Troisième partie

La géométrie en classe à douze ans

Introduction

1 Des situations-problèmes à douze ans : deux exemples d'enseignement

Dans les deux premières parties de cette étude, nous avons tenté de montrer comment les premiers éléments de géométrie peuvent se construire à partir des perceptions ainsi que des mouvements et des manipulations d'objets. Pour ce faire, nous nous sommes concentrés sur la logique de la construction. Il en est résulté un texte dépouillé, impropre – nous l'avons déjà souligné – à inspirer directement un enseignement vivant.

La meilleurs façon de commencer à apprendre la géométrie est sans doute de se poser des questions relatives à l'environnement quotidien ou à des phénomènes géométriques simples. C'est alors en effet que la théorie prend un sens, puisqu'elle répond à une attente.

Cette troisième partie est composée de deux chapitres indépendants l'un de l'autre, tous deux rédigés avant la géométrie naturelle (2^{e} partie). Ils montrent comment intéresser des jeunes à partir de douze ans, dans des contextes appropriés, aux premiers développements de la géométrie.

Nous ne disposons pas d'une étude analogue pour l'enseignement fondamental. C'est pourquoi nous terminons cette introduction par quelques indications sur des sources intéressantes, qui permettraient de concevoir un tel enseignement vivant de la géométrie au niveau fondamental. Nous avons l'intention d'exploiter ces sources dans des publications à venir.

2 Matériaux pour l'enseignement fondamental

Les activités corporelles des enfants, en les conduisant à une première maîtrise de l'espace, sont porteuses d'apprentissages géométriques ultérieurs. On trouve dans les ouvrages de psychomotricité des activités diverses basées sur des attitudes et des mouvements mettant en jeu les symétries du corps. L'enfant peut prendre lui-même ces attitudes ou exécuter ces mouvements sous une consigne, puis donner lui-même des consignes à d'autres. Des activités de groupe mettent en jeu le cercle (des rondes), la droite (des files, des rangs), le carré, etc. Les attitudes et leurs symétries peuvent être imitées dans des modelages. Voir B. De Lièvre [1993].

Les boîtes percées de trous polygonaux ou d'autres formes, et dans lesquelles il faut faire entrer des plaques planes ayant la forme des trous, amènent un contact avec ces formes. Des plaques polygonales, entre autres celles tirées du tangram, se prêtent à des compositions diverses, libres ou guidées par des modèles. Voir Mitsumasa Anno [1994] vol. 2 et 3 ; sur le tangram, A. Bertotto et J. Hélayel [1996].

On peut créer facilement des puzzles en découpant (par exemple par des traits rectilignes) des papiers-cadeaux ou des papiers peints. Avec de tels puzzles, on peut exploiter de multiples façons le fait que l'image de base présente des symétries, d'ailleurs très variables d'un papier à l'autre. Voir sur ce sujet G. Jullemier [1989].

Autre contexte : les frises et rosaces obtenues par rangement d'objets, dessin, pliage, découpage, en choisissant des rythmes et symétries. Par exemple on peut enfiler des perles en alternant les couleurs ou les formes ; faire une tour de cubes de différentes couleurs ; créer par pliage et découpage des ribambelles et rosaces. Sur les rosaces en particulier, voir C. Hameau [1996].

Les symétries orthogonales peuvent être abordées par manipulation (retournement de calques), dessin, pliage. Voir en général L. Baron [1995] et [1996] ; sur les pliages plus particulièrement, voir D. Boursin [1997].

On rencontre aussi les symétries orthogonales dans les jeux et dessins avec des miroirs. Voir Jeu du miroir [sans date] et G. N. Müller et E. C. Wittmann [1997] (ce dernier ouvrage propose des activités utilisant deux miroirs articulés).

En ce qui concerne les transformations du plan en général et leur apprentissage à l'école primaire, on consultera l'étude de base de M. Demal [1998], ainsi que d'autres contributions du même auteur, entre autres sur l'utilisation des miroirs.

11

Assembler des figures

Ce chapitre propose aux enseignants du début du secondaire l'ébauche d'un fil conducteur pour l'enseignement de la géométrie. Il est constitué d'une suite de situations-problèmes qui montre comment, à partir de propriétés élémentaires de figures et de quelques mouvements simples, on peut aborder une géométrie plus structurée, plus argumentée. Chaque situation-problème fait l'objet d'une section. Pour chacune d'elles, on propose quelques pistes d'exploitation, les contenus théoriques qui s'élaborent et des remarques en marge à l'attention des professeurs. Les exercices d'application, de fixation ou d'évaluation sont absents de ce document. Cela ne signifie pas que nous préconisions un enseignement faisant l'impasse sur ce type d'activités. Mais, pour la facilité du lecteur, il nous a semblé plus judicieux de nous en tenir aux activités de recherche et à l'élaboration d'un embryon de théorie.

