

Si le pion s'arrête sur une case « + ? » ou « - ? », le joueur relance le dé pour déterminer le nombre de trésors gagnés ou perdus.

Le plateau de jeu présente certains « raccourcis ».

Si le pion s'arrête sur la case 4, il faut le déplacer sur la case 11.
Si le pion s'arrête sur la case 10, il faut le déplacer sur la case 17.
Si le pion s'arrête sur la case 19, il faut le déplacer sur la case 9.
Si le pion s'arrête sur la case 25, il faut le déplacer sur la case 22.
Si le pion s'arrête sur une case « soustraction » et que le joueur n'a pas assez de trésors, il doit rendre ceux qu'il possède et retourner à la case « départ ».

Le jeu s'arrête lorsque tous les joueurs sont passés par la case arrivée. Le gagnant est celui qui a le plus de trésors à l'arrivée.

DES PROBLÈMES DE TYPE COMBINAISON, CHANGEMENT ET COMPARAISON

Mise en situation

Cette fiche propose une méthodologie générale et une structuration des apprentissages pour développer la résolution de problèmes dans des situations assez classiques que l'on pourrait qualifier de « leçons de problèmes ».

Plus précisément ici, on propose quelques lignes d'actions qui devraient permettre de dépasser les exercices de type « opérations habillées » (visant à appliquer les opérations apprises en classe) pour proposer de véritables problèmes aux élèves, nécessitant réflexion et analyse et leur permettant de développer des démarches informelles de résolution.

Les exemples proposés ici portent sur des problèmes additifs et soustractifs, mais le même type d'approche peut être développé avec des problèmes se résolvant par multiplications ou divisions.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

- Il s'agit de résoudre une série de problèmes verbaux permettant de donner divers visages aux opérations additives et soustractives.

Compétences transversales

Analyser et comprendre un message : revivre la situation, la rattacher à son environnement… ; distinguer, sélectionner les informations utiles des autres, etc.

- Revivre la situation et la rattacher à son vécu doit aider à comprendre les problèmes et à en construire une représentation appropriée.
- Certains énoncés proposent des données inutiles et nécessitent donc une sélection des données pertinentes.

Résoudre, raisonner et argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres, etc.

- Lors des mises en commun, les élèves seront amenés à expliquer leurs démarches de résolution et à argumenter leurs solutions.

Appliquer et généraliser : se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes.

- Il s'agit de mobiliser à bon escient les outils mathématiques adéquats ; c'est-à-dire d'utiliser les opérations appropriées pour résoudre les différents problèmes.

Quelques propositions méthodologiques

1. S'appuyer sur des **typologies de problèmes** pour construire des problèmes qui donnent des significations variées aux opérations arithmétiques (*voir le deuxième encadré du point V « Pourquoi ce type d'approche ? », pp. 49-50*). Avec les jeunes élèves, l'enseignant peut lire les problèmes à voix haute afin de palier aux difficultés de lecture.

2. **Toujours varier les types de problèmes proposés** au sein d'une même séquence pour que les élèves résolvent réellement des problèmes et n'appliquent pas simplement des calculs.

3. Proposer épisodiquement des problèmes incluant des **données inutiles**. Veiller à ce que les **mots-clés** n'induisent pas toujours les opérations à réaliser (exemples de mots-clés qui induisent l'opération *: si on dit « gagner », je fais une addition ; si on dit « reste », je fais une soustraction*) sinon cela risque de favoriser le développement de démarches superficielles. Proposer de temps en temps des problèmes **impossibles** (problèmes absurdes ou avec des données manquantes) **ou problématiques** (problèmes nécessitant la prise en compte de certaines contraintes réalistes des situations[3]).

4. Mettre du **matériel manipulable** à disposition des élèves (des bouchons, des petits blocs, des pièces, etc.) et les inviter à résoudre les problèmes à l'aide de ce matériel. Ceci leur permettra de développer des stratégies informelles de résolution, basées sur le dénombrement d'objets. Il est aussi intéressant d'inciter les enfants à représenter leur démarche de comptage par un dessin et à chercher à créer des liens entre ces représentations et les calculs (autrement dit, à « traduire » leur dessin ou leur démarche de comptage par un calcul et donc à créer des liens entre leurs démarches informelles de résolution et les calculs formels).

   A d'autres moments (*démarche à privilégier en 2e et 3e primaires)*, plutôt que de mettre du matériel manipulable à disposition des élèves, on peut les inviter à construire des représentations dessinées ou schématiques de problèmes. Ceci permet alors de travailler la sélection d'informations et d'utiliser éventuellement des représentations mathématiques comme le diagramme de Venn ou les graphes fléchés par exemple. Les liens entre ces diverses représentations et les calculs devraient encore permettre d'étendre les significations attribuées aux opérations arithmétiques.

5. **Confronter les différentes démarches de résolution** développées par les élèves de façon à ce qu'ils prennent conscience qu'il n'y a pas qu'une et une seule façon de résoudre un problème. Ces phases de confrontations obligent les élèves à expliciter leur démarche de résolution. De même, la découverte des stratégies d'autrui peut les aider à progresser dans leurs propres démarches de résolution.

   La confrontation de calculs standards (présentant la réponse derrière le signe d'égalité – ex. 12 – 5 = ?) et des calculs relationnels (correspondant à la structure des problèmes – ex. 5 + ? = 12) peut également être envisagée lorsque le cas se présente.

[3] Les problèmes « problématiques » ont fait l'objet d'études approfondies réalisées par des chercheurs de l'Université de Leuven. Voir notamment : Verschaffel, L. & De Corte, E. (2005). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?(pp.*153-176). Bruxelles : De Boeck.

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Le niveau de difficulté des problèmes varie en fonction de leurs catégories (les problèmes de type comparaison sont les plus complexes) et de la position de l'inconnue à rechercher (les problèmes sont plus complexes lorsque l'inconnue se situe à l'état intermédiaire → a + ? = b, ou plus encore à l'état initial → ? + a = b, que lorsqu'elle se situe à l'état final → a + b = ?). - Les problèmes présentant des données inutiles seront également plus complexes que ceux n'en présentant pas ; les problèmes absurdes ou problématiques (possibilité de réponses multiples acceptables) risquent également de déstabiliser quelque peu les élèves.	- Le recours à la manipulation permet aux élèves de « jouer » l'histoire racontée dans le problème : cela leur permet de résoudre une variété de problèmes par dénombrement. - L'incitation des élèves à produire des représentations dessinées et l'exploitation de celles-ci devraient également aider les élèves à prendre conscience des éléments importants à prendre en compte lorsque l'on tente de se représenter un problème. - Les moments de débats et de confrontations des démarches et des solutions devraient également constituer des temps forts pour la gestion des difficultés et des erreurs.

Matériel

► Mettre du matériel manipulable (des bouchons, des petits blocs, des pièces, etc.) à disposition des élèves et/ou leur proposer des feuilles blanches et des crayons pour réaliser des représentations dessinées.

Organisation de la classe

• Variable, au choix de l'enseignant.

Notes et réflexions

Quelques exemples d'énoncés variés sont proposés en annexe. Chaque problème est commenté en lien avec les propositions méthodologiques présentées à la page précédente (type de problèmes, présence de données inutiles ou de mots-clés inverses à l'opération attendue, problèmes impossibles ou « problématiques », etc.)

- *Pour plus de détails sur une typologie de problèmes additifs et soustractifs permettant de construire des problèmes variés, voir le deuxième encadré du point V « Pourquoi ce type d'approche ? » (pp. 49-50).*

Ce type d'activité peut être développé en continuité en 1re, 2e et 3e primaires, moyennant des adaptations de la longueur des énoncés et de la taille des nombres impliqués. Étant donné que ce sont des situations plus formelles qui sont proposées comme point de départ, ce type d'activité ne convient sans doute pas aux enfants de maternelle.

Cette fiche s'appuie sur des travaux réalisés par des chercheuses de l'Université de Liège. Pour en savoir plus, voir Fagnant, A., Hindryckx, G. & Demonty, I. (2008). *La résolution de problèmes au cycle 5-8. Présentation d'un outil méthodologique à l'usage des enseignants. Informations pédagogiques, 60,* 3-14.

Quelques exemples d'énoncés variés

1. **Pablo participe à la brocante organisée par son école. Il a décidé de vendre ses petites voitures : il en a 25 qui sont encore en bon état. Cédric se rend au stand de Pablo et lui explique qu'il a déjà 8 petites voitures dans sa collection mais qu'il aimerait en avoir 12 au total pour remplir son garage. Combien de petites voitures Cédric devrait-il acheter à Pablo pour remplir son garage ?**

   Note – Il s'agit d'un problème de type « changement » avec recherche du terme intermédiaire (de la transformation). Le problème présente une donnée inutile.

2. **Sébastien et Anne jouent plusieurs parties de billes. En début de partie, Sébastien a 32 billes et Anne en a 24. Sébastien gagne 4 billes à la partie du matin, il en perd 6 à la partie de midi et il en perd encore 5 à la partie du soir. Combien de billes Sébastien a-t-il à la fin de la journée ? Et Anne ?**

   Note – Il s'agit d'un problème de type « changement » avec recherche du terme final. Pour rechercher le nombre de billes que possède Sébastien en fin de partie, les mots-clés correspondent à l'opération attendue (il en a 32 et il en « gagne » 4 ➔ 32 + 4, etc.). Toutes les transformations doivent ensuite être inversées pour rechercher le nombre de billes possédées par Anne en fin de partie (« Sébastien gagne 4 billes ➔ Anne perd 4 billes, etc.).

   2bis. **Lors d'une autre partie de billes, Sébastien a perdu 13 billes, puis il a encore perdu 5 billes. Combien a-t-il perdu de billes lors de cette partie ?**

   Note – La version bis du problème confronte d'emblée les élèves avec des mots-clés inverses à l'opération attendue : le terme « perdu » apparait trois fois alors qu'il convient d'additionner les données !

3. **Paola a 8 ans. Elle aimerait acheter un cadeau pour son frère qui va fêter ses 10 ans. Elle sait qu'il aime les bandes dessinées, mais il en a déjà 5. Il aime aussi les crayons de couleur, mais il en a déjà 3 boites. Elle voit un beau livre à 12 euros, mais c'est trop cher car elle n'a que 5 euros. Elle voit aussi un jeu à 4 euros, mais son frère l'a déjà. Combien d'argent Paola a-t-elle dépensé pour l'anniversaire de son frère ?**

   Note – Ce problème est impossible à résoudre puisqu'on ne sait pas ce que Paola a finalement acheté.

4. **Samira a 17 ballons pour décorer sa maison pour son anniversaire. Elle a des ballons bleus, des jaunes et des rouges. Elle en a compté 5 bleus et 2 rouges. Combien possède-t-elle de ballons jaunes ?**

Note – Il s'agit d'un problème de type « combinaison » (autrement dit, un problème de type parties-tout) impliquant la recherche d'une partie.

5. **Dans la classe, il y a 12 filles et 13 garçons. Quel est l'âge de l'institutrice ?**

Note – Ce problème absurde est évidemment impossible à résoudre. Par le passé, des chercheurs français ont toutefois montré que les élèves étaient nombreux à proposer une solution à ce type de problèmes. L'exemple classique est celui de « L'âge du Capitaine » : on donne le nombre de chèvres et de moutons présents sur un bateau… et les enfants trouvent l'âge du Capitaine en additionnant les données chiffrées !

6. **Bertrand et Christelle collectionnent les timbres. Bertrand possède 7 timbres et Christelle en a 12. Combien de timbres Christelle a-t-elle de plus que Bertrand ?**

Note – Il s'agit d'un problème de type « comparaison» avec recherche du terme comparatif. Une démarche superficielle s'appuyant sur le mot-clé (« de plus ») conduit à produire l'opération 7 + 12 = ? alors que l'opération attendue est une soustraction (12 – 7 = ?) ou une addition à trou (ou 7 + ? = 12). La présentation des données dans l'ordre « 7, puis 12 » peut également renforcer la démarche superficielle consistant à additionner les deux nombres.

7. **Solenne habite à 5 km de l'école et Yaël habite à 3 km. Quelle distance sépare les maisons des deux enfants ?**

Note – Il s'agit d'un problème « problématique » nécessitant d'envisager la situation d'un point de vue réaliste. Généralement, les élèves résolvent ce type de problèmes en proposant une solution numérique précise (soit « 8 km », soit « 2 km »), mais ils n'envisagent pas la possibilité que ce problème comporte plusieurs solutions. En effet, d'un point de vue réaliste, la solution est même un intervalle puisque toutes les solutions comprises entre 2 et 8, inclus, sont possibles. Si l'intervalle est sans doute trop complexe à appréhender avec les jeunes élèves, il faut a minima envisager les deux cas extrêmes et quelques cas intermédiaires (lorsque les deux maisons et l'école ne sont pas alignées) pour qu'ils prennent conscience que certains problèmes peuvent avoir des solutions multiples.

8. Nevin et sa sœur Zarife ont cueilli des fleurs dans la prairie pour les offrir à leur maman. Nevin a cueilli 5 fleurs blanches et 3 fleurs mauves. Zarife a cueilli 6 fleurs blanches. Combien de fleurs les deux sœurs vont-elles offrir à leur maman ?

Note – Il s'agit d'un problème de type « combinaison » (autrement dit, un problème de type parties-tout) impliquant la recherche du « tout ». Le problème peut aisément être transformé en problème présentant une donnée inutile en demandant « Combien de fleurs blanches les deux sœurs vont-elles offrir à leur maman ? ».

8bis. Un autre jour, Nevin et Zarife ont cueilli 12 fleurs. Nevin a cueilli 5 fleurs et Zarife en a cueilli encore plus. Combien Zarife a-t-elle cueilli de fleurs en tout ?

Note – La version bis du problème implique cette fois la recherche d'une partie. Une démarche superficielle s'appuyant sur les mots-clés (« plus », « en tout »,) conduit à produire l'opération 12 + 5 = ? alors que l'opération attendue est une soustraction (12 - 5 = ?) ou une addition à trou (12 = 5 + ? ou 5 + ? = 12).

9. Nabil et Tisha sont frère et sœur. Nabil a 2 ans et Tisha a 6 ans. Loïc et Camille sont également frère et sœur. Tisha a le même âge que Loïc et elle a 2 ans de moins que Camille. Quel âge Loïc et Camille ont-ils ?

Note – Il s'agit d'un problème de type « comparaison » dans lequel le terme comparatif est donné et où il faut trouver une des deux mesures. Une démarche superficielle s'appuyant sur le mot-clé (« de moins ») risque d'induire l'opération « 6 – 2 = 4 » pour trouver l'âge de Camille. Une difficulté est qu'il faut inverser la relation : « Tisha a 2 ans de moins que Camille » donc « Camille a 2 ans de plus que Tisha » ! Par ailleurs, l'âge de Nabil est une donnée inutile et la recherche de l'âge de Loïc ne nécessite aucun calcul puisqu'il a le même âge que Tisha.

10. Ugo et Cheng sont les deux meilleurs amis du monde. Ils décident de fêter ensemble leur anniversaire et d'inviter des copains de la classe. Chacun prend un papier et écrit le nom des copains qu'il souhaite inviter. Ugo note 5 noms et Cheng en note 8. Combien d'enfants seront invités à la fête ?

Note – Au niveau de la structure, ce problème est un problème de type « combinaison » (ou parties-tout) nécessitant la recherche du tout. Il s'agit toutefois d'un problème « problématique » dans la mesure où la prise en compte de contraintes réalistes affecte la solution. En effet, les deux sous-ensembles d'amis invités ne sont sans doute pas disjoints et il y a de fortes chances que les deux garçons aient noté des noms communs sur leur liste respective. Le nombre maximum d'enfants serait alors 13 (s'il n'y avait aucun recouvrement) mais il pourrait n'y avoir réellement que 8 enfants invités (en cas de recouvrement total entre les deux listes), ou tout nombre compris entre 8 et 13 (en cas de recouvrement partiel).

CONSTRUIRE DES PROBLÈMES EN FAISANT VARIER DE NOMBREUX ÉLÉMENTS

Mise en situation

On propose ici une réflexion visant à aider l'enseignant à construire des problèmes qui peuvent varier selon différentes dimensions portant sur les types d'énoncés d'une part et sur la structuration des solutions d'autre part.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

- Il s'agit de construire et résoudre des problèmes variés.

Compétences transversales

Appliquer et généraliser : se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes.

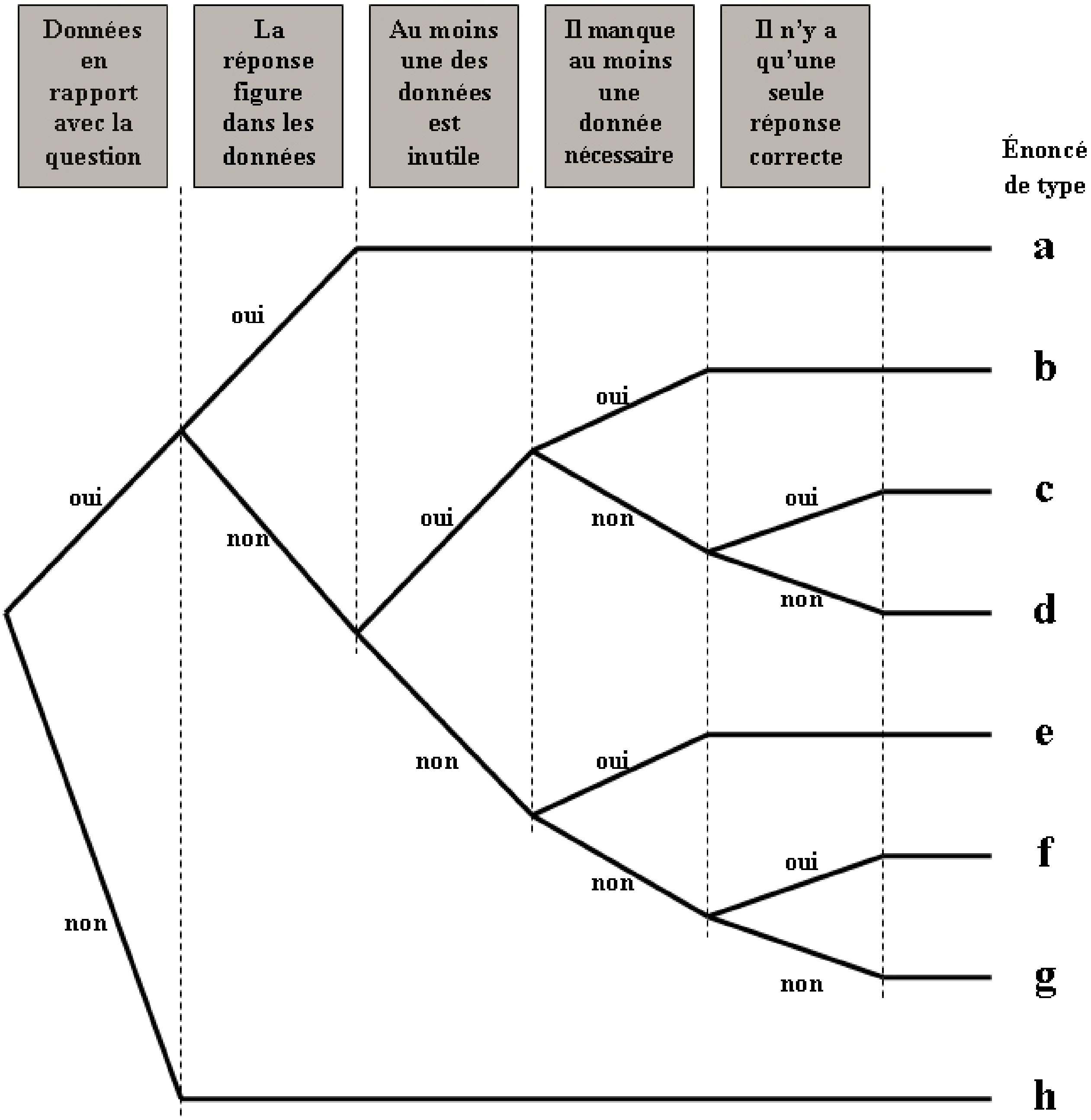
- Il s'agit de mobiliser à bon escient les outils mathématiques adéquats ; c'est-à-dire d'utiliser les opérations appropriées pour résoudre les différents problèmes.

D'autres compétences interviennent également. Elles sont à préciser en fonction des types d'approches méthodologiques qui seront développées.

Quelques propositions pour construire des problèmes variés

1. Une variété de types d'énoncés.

A titre illustratif, l'arbre suivant permet d'imaginer une variété (non exhaustive) de situations problèmes.



Les problèmes les plus fréquents sont ceux de type « f ».
Les données sont en rapport avec la question, la réponse ne figure pas dans les données, il n'y a aucune donnée inutile, il ne manque aucune donnée nécessaire et il n'y a qu'une seule « bonne réponse ».

Un énoncé très simple de type « f » peut être modifié pour correspondre à d'autres types.

Énoncé de type « f ».

- *À la librairie, j'achète un journal à 1 € et une revue à 5 €. Combien dois-je payer ?*

Énoncé de type « a ».

- *J'ai dépensé 6 € à la librairie. J'avais acheté un journal à 1 € et une revue à 5 €. Combien ai-je dû payer ?*

Énoncé de type « c ».

- *À la librairie, les journaux sont à 1 €, la revue de sports de papa coute 5 € et le programme TV est à 2 €. Combien devrais-je payer pour la revue de sports de papa et un journal ?*

Énoncé de type « g ».

- *Voici le tarif à la librairie. Journaux : 1 €, programme TV : 2 €, magazines : 5 €. J'achète deux choses. Que me rendra-t-on si je paie avec un billet de 10 € ?*

2. Différentes structures de solutions.

Les différentes branches de l'arbre permettent de faire varier les types d'énoncés, mais une autre façon de diversifier les situations problèmes consiste aussi à s'attacher aux structures mathématiques des solutions. Les différents cas de figures envisagés ici doivent être considérés comme un guide pour aider l'enseignant à construire des problèmes variés.

Ce sont les calculs standards (présentant la réponse – ici « y » - derrière le signe d'égalité) qui sont proposés ici, mais il ne faut pas perdre de vue que les élèves peuvent développer des démarches variées et qu'une opération de type « a – b = y » peut correspondre au calcul relationnel « b + y = a » (calcul qui est souvent privilégié par les enfants face à certains problèmes correspondant notamment à la recherche d'un terme intermédiaire).

- **Des structures additives.** **$a + b = y$** **$a - b = y$** **$a + b + c = y$**

  Une soustraction pouvant s'écrire sous forme d'une addition [$3 - 2 = 3 + (-2)$], une structure additive comprend des relations formées d'additions ou de soustractions.

- **Des structures multiplicatives.** **$a \times b = y$** **$a : b = y$** **$a \times b \times c = y$ etc.**

  Une structure multiplicative comprend des relations qui comportent une multiplication ou une division.

- **Des structures plus complexes.**

  $(a + b) \times c = y$ **$(a - b) \times c = y$** **etc.**
  $(a + b) : c = y$ **$(a - b) : c = y$**

  $a \times b + c = y$ **$a : b + c = y$** **etc.**
  $a \times b - c = y$ **$a : b - c = y$**

3. Une mise en relation des types d'énoncés et des structures de solution.

Le tableau suivant donne un aperçu de variations que l'on peut obtenir au départ d'un problème simple.

Une classe de 2e année compte 23 élèves. Combien y a-t-il de garçons si je sais que 13 filles sont inscrites dans cette classe ?

Structure de solution	**Énoncés de type …**							
	a	b	c	d	e	f	g	h
a + b = y	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a – b = y	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
a × b = y	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
a : b = y	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
(a + b)×c = y	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
(a – b) : c = y	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
…								

Examinons l'énoncé :
- les données sont en rapport avec la question ;
- la réponse ne figure pas dans les données ;
- aucune donnée n'est inutile (sauf peut-être qu'il s'agit d'une 2e année) ;
- il ne manque aucune donnée nécessaire ;
- il n'y a qu'une seule réponse correcte.

On peut donc dire qu'il s'agit d'un énoncé de type « **f** » (ou de type « c » éventuellement si on considère « 2e année comme une donnée inutile).

Pour résoudre ce problème, l'opération standard est 23 – 13 = (10), ce qui correspond à une structure de solution de type a – b = (y). On classerait alors ce problème dans la case 14 (ou 11 si on a estimé qu'il s'agissait d'un énoncé de type « c »).

NOTE – Les enfants peuvent aussi résoudre ce type de problèmes en utilisant un calcul relationnel de type 13 + (10) = 23. Même si ce calcul correspond formellement à la structure soustractive « a – b = (y) », les jeunes enfants ne sont généralement pas conscients de ces liens. Il est important de leur permettre de produire les deux types de calculs et il est intéressant de les confronter lors des mises en commun.

4. Pour aller plus loin : quelques exercices demandant réflexion…

Les exemples proposés ci-dessous invitent à réfléchir sur les mises en relation entre des types d'énoncés et des structures de solution.

Repérer la typologie d'un énoncé et la structure de solution.

Énoncés	Typologie de l'énoncé	Structure de solution
À la librairie, j'achète un journal à 1 € et une revue à 5 €. Combien dois-je payer ?	**f**	**a + b = y**
J'ai dépensé 6 € à la librairie. J'avais acheté un journal à 1 € et une revue à 5 €. Combien ai-je dû payer ?	**a**	**y = a + b**
Voici le tarif à la librairie. Journaux : 1 €, programme TV : 2 €, hebdomadaires : 5 €. J'achète deux choses. Que me rendra-t-on si je paie avec un billet de 10 € ?	**g**	**a – (b + c) = y**

Inventer des problèmes dont la typologie de l'énoncé et la structure de solution sont données.

Typologie de l'énoncé	Structure de solution	Énoncés
d	**a – b = y**	À la librairie, j'ai payé une revue avec un billet de 5 €. Le marchand m'a rendu une pièce de 2 €. Maintenant, il ne me reste plus que 7 €. Quel était le prix de ma revue ?
e	**a : b = y**	J'ai acheté les deux mêmes magazines TV à la librairie (un pour mes parents et l'autre pour la voisine). Quel est le prix d'un magazine ?
h	**?**	J'achète trois journaux à 1 € pièce et deux revues à 4 € chacune. Combien y avait-il de clients au moment où je suis entré dans la librairie ?

Notes et réflexions

Ce type d'activités peut être développé en continuité en 1re, 2e et 3e primaires, moyennant des adaptations de la longueur des énoncés et de la taille des nombres impliqués. Étant donné que ce sont des situations plus formelles qui sont proposées comme point de départ de l'activité, celles-ci ne conviennent pas aux enfants de maternelle.

CALCULONS, CALCULONS … MAIS COMMENT ?

Mise en situation

Cette fiche propose une série d'exercices visant à travailler ce que l'on pourrait appeler du « calcul réfléchi » en amenant les élèves à se questionner sur le sens des opérations et à développer l'estimation.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.

- Il s'agit ici de donner du sens aux opérations dans divers contextes mathématiques.

Compétences transversales

Il est difficile de préciser d'emblée les compétences transversales mobilisées dans cette activité, cela dépendra du type d'exploitation qui en sera fait.

Différentes activités

Annexe 1 – Les labyrinthes.

Retrouvez votre chemin dans ce labyrinthe de nombres. Le but du jeu est de trouver le parcours permettant de passer d'une case à l'autre. Les cases proposées sont conçues de façon à travailler davantage sur la signification des opérations que sur le calcul d'un résultat précis (dans le premier ex. 6 + 2 = 8 ou 6 – 2 = 4, puis 8 + 2 = 10 ou 8 × 2 =16 ; etc.).

Pour les plus grands, le nombre à l'arrivée peut être la somme de tous les nombres sur lesquels ils sont passés.

Annexe 2.

Retrouver le double, la moitié, le signe qui convient, la(les) opération(s) possible(s).

Annexes 3 (1) et 3 (2) – Le jeu de la cour de récréation.

Petit jeu à réaliser dans la cour de récréation.
Exercice individuel – Recherche – Mise en commun – Débat et argumentation – Synthèse (importance de l'estimation).

Annexe 4.

Effectuez les opérations ou complétez par les opérations.

Les labyrinthes

Colorie le chemin pour sortir

+ 2

6	8	16	14
4	10	20	18
2	12	14	16
0	24	28	18

+ 4

1	4	16	20
5	8	21	25
9	13	17	29
15	19	20	33

×2

2	4	6	12
10	8	16	34
20	14	32	64

- 3

30	33	36	39	30
27	30	28	24	27
24	21	18	16	11
20	19	15	6	3
17	16	12	9	0

Complète en ajoutant le signe (+, -, ×, :) qui convient

20 2 = 40	33 3 = 36
20 2 = 18	33 3 = 30
20 2 = 22	33 3 = 99
20 2 = 10	33 3 = 11

Complète en ajoutant des nombres qui conviennent

20	30	50
_____ + _____	_____ + _____	_____ + _____
_____ - _____	_____ - _____	_____ - _____
_____ : _____	_____ : _____	_____ : _____
_____ × _____	_____ × _____	_____ × _____

Relie chaque nombre à son double

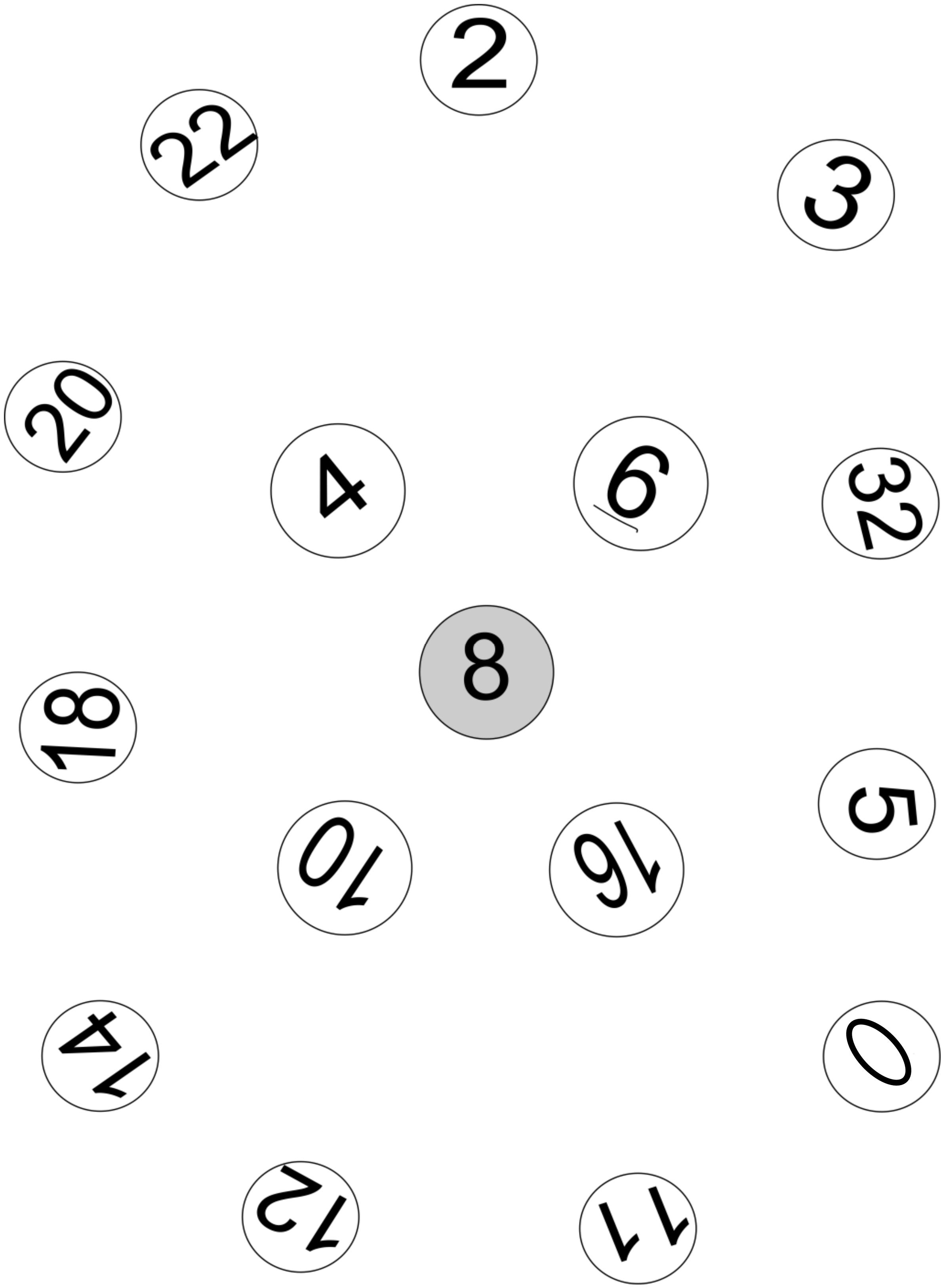
2	•	•	**30**
5	•	•	**16**
10	•	•	**4**
8	•	•	**10**
15	•	•	**20**

Relie chaque nombre à sa moitié

40	•	•	**25**
18	•	•	**20**
6	•	•	**9**
12	•	•	**3**
50	•	•	**6**

Le jeu de la cour de récréation

(voir règles du jeu page suivante)



Règles du jeu

Quatre élèves se positionnent sur la case de départ ⑧.

Les autres élèves sont les observateurs : leur objectif est de retrouver les calculs effectués en observant le déplacement des quatre élèves positionnés sur le chiffre de départ ⑧.
Chaque observateur choisit un élève à observer.

Chaque élève positionné sur le chiffre de départ reçoit une carte blanche (voir ci-dessous) et se place sur la case-réponse sans montrer la carte reçue aux élèves observateurs.

Une fois placés sur une case-réponse, ils reçoivent ensuite une carte grise (voir ci-dessous) et se placent sur la nouvelle case-réponse, toujours sans montrer la carte reçue aux autres élèves.

Débat collectif : les élèves expriment ce qu'ils ont observé. Chacun écoute les différentes observations sur les différents parcours. Les élèves doivent justifier leurs hypothèses et leurs observations.

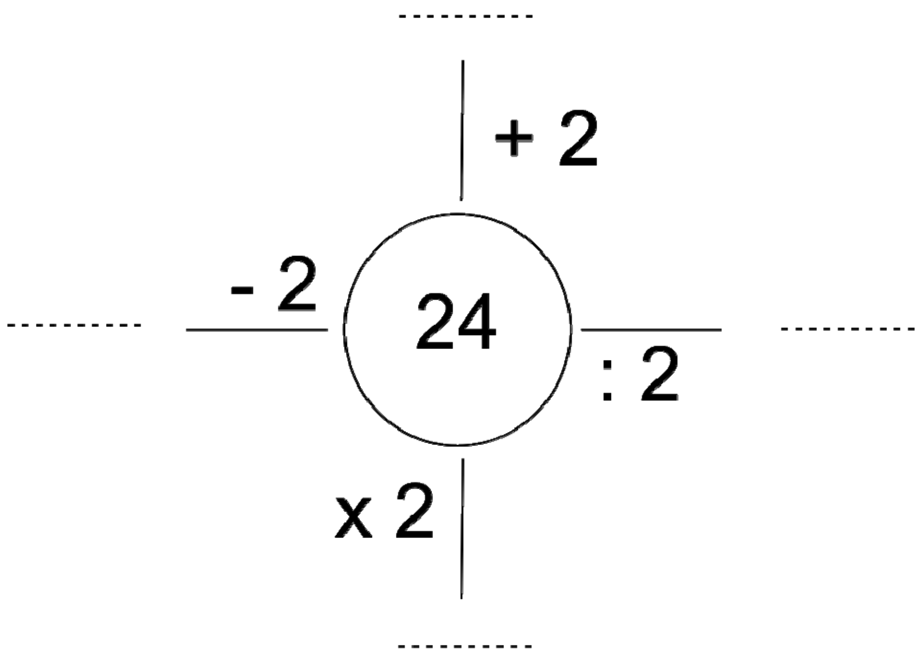
Pour finir, vérification collective du parcours de chacun. Ensuite 4 autres élèves se placent sur la ligne de départ. Les élèves qui observent peuvent aussi noter les opérations effectuées par un des élèves au choix. On peut également montrer l'opération effectuée et les autres élèves deviennent alors vérificateurs du parcours effectué.

Découper les 8 cartes ci-dessous pour les distribuer durant le jeu.

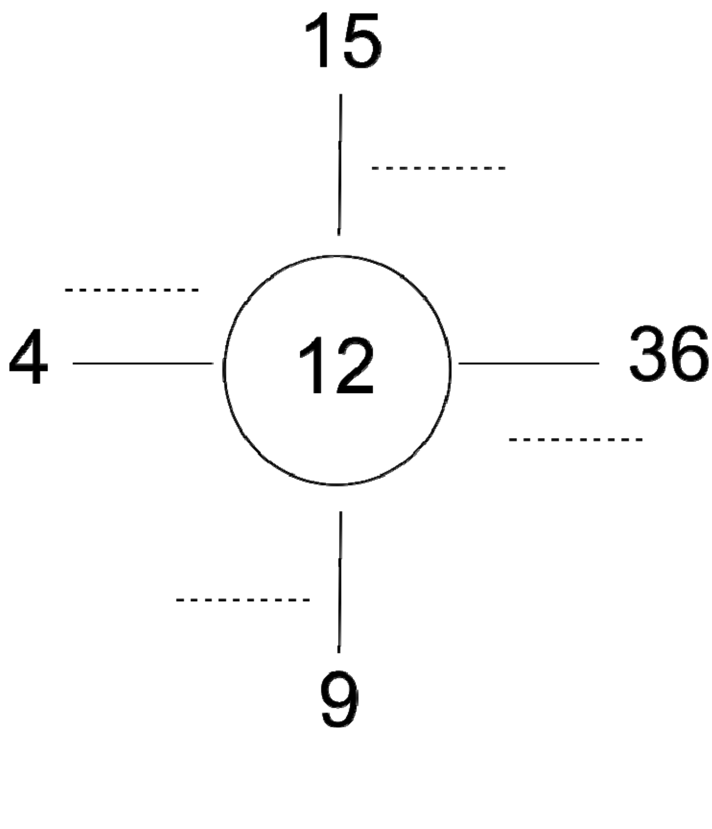
+ 2	- 2	× 2	: 2
+ 2	- 2	× 2	: 2

Note : ajouter le sens des flèches (différentes possibilités) en fonction de la complexité souhaitée pour cet exercice.

Effectue les opérations.



Complète par l'opération effectuée.



V. POURQUOI CE TYPE D'APPROCHE ?

De nombreuses recherches[4] ont montré que les enfants avaient des **compétences informelles importantes en résolution de problèmes** : à partir de leurs habiletés en comptage et en dénombrement, ils élaborent **spontanément** des stratégies de résolution de problèmes.

Cela signifie qu'ils peuvent résoudre certaines opérations (présentées en contexte, sous la forme de petites histoires) avant même d'avoir appris les calculs en classe. Contrairement à certains présupposés, **la maitrise des techniques de calcul n'est donc pas un pré-requis à la résolution de problèmes**.

Il est important de développer la résolution de problèmes dès les premiers apprentissages pour permettre aux enfants de mettre en œuvre leurs stratégies informelles et de **donner ainsi du sens aux opérations**. Dès l'école primaire, les démarches informelles qui s'appuient sur le comptage peuvent alors être reliées aux calculs de façon à donner du sens aux opérations arithmétiques.

Développer des concepts mathématiques et des symbolisations.

Les activités proposées dans les fiches amènent les élèves à **développer des concepts** mathématiques. Les situations impliquent la mise en œuvre d'additions et de soustractions, par exemple, en comptant le total des achats dans un magasin ou en comptant les enfants qui entrent et sortent d'une piscine. Même si on peut imaginer que les termes d'addition et de soustraction ne soient jamais employés en cours d'activité (p. ex. si on les développe avec des enfants de 3^{e} maternelle) et, même si à aucun moment les signes plus et moins ne sont inscrits, ce type d'activité confronte les élèves à ces notions et les encourage à les développer.

Il est également important d'inviter les élèves à **produire des symbolisations informelles** permettant de représenter ces opérations. C'est ainsi qu'ils peuvent par exemple représenter une commande réalisée dans un snack ou des actions de gains et de pertes dans une partie de billes. La production de ces symbolisations informelles aide les élèves à mieux comprendre les concepts mathématiques sous-jacents. Ces symbolisations informelles constituent aussi une voie d'accès porteuse de sens vers la construction de **symbolisations plus formelles**. C'est ainsi que l'on peut par exemple inviter les élèves du primaire à créer des liens entre leurs représentations et les opérations arithmétiques qui y correspondent.

Une approche des opérations par la résolution de problèmes suppose **d'aborder plusieurs opérations simultanément** (p. ex. aborder d'emblée des problèmes impliquant des additions et des soustractions). En effet, ce n'est qu'en proposant des problèmes variés aux élèves que l'on peut les inciter à analyser les situations présentées pour voir s'il convient d'ajouter, de mettre en commun, de retirer, de comparer, etc. Si les situations proposées requièrent toutes de faire une addition, il ne s'agit pas réellement de problèmes à résoudre, mais plutôt d'opérations à appliquer en contexte, ce qui n'a pas le même impact au niveau du développement des compétences transversales.

[4] Pour une synthèse de ces recherches, voir article rédigé par A. Fagnant : « *Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental : Aperçu des fondements théoriques et entrée au cœur de quelques activités »* (à paraitre prochainement dans les Cahiers des Sciences de l'Éducation publiés par l'unité d'analyse des Systèmes et Pratiques d'enseignement, Université de Liège).

Face aux problèmes impliquant des additions et des soustractions, il est courant de **distinguer deux types de calculs :**

- les calculs numériques sont des **calculs standards** qui présentent toujours la réponse derrière le signe d'égalité. Ces calculs ne sont pas liés à la structure des problèmes et représentent une certaine forme d'abstraction. En effet, l'idée sous-jacente à l'utilisation de ce type de calculs est que tous les problèmes additifs et soustractifs peuvent être conceptualisés en termes de **relation parties--tout**. Ils peuvent alors être résolus par le calcul « a + b = ? » lorsque l'on recherche le tout et par le calcul « a – b = ? » lorsque l'on recherche une partie ;

- les calculs relationnels sont des calculs qui **correspondent à la structure de l'énoncé** et qui peuvent prendre la forme de **calculs standards** (a + b = ? ou a – b = ?) ou de **calculs à trous** (a + ? = b, ? + a = b, a - ? = b ou ? - a = b) selon la position de l'inconnue dans la situation-problème proposée.

Face à certains problèmes, les calculs numériques et standards seront similaires alors que face à d'autres, ils prendront des formes très différentes. Les exemples suivants illustrent notre propos :

- *En arrivant le matin à l'école, Anna avait 5 billes. En jouant contre Paolo, Anna a gagné 3 billes. Combien de billes a-t-elle maintenant ?*

  - Face à ce problème impliquant la recherche d'un état final, le calcul relationnel (qui « colle » à la structure de l'énoncé) correspond au calcul standard : les deux calculs prennent la forme « 5 + 3 = ? ».

- *En arrivant le matin à l'école, Anna avait 5 billes. En jouant contre Paolo, Anna a gagné quelques billes. A la fin de la partie, Anna a 8 billes. Combien Anna a-t-elle gagné de billes en jouant contre Paolo.*

  - Face à ce problème impliquant la recherche de la transformation (c'est-à-dire ici, d'un terme intermédiaire), le calcul relationnel prend la forme « 5 + ? = 8 », en lien direct avec la structure de l'énoncé. Le calcul numérique est quant à lui très différent puisqu'il s'écrira « 8 – 5 = ? ».

Avec les jeunes élèves, **les calculs relationnels sont à privilégier dans la mesure où ils correspondent à la structure du problème et aux stratégies informelles de résolution** qui consistent généralement à « jouer » la situation en reproduisant les actions ou les relations impliquées.

- Face au deuxième exemple proposé ci-dessus, les enfants développent souvent une stratégie de « surcomptage » : elle avait 5 billes au début et elle en a 8 à la fin donc 5 ➔ 6 (1), 7(2), 8(3) ➔ elle a gagné 3 billes. Le calcul relationnel (5 + **3** = 8) est en lien avec la structure du problème et avec la stratégie de résolution.

- La réalisation d'un calcul numérique (8 – 5 = **3**) demande ici une grande abstraction, qui n'est pas toujours bien comprise par les enfants. Leur imposer trop vite l'utilisation de ce type de calcul risque de les déstabiliser et de favoriser le développement de démarches superficielles.

La distinction entre ces deux types de calcul se transfère aisément aux problèmes impliquant des multiplications et des divisions. Un problème du type « *Yaël achète 5 petites voitures pour* *sa collection. Chaque voiture coute le même prix. En tout, cela lui revient à 15 euros. Quel est le prix d'une petite voiture ? »* peut être résolu par une division (15 : 5 = ?) ou par une multiplication lacunaire (5 × ? = 15).

Il existe des typologies de problèmes qui permettent de construire des problèmes variés et de rencontrer différentes significations que l'on peut attribuer aux opérations. Au niveau des **problèmes additifs et soustractifs,** une des classifications les plus connues est sans doute celle mise en évidence par des chercheurs américains[5] qui proposent trois catégories de problèmes bien adaptés aux enfants du cycle 5 - 8[6].

Les problèmes de type combinaison, changement et comparaison.

- Les problèmes de type **changement** se réfèrent à des situations actives ou dynamiques, c'est-à-dire des situations qui présentent une certaine chronologie temporelle.

  Un état initial (une mesure de départ, comme par exemple « Noé a 5 billes ») est transformé positivement ou négativement par une action (p. ex. « Il gagne ou il perd 3 billes » ou « son petit frère lui donne 3 billes ou il donne 3 billes à son petit frère ») et débouche sur un état final différent (« A la fin, Noé a 8 billes » ou « 2 billes », selon que la transformation était positive ou négative).

- Les problèmes de type **combinaison** sont des situations impliquant des relations de type parties-tout. Ces problèmes font référence à des situations statiques qui impliquent deux ou plusieurs quantités qui peuvent être considérées soit séparément (les parties) soit en combinaison (le tout).

  Deux ou plusieurs mesures (c'est-à-dire les différentes parties, comme par exemple « Noé a 5 billes » et « Arthur a 3 billes ») se combinent pour former un ensemble plus large (c'est-à-dire le tout : « ensemble, Noé et Arthur ont 8 billes »).

- Les problèmes de type **comparaison** impliquent deux quantités qui sont comparées, ainsi qu'une valeur indiquant la différence entre ces deux quantités. Ces problèmes correspondent à des situations statiques, comme les problèmes de type combinaison, mais ici on ne s'intéresse pas à la relation entre les parties et le tout, mais plutôt aux relations entre les différentes parties.

  Deux ou plusieurs mesures (« Pierre a 5 billes » et « Anne a 3 billes ») sont comparées (« Pierre a 2 billes de plus qu'Anne ou Anne a 2 billes de moins que Pierre »).

Chaque catégorie de problèmes peut être subdivisée en sous-catégories en fonction de la **position de l'inconnue** (p. ex. recherche du tout ou recherche d'une des parties dans les problèmes de type « combinaison »). Pour les problèmes de types « changement » et « comparaison », on peut encore faire des distinctions supplémentaires en fonction du **type de transformation** qui opère (augmentation ou diminution) ou du **type de relation** décrite (plus ou moins).

En combinant ces différentes caractéristiques, il est possible de distinguer 14 types de problèmes additifs et soustractifs (6 problèmes de type « changement », 2 problèmes de type « combinaison » et 6 problèmes de type « comparaison »). Le tableau proposé à la page suivante présente quelques exemples de problèmes.

[5] Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

[6] Un auteur français (Gérard Vergnaud) propose une autre classification des problèmes additifs et soustractifs. Cette classification est plus étendue et permet la prise en compte de problèmes plus complexes. Cet auteur propose également une classification des problèmes se résolvant par multiplication et division. Ces classifications ne sont pas présentées ici, mais le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage suivant pour la découvrir : Vergnaud, G. (1983). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Bern : Peter Lang.

Quelques exemples de problèmes de type combinaison, changement et transformation.

Combinaison – recherche d'une partie	Joe et Tom ont 8 billes ensemble. Joe a 3 billes. Combien de billes Tom a-t-il ?
Changement – transformation positive, recherche du terme final	Joe avait 3 billes. Puis, Tom lui a donné 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?
Changement – transformation négative, recherche de la transformation	Joe avait 8 billes. Puis, il a donné quelques billes à Tom. Maintenant, il a 3 billes. Combien de billes a-t-il données à Tom ?
Changement – transformation négative, recherche du terme initial	Joe avait quelques billes. Puis, il a donné 5 billes à Tom. Maintenant, Joe a 3 billes. Combien de billes Joe avait-il au début ?
Comparaison – formulation « de plus » - recherche du terme relationnel	Joe a 8 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il de plus que Tom ?
Comparaison – formulation « de moins » - recherche de l'ensemble de comparaison	Joe a 8 billes. Tom a 5 billes de moins que Joe. Combien de billes Tom a-t-il ?
Comparaison – formulation « de plus » - recherche de l'ensemble correspondant au référant	Joe a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Tom. Combien de billes Tom a-t-il ?

Cette typologie de problèmes permet de donner divers visages aux opérations additives et soustractives. Ainsi, l'addition peut représenter « une mise en commun », comme lors de la recherche du tout dans les problèmes de combinaison ; elle peut aussi représenter « un gain », « un ajout », comme dans les problèmes de type changement ; elle peut aussi représenter « le résultat d'une comparaison », lorsqu'il s'agit de rechercher le plus grand terme. Les différents types de soustractions sont également rencontrés : l'idée de « retirer » ou d'« enlever », dans les problèmes de type changement notamment ; l'idée de « complément » ou de « pour aller à » lorsqu'on recherche la transformation dans les problèmes de type changement ou une partie dans les problèmes de combinaison ; c'est aussi un « écart » ou « la recherche d'une différence » entre deux termes à comparer par exemple.

La typologie présentée ci-avant s'appuie sur les caractéristiques structurelles des problèmes. De nombreux autres **éléments peuvent également être pris en compte pour diversifier les situations-problèmes et pour agir sur leur complexité relative**.

De façon non exhaustive, on peut mentionner :

- la façon de **formuler** les énoncés (respect de la chronologie temporelle ou non, complexité syntaxique, etc.) ;
- le type de **contextes** mobilisés (contexte réaliste, fantaisiste ou mathématique) ;
- le type de **présentations** (orale, écrite, imagée, sous forme de jeux, de tableaux, etc.) ;
- la présence éventuelle de **données inutiles**, **l'absence de données** importantes ou leur nécessaire recherche dans un autre support ;
- **l'ordre de présentation** des données (respect ou non de la chronologie temporelle de l'histoire et de l'ordre des opérations à effectuer) ;
- l'existence de **solutions multiples** ou **l'inexistence de solution** dans le cas de problèmes impossibles ;
- etc.

PARTIE 2 – SOLIDES ET FIGURES
LES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

I. COMPÉTENCE SPÉCIFIQUE VISÉE

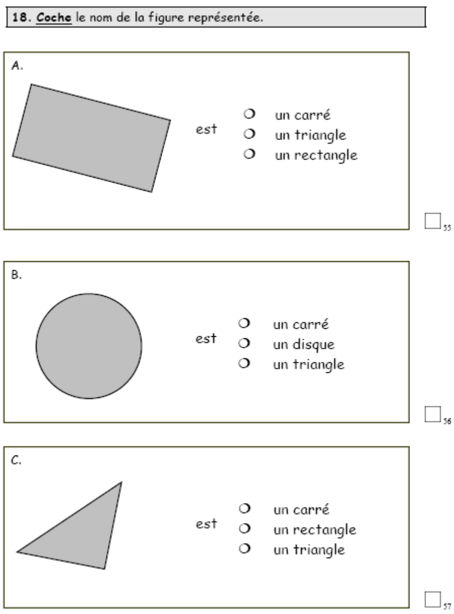
La compétence spécifique développée dans cette partie du document s'intitule « **Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer** ». Dans les pistes didactiques, le groupe de travail a choisi de mettre l'accent sur la capacité de reconnaitre des figures géométriques lorsqu'elles sont orientées dans différentes positions.

Concrètement, les pistes didactiques proposent des activités qui permettent de rencontrer et de manipuler les figures géométriques de base suivantes : le carré, le rectangle, le triangle et le disque.

II. ANALYSE DES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES DANS L'ÉPREUVE

Quatre questions de l'épreuve confrontaient les élèves à la compétence « **Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer (sur base de la perception et de la comparaison avec un modèle) ».**

Comme l'attestent les taux de réussite très élevés à la question rappelée ci-contre (plus de 90% de réponses correctes pour chacune des figures), les élèves connaissent **le nom des figures géométriques**.



La question 22 impliquait de **faire le lien entre des solides** (représentés ici par des objets de la vie courante) **et des figures** (évoquées ici par la forme des traces que pourraient laisser ces objets sur le sol). Les résultats obtenus sont globalement élevés :

- la quasi-totalité des élèves reconnait les objets qui peuvent laisser la trace d'un disque (plus de 90% des élèves ont entouré les deux objets attendus) ;

- une proportion non négligeable d'élèves (18%) éprouve davantage de difficultés pour identifier les objets pouvant laisser une forme carrée sur le sol (seulement 82% des élèves ont entouré les deux objets attendus).

Pour la trace en forme de disque, les objets proposés laissent place à peu de confusion possible.

Par contre, les objets laissant une trace carrée sont un peu plus complexes à repérer dans la mesure où **les élèves ne peuvent pas s'appuyer totalement sur leur perception visuelle** puisque les images d'objets sont présentées en perspective et que les faces visibles sur l'image ne dessinent pas un carré. **L'enfant doit se représenter les objets et imaginer que la forme de deux faces de ces objets est en réalité carrée.**

22. **Observe** ces objets.

A. **Entoure** les deux objets qui pourraient laisser ***une trace carrée*** si on les posait sur le sable.

☐ 62

B. Cette fois, **entoure** les deux objets qui pourraient laisser ***la trace d'un disque*** si on les posait sur le sable.

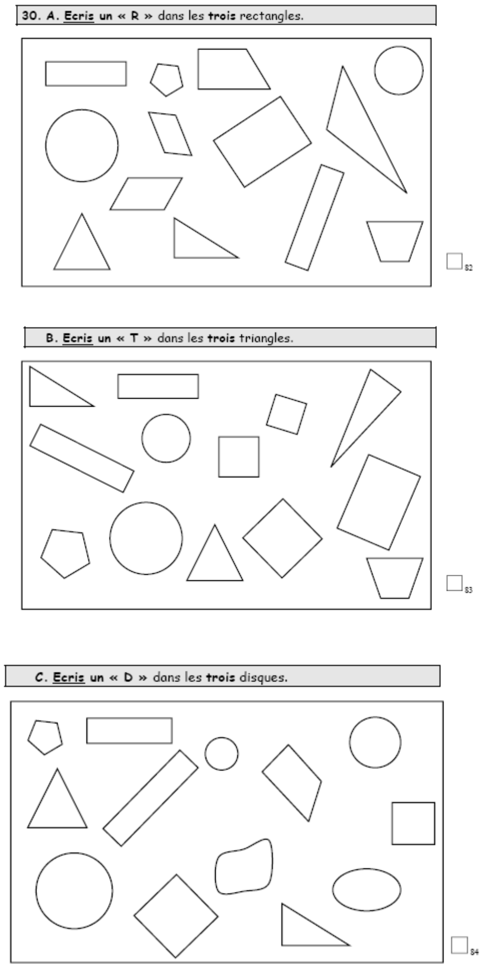
☐ 63

La question 30 demandait aux élèves de **reconnaitre trois rectangles, trois triangles et trois disques parmi une série de figures présentées dans différentes positions**.

Comme mentionné précédemment, on peut considérer que presque tous les élèves connaissent les noms des figures de base. La très grande majorité d'entre eux n'a dès lors éprouvé que très peu de difficultés à repérer les trois triangles et les trois disques (plus de 90% de réussite à ces deux items) dans la mesure où leur orientation spatiale avait peu d'impact sur l'identification de leur forme.

Par contre, le premier item demandant de repérer les trois rectangles a posé des difficultés à une proportion importante d'élèves : ils ne sont que 62% à avoir identifié correctement les trois rectangles. Dans ce cas, il semble donc que **l'orientation de la figure** ait joué un rôle important et que la perception visuelle des élèves ait fait défaut.

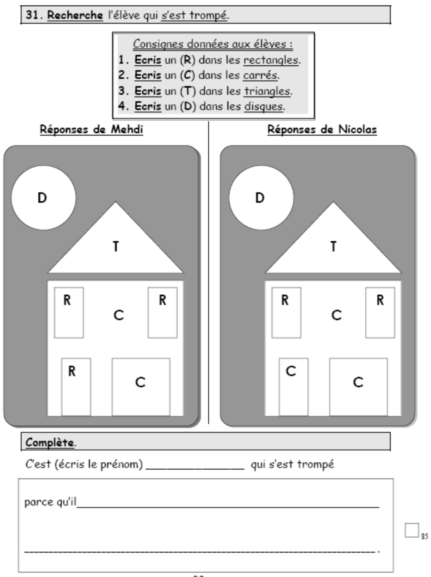
Si le **modèle** que les élèves ont des figures géométriques s'avère **trop limité**, par exemple s'ils imaginent uniquement le carré et le rectangle dans leur **position conventionnelle** (sans que cette représentation ne prenne en compte les caractéristiques propres de ces figures), la reconnaissance des figures dans différentes positions s'avère alors complexe.



La question 31 impliquait également la **reconnaissance de figures géométriques** mais la difficulté portait cette fois sur **l'argumentation** que l'élève devait développer pour expliquer pourquoi il jugeait que c'était Nicolas qui s'était trompé.

Par comparaison entre les deux dessins, l'erreur sur la porte était assez rapidement repérée : un enfant a mis R et l'autre C. Toujours par comparaison avec les autres formes représentées et nommées, on pouvait alors repérer que le C sur la porte était erroné.

Les arguments étaient jugés corrects dès que l'élève mentionnait que la porte devait être un rectangle (et/ou que la porte n'était pas un carré) ou qu'ils mentionnaient que Nicolas avait indiqué un carré à la place d'un rectangle ou encore que Nicolas s'était trompé au niveau de la porte : 63% des élèves ont proposé une justification correcte.



III. STRUCTURATION DES APPRENTISSAGES RELATIFS AU DÉVELOPPEMENT DE LA COMPÉTENCE VISÉE

Comme mentionné en introduction de cette partie, les pistes didactiques relatives au domaine des solides et figures se centrent sur la compétence « Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer ». En lien avec les résultats de l'épreuve, nous avons choisi de mettre l'accent sur le développement de la capacité à **reconnaitre des figures géométriques lorsqu'elles sont orientées dans différentes positions**.

Le travail sur les solides ainsi que le développement des liens entre les solides et les figures constituent des étapes importantes de l'apprentissage. Ces aspects ne seront toutefois pas envisagés ici puisque le groupe de travail a fait le choix d'orienter les pistes didactiques sur le travail avec les figures planes uniquement.

Les apprentissages relatifs aux solides et figures peuvent s'envisager dans une **variété de situations,** comme notamment :

- S1 ⇔ les situations en lien avec la vie réelle ;
- S2 ⇔ les jeux mathématiques ;
- S3 ⇔ les activités décontextualisées.

Au niveau **du matériel** sur lequel s'appuyer, on peut envisager divers supports.

- M1 ⇔ **Le matériel authentique** :
  - les objets qui nous entourent (porte, banc, boite de soupe, boite de mouchoirs ou tout autre objet réel en 3 dimensions) ;
  - les objets avec lesquels on peut réaliser des constructions (paille, fil de fer ou tout autre objet permettant de construire des solides et des figures).

- M2 ⇔ **Le matériel représenté ou symbolique :**
  - représentations en rapport avec le matériel authentique (photos, dessins, etc.) ;
  - représentations plus abstraites (comme le dessin des diverses figures géométriques).

- M3 ⇔ **Le matériel mathématique** :
  - les « outils » représentant des solides (blocs logiques, solides de références, etc.) ou des figures (Tangram, pentamino, etc.) ;
  - les « supports » sur lesquels on construit ou on représente les figures (géoplan, papier tramé, papier pointé, etc.).

Le tableau suivant rend compte des interactions possibles et propose, à titre illustratif, quelques exemples de fiches d'activités. Moyennant quelques adaptations, les activités peuvent être développées tout au long du cycle 5-8 et se poursuivre au cycle suivant.

	S1 ⇔ les situations en lien avec la vie réelle	**S2 ⇔ les jeux mathématiques**	**S3 ⇔ les activités décontextualisées**
M1 ⇔ Le matériel authentique			
M2 ⇔ Le matériel représenté ou symbolique		**Fiche 1** – Bataille de figures.	**Fiche 2** – Le patchwork.
M3 ⇔ Le matériel mathématique			**Fiche 3** – Quelques activités d'exploitation du Tangram.

Le matériel authentique intervient principalement dans le travail avec les solides ou dans le développement de la compétence « Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié ». Dans le même ordre d'idées, il y a plus de chances de rencontrer des solides que des figures planes dans les situations en lien avec la vie réelle (mais ceci n'est pas impossible parce que l'on peut par exemple inviter les élèves à analyser les toiles de certains artistes qui appuient largement leurs chefs-d'œuvre sur une imbrication de formes géométriques).

Puisque les pistes didactiques se centrent sur la **reconnaissance** (et non la construction) de **figures** (et non de solides), les fiches d'activités proposées se situent assez logiquement aux croisements entre « jeux mathématiques » ou « activités décontextualisées » d'une part, et « matériel représenté » ou « matériel mathématique » (ici, le Tangram) d'autre part.

- La fiche 1 propose un jeu mathématique impliquant de reconnaitre des figures géométriques qui sont représentées dans différentes positions sur les cartes du jeu.
- La fiche 2 développe une séquence d'enseignements-apprentissages qui devrait conduire les élèves à s'interroger sur la fiabilité de leur perception visuelle. Pour identifier plusieurs figures enchevêtrées dans des dessins, les élèves seront amenés à vérifier certaines de leurs caractéristiques.
- La fiche 3 s'appuie sur un matériel mathématique spécifique connu sous le nom de « Tangram » et envisage diverses activités permettant d'exploiter ce matériel pour manipuler et décrire les figures géométriques qui le constituent et les formes que l'on peut réaliser en les assemblant.

Des compétences transversales interviennent également dans la plupart des situations.

La compétence « *Résoudre, raisonner et argumenter* » est présente dans les trois activités qui nécessitent notamment :

- d'*exposer et* de *comparer ses arguments, ses méthodes* ;
- de *confronter ses résultats avec ceux des autres*.

Une étape de l'activité « Tangram » implique également :

- de *s'exprimer dans un langage clair et précis ;*
- de *maitriser le vocabulaire et les tournures nécessaires pour décrire les étapes de la démarche ou de la solution.*

La compétence *« Appliquer et généraliser »* intervient dans la fiche « Le patchwork » dans la mesure où, lorsque cela s'avèrera nécessaire, les élèves devront recourir à des instruments de mesure pour vérifier certaines caractéristiques des figures.

Pour une évaluation formative des apprentissages réalisés.

Deux types d'évaluations peuvent être développés face aux différentes activités proposées :

- **une évaluation en cours d'apprentissage** qui consiste à observer et à analyser les démarches développées par les élèves lors des travaux en petits groupes (Comment identifient-ils les figures dans le jeu de bataille ? Comment procèdent-ils pour reproduire les modèles avec les pièces du Tangram ? Etc.) ;
- **une évaluation en fin d'apprentissage** qui pourrait se présenter sous une forme papier-crayon et proposer des exercices proches des situations rencontrées en cours d'activité (p. ex. identifier tous les carrés dans un nouveau patchwork en lien avec la fiche 2).

IV. QUELQUES FICHES-OUTILS

FICHE N° 1 - BATAILLE DE FIGURES.

FICHE N° 2 - LE PATCHWORK.

FICHE N° 3 - QUELQUES ACTIVITÉS D'EXPLOITATION DU TANGRAM.

COMPÉTENCE CIBLÉE DANS LES FICHES-OUTILS
(PARTIE SOLIDES ET FIGURES – LES FIGURES GÉOMÉTRIQUES)

COMPÉTENCE RELATIVE AUX OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

RECONNAITRE, COMPARER DES SOLIDES ET DES FIGURES, LES DIFFÉRENCIER ET LES CLASSER.

NOTE.