Notre expérience dans les classes de première année nous a montré que les élèves sortant de l'enseignement primaire avaient généralement une assez bonne connaissance des figures (ils les reconnaissent, peuvent les nommer, citer quelques-unes de leurs propriétés) mais ne possédaient que très peu de notions sur les transformations du plan (exception faite de la symétrie axiale). Même si ce bagage géométrique est assez variable, il nous paraît indispensable de baser notre enseignement sur ces acquis. Nous partons donc de quelques notions sur les figures qu'il nous semble raisonnable de considérer comme acquises par la majorité des élèves :

- Le rectangle est un quadrilatère qui possède quatre angles droits.
- Le parallélogramme est un quadrilatère formé par deux paires de côtés parallèles.
- Quand on découpe un parallélogramme suivant une de ses diagonales, on obtient deux triangles superposables.
- On connaît aussi les losanges (quatre côtés de même longueur) et les carrés (quatre côtés de même longueur et quatre angles droits).

– Si deux figures sont superposables, tous les éléments correspondants des figures ont même mesure.

Si certains de ces points posent problème (ce qui sera sans doute le cas pour la troisième propriété), il faudra bien sûr proposer des activités qui les amènent à l'évidence.

D'autre part, nous nous baserons aussi sur les mouvements qui interviennent dans la construction de figures par assemblage. C'est pourquoi la mise en place d'une activité[1]qui fixe un vocabulaire de base tel que *tourner*, *retourner*, *glisser* peut s'avérer utile avant de commencer. Remarquons que ces mouvements sont encore très éloignés des transformations du plan. Par exemple, lorsque l'on dit tourner, il s'agit d'une expression naïve qui ne fait aucun appel à un quelconque centre.

En partant ainsi des figures et des mouvements, par des activités d'assemblage de triangles, nous mettons doucement en place des « figures-clés » comme le triangle isocèle, le cerf-volant ou le parallélogramme. Par le biais de problèmes de construction, nous établissons les conditions déterminantes de ces figures. Celles-ci deviennent alors des outils pour justifier d'autres propriétés, d'autres constructions.

Enfin des activités de pavage avec des triangles puis des quadrilatères amènent petit à petit les élèves aux notions de plan et de transformations du plan.

Toutes ces activités mettent en évidence l'importance des manipulations et des constructions dans l'apprentissage de la géométrie. Celui-ci doit, nous en sommes intimement persuadés, passer d'abord par les mains. Une conceptualisation trop précoce est sans doute un des facteurs qui explique le peu de succès que rencontre actuellement la géométrie auprès de nos élèves.

1 Tourner la page

Lorsqu'on superpose deux feuilles rectangulaires puis qu'on tourne l'une d'elles d'un quart de tour, les bords d'en haut et d'en bas de la première feuille se retrouvent parallèles aux bords latéraux de la seconde. Si on la fait tourner d'un demi-tour au lieu d'un quart de tour, les bords d'en haut et d'en bas de la première feuille se retrouvent parallèles aux bords d'en haut et d'en bas de la seconde. *Que deviennent des figures tracées sur une feuille lorsqu'on les tourne de cette façon ?*

Pour examiner l'effet d'un quart de tour, on prend deux feuilles rectangulaires de même format dont l'une est transparente. On dessine par exemple une droite sur la feuille, puis on la décalque sur le calque. On fait tourner le calque de 90°. On obtient une situation analogue à celles des figures 1 ou 2 à la page suivante.

[1] Voir par exemple la brochure du CREM [1998].

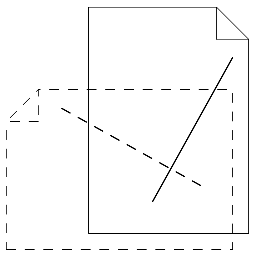


Fig. 1

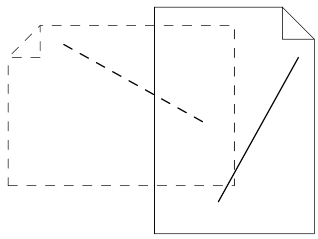


Fig. 2

Dans la figure 1, les droites sont visiblement perpendiculaires. Les droites de la figure 2 ne se rencontrent pas. Pour qu'elles se rencontrent, il faut en prolonger une. Il n'y pas de doute non plus quant à leur perpendicularité.

Lorsqu'on fait tourner le calque d'un demi-tour, les deux droites sont parallèles (figure 3).

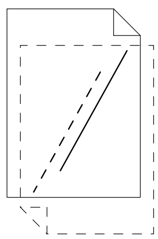


Fig. 3

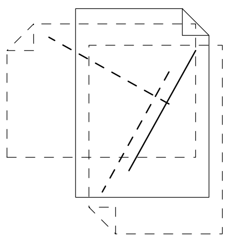


Fig. 4

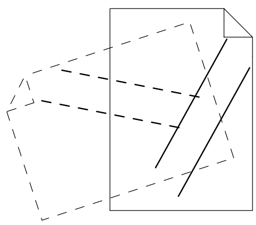


Fig. 5

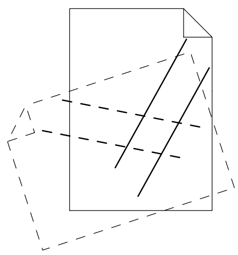


Fig. 6

La figure 4 montre qu'une telle rotation de 180° peut être obtenue en composant deux rotations de 90°. On peut exprimer cette propriété autrement : si on dessine une droite a perpendiculaire à une droite b qui est elle-même perpendiculaire à une droite c, alors la droite a est parallèle à la droite c.