QUELQUES EXPLICATIONS THÉORIQUES SONT PROPOSÉES AU POINT V DE CETTE PARTIE.
ELLES PERMETTENT SANS DOUTE D'ÉCLAIRER CERTAINS ASPECTS DÉVELOPPÉS DANS LES FICHES-OUTILS. UN ALLER-RETOUR ENTRE CES DEUX PARTIES EST DONC CONSEILLÉ.

BATAILLE DE FIGURES

Mise en situation

L'activité se présente sous une forme ludique : les élèves vont jouer au jeu de bataille. Celui qui a le plus grand nombre de figures-atouts sur sa carte remporte la carte de l'autre.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer.

- Il s'agit de reconnaitre et de compter les figures sur les cartes d'un jeu de bataille lorsque celles-ci sont orientées dans différentes positions.

Compétence transversale

Résoudre, raisonner et argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres.

- Lorsque les élèves ne sont pas d'accord durant le jeu, ils sont invités à expliquer à un autre élève (l'observateur) comment ils ont procédé pour identifier la (les) figure(s).

Progression de l'activité

Placer les élèves par groupes de 3 (deux joueurs, un observateur). Chacun sera observateur à son tour.

<u>Règles du jeu</u>

Ce sont les règles traditionnelles d'un jeu de bataille.

- Placer les atouts en un paquet retourné au centre de la table de jeu.
- Distribuer toutes les autres cartes aux deux joueurs. Les joueurs ne peuvent pas les regarder.
- On commence toujours par retourner un atout.
- Ensuite, les joueurs dévoilent une seule carte à la fois et en même temps.
- Le joueur qui possède la carte contenant le plus grand nombre de figures-atouts remporte la carte de son adversaire.
- On recommence, on retourne un nouvel atout avant de montrer, chacun, une nouvelle carte de son jeu.
- Les cartes gagnées se mettent en dessous du paquet que l'on possède déjà.
- Une bataille se produit lorsque les joueurs ont le même nombre de figures-atouts sur leur carte. Ils recouvrent alors leur carte avec une nouvelle carte posée à l'envers et en déposent une troisième à l'endroit cette fois-ci. Le joueur qui possède la carte qui contient le plus grand nombre de figures-atouts remporte les cartes de son adversaire.
- Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs a remporté toutes les cartes de son adversaire.

Confrontation.

Il est possible que les joueurs ne soient pas d'accord sur le nombre de figures-atouts. Lors de cette étape, les joueurs doivent justifier leurs choix auprès de l'élève observateur qui déterminera à qui revient les cartes.

Quelques variantes.

- On peut augmenter le nombre de joueurs.
- Les élèves peuvent être invités à inventer de nouvelles cartes en réalisant un dessin de figures.
- Jouer avec un mélange de cartes simples et de cartes complexes.

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Dénombrement inexact (la position des figures peut perturber les joueurs).	- Les 2 joueurs et l'observateur recomptent les figures ensemble.
- Désaccord entre les joueurs.	- Débat, c'est l'observateur qui détermine à qui revient les cartes.

Matériel

► Les règles du jeu en annexe 1.

► Les atouts sont proposés en annexe 2.

► Les cartes les plus simples se trouvent en annexes 3(1), 3(2), 3(3) et 3(4).

► Des cartes plus complexes se trouvent en annexes 4(1) et 4(2).

Organisation de la classe

• Par groupes de trois. Il y a deux joueurs et un observateur.

Notes et réflexions

Cette activité peut se jouer durant l'ensemble du cycle 5-8. Elle peut être poursuivie dans les classes du cycle supérieur moyennant une modification de la difficulté des cartes. Vous trouverez deux propositions de cartes en annexes 3 et 4. En fonction de l'avancement de l'étude des caractéristiques des figures, il y a également la possibilité d'accepter les carrés comme étant des rectangles ou non.

Exemple :
- carte-atout : rectangle
- joueur 1 : 3 carrés sur sa carte
- joueur 2 : 3 rectangles sur sa carte
- bataille ou non ?

<u>Règles du jeu</u>

BATAILLE DE FIGURES

MATÉRIEL

Les 12 atouts.
Les cartes du jeu (36 cartes pour le jeu de base et 18 cartes pour le jeu plus complexe).

NOMBRE DE JOUEURS

2 joueurs et 1 observateur.

BUT DU JEU

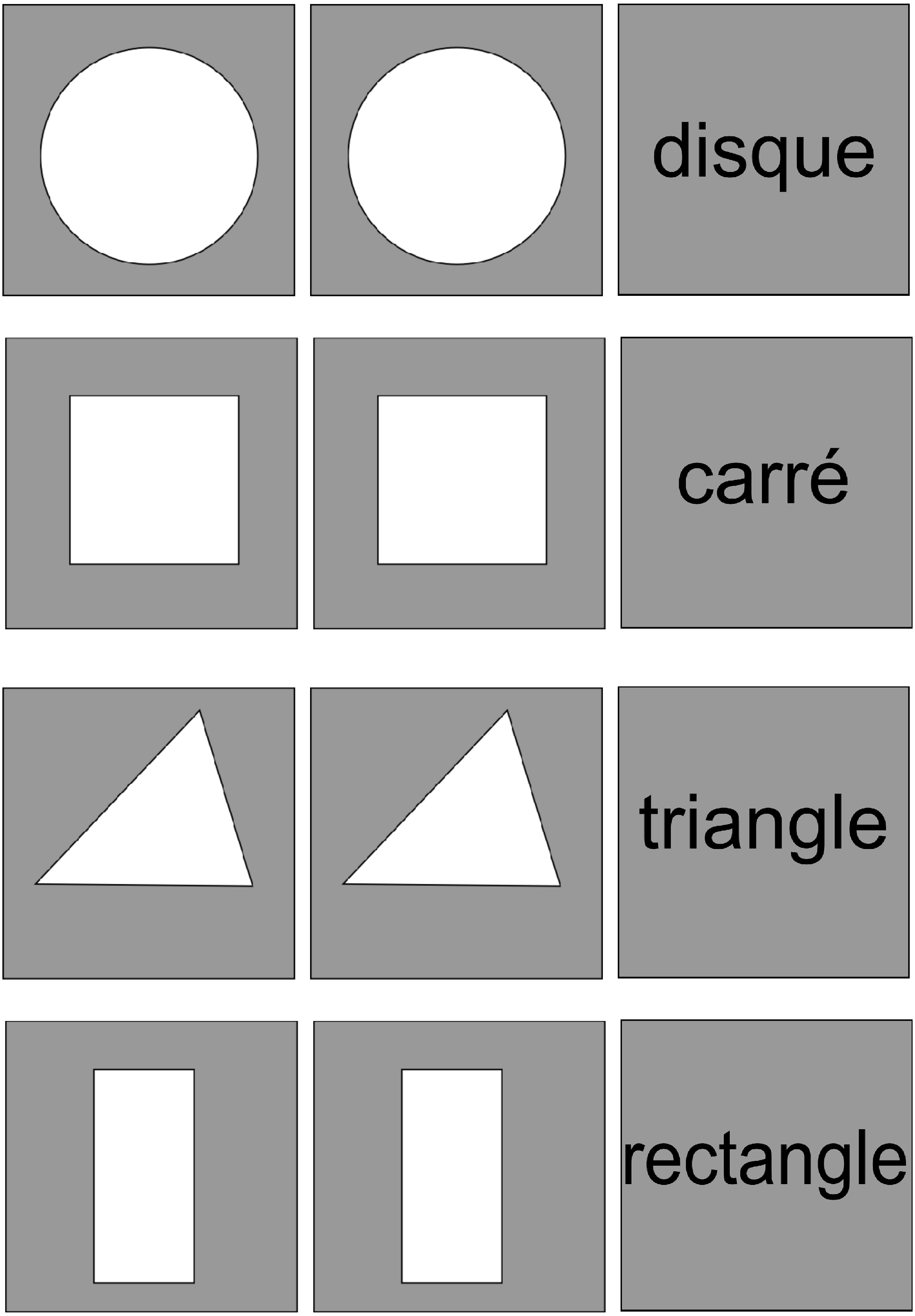
Le gagnant est celui qui remporte toutes les cartes de son adversaire.

DÉROULEMENT DU JEU

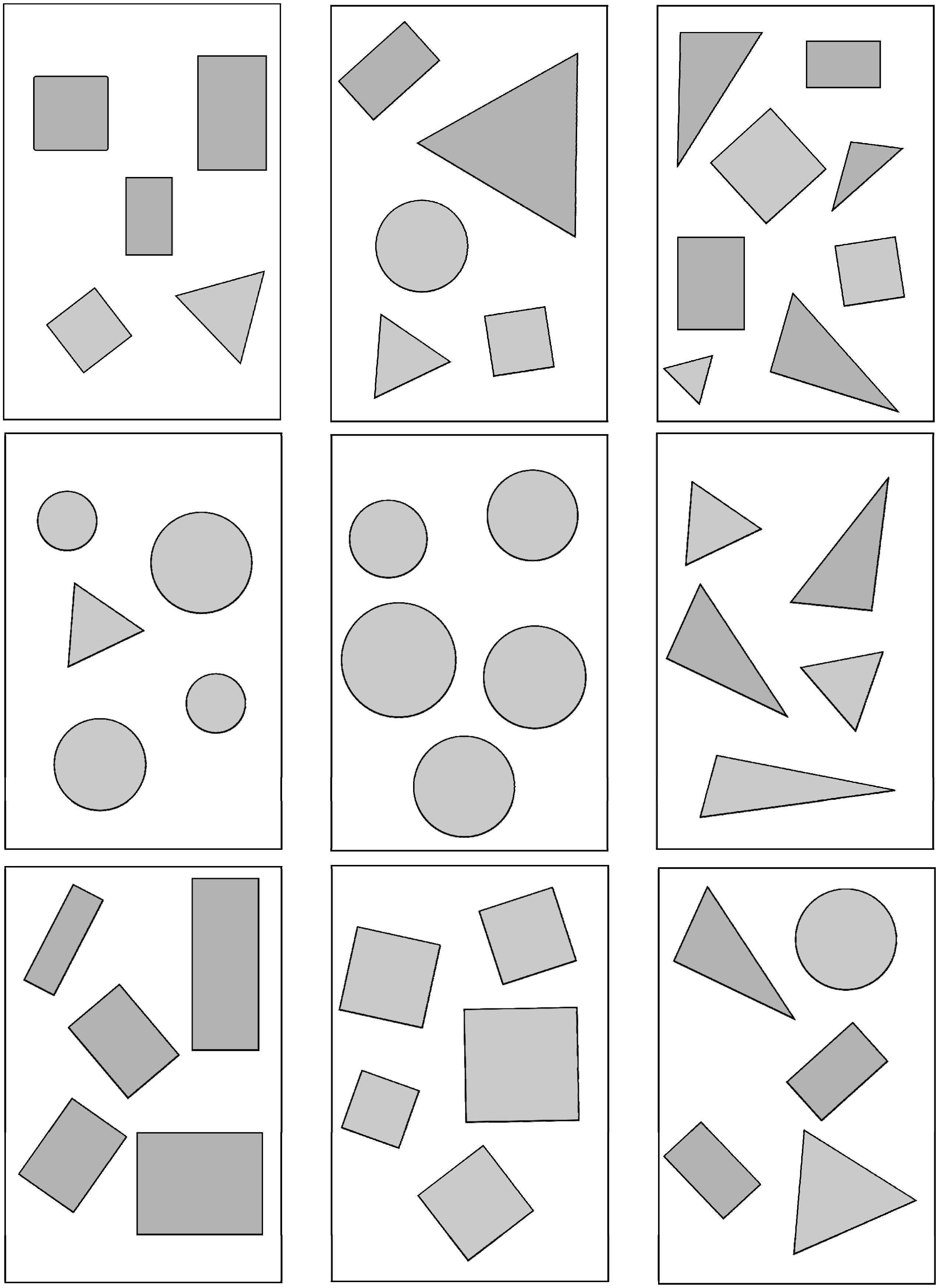
Ce sont les règles traditionnelles d'un jeu de bataille.

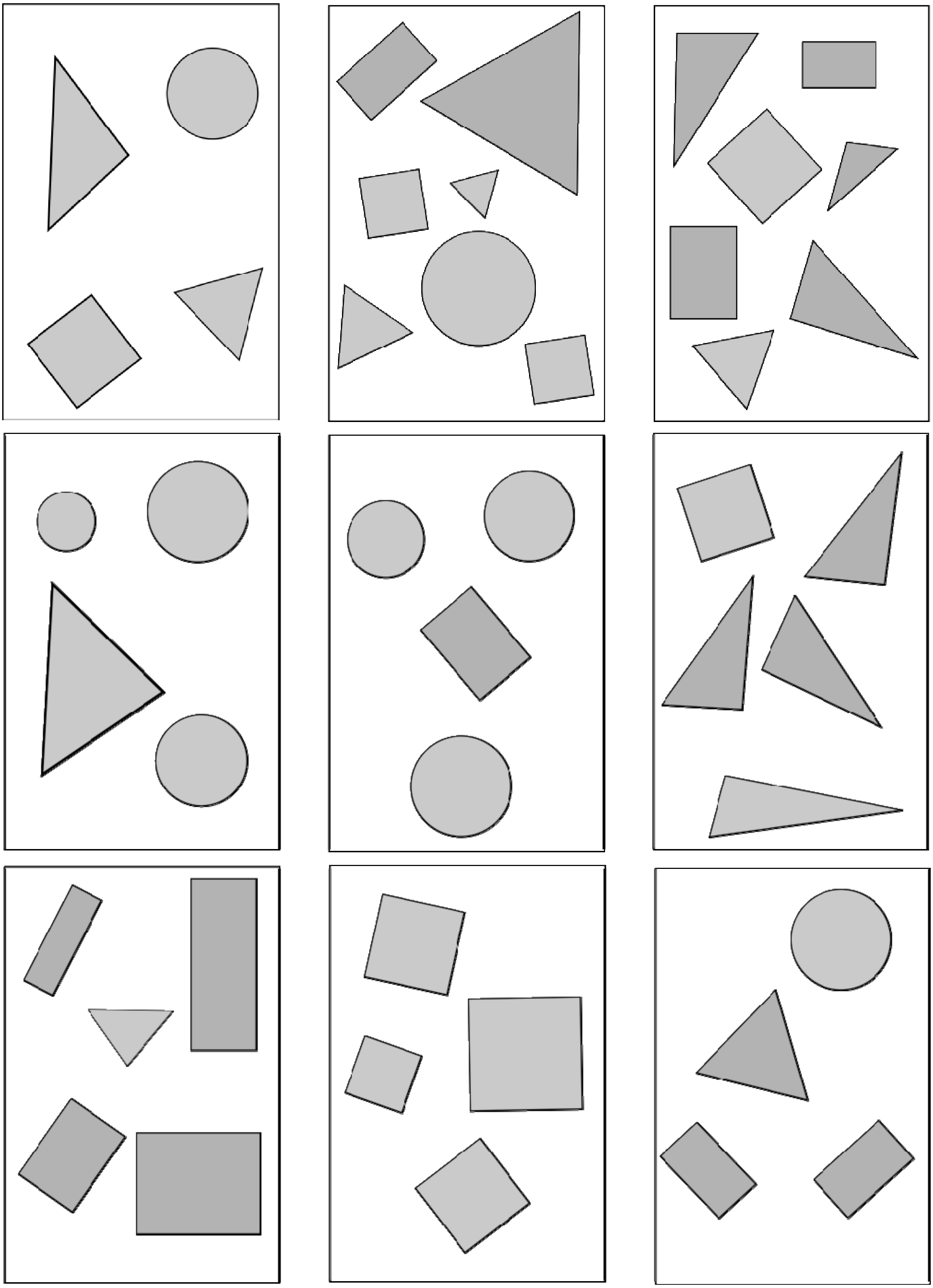
- Distribuer toutes les cartes aux deux joueurs. Les joueurs ne peuvent pas les regarder. Faire un paquet séparé avec les atouts. On commence toujours par retourner un atout.
- Ensuite, les joueurs dévoilent une seule carte à la fois et en même temps.
- Le joueur qui possède la carte contenant le plus grand nombre de figures-atouts remporte la carte de son adversaire.
- On recommence, on retourne un nouvel atout avant de montrer, chacun, une nouvelle carte de son jeu.
- Les cartes gagnées se mettent en dessous du paquet que l'on possède déjà.
- Une bataille se produit lorsque les joueurs ont le même nombre de figures-atouts sur leur carte. Ils recouvrent alors leur carte avec une nouvelle carte posée à l'envers et en déposent une troisième à l'endroit cette fois-ci. Le joueur qui possède la carte qui contient le plus grand nombre de figures-atouts remporte les cartes de son adversaire.
- Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs a remporté toutes les cartes de son adversaire.

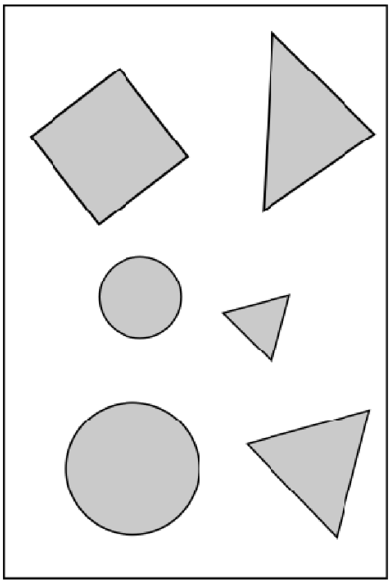
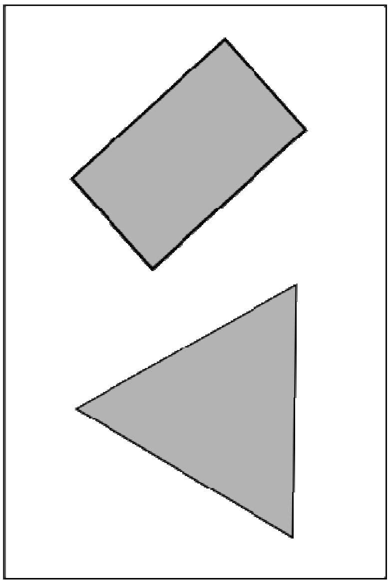
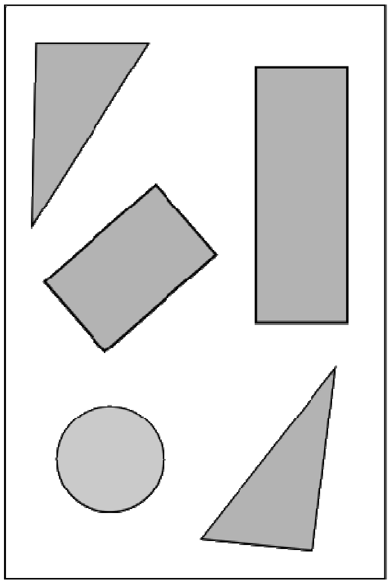
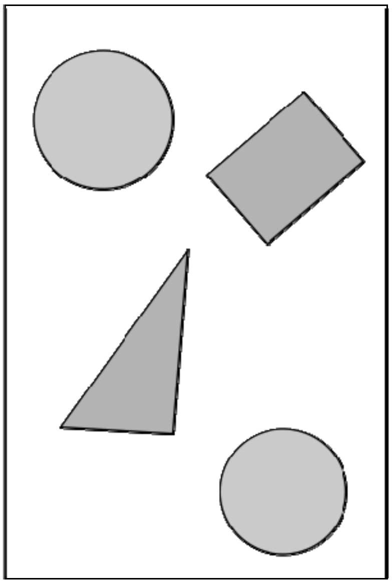
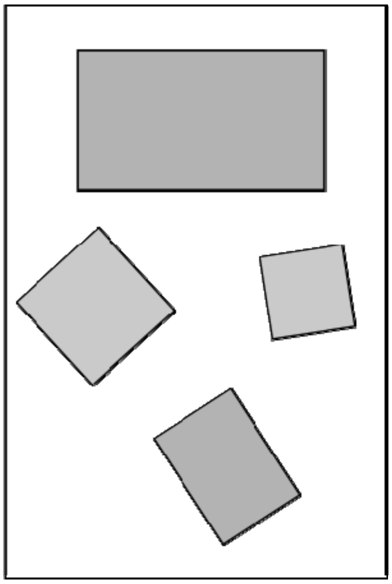
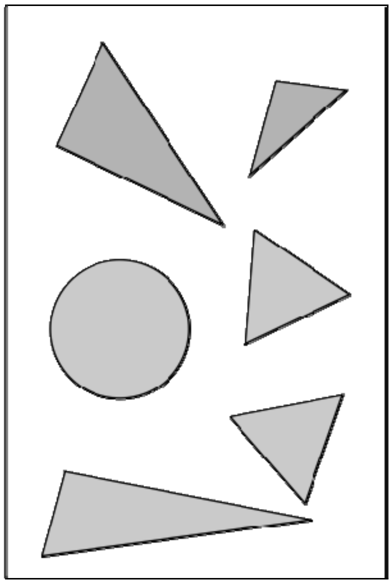
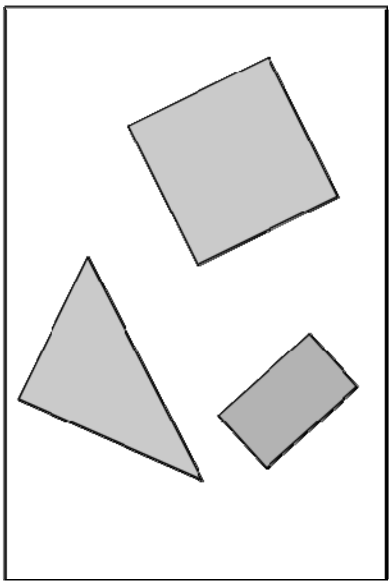
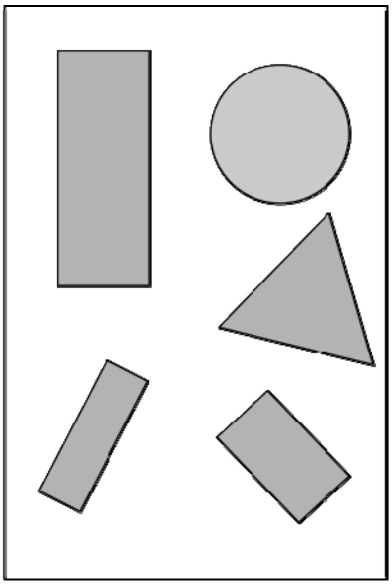
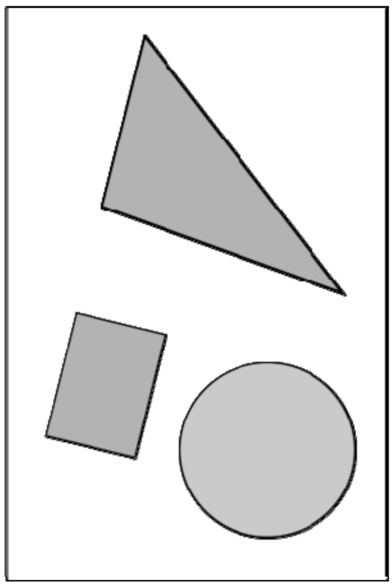
<u>Les atouts</u>

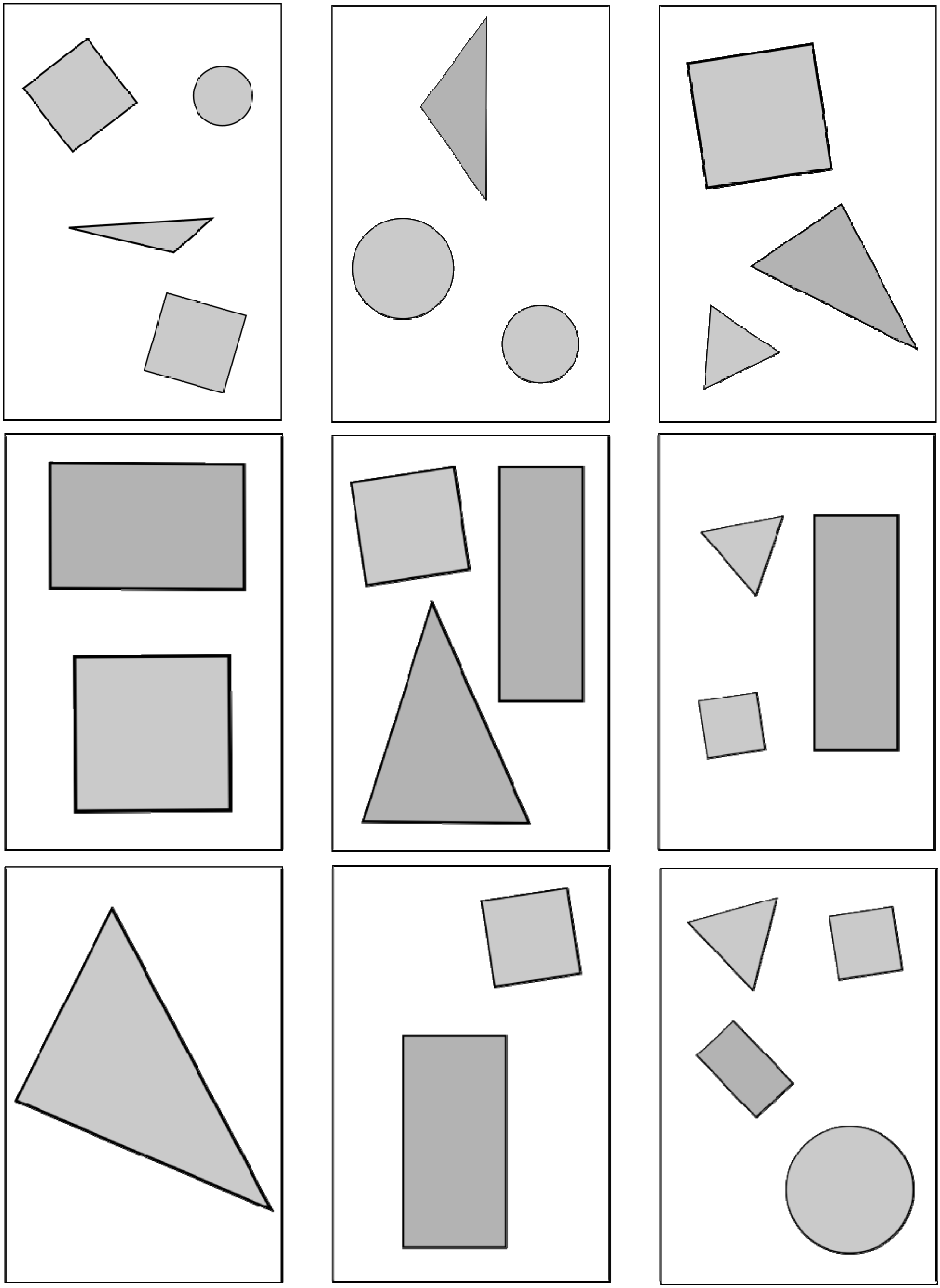


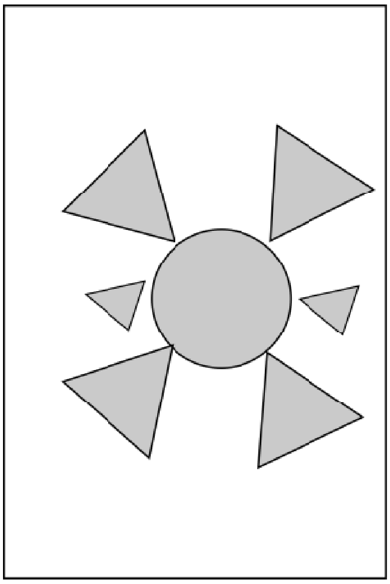
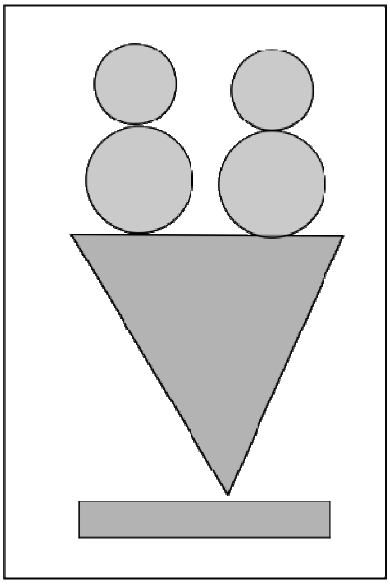
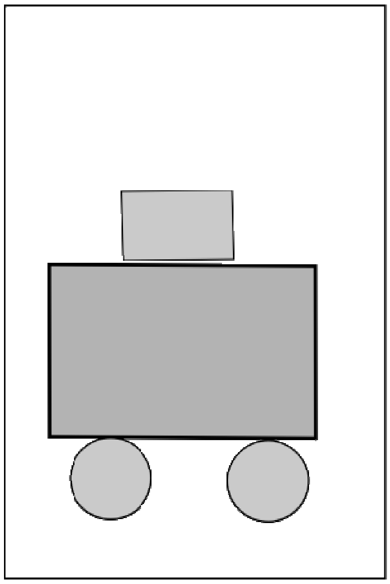
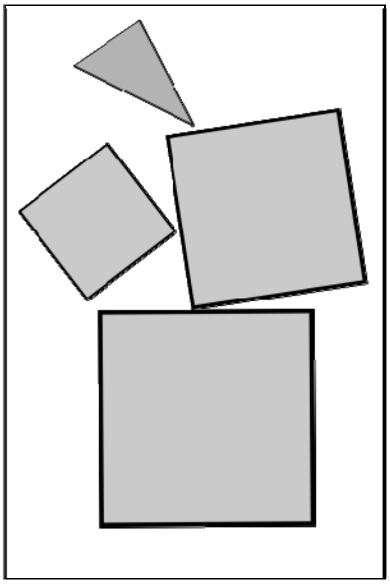
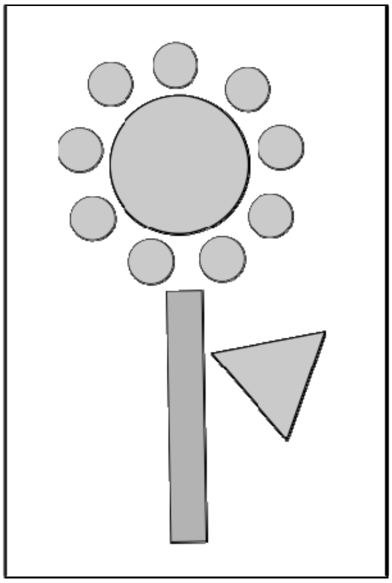
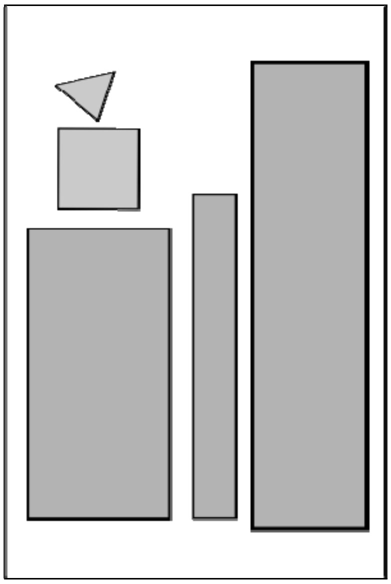
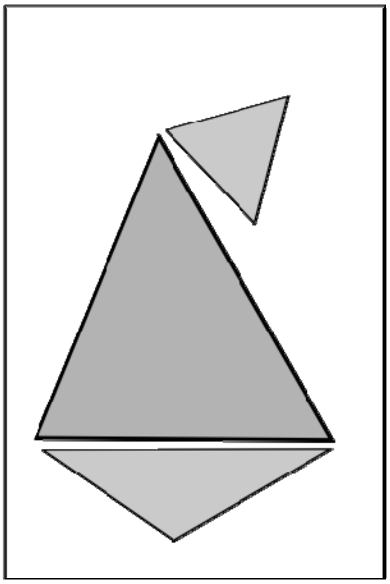
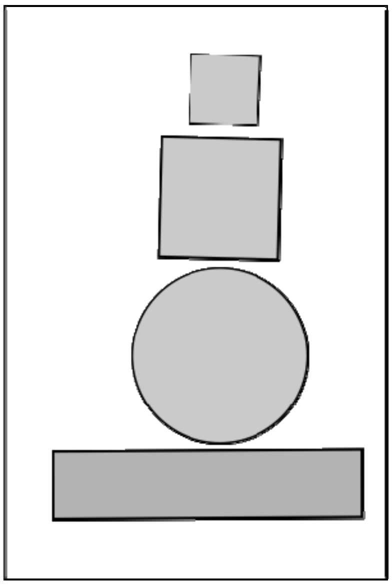
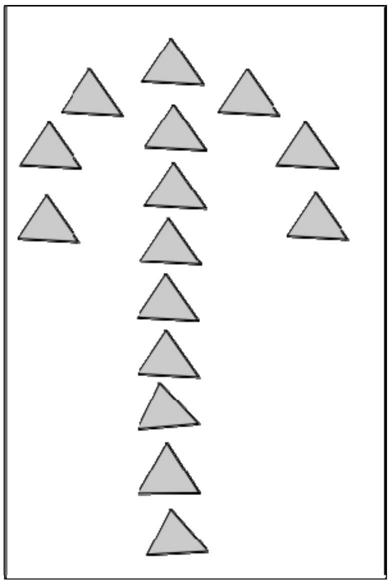
Les cartes du jeu sont téléchargeables à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=24761&navi=2030

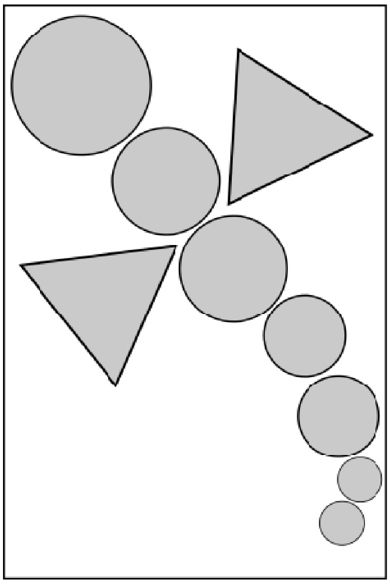
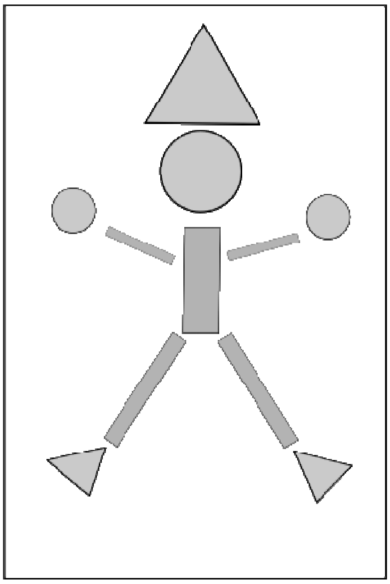
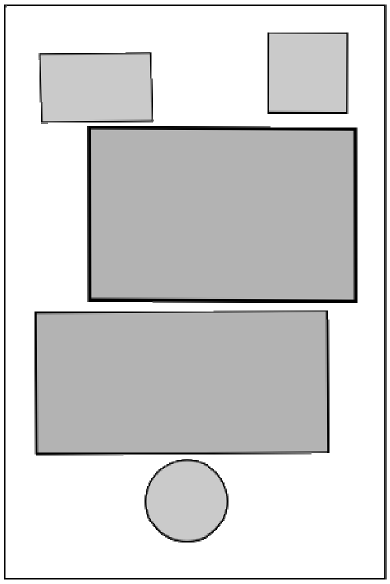
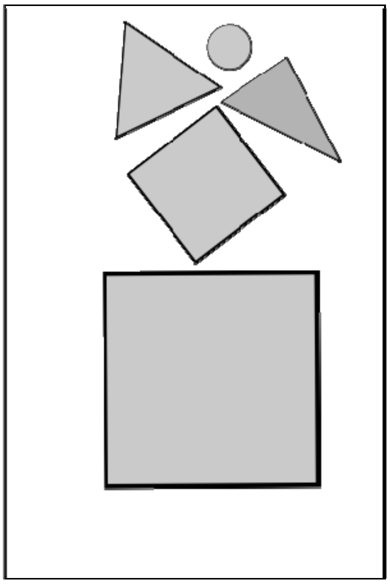
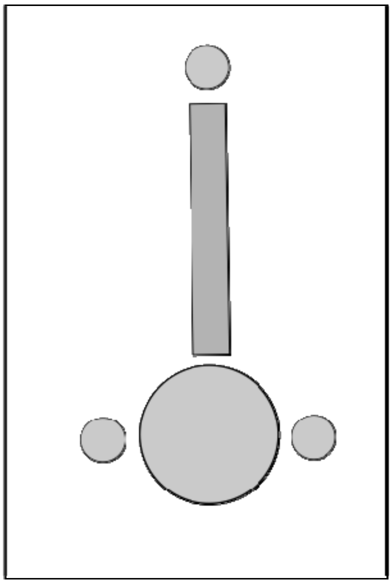
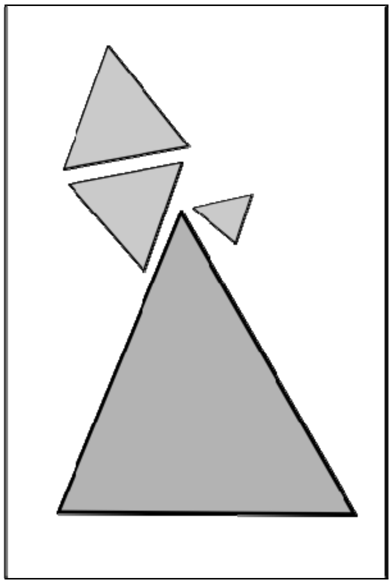
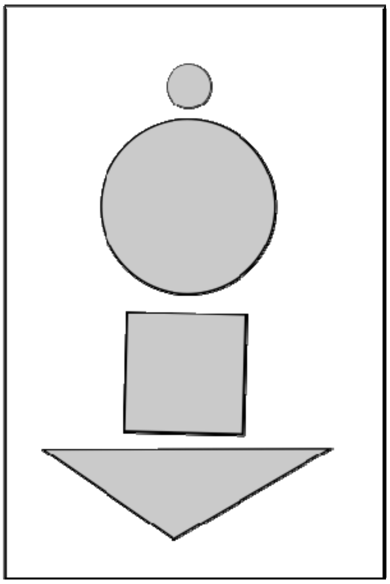
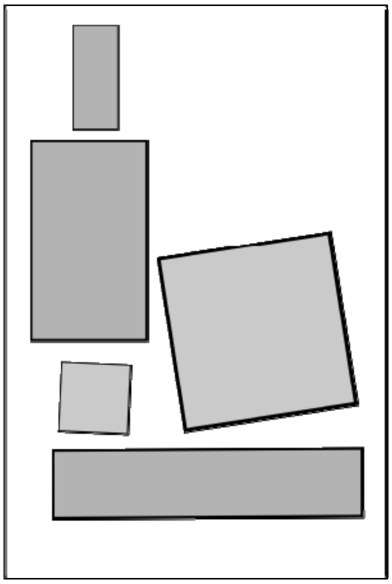
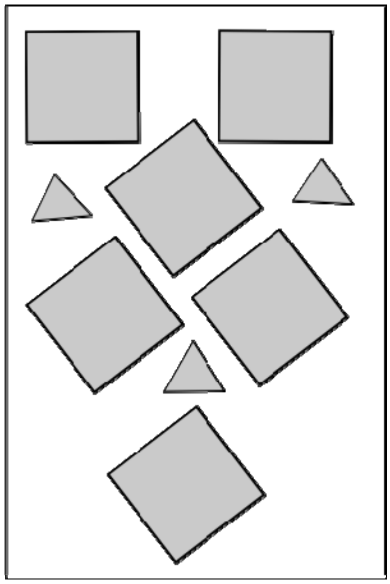






LE PATCHWORK

Mise en situation

Proposer un dessin de patchwork aux enfants et leur demander de retrouver (colorier) les différentes figures géométriques.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer.

- Il s'agit de reconnaitre des figures présentées dans différentes positions et, si nécessaire, de recourir à un instrument de mesure pour vérifier certaines de leurs caractéristiques.

Compétences transversales

Résoudre, raisonner et argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres …

- Les élèves devront confronter leurs solutions et les justifier en expliquant comment ils ont procédé pour s'assurer qu'il s'agit bien de telle ou telle figure.

Appliquer et généraliser : se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes.

- Lorsque cela s'avèrera nécessaire, les élèves devront recourir à des instruments de mesure pour vérifier certaines caractéristiques des figures.

Progression de l'activité

Pré-requis.

Il ne s'agit pas d'une activité de découverte des figures géométriques, mais d'une activité d'extension visant à amener les élèves à les reconnaitre dans différentes positions et à recourir, si besoin, à l'instrumentation pour vérifier certaines de leurs caractéristiques (angles droits et longueur des côtés).

Phase de recherche individuelle.

Proposer un dessin de patchwork aux enfants (voir annexes 1 ou 2) et leur demander de retrouver (colorier) les différentes figures géométriques (ex. les carrés en bleu, les rectangles en rouge, les triangles en vert et les disques en jaune dans le patchwork n°2).
La perception visuelle des élèves risque de faire défaut parce que certaines formes dessinées dans le patchwork sont ambiguës (et plus particulièrement dans celui de l'annexe n°2).

Première confrontation des solutions.

Les réponses sont mises en commun et confrontées en groupe classe, mais aucune correction n'est proposée à ce moment de l'activité.

Étant donné que plusieurs figures sont ambiguës, on imagine que tous les enfants ne colorieront pas tous les mêmes figures. Que faire face à une diversité de réponses ? Comment faire pour s'assurer que les formes sont bien celles que l'on croit ?

Suite au constat de divergences dans les solutions, il convient de dégager l'idée qu'il faut **vérifier** certaines choses. Que faut-il vérifier ? Collectivement, les caractéristiques des différentes figures sont dégagées (le triangle a trois côtés, le carré et le rectangle ont des angles droits, tous les côtés du carré ont la même longueur, etc.) et quelques techniques de vérification sont évoquées (mesurer la longueur des côtés, vérifier les angles, etc.).

Astuces – Comment vérifier les angles droits ?

Plusieurs techniques sont possibles :

- découper les pièces du patchwork et ajuster le coin d'une figure sur un coin que l'on sait être droit (le coin d'un livre par exemple) ;
- utiliser une équerre et la placer tour à tour sur les pièces à vérifier, sans les découper cette fois ;
- fabriquer un angle droit en papier (voir annexe 3) ;
- etc.

Travail en petits groupes.

Par groupes de deux ou trois, les enfants sont chargés de vérifier toutes les figures de façon à prouver qu'il s'agit bien d'un rectangle, d'un carré, etc.

Une nouvelle feuille représentant le patchwork est fournie à chaque groupe pour qu'il indique ses nouvelles solutions.

Deuxième confrontation des solutions.

Chaque groupe présente ses solutions et les argumente en expliquant comment il a procédé pour être certain de ses réponses.
Cette fois, la phase débouche sur une correction collective. Éventuellement, un rétroprojecteur peut être utilisé pour que chacun visualise les bonnes solutions.

Synthèse.

Il convient d'insister sur le fait que la perception visuelle ne permet pas toujours aisément de reconnaitre les figures : on peut parfois être trompé par sa perception (les côtés ont l'air de même longueur mais ne le sont pas, un angle a l'air droit, etc.).
Ce qui caractérise une figure, ce sont certaines caractéristiques qu'elle doit respecter (ex. un carré doit avoir quatre angles droits et quatre côtés de même longueur, etc.).

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Mauvaise figure retrouvée (forme ambiguë, rectangle qui ressemble à un carré, etc.).	- Débat, recours aux instruments. Rappel des caractéristiques qui définissent les figures.

Matériel

► Le patchwork sur feuille individuelle (voir annexes 1 et 2). L'annexe 2 est un patchwork plus complexe.

► Des crayons de couleur.

► Eventuellement, un patchwork sur transparent et un rétroprojecteur.

► Des marqueurs pour transparents.

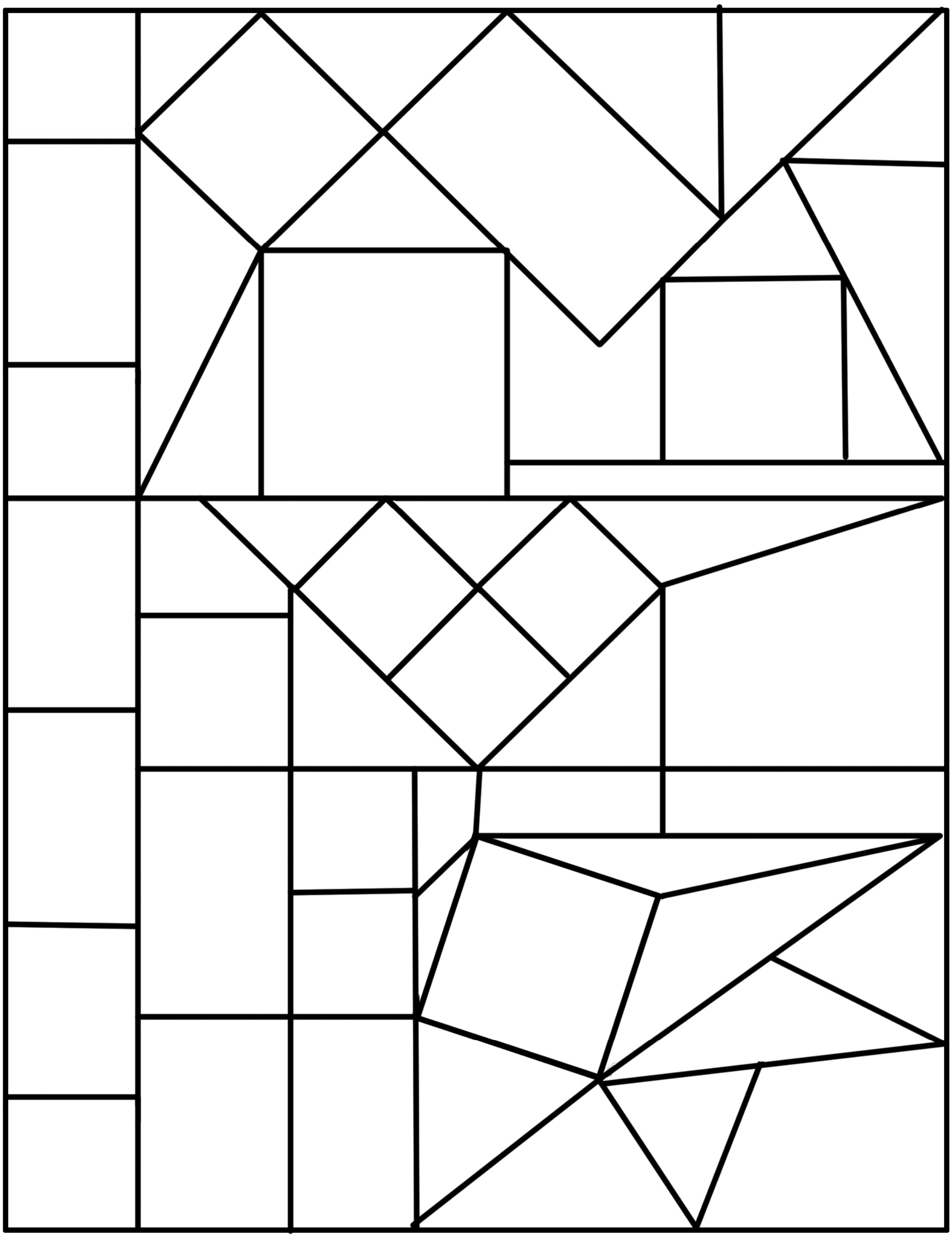
Organisation de la classe

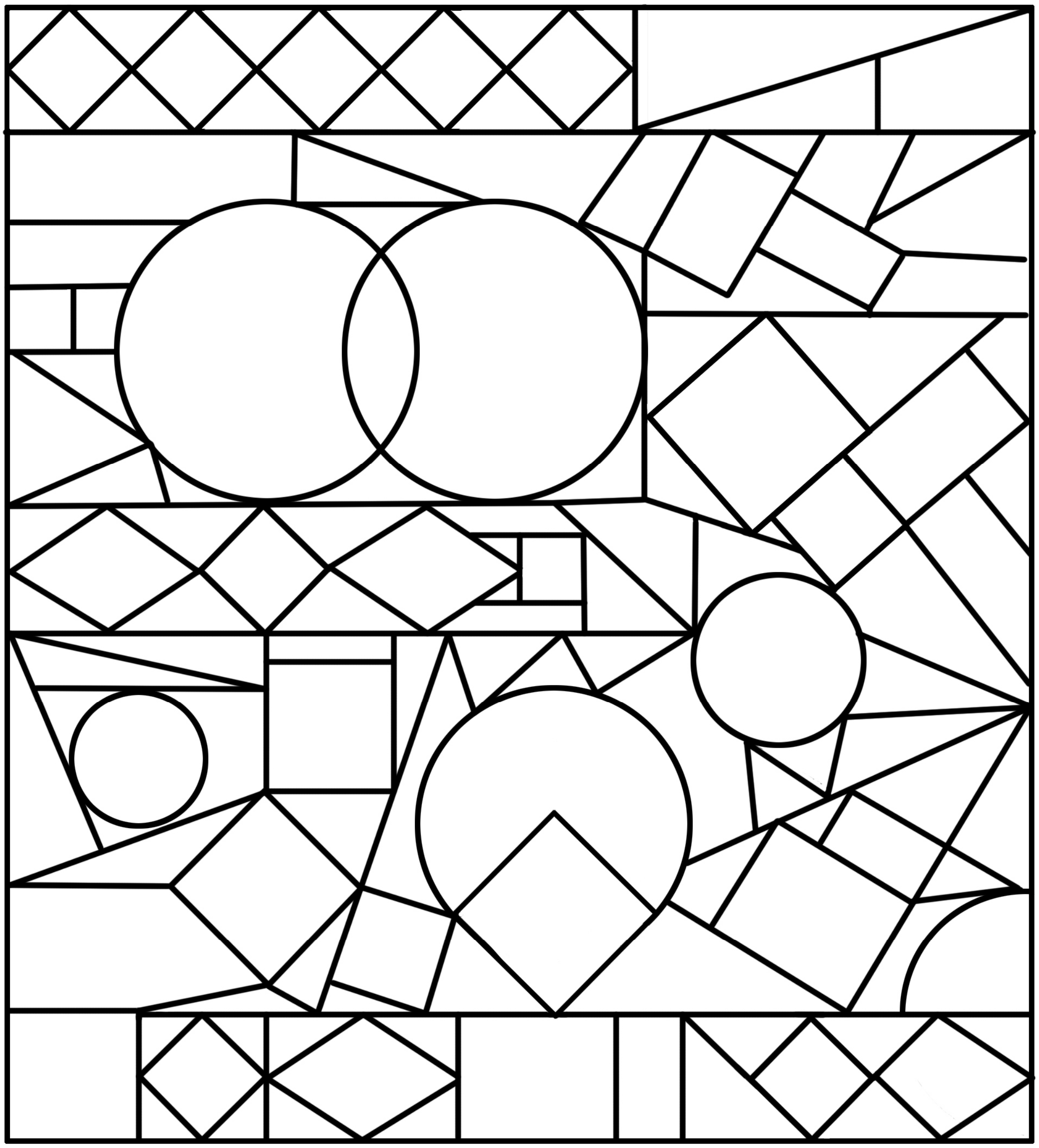
• Travail individuel, en petits groupes ou en groupe classe selon les étapes.

Notes et réflexions

Une astuce pour construire un angle droit est proposée en annexe 3.

Il est possible que des figures du patchwork restent non coloriées. Pourquoi ?
Le patchwork comprend, en effet, d'autres figures que celles demandées (trapèzes, demi-disques, des figures délimitées des courbes,…).






1.
Je plie la feuille une première fois...
2.
Je replie encore en suivant le chemin du premier pli.
3.
Je vérifie le bord à bord...
4.
Je vois alors un angle droit !

QUELQUES ACTIVITÉS D'EXPLOITATION DU TANGRAM

Mise en situation

L'activité débute par la présentation du « Tangram » et par l'opportunité offerte aux élèves de manipuler les pièces.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer.

- Il s'agit de manipuler les pièces du Tangram et de les orienter dans différentes positions.

Compétence transversale

Résoudre, raisonner et argumenter : exposer et comparer ses arguments et ses méthodes confronter ses résultats avec ceux des autres ; s'exprimer dans un langage clair et précis, maitriser le vocabulaire et les tournures nécessaires pour décrire les étapes de la démarche ou de la solution.

- À différentes étapes de la séquence, les élèves devront confronter leurs résultats à un modèle ou aux dessins produits par les autres élèves. Ils devront s'exprimer avec clarté et précision pour permettre aux autres de reproduire un modèle sur la base de leur description.

Progression de l'activité

Étape 1 - Découverte des pièces du Tangram.

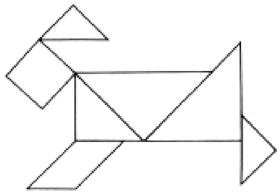
Chaque enfant dispose d'un Tangram (voir annexe 1 pour des modèles à reproduire et à découper, ensuite voir annexe 2 pour une description détaillée de cet outil). L'objectif est de permettre aux élèves d'explorer les possibilités du Tangram en formant librement des configurations. Par deux, les enfants peuvent échanger leurs avis à propos de leurs dessins et tenter de reproduire le dessin réalisé par l'autre. Ils découvrent ainsi progressivement les possibilités du Tangram et les différences entre les pièces.

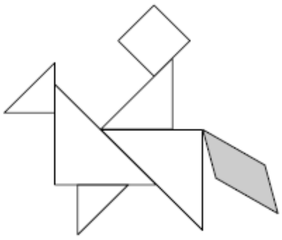
Étape 2 - Reproduction d'un modèle.

L'objectif est d'utiliser son propre Tangram pour reproduire un modèle. Plusieurs approches peuvent être envisagées, notamment :

- reproduire un modèle de même taille que le modèle ;
- reproduire un modèle de plus grande taille que le modèle ;
- reproduire un modèle de plus petite taille que le modèle.

Lorsqu'il s'agit de reproduire un modèle de même taille, la tâche est facilitée par la possibilité de recouvrir les pièces dessinées. Les modèles de grande taille peuvent être présentés au tableau ; il est alors conseillé d'utiliser des pièces facilement déplaçables (p. ex. avec un matériel magnétique ou des Velcros) de façon à pouvoir réaliser divers modèles. Quelques exemples de modèles à photocopier sont proposés en annexe 3.

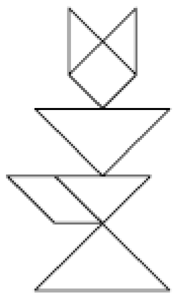




Étape 3 - Description d'un modèle.

L'activité consiste cette fois à expliquer oralement la disposition des pièces d'un modèle de façon à ce qu'une autre personne puisse le reproduire sans le voir.

Le travail peut d'abord se mener collectivement : l'enseignant choisit un modèle de Tangram où les pièces se succèdent dans un ordre simple et propose à un enfant de venir décrire ce modèle aux autres élèves ; ces derniers doivent alors essayer de composer le modèle avec leur propre Tangram, sans voir le modèle décrit. Le modèle peut ensuite être affiché au tableau pour permettre la vérification.



Dans un deuxième temps, les enfants peuvent travailler par paires en plaçant un écran devant eux : l'un invente un modèle en utilisant son Tangram et il explique la disposition des pièces à l'autre qui essaie de le reproduire avec ses propres pièces. La vérification se fait en levant l'écran. Les élèves inversent les rôles et décrivent tour à tour leur propre dessin.

Pour aller plus loin : encore quelques idées…

- Utiliser des silhouettes réalisées avec des pièces de Tangram (voir annexe 4 pour quelques exemples à photocopier). Pour faciliter la tâche, les silhouettes peuvent être agrandies (à 300 %) de façon à avoir la même taille que les pièces des Tangram à disposition des élèves.

- Utiliser d'autres types de Tangram (voir annexe 5 pour d'autres exemples : un Tangram quadrillé, un Tangram en forme d'œuf et un autre en forme de cœur).

- Associer des dessins et des descriptions (voir annexe 6).

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Lors de la reproduction des modèles, et plus encore lors de leur description, le parallélogramme risque d'engendrer des difficultés à cause de ses deux orientations possibles (voir annexe 2 pour une explication plus détaillée).	- Pour faciliter la tâche des élèves, une face des pièces peut être colorée, ce qui règle alors le « problème » du parallélogramme et n'a pas d'impact sur les autres pièces.
- La reproduction d'un modèle pourrait aussi engendrer quelques difficultés de latéralisation et de positionnement des pièces.	- Si les élèves éprouvent trop de difficultés avec les modèles de grande taille ou de petite taille, on peut leur proposer des modèles de taille équivalente qui permettent la superposition des pièces. On peut également leur demander de reproduire le dessin par superposition puis de tenter ensuite de recréer le modèle à côté.
- La description verbale des modèles est sans doute l'étape la plus complexe de l'activité.	- L'enseignant peut préciser un « schéma » à suivre pour réaliser une description : le NOM de la figure ; sa TAILLE (pour les triangles) ; son ORIENTATION (le sens de la forme – le triangle avec la pointe en bas, etc.) et sa POSITION dans le dessin.

Matériel

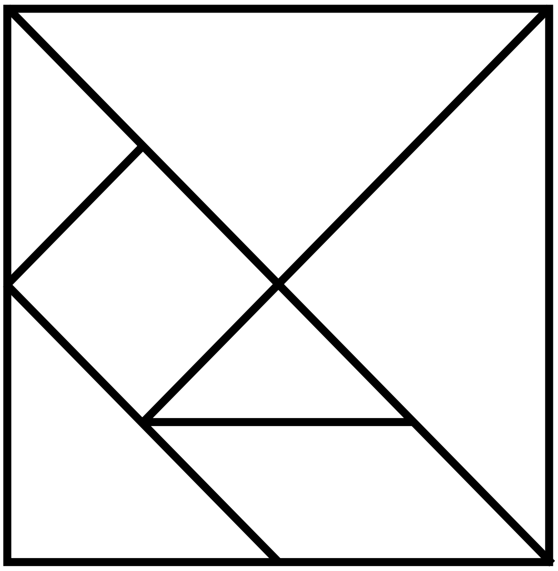
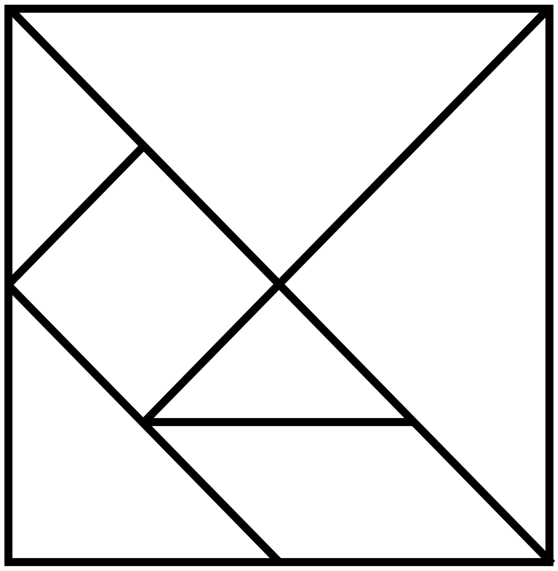
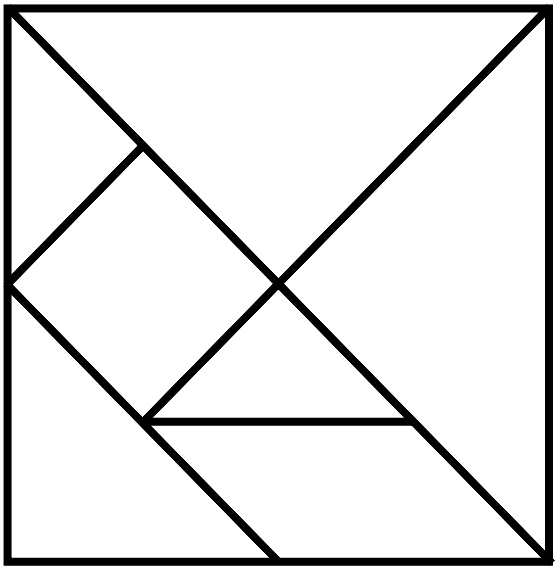
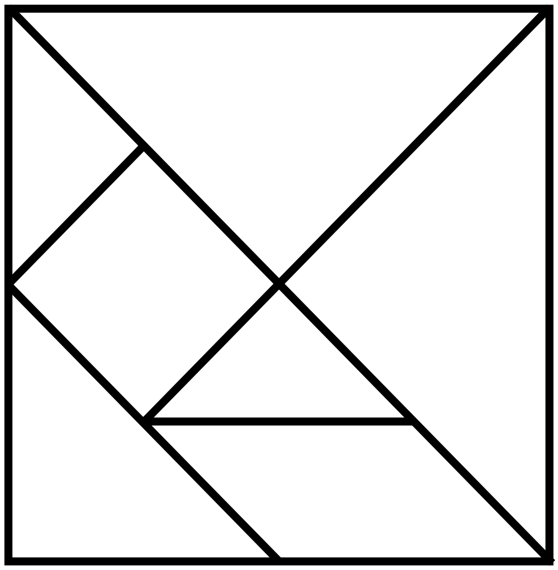
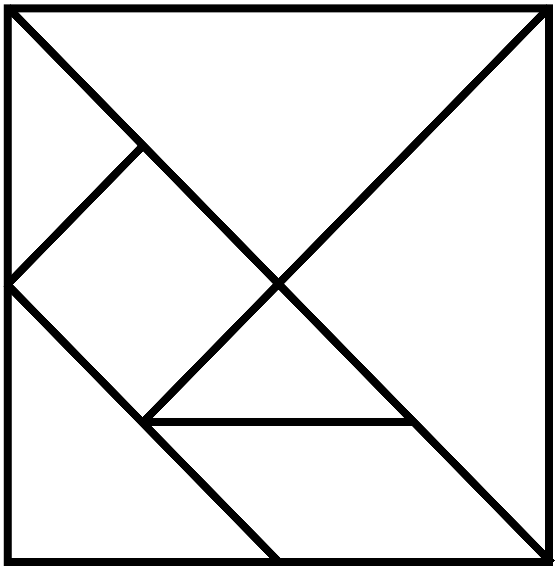
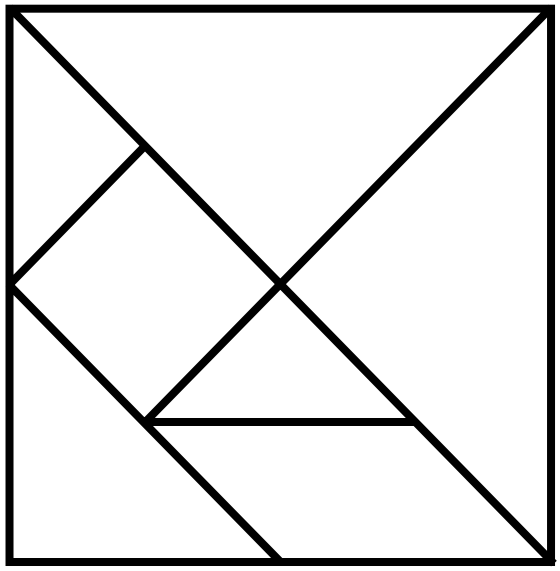
Étape 1
► Un Tangram par enfant (voir exemples à photocopier et à découper en annexe 1).
Étape 2
► Un Tangram par enfant.
► Une reproduction agrandie des différentes pièces et une technique pour les afficher au tableau tout en pouvant les déplacer (matériel magnétique ou Velcros).
► Des modèles de dessins construits par assemblage des différentes pièces du Tangram (voir annexe 3 – ces dessins peuvent être agrandis à 300 % de façon à correspondre à la taille des pièces des Tangram dont disposent les enfants).
Étape 3
► Un Tangram par enfant et les reproductions agrandies pour afficher au tableau.
Pour aller plus loin …
► Voir annexes 4 à 6.

Organisation de la classe

• En groupe classe ou par paires selon les étapes de l'activité.

Notes et réflexions

Cette activité s'inspire très fortement d'une activité développée par le CREM. Les fiches présentées en annexe sont directement extraites du document « *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur* » (2002). Le chapitre concernant le Tangram est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=1808
Moyennant certaines adaptations, ces activités peuvent être développées de la première à la sixième primaire.

<u>Quelques explications sur cet outil.</u>

Ces commentaires sont extraits de « Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur » (CREM, 2002, pp. 28-29).

Le Tangram nous vient de Chine, il est vieux d'environ 2500 ans et s'utilise comme un puzzle. Il se compose de sept pièces, à savoir un carré, un parallélogramme, et cinq triangles rectangles, deux grands, un moyen et deux petits. En assemblant ces sept pièces de diverses façons, on peut obtenir des centaines de configurations différentes. Un assemblage particulier est celui du carré (voir figure 1).

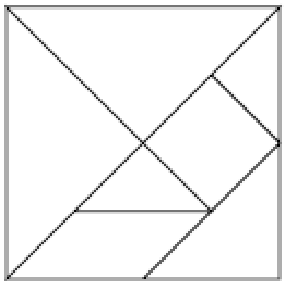


Fig. 1

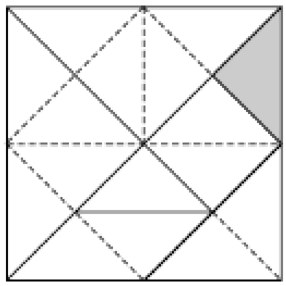


Fig. 2

Les sept polygones ont entre eux des rapports de grandeurs simples. En pavant le carré formé des sept pièces avec le petit triangle (voir ci-dessus), on voit apparaitre certaines propriétés, à savoir :

- certains côtés de polygones ont même longueur ;
- les aires de chacun des deux grands triangles valent quatre fois l'aire d'un petit ;
- les aires du carré, du parallélogramme et du moyen triangle valent deux fois l'aire d'un petit triangle ;
- la construction de la figure fait jouer un rôle aux diagonales et aux points milieux de certains segments ;
- le parallélogramme a deux orientations possibles dans le plan : il est orienté différemment selon la face sur laquelle il est posé. La figure 3 montre que lors d'une rotation dans le plan, par exemple un demi-tour sur la table, le parallélogramme garde son orientation. Tandis que la figure 4 illustre le retournement du parallélogramme obtenu en sortant du plan : on passe de la face *A* à la face *B*, qui est orientée différemment.

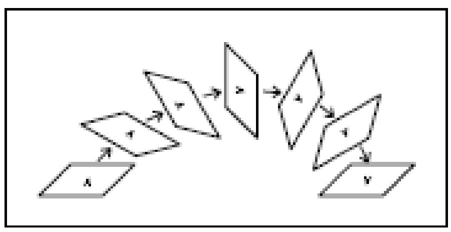


Fig. 3

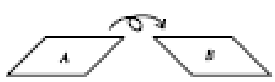
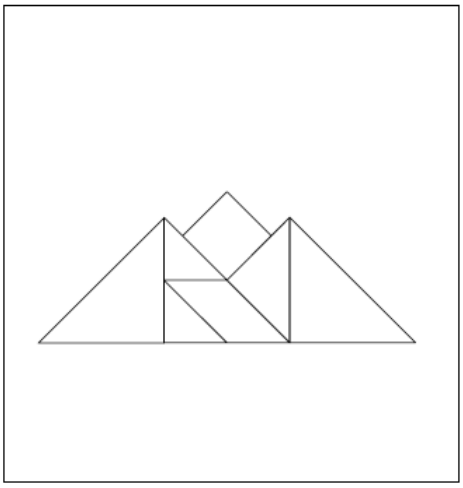
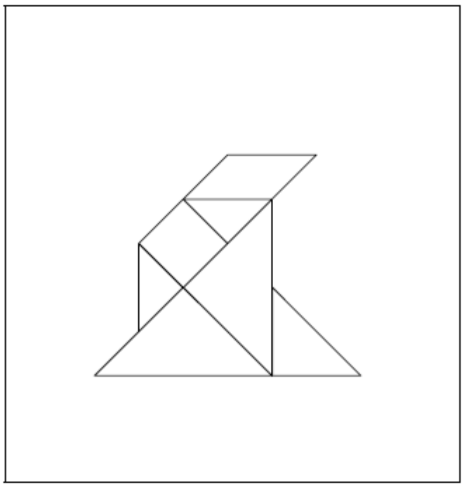
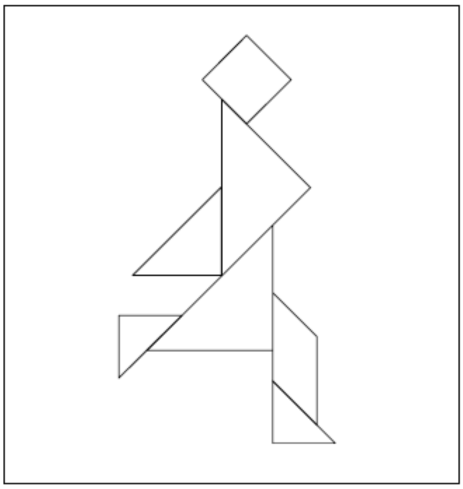
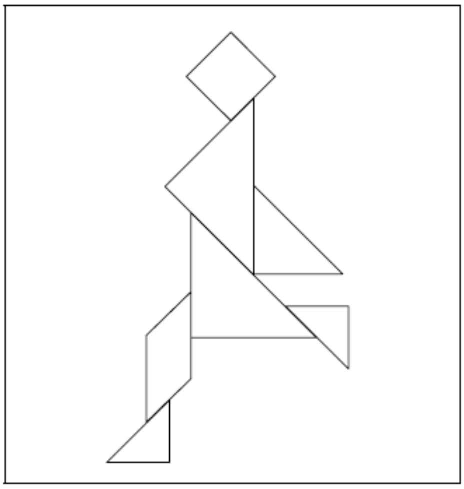
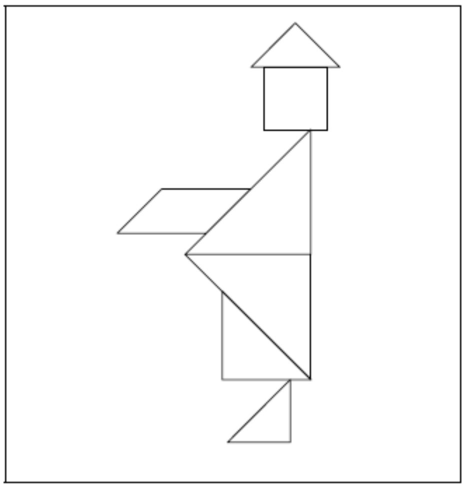
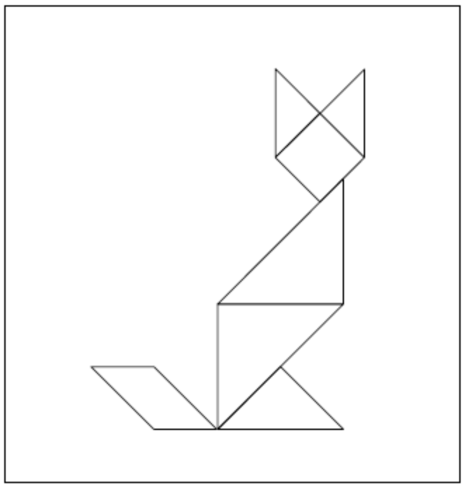


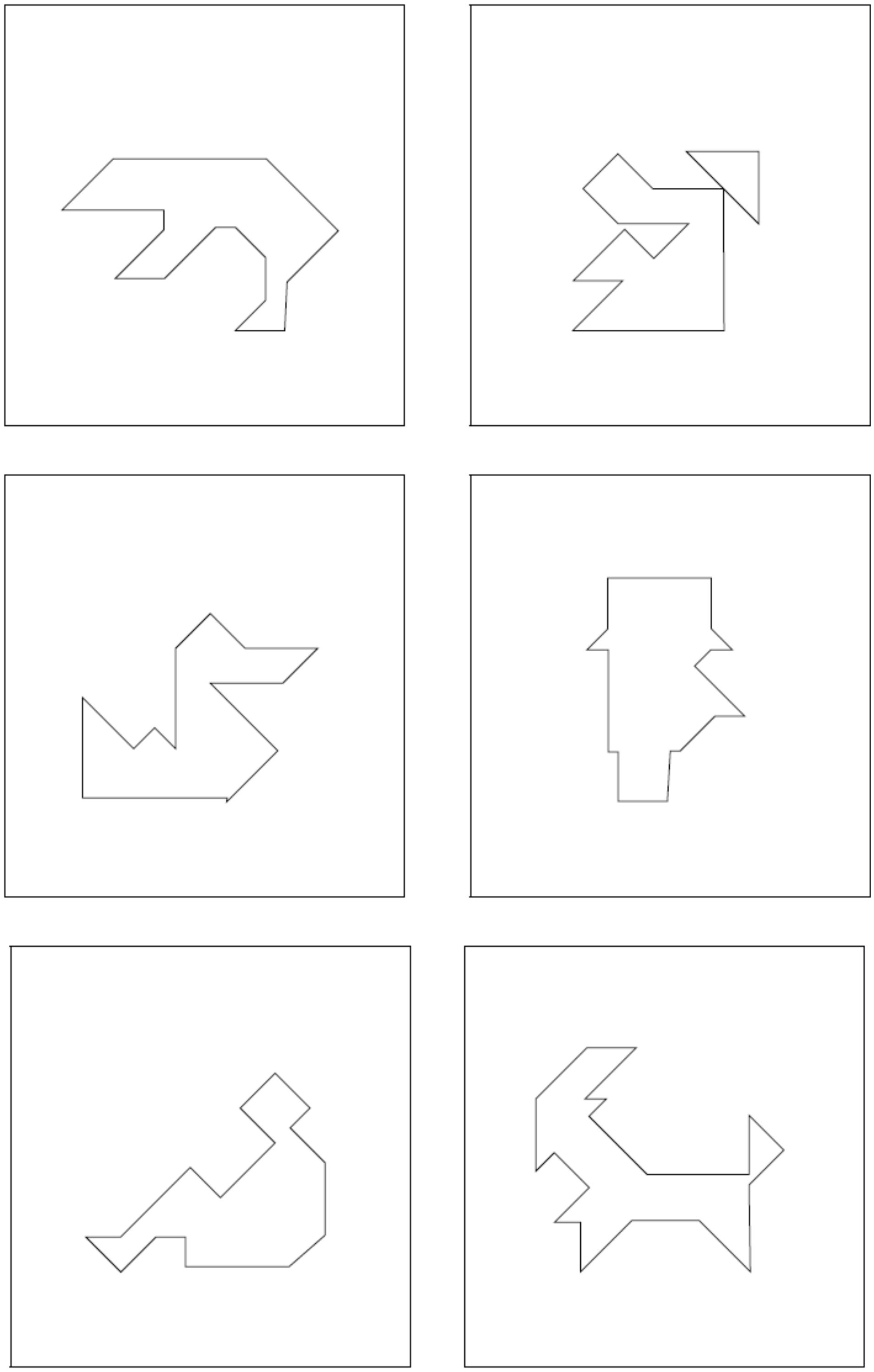
Fig. 4

Quelques modèles de dessins réalisés avec les pièces d'un Tangram

http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=1808

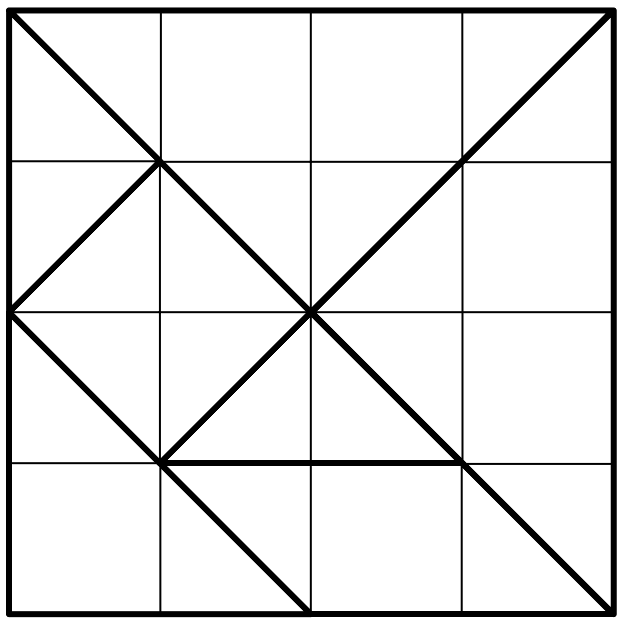
Quelques exemples de silhouettes

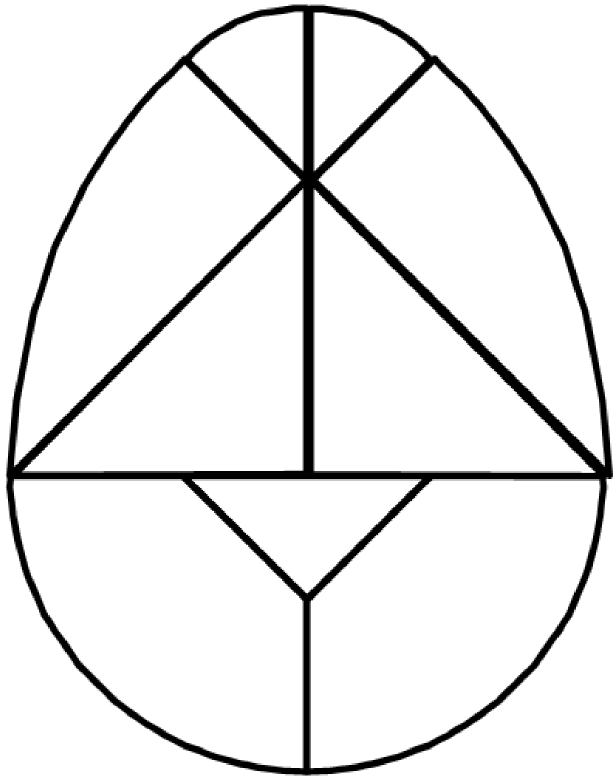


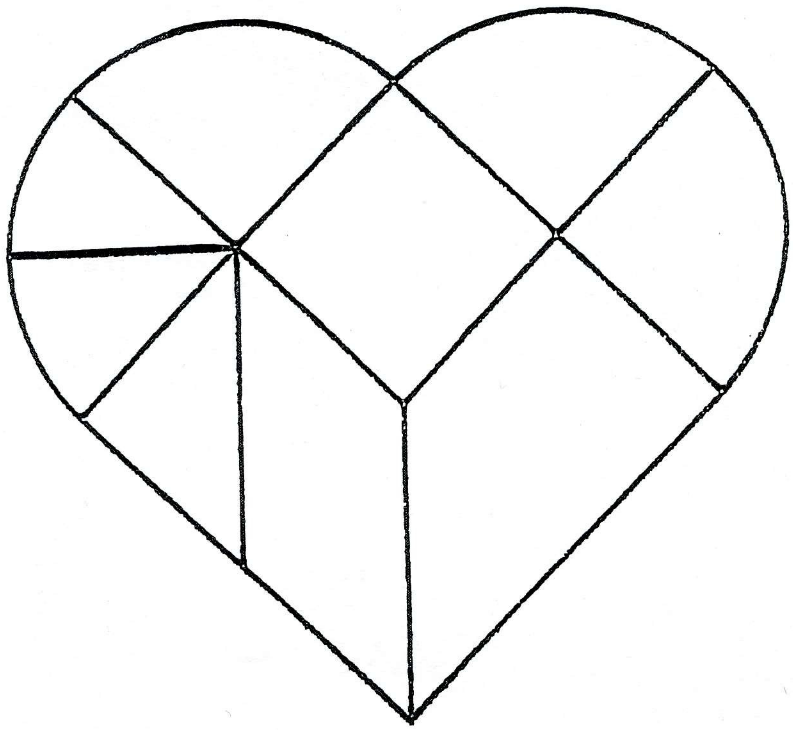
http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=1808

Figures géométriques - Fiche n°3 - Annexe 5

D'autres « Tangram »

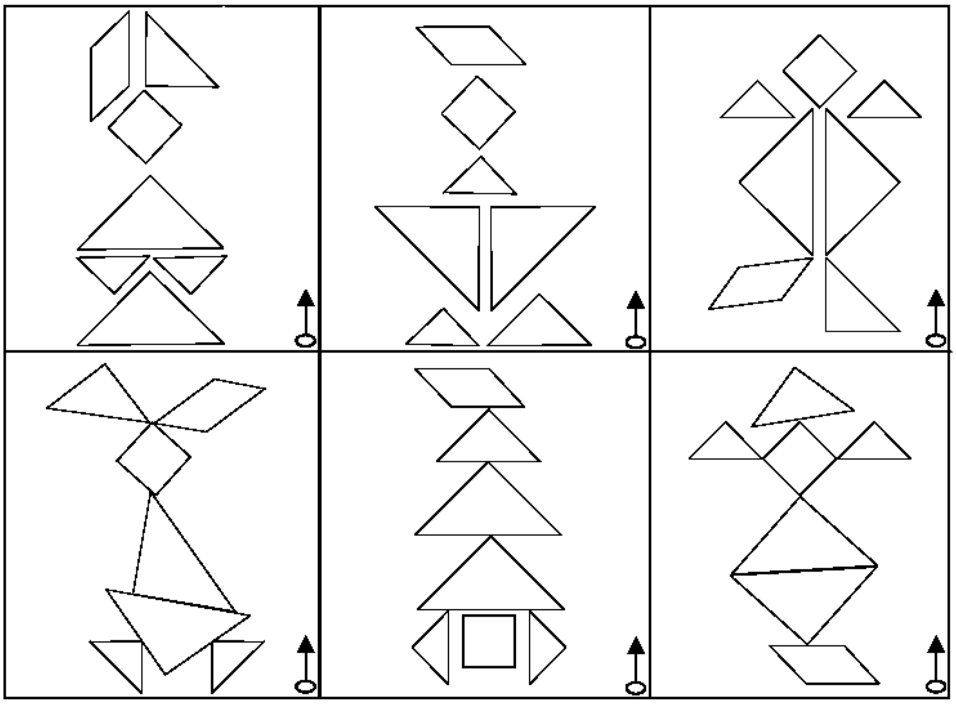






Les fiches proposées ici sont extraites d'un jeu présenté dans les pistes didactiques de l'évaluation externe inter-réseau de novembre 2002 en « Éveil - Formation historique et géographique » (3e primaire). Ces pistes sont disponibles à l'adresse suivante : http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=2921. Pour chaque fiche, les dessins sont orientés à l'aide de la flèche située en bas, à droite.
Chaque joueur doit retrouver le dessin qui correspond aux indices indiqués sur la fiche.

Le carré est entre deux petits triangles. Le triangle moyen est plus haut que le carré. Le parallélogramme est plus haut que le carré.	Le carré est plus haut que les grands triangles. Les deux grands triangles sont placés l'un à côté de l'autre. En bas à gauche, il y a un parallélogramme.
Le carré est entre deux triangles. Le triangle moyen est au-dessus du carré. Le parallélogramme est plus bas que le carré.	Le carré est plus haut que les petits triangles. Les grands triangles sont l'un en dessous de l'autre. En haut à droite, il y a un triangle.
Le parallélogramme est plus haut que les petits triangles. Les grands triangles sont l'un en dessous de l'autre. En haut, à gauche, il y a un triangle.	Le carré est plus haut que les petits triangles. Les deux grands triangles sont placés l'un à côté de l'autre. En haut, au milieu, il y a un parallélogramme.



V. POURQUOI CE TYPE D'APPROCHE ?

Aujourd'hui, on distingue assez couramment trois types de géométrie qui demandent aux élèves des changements de point de vue quant aux arguments à développer pour identifier les différentes figures géométriques (autrement dit, quant aux éléments de preuve ou au type de démonstration à fournir)[1].

Le tableau suivant propose une synthèse de cette évolution.

Types de géométrie	Types de preuve	Boite à outils géométriques	Commentaires
Géométrie perceptive	**Est vrai ce que je vois**	**L'œil**	Les élèves les plus jeunes (en maternelle et au début de l'enseignement primaire) considèrent comme vrai ce qui découle directement de la perception visuelle. Ainsi, un enfant considérera qu'une figure est un carré car, en la regardant, elle a bien la forme d'un carré.
Géométrie instrumentée	**Sont vraies les propriétés que je peux vérifier à l'aide d'instruments**	**Instruments de mesure tels que la règle graduée, le compas, l'équerre, le gabarit, etc.**	En primaire, une propriété est considérée comme vraie si l'on peut la vérifier à l'aide d'instruments. Ainsi, l'élève justifiera le fait que la somme des amplitudes des angles d'un triangle vaut 180° car il le vérifie dans plusieurs situations. A cette étape de l'argumentation, les élèves ne comprennent pas bien la notion de condition nécessaire et suffisante. Pour vérifier qu'une figure est un carré, ils pensent qu'il faut à la fois mesurer la longueur des quatre côtés et l'amplitude des quatre angles. Ils ne conçoivent pas qu'une fois la longueur des côtés mesurés, on peut se contenter de mesurer l'amplitude d'un seul angle.
Géométrie déductive	**Est vrai ce que je démontre**	**Théorèmes, définitions, axiomes**	On entre ici pleinement dans le raisonnement déductif. L'élève comprend que son argumentation doit se baser sur les données de l'énoncé et que, même si une figure accompagne celui-ci, aucune propriété ne pourra se justifier par recours direct à l'observation de la figure. Seule, la référence à des théorèmes, définitions ou axiomes garantira la pertinence de la preuve.

[1] Pour en savoir plus, voir notamment les travaux de Roland Charnay (2005) (http://www.ac-guadeloupe.fr/Cati971/PEDAGO/gam1/outils/charnay/Mercredi_16_novembre_2005.pdf) et d'André Pressiat (2004) (http://www.ac-reims.fr/datice/math/journees_nancy/plenieres/andre_pressiat.pps#256).

Au début de l'enseignement primaire, c'est essentiellement la géométrie perceptive qui est sollicitée. En fin de première étape, les Socles de compétences précisent que, les élèves doivent pouvoir « ***Reconnaitre, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer… sur base de la perception et de la comparaison avec un modèle ».***

Dans le cadre de ces pistes didactiques, le groupe de travail s'est essayé à préciser la définition des Socles de compétences en s'appuyant sur les trois types de géométrie décrits à la page précédente…

- Que signifie « reconnaitre des figures sur base de la perception et de la comparaison avec un modèle » ?

  Les élèves peuvent reconnaitre les figures parce qu'elles **ressemblent** à un **modèle concret** (affiché dans la classe ou dessiné dans leur cahier) ou à **un modèle mental** qu'ils ont construit en cours d'apprentissage.

- Est-ce possible de reconnaitre ainsi (c'est-à-dire sur base de la perception, par « ressemblance » avec un modèle) des figures présentées dans différentes positions ?

  Si, en cours d'apprentissage, les élèves ont rencontré des carrés sur pointe, des rectangles présentés en oblique, etc. **on peut imaginer que leur modèle mental ne sera pas figé** et que cela leur permettra de reconnaitre ces figures, toujours sur la simple perception. À l'inverse, si tous les carrés qu'ils ont rencontrés étaient posés sur leur base, il y a peu de chances qu'ils s'interrogent sur la possibilité selon laquelle cette figure sur pointe puisse être un carré.

En fin de première étape de la scolarité, les élèves devraient donc être à même de reconnaitre les figures dans différentes positions, en s'appuyant sur la perception visuelle, c'est-à-dire ici sur une ressemblance perçue avec les modèles concrets ou mentaux qu'ils ont construits en cours d'apprentissage.

L'identification des figures par « ressemblance » avec un modèle n'est évidemment pas suffisante en soi.

- **La perception visuelle est parfois trompeuse** (les angles peuvent sembler droits, les côtés peuvent paraitre de même longueur sans l'être réellement) et la comparaison avec un modèle peut nécessiter de faire un pas vers la géométrie instrumentée. Avec les jeunes élèves, on peut ainsi imaginer des activités qui amènent à **vérifier certaines caractéristiques des figures**, comme les angles droits ou la longueur des côtés.
- Il ne s'agit là que d'une première étape qui devra être poursuivie dans la suite de la scolarité, notamment lorsque les élèves découvriront les propriétés des figures et pourront constater, par exemple, que telle figure est un rectangle car « les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu ».

PARTIE 3 – GRANDEURS
LES FRACTIONS

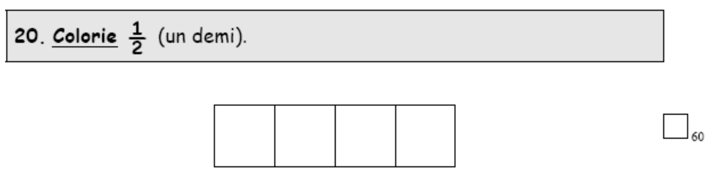
I. COMPÉTENCE SPÉCIFIQUE VISÉE

La compétence spécifique développée dans cette partie s'intitule « **Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en deux et en quatre)** ». Dans les pistes didactiques, le groupe de travail a décidé de développer plus spécifiquement l'objectif de donner du sens à la fraction-opérateur (opération de fractionnement et grandeur fractionnée : 1/2 et 1/4 de quelque chose).

Concrètement, les pistes proposent des activités qui permettent de rencontrer les fractions « un quart de » et « un demi de » dans une variété de situations.

II. ANALYSE DES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES DANS L'ÉPREUVE

Trois questions de l'épreuve confrontaient les élèves à la compétence « **Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en deux et en quatre)** ».

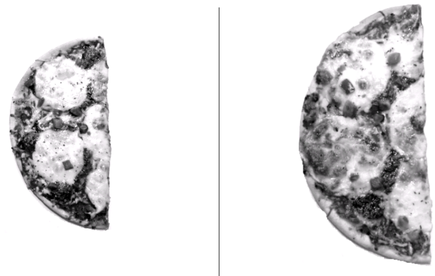
La question ci-contre implique de **compléter une opération de fractionnement** : face à une figure découpée en parts égales, il s'agit de prélever (ici en les coloriant) le nombre de parts nécessaires pour représenter une fraction donnée (ici « un demi » donc 2 parts sur 4). Cette question a été réussie par 83% des élèves, ce qui est appréciable mais démontre néanmoins que cette tâche, d'apparence assez simple, n'est toutefois pas maitrisée par l'ensemble des élèves.	

La question présentant des parts de pizza requiert de **comparer des grandeurs fractionnées** (c'est-à-dire de comparer les résultats d'opérations de fractionnement). La difficulté réside ici dans le fait que les deux unités de départ sont différentes : Raphaël a une petite pizza alors que Yalçin a une grande pizza. Même si chaque enfant a mangé une demi-pizza, ils n'ont donc pas mangé la même quantité de nourriture.

En effet, lorsque l'on travaille sur les fractions-opérateurs, on prend une fraction d'une (ou de plusieurs) unité(s) : il s'agit d'un demi **de** quelque chose et si les deux objets sont de tailles différentes, un demi **de** A ne sera pas égal à un demi **de** B.

Cette réflexion sur la variation de la taille de l'unité a posé des difficultés aux élèves puisque la question n'est réussie que par 68% d'entre eux.

34. Raphaël et Yalçin mangent de la pizza.



Raphaël mange **cette demi-pizza.** — Yalçin mange **cette autre demi-pizza.**

En observant le dessin, **<u>coche</u>** <u>la seule</u> proposition correcte.

☐ Raphaël mange moins de pizza que Yalçin parce qu'il est plus gourmand.

☐ Raphaël mange moins de pizza que Yalçin parce que sa pizza est plus petite.

☐ Raphaël mange autant de pizza que Yalçin parce qu'ils ont le même appétit.

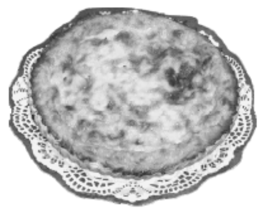
☐ Raphaël mange autant de pizza que Yalçin parce qu'ils mangent chacun une demi-pizza. ☐ 94

Pourquoi identifier « un quart » de tarte a-t-il posé autant de difficultés aux élèves ? Cette question était en effet une des plus complexes de l'épreuve (45% de réussite).

Résoudre cette question nécessite tout d'abord de **différencier « un quart de tarte »** (solution 4) de « **un petit morceau de tarte** » (solution 3) et de **« une demi-tarte »** (solution 2).

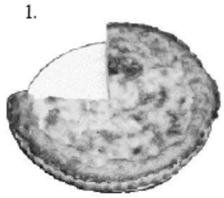
Résoudre cette question nécessite aussi de **distinguer le résultat** du fractionnement (<u>la grandeur fractionnée</u>) **de l'action elle-même** (couper en quatre et sélectionner un morceau – <u>l'opération de fractionnement</u>). Une confusion entre l'action et son résultat peut sans doute expliquer en partie le choix de la solution 1.

8. C'est l'heure du gouter.
Mathias achète <u>un quart</u> $(\frac{1}{4})$ de cette tarte au riz.

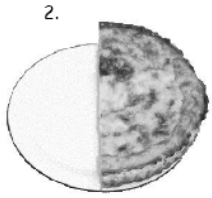


<u>Entoure</u> l'assiette de Mathias. ☐ 24

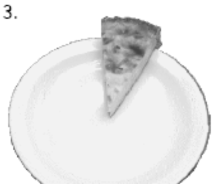
1.



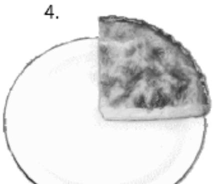
2.



3.



4.



III. STRUCTURATION DES APPRENTISSAGES RELATIFS AU DÉVELOPPEMENT DE LA COMPÉTENCE VISÉE

Comme mentionné en introduction de cette partie, les pistes didactiques relatives au domaine des grandeurs se centrent sur les fractions et plus spécifiquement sur la compétence « Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en deux et en quatre) ». Les pistes didactiques visent à donner du sens à la fraction en tant qu'opérateur (opération de fractionnement et grandeur fractionnée : 1/2 et 1/4 de quelque chose).

Il est important de développer cette compétence dans des **situations variées**, comme notamment :

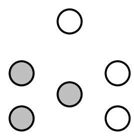
- S1 ⇔ les situations en lien avec la vie réelle ;
- S2 ⇔ les jeux mathématiques ;
- S3 ⇔ les activités décontextualisées.

Au niveau **du matériel** sur lequel s'appuyer, il semble pertinent de proposer aux élèves d'utiliser divers supports, comme notamment :

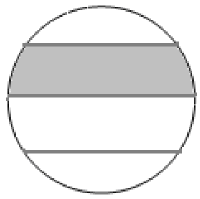
- M1 ⇔ **le matériel authentique**
    - des objets de la vie courante, comme un fil, une baguette, une tarte, une barre de chocolat, le contenu d'une boite de biscuits, le contenu d'une bouteille, etc.
- M2 ⇔ **le matériel représenté ou symbolique**
    - représentations en rapport avec le matériel authentique (photos, dessins, etc.)
    - représentations plus abstraites (comme par exemple le dessin des diverses figures géométriques qui permettent de représenter des aires à fractionner).
- M3 ⇔ **le matériel mathématique**
    - Attrimaths, Tangram, etc.

Pour aborder la fraction-opérateur, il est important de considérer les différentes dimensions que l'on peut faire varier ; on parlera ici des **variations** des situations :

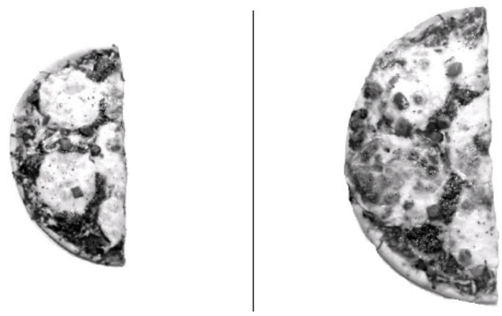
- V1 ⇔ **le type d'objets** à fractionner (ces « objets » peuvent être du matériel authentique ou représenté) ;
    - quantités continues (longueur, surface, capacité, etc.) ou discontinues (un nombre d'objets)



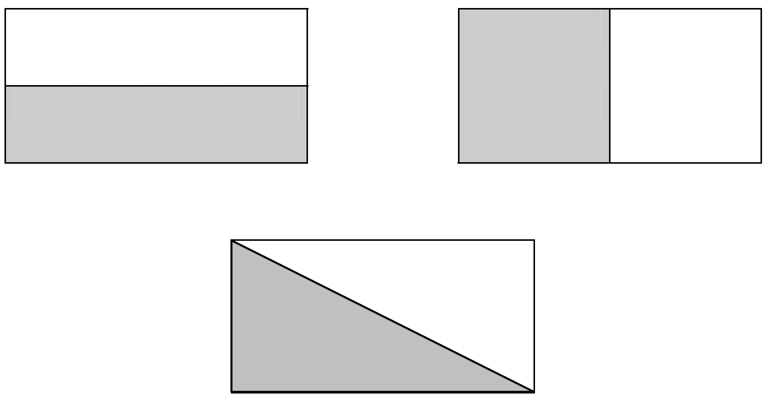
- quantités pouvant être fractionnées de façon précise ou non
  - les objets de la vie courante ne peuvent pas toujours être fractionnés avec précision (ex. une demi-pomme, un demi-kilo de pommes, etc.)
  - les représentations peuvent généralement être fractionnées avec précision, mais attention aux situations visuellement piégeuses (les parts doivent être équivalentes – la partie colorée dans le disque ci-dessous ne représente pas un quart)



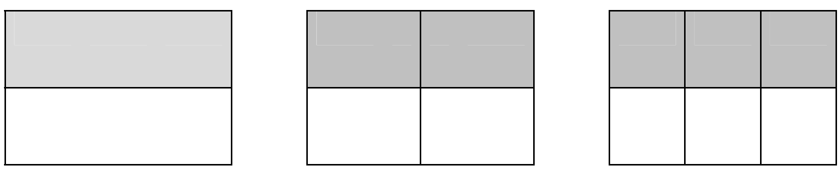
- V2 ⇔ **la taille de l'objet** à fractionner (la moitié d'une petite pizza n'est pas équivalente à la moitié d'une grande pizza) ;



- V3 ⇔ **la façon de fractionner** (p. ex. une même surface peut être partagée en deux de différentes façons) ;



- V4 ⇔ **le nombre de parts** (p. ex. la fraction « un demi » peut être représentée en découpant l'unité en 2, 4, 6 parts ou plus encore).



Remarque : il est aussi intéressant de proposer des fractions qui dépassent l'unité (ex. chacun reçoit 5/4 de pizza ou une pizza et un quart de pizza).

Le tableau suivant rend compte des interactions possibles et propose, à titre illustratif, quelques exemples de fiches d'activités. Moyennant certaines adaptations, les activités peuvent être développées tout au long du cycle 5-8 et se poursuivre au cycle suivant.

<table>
<tr><th rowspan="2">Matériel</th><th rowspan="2">Variations</th><th colspan="3">Situations</th></tr>
<tr><th>S1 ⇔ situations en lien avec la vie réelle</th><th>S2 ⇔ jeux mathématiques</th><th>S3 ⇔ activités décontextualisées</th></tr>
<tr><td rowspan="4">M1 ⇔
Le matériel authentique</td><td>Type d'objets</td><td rowspan="8">Fiche 1 – Comment peut-on partager tout cela de façon équitable ?

Variations :
⇔ taille des objets
⇔ nombre de parts</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Fiche 2 – La fraction « un demi » sous toutes ses coutures.
Variations :
⇔ type d'objets
⇔ façons de fractionner</td></tr>
<tr><td>Taille de l'objet</td></tr>
<tr><td>Façon de fractionner</td></tr>
<tr><td>Nombre de parts</td></tr>
<tr><td rowspan="4">M2 ⇔
Le matériel représenté ou symbolique</td><td>Type d'objets</td><td rowspan="4">Fiche 3 – Bataille de fractions.
Variations :
⇔ taille des objets
⇔ façons de fractionner
⇔ nombre de parts</td><td rowspan="4">Fiche 4 – Exercices en débat.
Variations :
⇔ type d'objets
⇔ taille des objets
⇔ façons de fractionner
⇔ nombre de parts</td></tr>
<tr><td>Taille de l'objet</td></tr>
<tr><td>Façon de fractionner</td></tr>
<tr><td>Nombre de parts</td></tr>
<tr><td rowspan="4">M3 ⇔
Le matériel mathématique</td><td>Type d'objets</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Taille de l'objet</td></tr>
<tr><td>Façon de fractionner</td></tr>
<tr><td>Nombre de parts</td></tr>
</table>

Les quatre fiches sont assez diversifiées.

- Les fiches 1 et 2 proposent des petites séquences au départ de situations de vie (réelles ou imaginées, voir fiche 1) ou de petits défis mathématiques à résoudre (fiche 2). Les activités proposées ont pour fonction d'inviter les élèves à rencontrer les fractions dans diverses situations concrètes qui leur donnent du sens.
- La fiche 3 s'apparente à un jeu de « bataille » et permet de comparer des fractions dans une activité ludique.
- La fiche 4 se présente sous la forme d'un exercice plus classique qui permet de confronter les élèves à une variété de situations et qui pourrait dès lors constituer une synthèse des autres activités. La méthodologie proposée invite les élèves à réaliser de multiples confrontations (par paires d'abord, puis en évaluant les solutions d'un élève fictif ensuite) et permet ainsi de dépasser le simple exercice d'application pour ouvrir la voie au débat et à l'argumentation.

Des compétences transversales interviennent également dans la plupart des situations.

Par exemple, la compétence *« Appliquer et généraliser »* est sollicitée dans la fiche n°2 dans la mesure où les élèves doivent *« se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes ».* Dans l'activité « La fraction 'un demi' sous toutes ses coutures », les élèves devront en effet faire appel à des instruments de mesure pour réaliser certains partages.

Dans cette situation, les élèves seront aussi amenés à *« utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents ».* Les élèves devront en effet représenter les partages réalisés : l'opération de fractionnement et/ou son résultat (la grandeur fractionnée).

La compétence « *Analyser et comprendre un message* » intervient notamment dans la compréhension des règles du jeu (voir fiche 2 : « La bataille de fractions »).

Enfin, la compétence *« Résoudre, raisonner et argumenter »* est très présente dans toutes les situations proposées. Selon les situations, les élèves devront « *s'exprimer dans un langage clair et précis » ; « citer l'énoncé* qu'ils utilisent *pour argumenter* », « *distinguer 'ce dont* ils sont sûrs' *et 'ce qu'il faut justifier'* ». Ils devront aussi « *exposer et comparer* leurs *arguments,* leurs *méthodes »* et *« confronter leurs résultats avec ceux des autres* ».

Pour une évaluation formative des apprentissages réalisés.

Deux types d'évaluations peuvent être développés face aux différentes activités proposées :

- **une évaluation en cours d'apprentissage** qui consiste à observer et à analyser les démarches développées par les élèves lors des travaux en petits groupes (Quelles techniques de partage les élèves développent-ils ? Vérifient-ils si les parts sont équitables ? Etc.) ;
- **une évaluation en fin d'apprentissage** qui pourrait se présenter sous une forme papier-crayon et proposer des exercices proches des situations rencontrées en cours d'activité. On peut utiliser des représentations assez concrètes (ex. des images ou des photos d'objets) ou des représentations plus figuratives comme des figures géométriques (pour représenter des quantités continues) ou des dessins de jetons (pour représenter des quantités discontinues).

IV. QUELQUES FICHES-OUTILS

FICHE N° 1 – COMMENT PEUT-ON PARTAGER TOUT CELA DE FAÇON ÉQUITABLE ?

FICHE N° 2 – LA FRACTION « UN DEMI » SOUS TOUTES SES COUTURES.

FICHE N° 3 – BATAILLE DE FRACTIONS.

FICHE N° 4 – EXERCICES EN DÉBAT.

<u>COMPÉTENCE CIBLÉE DANS LES FICHES-OUTILS (PARTIE GRANDEURS – LES FRACTIONS)</u>

COMPÉTENCE RELATIVE AUX OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

FRACTIONNER DES OBJETS EN VUE DES LES COMPARER (PARTAGER EN 2, EN 4).

NOTE.

QUELQUES EXPLICATIONS THÉORIQUES SONT PROPOSÉES AU POINT V DE CETTE PARTIE.
ELLES PERMETTENT SANS DOUTE D'ÉCLAIRER CERTAINS ASPECTS DÉVELOPPÉS DANS LES FICHES-OUTILS. UN ALLER-RETOUR ENTRE CES DEUX PARTIES EST DONC CONSEILLÉ.

COMMENT PEUT-ON PARTAGER TOUT CELA DE FAÇON ÉQUITABLE ?

Mise en situation

Deux situations de partage sont proposées dans cette fiche :

- **1re situation – Comment partager quand il y a trop peu d'objets ?**

Il s'agit d'une situation fictive. On imagine qu'un élève (ou l'enseignant) a apporté des gaufres (des pommes du verger voisin, des tartelettes aux fruits, etc. ou tout autre « objet » pouvant être scindé en plusieurs parts) et qu'il veut les partager entre les enfants de la classe. Le problème, c'est qu'il y en a trop peu : il y a 15 gaufres (pommes, tartelettes ou autres) pour 20 personnes. Comment va-t-on réaliser un partage équitable ?

Note – Même si la situation proposée est fictive, il serait intéressant, dans la mesure du possible, de disposer du matériel authentique pour réaliser les partages (p. ex. présenter aux élèves les 15 gaufres à partager entre 20 personnes).

- **2e situation – Comment partager quand ce ne sont pas les mêmes objets ?**

On organise un atelier cuisine et on propose aux élèves de réaliser des crêpes. La moitié de la classe disposera d'une grande poêle et l'autre moitié, d'une petite poêle. Comment partagera-t-on les crêpes ?

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en 2, en 4).

- Plus spécifiquement ici, il s'agit de travailler sur le nombre de parts (1re situation) et de prendre conscience de l'importance de la taille de l'objet à fractionner (2e situation).

Compétence transversale

Résoudre, raisonner, argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres, etc.

- Les élèves seront amenés à confronter leurs solutions et à expliquer leurs démarches de partage ; ils devront justifier en quoi les partages réalisés sont ou non équitables.

Progression de l'activité

<u>**Première situation – Comment partager quand il y a trop peu d'objets ?**</u>

Précision de la situation de partage.

Comment partager 15 gaufres (ou tout autre « objet » sélectionné) entre 20 enfants ?

Collectivement, la situation de partage est simplifiée :

- on peut imaginer que l'on a 5 groupes de 4 enfants et que chaque groupe dispose de 3 gaufres à se partager ;
- le problème consiste donc à trouver <u>comment partager 3 gaufres entre 4 enfants</u>.

Les élèves peuvent être répartis en 5 groupes, chaque groupe disposant de 3 gaufres à partager en 4.

Recherche d'une technique pour réaliser un partage équitable.

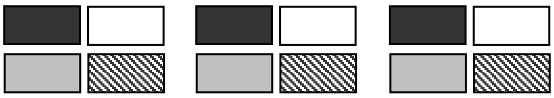
Avant de procéder au partage du matériel authentique (dans chaque groupe, les 3 gaufres à partager en 4), les élèves sont invités à réfléchir au partage à réaliser au départ de représentations dessinées (mieux vaut en effet ne pas couper les « objets » dans tous les sens avant de se rendre compte que le partage n'est pas correct).

Selon la forme des « objets » choisis, on présentera aux élèves des représentations de figures géométriques correspondantes (ex. des rectangles pour représenter les gaufres).

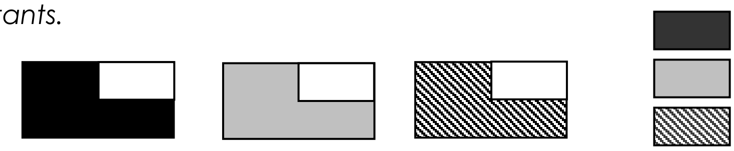
En groupe, les élèves cherchent des solutions possibles de partage. Voici quelques exemples anticipant les démarches possibles :

Partage inéquitable – 2 enfants reçoivent chacun une gaufre et les 2 autres se partagent la dernière

Partage équitable – chaque enfant reçoit un quart de chaque gaufre



Partage équitable – 3 enfants reçoivent chacun 3/4 d'une gaufre et le 4^e^ prend les 3 fois 1/4 restants.



Partage concret du matériel et synthèse.

Les enfants réalisent à présent le partage concret des gaufres (des pommes, des tartelettes, etc.). Selon la forme des « objets », différentes démarches pourront être envisagées pour réaliser ce partage le plus précisément possible.

Généralement, dans une situation réelle de partage de tartes, de gâteaux, de gaufres…, on partage « à l'œil » le plus précisément possible : c'est probablement la meilleure solution ici aussi.

En synthèse, il conviendra d'avoir un débat avec les élèves pour qu'ils prennent conscience que, dans la vie réelle, quand on dit qu'on prend la moitié ou le quart d'un objet, on réalise des parts « à peu près équivalentes ». En situation mathématique, ces parts doivent être « tout à fait équivalentes ».

Prolongement.

D'autres situations de partage de ce type peuvent être proposées :

- certaines amenant à des solutions correspondant à des fractions inférieures à l'unité (ex. partager 6 tartes entre 8 enfants ; 2 tartes entre 3 enfants ; etc.) ;
- d'autres amenant des solutions plus grandes que l'unité (ex. partager 5 pizzas entre 4 personnes ; 3 barres de chocolat entre 2 enfants ; etc.).

<u>Deuxième situation – Comment partager quand ce ne sont pas les mêmes objets ?</u>

La réalisation des crêpes.

Les élèves sont répartis en deux groupes :

- le groupe A dispose d'une petite poêle pour cuire les crêpes ;
- le groupe B dispose d'une grande poêle.

La situation de partage.

Les élèves de chaque groupe sont invités à partager toutes les crêpes en deux.

La dégustation et les questionnements.

On propose aux élèves que certains mangent une demi-crêpe réalisée par le groupe A et que les autres mangent une demi-crêpe réalisée par le groupe B. On leur demande ensuite s'ils ont tous mangé la même quantité ? Pourquoi ? Un débat peut alors être ouvert.

La solution proposée est inéquitable : même si chacun a une demi-crêpe, tout le monde ne mangera pas la même quantité. Les crêpes du groupe A sont plus petites que celles du groupe B et donc les demi-crêpes aussi.

Après ce premier débat, on peut proposer aux élèves de manger une demi-crêpe de chaque groupe, de façon à ce que chacun reçoive la même quantité.

Question subsidiaire : qu'avons-nous finalement mangé ? La quantité équivalente à une crêpe du groupe A, à une crêpe du groupe B ou une quantité intermédiaire entre ces deux tailles de crêpes, etc.

Synthèse.

Il est important de prendre en compte la **taille de l'objet** à fractionner (la moitié d'une petite crêpe ne représente pas la même chose que la moitié d'une grande crêpe).

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Les situations proposées ont pour fonction de mettre à mal certaines représentations erronées : · on ne sait pas partager 3 en 4 (situation 1) ; · une fraction est toujours inférieure à l'unité (prolongement de la situation 1) ; · une fraction = une fraction[1] (situation 2).	- Ce sont les moments de débat qui devraient conduire à dépasser ces « erreurs ».

Matériel

► Recettes, ingrédients et matériel culinaire appropriés.

► Dessins représentant les gaufres (représentations proches du matériel authentique – dessins ou photos de gaufres – ou représentations symboliques – figures géométriques de la forme de la gaufre).

Organisation de la classe

• La classe est organisée en ateliers-cuisine.

Notes et réflexions

L'affectif de l'enfant rentrera peut être aussi en ligne de compte (partager du papier ou des crêpes, ce n'est pas la même chose).
Cette situation s'inspire de « La boite mystère » qui est une activité proposée dans les outils d'évaluation disponibles sur le site Internet de la Communauté française aux adresses suivantes : http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=105
http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=106
http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=107

[1] Notons que cette conception est correcte si l'on se réfère à la fraction nombre (un demi, c'est un demi !), mais pas lorsque l'on se situe dans les fractions-opérateurs (ou grandeurs fractionnées) parce que dans ce cas il s'agit de « un demi **de**… » quelque chose.

LA FRACTION « UN DEMI » SOUS TOUTES SES COUTURES

Mise en situation

L'activité se présente sous la forme de petits défis à résoudre : les enfants vont devoir trouver différentes façons de prendre « le demi de » de tout un tas d'objets de la vie courante.

Les enfants vont travailler en équipe et chaque équipe va être confrontée à plusieurs problèmes de partage à résoudre. L'objectif est de trouver le plus de façons possibles de réaliser des partages corrects.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en 2, en 4).

- Plus spécifiquement ici, il s'agit de donner du sens à la fraction « un demi » en amenant les élèves à partager en deux une série d'objets.

Compétences transversales

Résoudre, raisonner, argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; s'exprimer dans un langage clair et précis ; distinguer « ce dont on est sûr » et « ce qu'il faut justifier » ; utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.

- Les élèves devront argumenter leurs solutions pour justifier aux yeux des autres que leur partage est bien un partage en deux parts égales.
- Les élèves devront représenter les partages réalisés (opération de fractionnement ou grandeur fractionnée).

Appliquer et généraliser : se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter dans des situations différentes.

- Pour réaliser certains partages, les élèves devront faire appel à divers instruments de mesure, non explicitement demandés dans la situation.

Progression de l'activité

Pré-requis.

Il ne s'agit pas d'une activité de découverte de la fraction « un demi », mais plutôt d'une activité d'extension de ce concept par la confrontation avec des situations variées de partages. Les enfants doivent donc avoir découvert au préalable la notion de fraction (un demi de quelque chose ou la moitié de quelque chose).

Résolution des défis.

Des équipes de 3 ou 4 joueurs sont constituées et plusieurs « ateliers » sont dispersés dans la classe. Chaque atelier correspond à un problème de partage à résoudre. Il faut autant d'ateliers que d'équipes, mais certains ateliers peuvent être dédoublés si on ne souhaite pas aborder simultanément un nombre trop important de situations variées.
Au milieu de la classe, une série d'instruments de mesure sont mis à disposition des enfants (une règle graduée, une ficelle, une balance, des récipients gradués ou non gradués, etc.).

Toutes les équipes passent dans chaque atelier différent. La consigne est, endéans un temps donné par l'enseignant, de trouver le plus de façons possibles de prendre « le demi de » ou « la moitié de » l'objet (ou des objets) qui est (sont) proposé(s) dans l'atelier. Chaque groupe dispose d'une feuille blanche pour chaque atelier et devra trouver une façon de représenter le partage réalisé de façon à pouvoir l'expliquer aux autres lors de la mise en commun.

Durant l'activité, l'enseignant joue un rôle important pour motiver les élèves à chercher, les inviter à aller voir la table aux instruments, les inciter à vérifier que les parts constituées sont équivalentes, les amener à réfléchir à la façon dont ils expliqueront aux autres comment ils ont procédé et éventuellement les aider à représenter leurs partages.

Mise en commun.

Après la résolution des défis, chaque groupe présente tour à tour les solutions trouvées pour chaque atelier. L'argumentation est ici de mise puisque les élèves vont devoir expliquer leurs solutions aux autres équipes et les justifier pour les convaincre de leur pertinence.

Synthèse.

Selon les ateliers proposés (voir annexe 1 pour quelques exemples), plusieurs points devront être abordés dans cette synthèse :

- le type d'unité à fractionner (couper en deux une feuille de papier, une série de perles, un litre d'eau, etc.) ;
- l'opération de fractionnement ou la façon de fractionner (Comment faire pour couper des objets en deux parts égales ? Différentes techniques sont-elles possibles ? Cela dépend-il du type d'objets ? Etc.) ;
- l'équivalence des parts (Comment vérifier l'équivalence des parts ? Est-il toujours possible d'obtenir des parts équivalentes ? Qu'en est-il dans la vie courante, par exemple quand on demande un demi-kilo de viande chez le boucher ? Etc.) et l'impossibilité de partager certaines choses en deux (Comment partager 13 pièces de monnaie de 1 centime en deux parts équivalentes ?).

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- L'erreur principale qui est anticipée ici est la réalisation de parts non équivalentes. - Il est intéressant de laisser les élèves se tromper lors des travaux en ateliers dans la mesure où les solutions seront ensuite confrontées et débattues en groupe classe.	- Les débats entre élèves et les argumentations à fournir pour justifier les solutions devraient conduire les élèves à prendre conscience de leurs erreurs et à mieux les comprendre (en expliquant aux autres comment ils ont procédé, grâce aux remarques et critiques des autres groupes, etc.).

Matériel

► Divers types d'objets doivent être mis à disposition des élèves en fonction des ateliers sélectionnés (voir l'annexe 1 qui propose une série d'idées d'ateliers à concrétiser).

Attention : ne pas oublier que chaque groupe est invité à réaliser plusieurs partages et qu'il est donc conseillé de prévoir assez de matériel.

► Prévoir aussi une série d'instruments de mesure (une règle graduée, une ficelle, une balance, des récipients gradués ou non gradués, etc.) qui seront mis à disposition des enfants. Il est conseillé de placer ces instruments au milieu de la classe (et non dans les ateliers où ils s'avèrent les plus utiles) de façon à voir si les élèves penseront eux-mêmes à y recourir.

Organisation de la classe

• Disposition en ateliers pour la phase de résolution des défis, puis en groupe classe pour la confrontation et la synthèse.

Notes et réflexions

L'activité peut aussi être menée sous la forme de plusieurs séquences collectives, un objet typique à partager étant à chaque fois sélectionné et toute la classe effectuant en même temps la recherche de différentes façons de fractionner cet objet.

L'activité peut aussi être adaptée à la notion de « quart » mais il est conseillé de ne pas travailler simultanément sur les deux fractions étant donné que la situation propose déjà une variété d'approches de la fraction.

L'approche proposée ici s'inspire d'une activité intitulée « Tout couper en deux » développée par M. de Terwangne, C. Hauchart et F. Lucas (2007) dans l'ouvrage « *Oser les fractions dans tous les sens* » publié aux éditions De Boeck dans la collection « Math et sens ».

QUELQUES IDÉES D'ATELIERS À PROPOSER.

Note préliminaire.

Les situations proposées ici ne sont nullement exhaustives et le nombre d'ateliers différents à proposer simultanément en classe est à définir par l'enseignant.

Les élèves doivent disposer de plusieurs objets dans chaque atelier puisqu'ils doivent rechercher différentes façons de fractionner. Nous conseillons de proposer des matériaux semblables au sein d'un atelier donné afin d'éviter d'introduire ici des débats sur la taille de l'unité à fractionner.

En effet, même s'il est important de travailler sur la taille de l'unité à fractionner et de constater qu'un demi de quelque chose est rarement égal à un demi d'autre chose puisque cela dépend de l'unité fractionnée (une demi-feuille A4 n'est pas équivalente à une demi-feuille A5), nous proposons de ne pas multiplier les paramètres dans cette activité déjà centrée sur la variabilité du type d'unités et sur les façons de fractionner.

Atelier 1 – Des feuilles de papier (quantité continue de type « surface »)

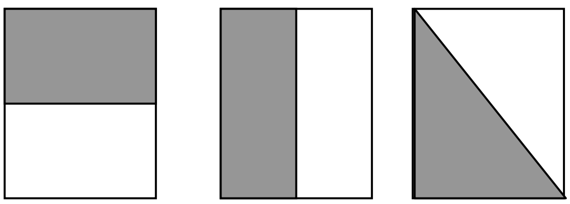
Matériel :

► plusieurs feuilles de papier de même format. On peut utiliser des feuilles de formats A4 ou A5 ou des feuilles préconstruites avec des dimensions précises (ex. des feuilles carrées de 10 cm de côté ou des rectangles de 10 cm sur 6 cm, etc.).

Techniques de fractionnement envisagées :

- pliage des feuilles sur la longueur, la largeur ou la diagonale puis découpage de la feuille en suivant le pli ;
- utilisation de la règle et d'un crayon pour tracer la diagonale du rectangle ;
- utilisation de la règle pour mesurer la longueur des côtés, puis partage des mesures de longueur ;
- etc.

Le résultat du partage dépendra de la technique utilisée (ici un exemple en ne coupant qu'en deux parties).



Techniques de vérifications possibles :

- superposer les morceaux découpés ;
- argumentation (j'ai plié en deux, donc c'est la même chose) ;
- etc.

Atelier 2 – Des bouteilles d'eau d'un litre (quantités continues de type « capacité »)

Matériel :

► des bouteilles d'eau d'un litre et des récipients vides (non gradués) pour recueillir le produit du partage.

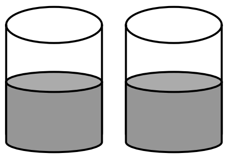
Techniques de fractionnement envisagées :

- transvaser l'eau dans les récipients vides puis, par essais-erreurs s'arranger pour avoir la même quantité d'eau dans les deux récipients ;
- utiliser un récipient gradué pour mesurer un demi-litre ; etc.

S'il est correct, le résultat du partage sera identique, quelle que soit la technique envisagée.

Technique de vérification possible :

- comparer la hauteur d'eau dans les deux récipients ⇔ *cette solution n'est valable que si les récipients pour recueillir l'eau sont semblables (p.ex. deux cylindres de même diamètre).*



Atelier 3 – Un nombre pair d'objets impossibles à couper (quantités discontinues et insécables)

Matériel :

► un nombre pair de perles ou de pièces de monnaie de 1 cent ou tout autre objet qu'il est impossible de couper en deux.

Variante – On peut aussi proposer un nombre impair d'objets. Cet atelier devient alors « l'atelier impossible » puisqu'il ne sera pas possible de réaliser un partage équitable et de prendre « le demi de » de 13 pièces par exemple.

Techniques de fractionnement envisagées :

- compter le nombre d'objets (p. ex. 12), diviser le nombre obtenu en deux (12 : 2 = 6) et constituer un tas d'objets correspondant au résultat de cette division (un tas de 6 objets) ;
- séparer les objets en deux tas en disposant tour à tour les objets dans un tas, puis dans l'autre ;
- construire deux rangées d'objets en correspondance terme à terme ;
- etc.

S'il est correct, le résultat du partage sera identique, quelle que soit la technique envisagée.

Techniques de vérifications possibles :

- vérifier que l'on ait bien le même nombre d'objets dans chaque tas ;
- aligner les objets en correspondance terme à terme ;
- etc.

Atelier 4 – Une série d'objets qu'il est possible de couper en deux parts égales (quantités discontinues mais sécables)

Matériel :

► un nombre pair de pailles, de morceaux de ficelles ou de tout autre objet qu'il est possible de couper en deux.

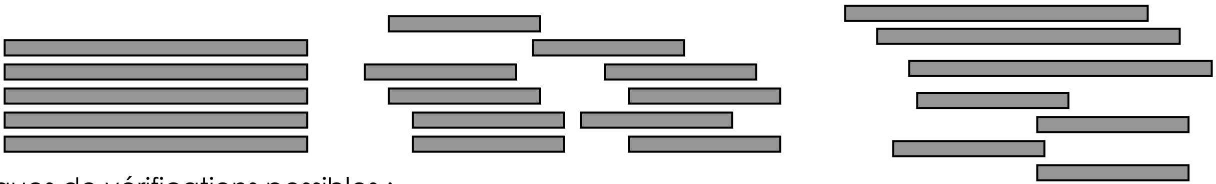
Variante – On peut aussi proposer un nombre impair de pailles. Contrairement à l'atelier 3, une solution pourra ici être découverte.

Techniques de fractionnement envisagées :

- développer une technique de dénombrement permettant de trouver la moitié du nombre d'objets proposés (voir atelier 3) ;
- couper en deux chacun des objets proposés (p. ex. en coupant au milieu « à l'œil » ou en mesurant la longueur de l'objet, puis la demi-longueur…) ;
- séparer en deux une partie des objets et couper en deux une autre partie (*cette solution sera notamment intéressante si on propose un nombre impair d'objets – p. ex. pour prendre la moitié de 13 pailles, on peut en prendre 6 entières, puis encore une demie).*

Le résultat du partage dépendra de la technique utilisée. Voici quelques exemples de solutions possibles pour « trouver le demi de 10 pailles ».

5 pailles | **10 demi-pailles** | **3 pailles et 4 demi-pailles**



Techniques de vérifications possibles :

- compter que l'on a bien le même nombre d'objets dans chaque tas ou aligner les objets en correspondance terme à terme pour les techniques basées sur le dénombrement ;
- vérifier que les deux parties des objets coupés en deux ont bien la même longueur, par exemple en les juxtaposant ou en les mesurant.

Atelier 5 – Plusieurs séries d'objets que l'on devra regrouper pour constituer des paquets d'un demi-kilo (quantité continue de type « masse »)

Attention : pour cet atelier, la consigne est un peu différente : ***on va devoir constituer des paquets d'un demi-kilo*** *et non prendre « un demi de » quelque chose. Il est en effet difficile de partir d'un kilo à partager en deux dans la mesure où il est justement difficile ici de construire une solution précise (et donc on risque de ne pas avoir exactement un kilo au départ !).*

Matériel :

► une série d'objets de masses différentes (des objets « lourds » comme des pommes, des pierres, … ou légers comme des morceaux de sucre, des billes, des bonbons, etc.).

Technique de construction du demi et technique de vérification envisagées :

- utiliser la balance et placer des objets dans le sachet jusqu'à s'approcher le plus possible d'un demi-kilo.

Constats et débat :

- ce n'est pas facile d'obtenir exactement un demi-kilo ;
- c'est plus facile d'approcher le demi-kilo avec de nombreux objets légers qu'avec des objets lourds.

Encore quelques idées en vrac…

Des colliers avec des perles que l'on peut détacher.
On peut alors envisager l'unité « perle » ou l'unité « collier ».

Une guirlande constituée de 13 bonshommes en papier.
Les élèves peuvent décider de couper la guirlande horizontalement en coupant tous les bonshommes en deux (mais s'agit-il bien de deux moitiés de guirlande équivalentes ?) ; ils peuvent aussi couper la guirlande verticalement en coupant transversalement le bonhomme du milieu (si les bonshommes sont symétriques, alors ça marche !) ; ils peuvent aussi vouloir séparer tous les bonshommes de la guirlande et construire deux paquets de bonshommes (que feront-ils alors du treizième ?) …

Adapter une recette de cuisine prévue pour 8 personnes sachant qu'il n'y aura que la moitié des personnes qui seront présentes.

Partager la durée de la récréation en deux parts égales.

BATAILLE DE FRACTIONS

Mise en situation

L'activité débute par un jeu de bataille. Les cartes représentent des fractions construites au départ de deux unités de tailles différentes : certaines cartes représentent le fractionnement d'un grand carré et d'autres le fractionnement d'un petit carré. Pour jouer à « bataille », les élèves sont invités à comparer les surfaces représentées en noir sur les cartes. La carte représentant la surface la plus grande remporte la bataille.

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en 2, en 4).

- L'activité met en jeu la comparaison de fractions et permet d'aborder la notion de fraction équivalente.

Compétences transversales

Analyser et comprendre un message.

- Les élèves devront lire les règles du jeu et les comprendre.

Résoudre, raisonner, argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; distinguer « ce dont on est sûr » et « ce qu'il faut justifier ».

- Les élèves devront argumenter leurs solutions (stratégies de regroupements, d'associations, de partages …).

Progression de l'activité

Découverte du jeu.

Donner à chaque enfant la règle du jeu (voir annexe 1). Relire ensemble la règle et comparer ce jeu avec le jeu de bataille classique.

Dans la présente activité, le jeu de « bataille » consiste à comparer les surfaces représentées en noir sur les cartes. La carte représentant la surface la plus grande remporte la bataille.

Donner un temps d'observation pour découvrir les cartes du jeu (voir les annexes 2).

Les cartes proposent deux types d'unités (un grand carré et un petit carré) et plusieurs façons de représenter une même fraction (par exemple, la fraction « un demi » de l'unité « petit carré » est représenté de neuf façons différentes.

Deux cartes (les cartes noires) représentent les deux unités du jeu (le petit carré et le grand carré).

La surface du grand carré est quatre fois plus grande que celle du petit carré. Ainsi, la fraction « un quart » de l'unité « grand carré » est équivalente, en termes de surface, à l'unité « petit carré » (autrement dit, il y a « bataille » dans ce cas). Par contre, une carte représentant « un quart » de l'unité « grand carré » remporte la partie contre une carte représentant « un quart » de l'unité « petit carré ».

Le jeu implique en effet de comparer les surfaces noircies et non les fractions-nombres : il s'agit d'un quart ou d'un demi de quelque chose (un quart de grand carré est différent d'un quart de petit carré).

Expliquer aux enfants qu'ils peuvent se servir de la feuille quadrillée pour colorier des parts (voir annexe 3).

Premier temps de jeu (en groupes de 2 ou 4 joueurs).

Il est conseillé de débuter le jeu en utilisant un seul type de cartes (soit uniquement les cartes représentant les grands carrés, soit uniquement celles représentant les petits carrés, sans mélanger les deux types d'unité). En procédant de la sorte, l'activité débute par un jeu plus classique de comparaison de fractions.

Les cartes sont distribuées et le jeu démarre.

En cours de jeu, si les groupes ont besoin d'argumenter leurs propositions pour trouver la carte gagnante, ils peuvent avoir recours à la feuille quadrillée. Ils sont invités à noter sur une autre feuille quadrillée (voir annexe 3 également) les difficultés qu'ils rencontrent (les batailles qui posent problème).

Temps de discussion (en groupe classe).

Le débat porte sur les cartes qui ont posé problème dans certaines batailles : chacun expose son argumentation. La confrontation des différents groupes permet l'échange de stratégies.

Synthèse provisoire (en petits groupes, puis en groupe classe)

A cette étape de l'activité, la synthèse porte uniquement sur les cartes représentant un seul type d'unité.

En petits groupes : fabrication d'une affiche où l'on regroupe les cartes qui ont des surfaces colorées équivalentes :

- un premier ensemble reprenant les 9 cartes représentant la fraction un demi ;
- un autre ensemble avec les 4 cartes représentant la fraction un quart ;
- un autre « ensemble » avec la carte représentant l'unité ;
- un dernier ensemble avec les autres cartes (les cartes « ¾ » et la carte non coloriée).

En collectif, chaque groupe présente son affiche et justifie ses propositions.

Deuxième temps de jeu (à nouveau en groupes de 2 ou 4 joueurs)

Le deuxième type de cartes est introduit de façon à aborder la problématique de la taille de l'unité.

Les différentes observations faites dans le temps de discussion permettent aux élèves d'avoir de nouveaux arguments pour comparer les fractions. La variation de la taille de l'unité engendrera une difficulté supplémentaire et de nouveaux débats.

Synthèse écrite (en groupe classe)

Réalisation d'une affiche de synthèse portant sur les points suivants :

- la taille de l'unité peut varier (coller des cartes pour illustrer) ;
  - par exemple, un quart de petit carré n'est pas équivalent (en termes de surface) à un quart de grand carré ;

- la découpe de l'unité peut varier (coller des cartes pour illustrer) ;
  - par exemple, un demi de l'unité petit carré peut être représenté en coupant le carré en diagonale ou au milieu d'un côté ;

- la place des parts que je prends peut varier (coller des cartes pour illustrer) ;
  - par exemple, un demi petit carré peut être représenté en coloriant, dans un carré coupé en quatre, deux parts jointives ou opposées.

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Tant la taille de l'unité que la façon de la découper ou encore la disposition des parts colorées sont susceptibles d'induire l'élève en erreur.	- Le jeu et la confrontation des stratégies adoptées par chacun devraient aider les élèves à surmonter ces difficultés.

Matériel

► Une règle de jeu par enfant (à photocopier au départ de l'annexe 1).
► Une enveloppe comprenant les 18 cartes (ou les 36 cartes de jeu pour le mélange d'unités) par groupe de 4 joueurs (à fabriquer avec les annexes 2).
► Une ou plusieurs feuilles de quadrillage par groupe pour argumenter les propositions (voir annexe 3). Des crayons de couleur.
► Une feuille pour synthétiser les batailles qui ont posé problème et une paire de ciseaux par groupe (voir annexe 3 également).

Organisation de la classe

• En groupes de 2 ou 4 joueurs pour les moments de jeu. En collectif pour les moments de confrontation et de synthèse.

Notes et réflexions

Cette activité permet des adaptations et des extensions multiples comme par exemple demander aux élèves de nommer les fractions représentées sur les cartes ; classer ensemble toutes les cartes qui représentent la même fraction ; dessiner de nouvelles cartes pour compléter le jeu …

Règles du jeu

BATAILLE DE FRACTIONS

MATÉRIEL

36 cartes de jeu
Une feuille quadrillée, des crayons de couleur

NOMBRE DE JOUEURS

De 2 à 4 joueurs

BUT DU JEU

Avoir le plus de cartes possible à la fin de la partie.

DÉROULEMENT DU JEU

Distribuer toutes les cartes. Chaque paquet est posé à l'envers devant chaque joueur.

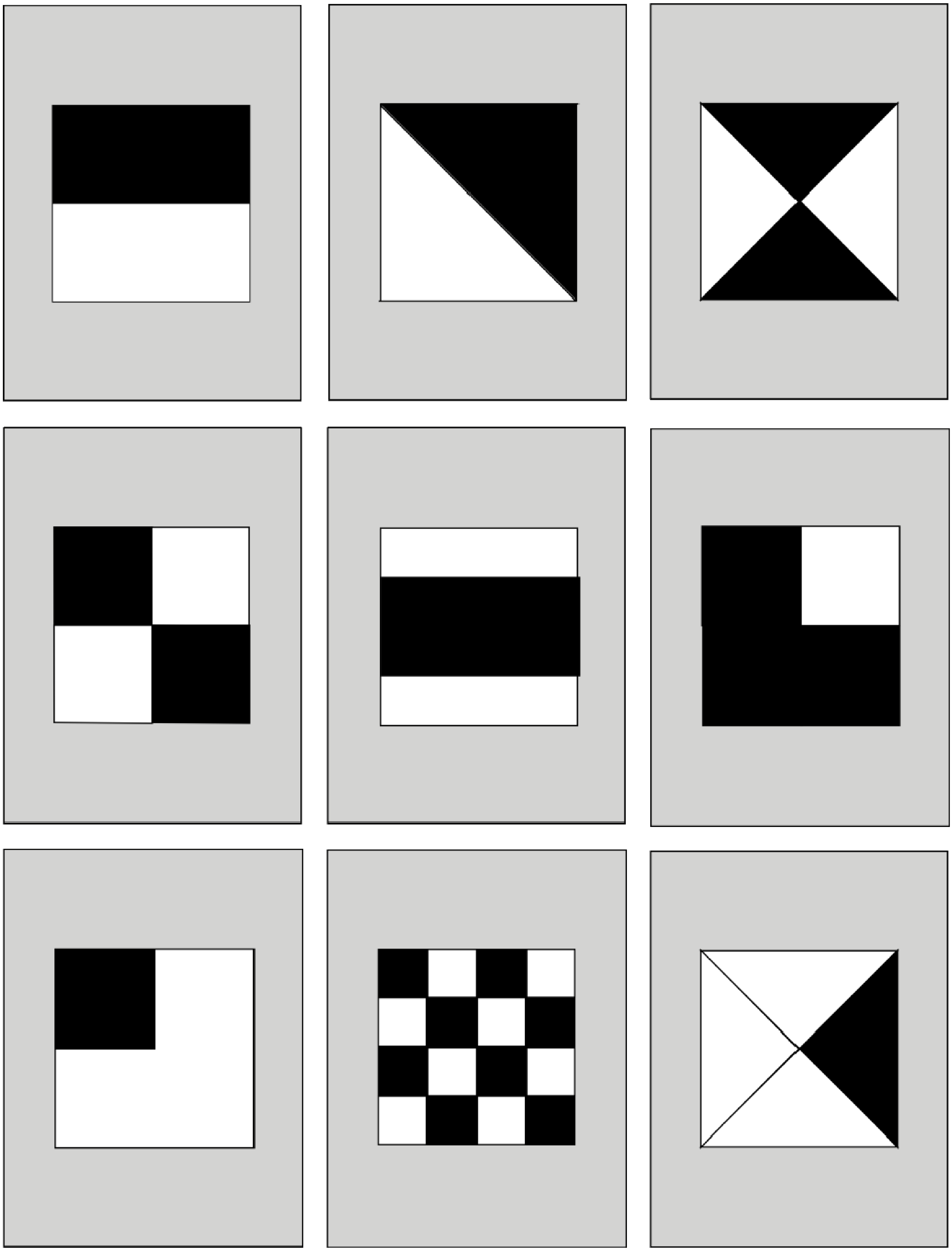
Chaque joueur retourne une carte, la première du paquet (sans la choisir).

Les joueurs observent les cartes retournées afin de trouver celle dont la surface noire est la plus grande.

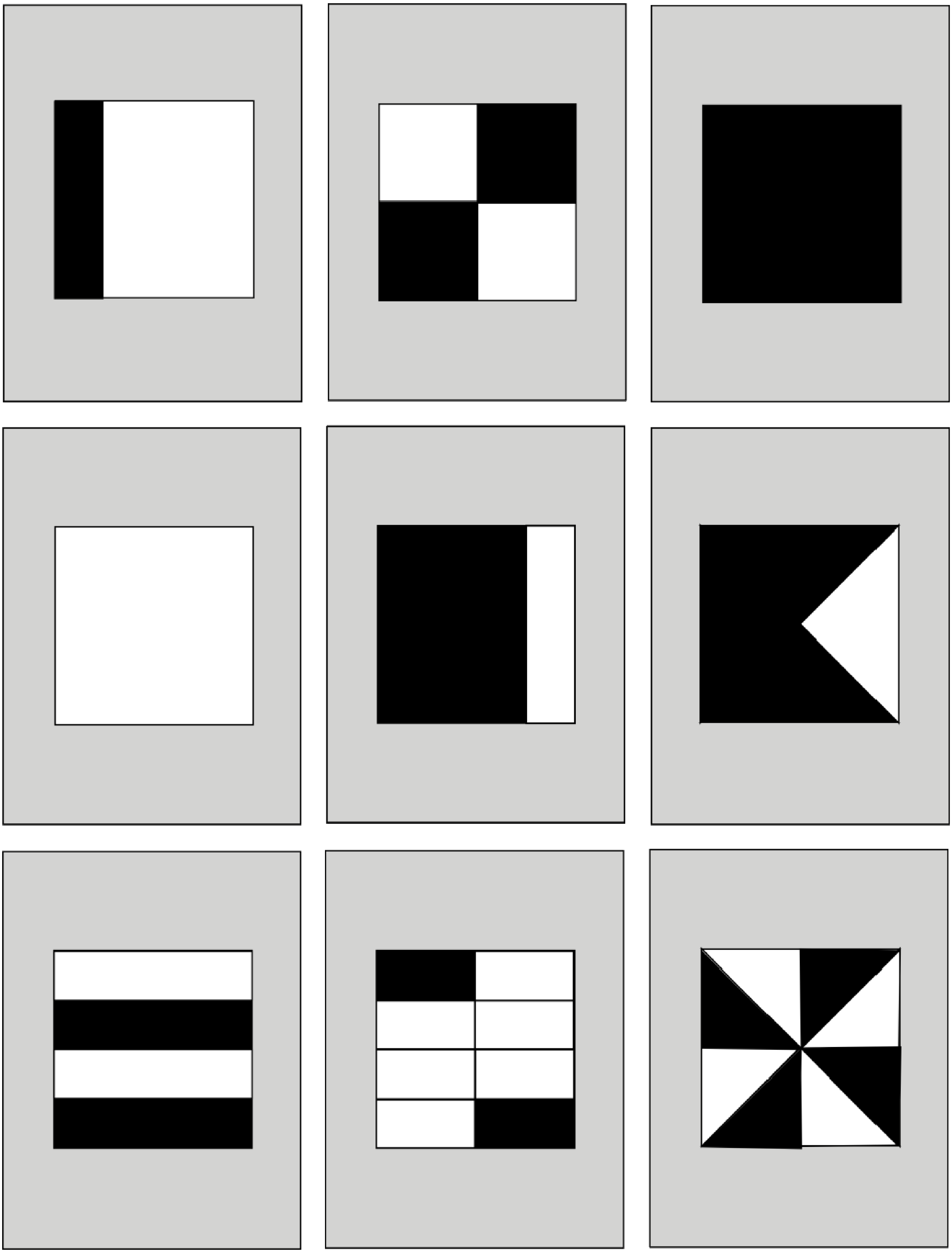
Le propriétaire de cette carte remporte toutes les cartes retournées, et les met à la fin de son paquet.

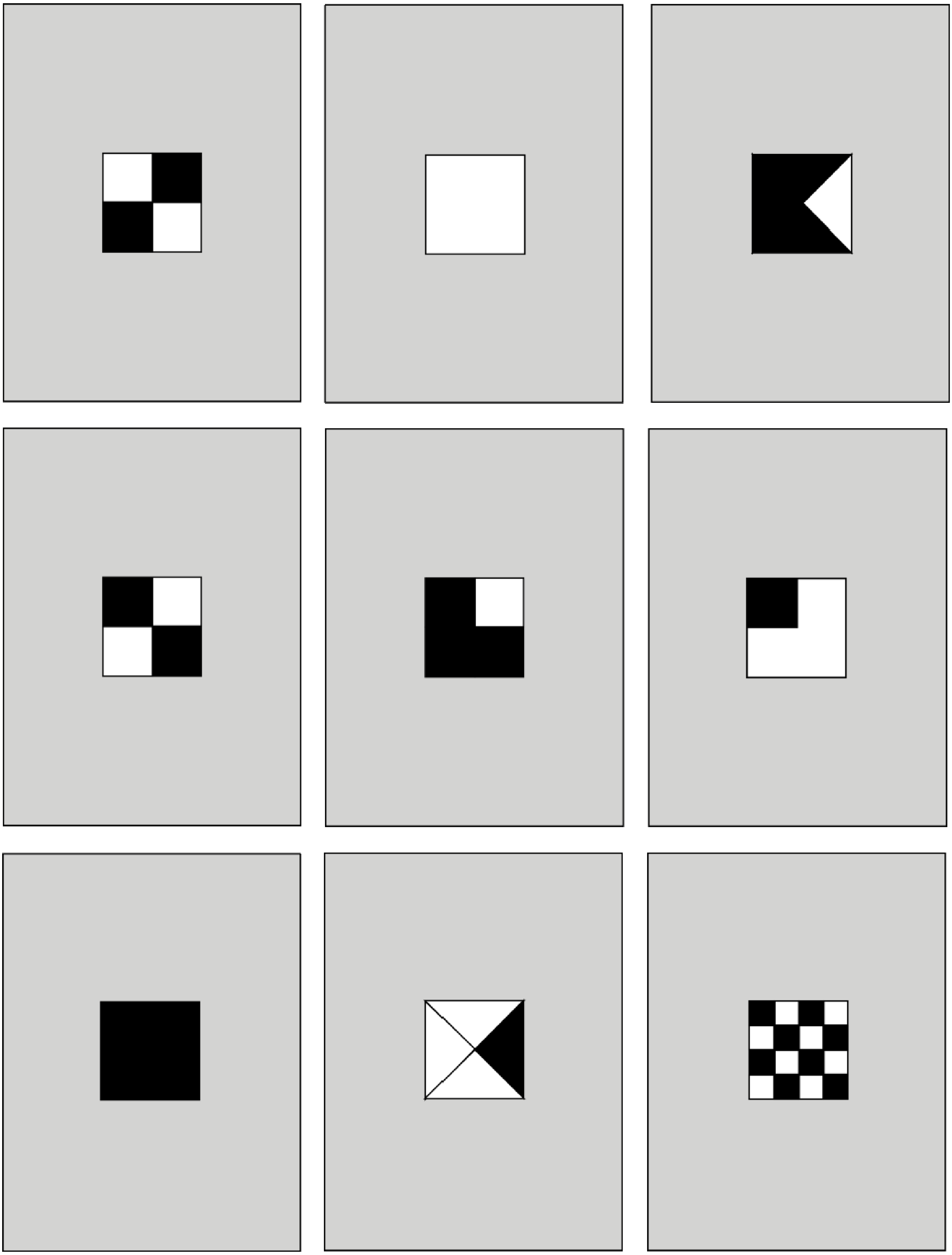
Une bataille se produit lorsque les joueurs ont retourné des cartes de même valeur. Ils recouvrent alors leur carte avec une nouvelle carte posée à l'envers et en déposent une troisième à l'endroit cette fois-ci. Le joueur qui possède la carte dont la surface noire est la plus grande remporte les cartes de son adversaire.

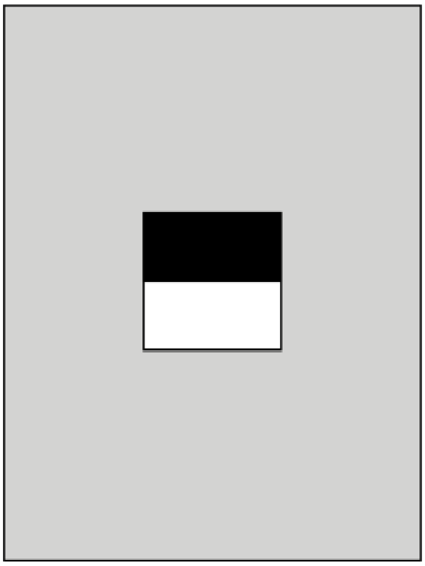
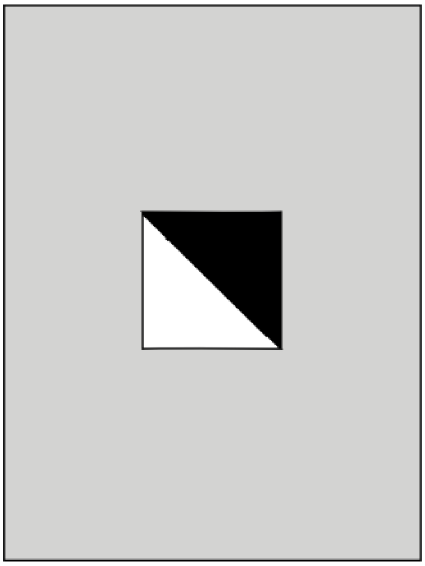
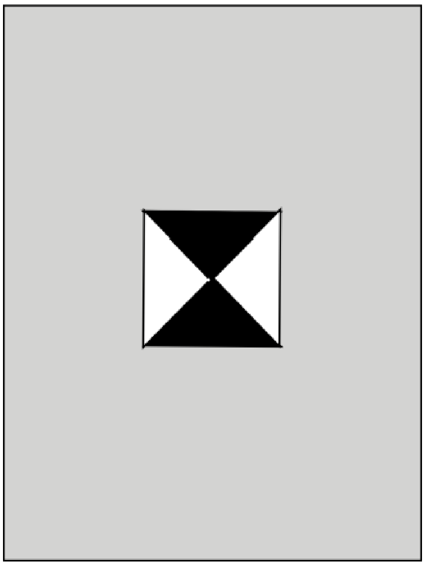
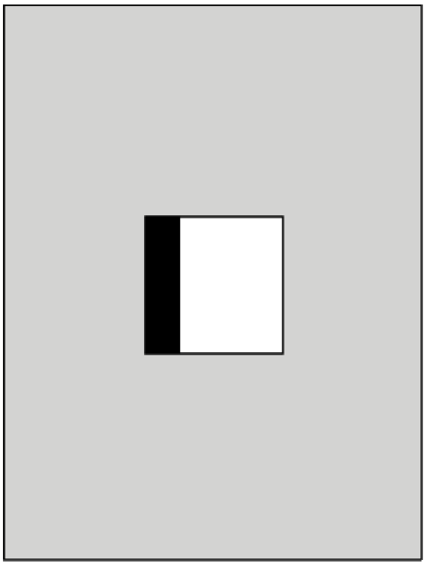
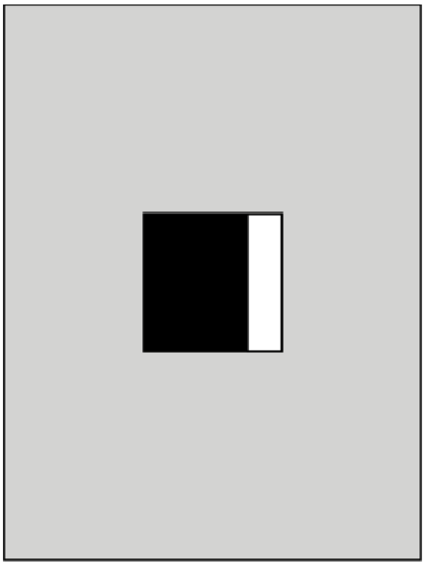
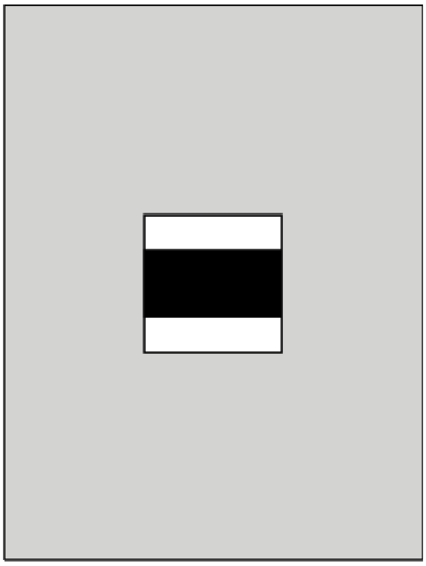
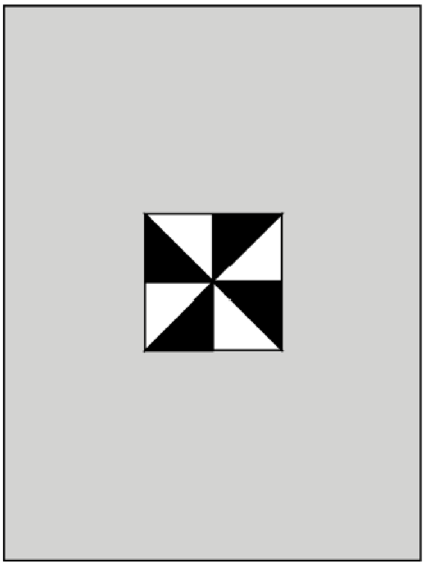
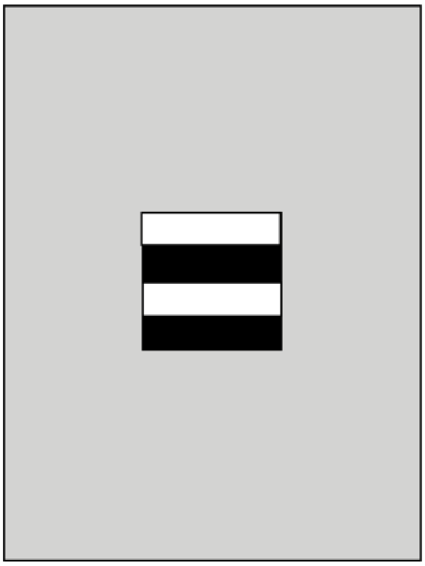
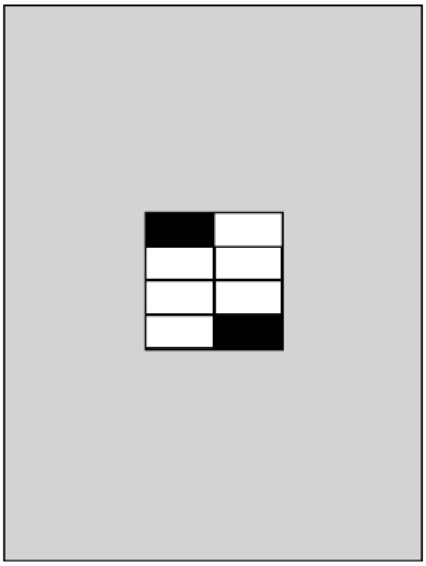
Le jeu s'arrête dès qu'un joueur n'a plus de carte. Le gagnant est celui qui a le plus de cartes dans son paquet.

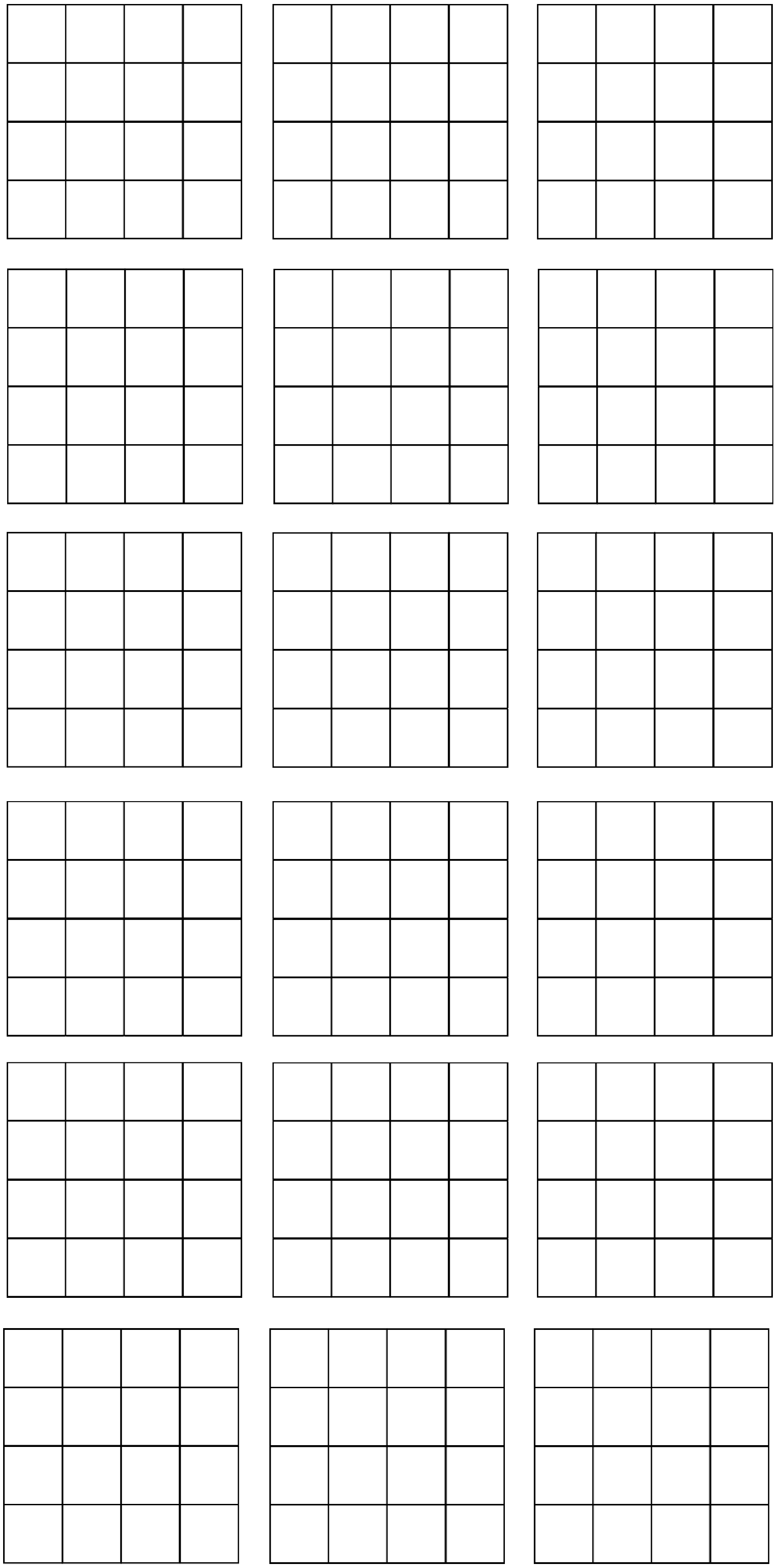


Les cartes du jeu sont téléchargeables à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=24761&navi=2030







EXERCICES EN DÉBAT

Compétence relative aux outils mathématiques de base

Fractionner des objets en vue de les comparer (partager en 2, en 4).

- Il s'agit ici de rencontrer les fractions « un demi » et « un quart » dans des situations proposant de multiples variations : types d'objet (quantités continues ou discontinues) ; taille des objets ; façons de fractionner et nombre de parts.

Compétence transversale

Résoudre, raisonner, argumenter : exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres.

- Les élèves devront confronter et argumenter leurs propres solutions, tout en évaluant également les solutions d'autrui.

Mise en situation

L'activité se présente sous la forme d'une série d'exercices variés sur les fractions « un demi » et « un quart ».

Progression de l'activité

Travail individuel.
Proposer une série d'exercices variés aux élèves (voir annexe 1).

Premier travail de confrontation par paires.
Une fois les exercices résolus individuellement, les élèves doivent confronter leurs solutions par paires : ils doivent argumenter, justifier,… et tenter de se mettre d'accord.

Confrontation avec les solutions proposées par un élève fictif.
Des solutions proposées par un élève fictif sont distribuées à chaque paire d'élèves (voir annexe 2). Les élèves doivent évaluer ces solutions et argumenter pourquoi ils les jugent correctes ou non. Cette confrontation avec les solutions d'autrui pourrait les conduire à remettre en cause certaines de leurs propres solutions.

Correction collective.
La correction collective s'effectue au départ des solutions proposées par l'élève fictif. Chaque jugement doit être argumenté. Les élèves sont également invités à expliquer dans quelle mesure ces solutions les ont ou non amenés à se poser des questions sur leurs propres solutions : cela m'a-t-il fait modifier ma propre réponse ? Cela m'a-t-il permis de constater que plusieurs solutions correctes étaient possibles ? L'erreur de l'élève fictif m'a-t-elle aidé à mieux comprendre ma propre démarche ? Etc.

Synthèse.
La synthèse devrait porter sur toutes les variations de la fraction « parties-tout » qui ont été rencontrées dans les exercices.

Types d'erreurs anticipées	Gestion de ces erreurs
- Plusieurs types d'erreurs peuvent être rencontrés en fonction des variations sur lesquelles on joue. Par exemple, les parts doivent être égales et le découpage de certaines unités – comme le disque par exemple – engendre souvent un piège. Une même unité peut être découpée de différentes façons tout en représentant la même fraction « un demi » par exemple.	- Les différents moments de confrontations (essentiellement la confrontation des solutions par paires et l'analyse des réponses d'un élève fictif) devraient être propices aux débats et apporter une aide intéressante à la gestion des erreurs. - A l'aide de matériel (exemple superposition de calques) montrer qu'une partie est équivalente à l'autre.

Matériel

► L'annexe 1 propose cinq séries d'exercices parmi lesquels l'enseignant pourra opérer des sélections.

► L'annexe 2 propose les solutions produites par un élève fictif face aux quatre premiers exercices. Le cinquième exercice est de type « vrai – faux » et n'est pas repris dans les productions de l'élève fictif.

Organisation de la classe

• Travail individuel pour la première phase, puis par paires pour la suite de l'activité.

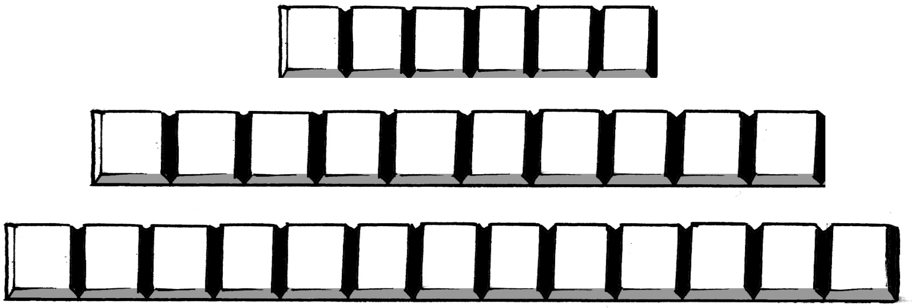
Notes et réflexions

Les exercices proposés ici pourraient également être utilisés pour construire une évaluation formative.

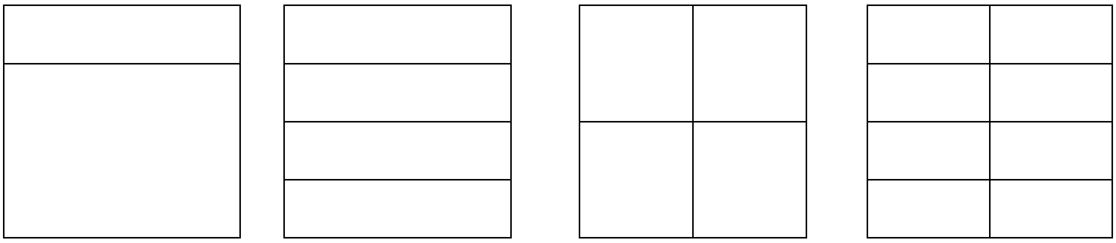
Une variété d'exercices parmi lesquels en sélectionner quelques-uns

Exercice 1

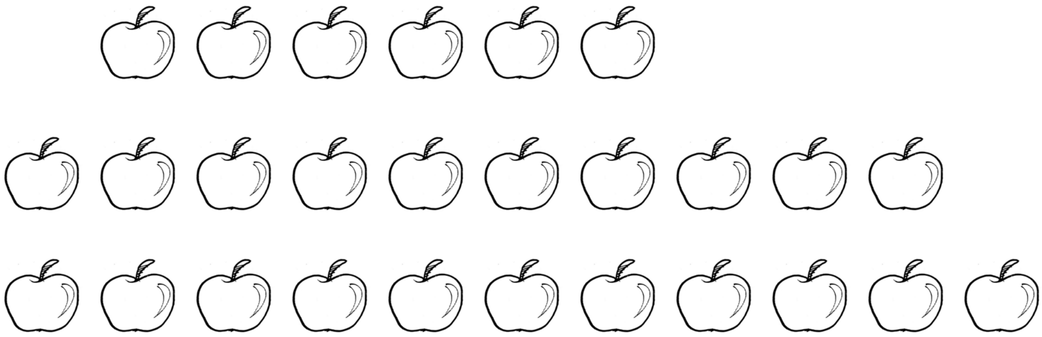
Colorie la moitié de chaque barre de chocolat.



Colorie la moitié.

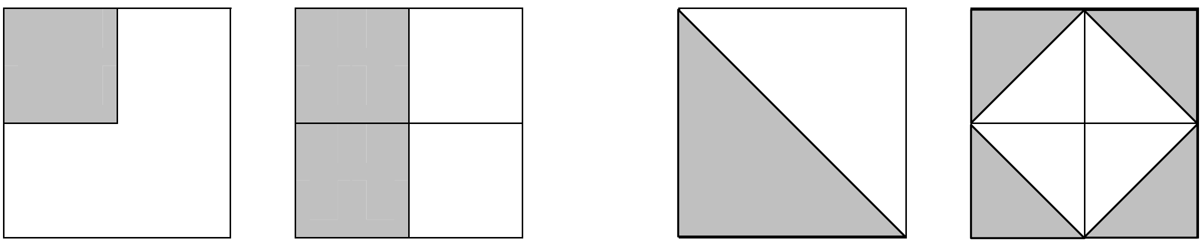


Sur chaque ligne, entoure la moitié des pommes.



Exercice 2

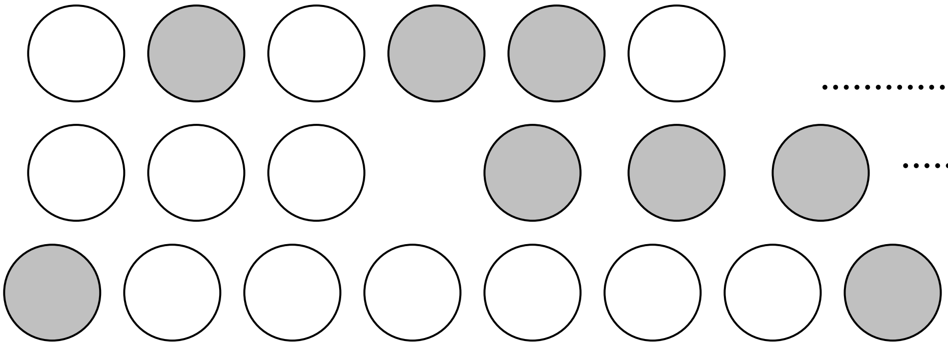
Écris la fraction correspondant aux parts coloriées.
Indique la réponse sur les pointillés.



………… ………… ………… …………

Exercice 2 (suite)

Écris la fraction correspondant aux pièces coloriées.
Indique la réponse sur les pointillés.



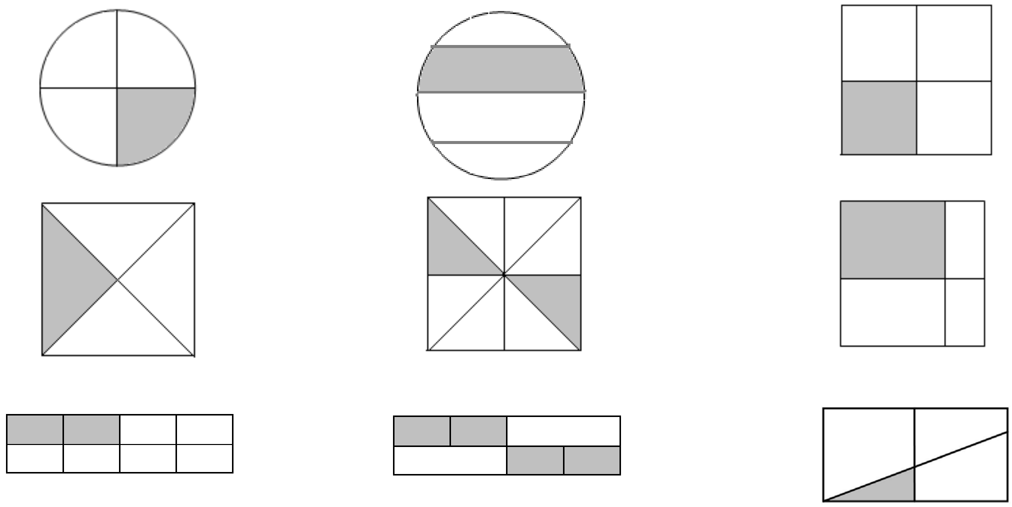
…………………

…………………

…………………

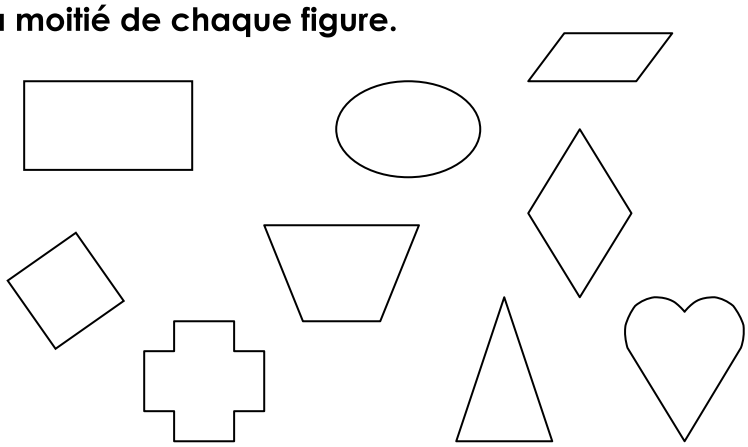
Exercice 3

Entoure toutes les figures où un quart est colorié.



Exercice 4

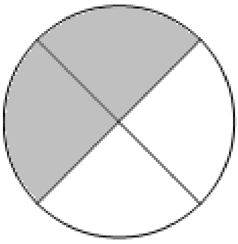
Colorie la moitié de chaque figure.

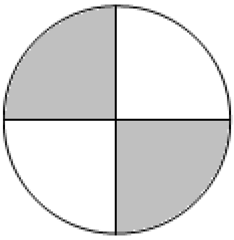


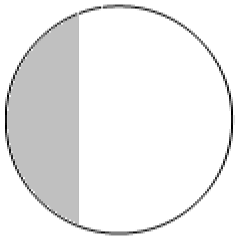
Exercice 5

Pour chaque situation, entoure vrai ou faux ?

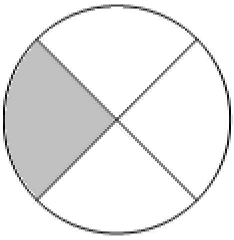
On a colorié la moitié de chaque disque :

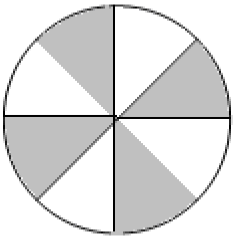

vrai – faux

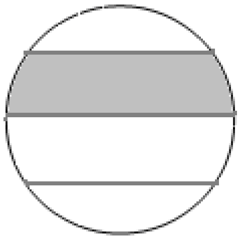

vrai – faux


vrai – faux

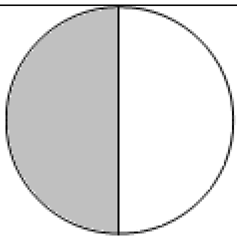
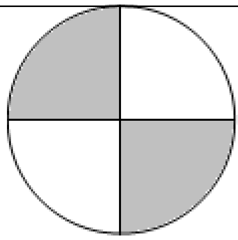
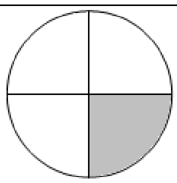
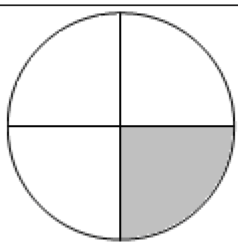
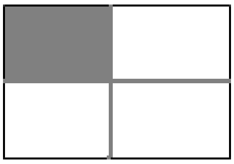
On a colorié le quart de chaque disque :


vrai – faux


vrai – faux


vrai – faux

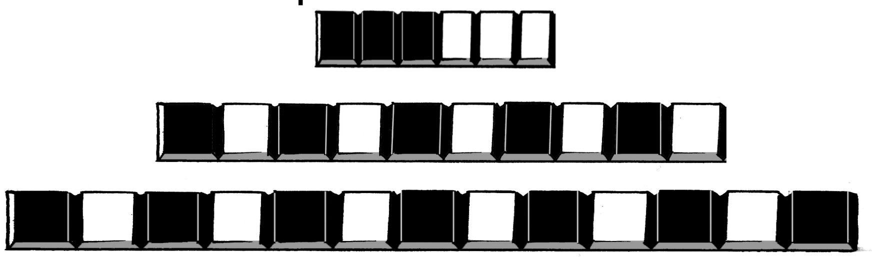
Les parties grisées représentent ce que Max et Sarah ont mangé.

Max	Sarah	
		Max a mangé plus que Sarah parce qu'il a mangé une demi-pizza alors que Sarah a mangé des quarts de pizza. vrai – faux
		Max et Sarah ont mangé la même chose puisqu'ils ont chacun mangé un quart de pizza. vrai – faux
		Max a mangé moins que Sarah parce qu'il a mangé un quart de barre de chocolat alors que Sarah a mangé la moitié d'une barre. vrai – faux

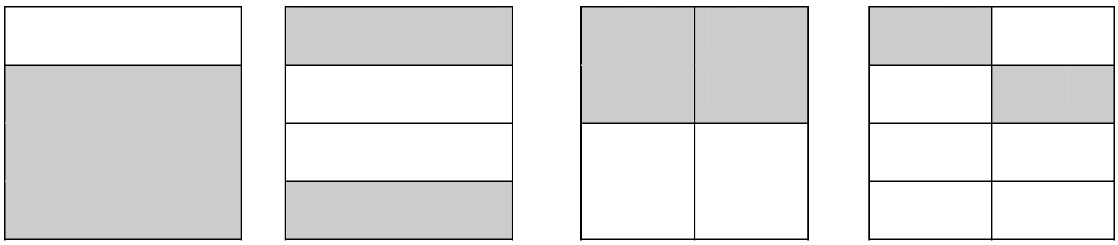
Les solutions proposées par un élève fictif
(Attention : certaines sont incorrectes !)

Exercice 1 - Les solutions de Pierre

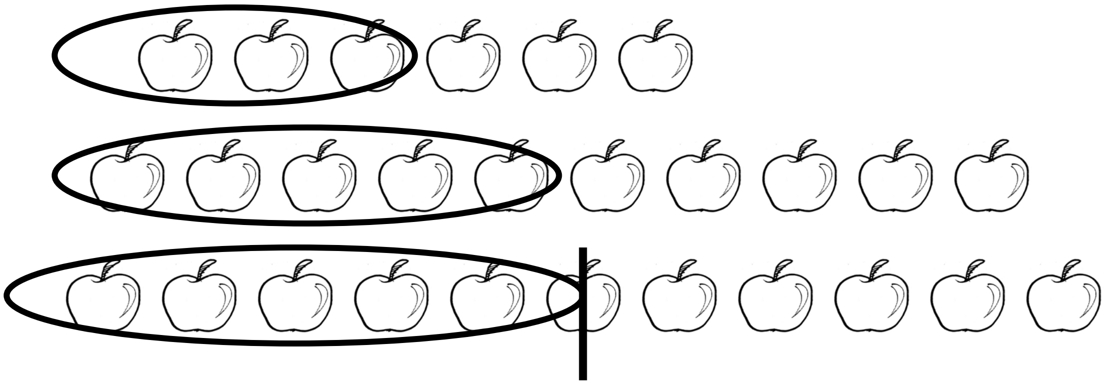
Colorie la moitié de chaque barre de chocolat.



Colorie la moitié.

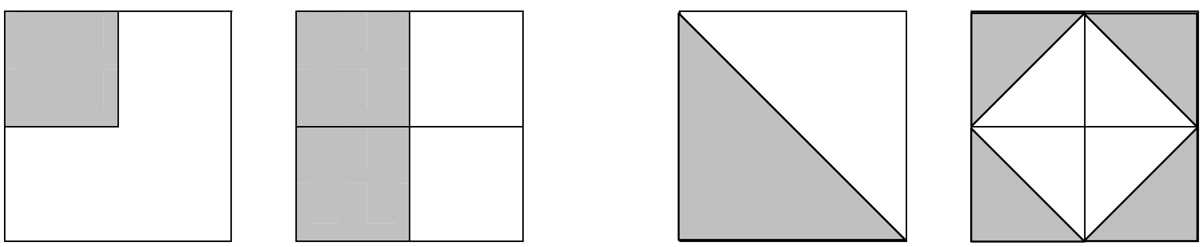


Sur chaque ligne, entoure la moitié des pommes.



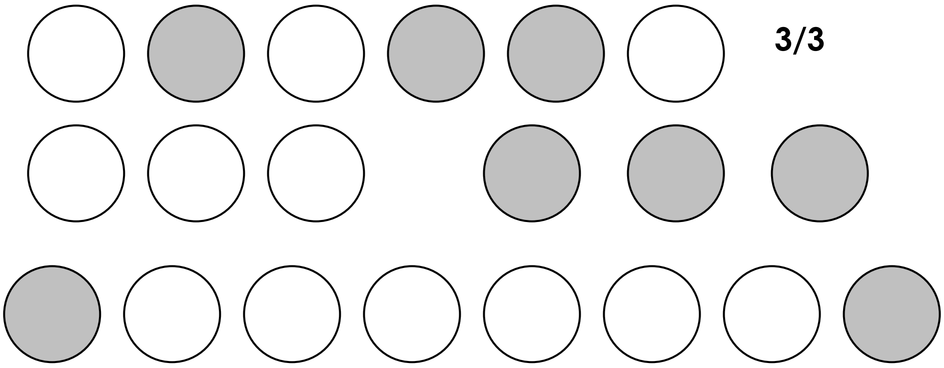
Exercice 2 - Les solutions de Pierre

Écris la fraction correspondant aux parts coloriées.
Indique la réponse sur les pointillés.



1/3 **1/2** **1/2** **1/4**

Écris la fraction correspondant aux pièces coloriées.
Indique la réponse sur les pointillés.



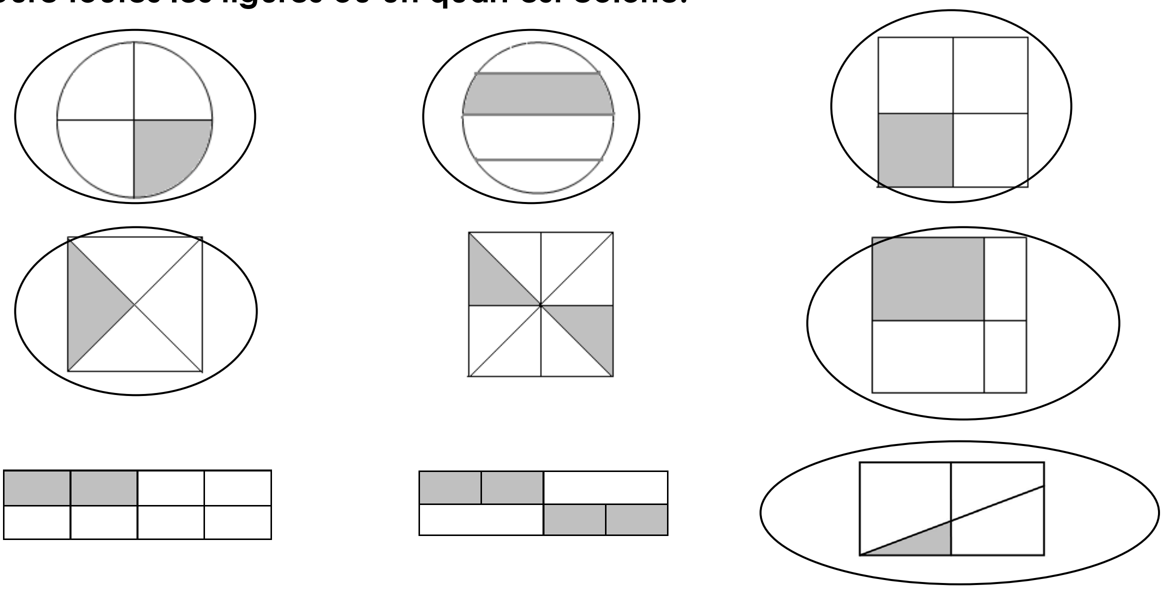
3/3

3/6

2/8

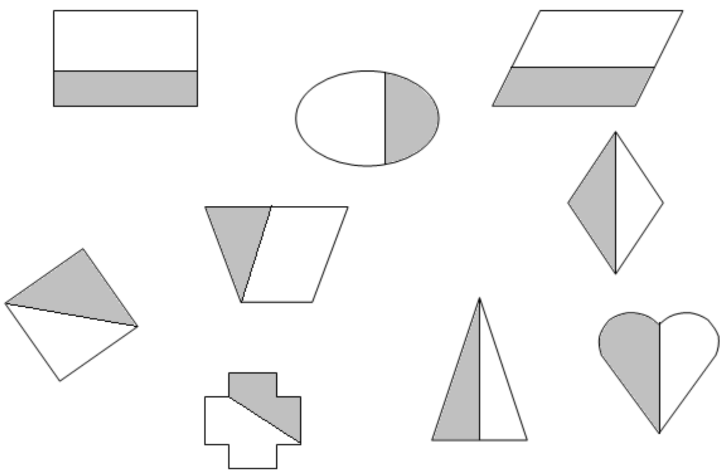
Exercice 3 - Les solutions de Pierre

Entoure toutes les figures où un quart est colorié.



Exercice 4 – Les solutions de Pierre

Colorie la moitié de chaque figure.



V. POURQUOI CE TYPE D'APPROCHE ?

Avec les nombres décimaux, les fractions font partie d'un ensemble plus vaste : l'ensemble des **nombres rationnels**. Un nombre rationnel correspond au quotient de deux nombres entiers et peut s'exprimer sous la forme d'une *fraction commune* (ex. ¼) ou sous la forme d'une *fraction décimale* (ex. 0,25). Les fractions communes sont souvent désignées sous le terme de « fractions » alors que les fractions décimales sont qualifiées de « nombres décimaux ».

Habituellement, les enfants rencontrent les nombres rationnels en début d'enseignement primaire au travers de la *fraction commune* lorsque l'on réalise des partages en parts équivalentes. L'apprentissage de la notion de fraction est généralement complexe pour les enfants et, selon certains auteurs, cela pourrait provenir, pour une large part, du **caractère plurivoque** de la fraction.

La fraction peut en effet avoir divers visages[2] :

- la **fraction-opérateur** ⇔ Il s'agit de la fraction que l'on rencontre lorsque l'on réalise des partages en parts égales ; la fraction représente alors l'opération de fractionnement (je prends ¾ de cette tarte : je la coupe en quatre et j'en prends trois parties) et la grandeur fractionnée (le résultat de l'opération de fractionnement est ici d'obtenir trois quarts de tarte) ;

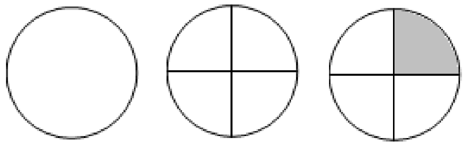
- la **fraction-rapport** ⇔ Comme son nom l'indique, cette fraction est celle que l'on découvre lorsque l'on s'intéresse aux rapports unissant deux mesures (ex. rapport d'agrandissement entre deux figures ; expression de rapports tels que « les océans occupent 7/10 de la surface du globe » ou « le territoire de la Belgique correspond à 1/22 de celui de la France »). En primaire, la fraction-rapport permet de représenter les pourcentages, les échelles, les rapports de proportionnalité, etc. Cette conception de la fraction nécessite un plus grand degré d'abstraction que la fraction-opérateur : il faut comprendre que différentes fractions peuvent représenter le même rapport, ce qui nécessite de considérer la relation dans son ensemble (2/4 ou 1/2 représentent le même rapport alors qu'en terme d'opération de fractionnement, l'action à réaliser n'est pas identique);

- la **fraction-mesure** ⇔ *Une fraction est conçue comme une mesure dès que la barre du rapport est identifiée au symbole de la division et que le dénominateur est utilisé comme diviseur du numérateur. Le rapport peut alors être représenté par un seul nombre exprimé dans le système d'écriture décimale* (Grégoire & Meert, p. 230). Autrement dit, les fractions-mesures introduisent les élèves à une notion de fraction comme nombre à part entière, ce qui permet de les situer sur une droite numérique et d'aborder les opérations sur les fractions. Les nombres décimaux auxquels correspondent ces fractions sont de nouveaux nombres qui s'intercalent entre les entiers naturels.

[2] Pour plus de détails, voir Grégoire, J. & Meert, G. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels et ses obstacles. In M-P Noël (Ed.), *La dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant* (pp. 223-251). Marseille : Solal.

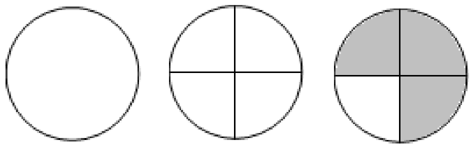
Les pistes didactiques proposées dans ce document s'intéressent à la **fraction-opérateur**. En effet, la fraction est généralement introduite à l'école comme un opérateur de fractionnement et une grandeur fractionnée[3].

La fraction-opérateur représente une action de partage d'une ou de plusieurs unités. L'exemple typiquement utilisé dans les classes est la situation de **partage d'une tarte :** on partage par exemple une tarte en quatre parts égales, puis on prélève une part. La fraction « **un quart** » est donc à la fois l'opération de fractionnement (on partage en quatre) et le résultat de ce partage (le quart de tarte que l'on prélève).



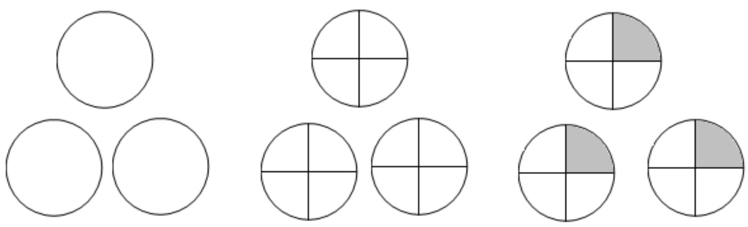
Étape 1	**Étape 2**	**Étape 3**
Je prends une tarte.	Je la partage en quatre parts égales.	Je prends un morceau.

Les choses se complexifient quelque peu lorsqu'il s'agit non plus de prélever une seule part, mais d'en prélever plusieurs ; autrement dit lorsque le **numérateur** est **supérieur à 1**. Pour prendre trois quarts de tarte par exemple, il convient d'effectuer une multiplication à la suite d'une division : il faut partager la tarte en quatre, puis en prendre 3 morceaux.



Étape 1	**Étape 2**	**Étape 3**
Je prends une tarte.	Je la partage en quatre parts égales.	Je prends trois morceaux.

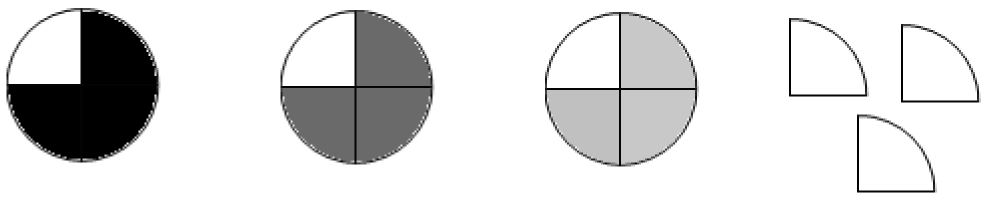
La situation devient encore plus complexe lorsqu'il s'agit de **partager plusieurs unités entre plusieurs personnes,** comme par exemple partager trois pizzas entre quatre enfants. Les jeunes enfants ne prennent pas d'emblée conscience que la réponse est trois-quarts et résolvent généralement ce problème pas à pas : ils divisent chaque tarte en quatre et distribuent un morceau à chaque personne qui reçoit dès lors trois fois « un quart » de tarte.



Étape 1	**Étape 2**	**Étape 3**
Je prends trois tartes.	Je partage chacune de ces tartes en quatre parts égales.	Chaque personne reçoit un quart de chaque tarte (les parts grisées représentent les trois fois un quart reçu par la personne).

[3] La description qui suit s'appuie à nouveau sur le chapitre de Grégoire et Meert (2005).

Une perception amenant à considérer d'emblée que la réponse est trois-quarts conduirait à un autre type de partage.



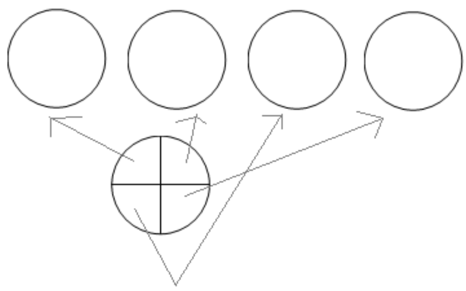
La première personne reçoit ¾ de la première tarte.

La deuxième personne reçoit ¾ de la deuxième tarte.

La troisième personne reçoit ¾ de la troisième tarte.

La quatrième personne reçoit les trois quarts restants.

La complexité de la tâche augmente encore lorsque **le nombre d'objets à partager est plus grand que le nombre de personnes qui bénéficient de ce partage.** On rencontre ce type de situation lorsqu'il convient par exemple de partager cinq pizzas entre quatre personnes. La solution obtenue (5/4) est une fraction plus grande que l'unité, ce qui heurte souvent les élèves.



Chacun recevra une pizza et un quart de pizza, c'est-à-dire 5/4 de pizza.

En plus du caractère plurivoque des fractions évoqué précédemment, d'autres hypothèses complémentaires peuvent être soulevées pour expliquer les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des fractions[4].

- Un **modèle inapproprié** peut notamment être à la source des difficultés rencontrées. En effet, les élèves conçoivent généralement la fraction comme « la partie d'un tout », le plus souvent, une part de tarte est donc une quantité plus petite que l'unité. Si ce modèle est trop prégnant, les élèves ne parviennent pas à concevoir les fractions comme des nombres et cela pose des difficultés face à certaines situations.

- Par ailleurs, lorsque l'on introduit les fractions à l'école primaire, on les propose généralement dans une variété de situations concrètes (une demi-tarte ou une barre de chocolat par exemple) ou représentées (un demi-disque ou un demi-rectangle). Tout comme le nombre « 3 » doit être abstrait d'une variété de collections dont le cardinal est « 3 », on attend des enfants qu'ils réalisent le même type d'abstraction pour concevoir la fraction, « un demi » par exemple, comme un nombre. Cette abstraction parait toutefois plus complexe à réaliser pour les fractions que pour les nombres entiers. Si les enfants conservent des **représentations trop concrètes** des fractions, cela pose des difficultés lorsqu'il s'agit de réaliser des opérations sur ces fractions (p. ex. que signifie la multiplication d'une demi-tarte par un cinquième de tarte ?).

- Enfin, contrairement à ce qui est observé dans la résolution des opérations simples où les élèves développent spontanément des stratégies de résolution, ceux-ci ne sembleraient pas avoir une connaissance intuitive de la fraction en tant que nombre. Cela conduirait alors les élèves à **appliquer aux fractions leurs connaissances acquises sur les nombres entiers** et par exemple à considérer que 1/2 est plus petit que 1/3 puisque 2 est plus petit que 3 ou que 1/5 + 1/6 = 2/11 puisque 1 + 1 = 2 et que 5 + 6 = 11.

Les élèves doivent étendre leurs représentations et leurs conceptualisations des fractions de façon à pouvoir les considérer comme des nombres à part entière. **Dans le cadre des pistes didactiques proposées au cycle 5-8, le travail se centre sur la fraction-opérateur et propose de la rencontrer dans une variété de situations nécessitant de fractionner du matériel concret ou représenté.** Les cycles suivants devront permettre d'étendre cette notion et de découvrir progressivement la fraction-rapport et la fraction-nombre[5].

[4] Pour plus de détails, voir Coquin, D. & Camos, V. (2006). Décimaux et fractions. In P. Barrouillet et V. Camos (Eds.), *La cognition mathématique chez l'enfant* (pp. 145-153). Marseille : Solal.

[5] Notons que certains auteurs proposent d'introduire la fraction-rapport dès le cycle 5-8 au départ d'activités ludiques consistant notamment à confronter les enfants à des progressions « inhabituelles » de hauteurs de tours. Pour en savoir plus, voir De Terwangne, M., Hauchart, C. & Lucas, F. (2007). *Oser les fractions dans tous les sens. Bruxelles :* De Boeck.

BIBLIOGRAPHIE

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L. & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research, 39,* 41-58.

Charnay, R. (2005*). D'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée, vers une géométrie déductive*. Conférence donnée en Guadeloupe (le 16 novembre 2005) et dont les documents sont disponibles sur internet à l'adresse suivante :
http://www.ac-guadeloupe.fr/Cati971/PEDAGO/gam1/outils/charnay/Mercredi_16_novembre_2005.pdf

Coquin, D. & Camos, V. (2006). Décimaux et fractions. In P. Barrouillet et V. Camos (Eds.), *La cognition mathématique chez l'enfant* (pp. 145-153). Marseille : Solal.

Commission d'outils d'évaluation. « La boite mystère ». Outil d'évaluation des compétences en cours de 1re étape. Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, Service général du pilotage du système éducatif. Ces outils d'évaluation sont téléchargeables sur le site internet de la Communauté française à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=25162&navi=2024

Comité d'accompagnement de l'évaluation externe non certificative en « *Eveil – Formation historique et géographique* ». *Pistes didactiques* de l'évaluation externe interréseau en 3e année primaire, Année 2002-2003. Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, Service général du pilotage du système éducatif. Tous les documents relatifs aux évaluations externes interréseaux sont téléchargeables sur le site internet de la Communauté française à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=25162&navi=2024

Comité d'accompagnement de l'évaluation externe non certificative en « Mathématiques et lecture ». Pistes didactiques de l'évaluation externe interréseau en 3e année primaire, Année 2005-2006. Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, Service général du pilotage du système éducatif. Tous les documents relatifs aux évaluations externes interréseaux sont téléchargeables sur le site internet de la Communauté française à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=25162&navi=2024

CREM (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*. N. Rouche (coordinateur), Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Le chapitre relatif au Tangram est téléchargeable sur le site internet de la Communauté française à l'adresse suivante :
http://www.enseignement.be/index.php?page=24826&disp_top=0

De Terwangne, M., Hauchart, C. & Lucas, F. (2007). *Oser les fractions dans tous les sens.* Bruxelles *:* De Boeck.

Fagnant, A. (à paraitre). Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental : Aperçu des fondements théoriques et entrée au cœur de quelques activités. *Les Cahiers des Sciences de l'Education*, Université de Liège.

Fagnant, A., Hindryckx, G. & Demonty, I. (2008). La résolution de problèmes au cycle 5-8. Présentation d'un outil méthodologique à l'usage des enseignants. *Informations pédagogiques, 60,* 3-14. Cet article est téléchargeable sur le site internet de la Communauté française à l'adresse suivante :
http://www.restode.cfwb.be/download/infoped/info60a.pdf

Grégoire, J. & Meert, G. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels et ses obstacles. In M-P Noël (Ed.), *La dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant* (pp. 223-251). Marseille : Solal.

Pressiat, A. (2004). *Géométrie à l'articulation Ecole – Collègue*. Conférence donnée dans le cadre des journées inter-académiques de Nancy (9 et 10 décembre 2004) et dont le diaporama est disponible sur internet à l'adresse suivante :
http://www.ac-reims.fr/datice/math/journees_nancy/plenieres/andre_pressiat.pps#256

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

Vergnaud, G. (1983). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Bern : Peter Lang.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (2005). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ? (*153-176). Bruxelles : De Boeck.

Ministère de la Communauté française
A.G.E.R.S. - Service général du Pilotage du système éducatif

D/2008/9208/5