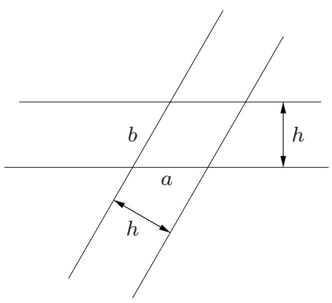


Fig. 7

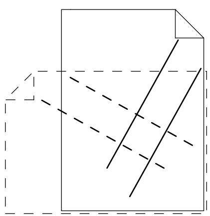


Fig. 8

On peut aussi dessiner des droites parallèles et observer l'effet de rotations qui ne sont pas nécessairement de 90° ou 180°. *Quelles sont les figures que l'on peut obtenir par de telles rotations en partant de deux droites ?* Dans le cas où les deux droites sont parallèles, on rencontre une situation analogue à celles montrées dans les figures 5 ou 6. Les droites parallèles restent parallèles après avoir subi une rotation. Si l'on ne fait pas un demi-tour, les quatre droites forment alors un parallélogramme. (Il peut être nécessaire de les prolonger comme dans le cas de la figure 5.)

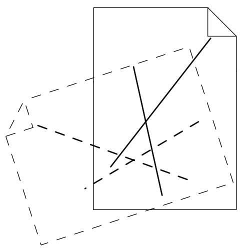


Fig. 9

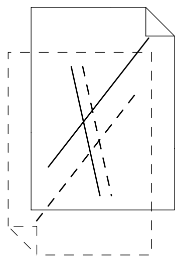


Fig. 10

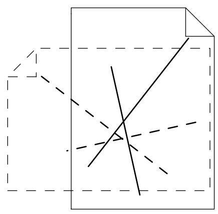


Fig. 11

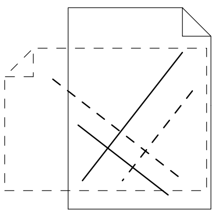


Fig. 12

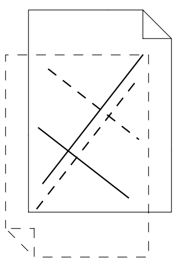


Fig. 13

Il y a alors une question qui peut se poser : *la figure formée par ces deux paires de droites parallèles, est-elle un parallélogramme ou un losange ?* Comment trancher ? Mesurer deux côtés consécutifs ne permettra pas d'avoir une réponse sûre, car les imprécisions des mesurages laissent planer le doute. On peut calculer l'aire du parallélogramme (figure 7 à la page précédente) en prenant pour base d'abord un des côtés (soit a), puis l'autre (soit b). Comme la distance entre les deux paires de parallèles est la même, on ne doit mesurer qu'une hauteur (soit h). On exprime l'aire du parallélogramme par $a \times h$ et par $b \times h$. Ces produits représentant la même aire, ils doivent être égaux. Les côtés consécutifs doivent donc avoir même mesure. Les égalités : $a \times h = b \times h$ et $a = b$ traduisent ce raisonnement.

Lorsqu'on fait tourner la feuille avec les deux droites parallèles d'un quart de tour, on obtient un carré (figure 8 à la page précédente).

On peut aussi faire tourner des droites qui ne sont pas parallèles. Lorsqu'on les fait tourner d'un angle quelconque, on ne remarque rien de particulier (figure 9). Par contre, lorsque c'est d'un demi-tour qu'elles tournent, on peut trouver un parallélogramme (figure 10). Tourner d'un quart de tour n'apporte rien d'exploitable pour le moment (figure 11).

Lorsque ces deux droites sont perpendiculaires, les manœuvres de tourner d'un quart de tour et d'un demi-tour créent toutes deux une forme particulière : un rectangle (figures 12 et 13).

2 Assembler deux triangles

Que se passe-t-il lorsqu'on assemble des copies du même triangle ? On peut aborder cette question par le cas le plus simple, et n'assembler que deux triangles superposables. *Combien de figures obtient-on ? Quelles sont-elles ? Quelles en sont les propriétés ?*

Une motivation à ce type d'activité peut être trouvée dans l'existence de pavages géométriques dans l'environnement des enfants. La question peut se poser de savoir si l'on peut réaliser des pavages avec n'importe quelle forme géométrique.

Les assemblages à réaliser sont tels que deux côtés des triangles « collent » parfaitement l'un à l'autre sans se « dépasser ». En le faisant, on se rend compte que l'on obtient beaucoup de figures ! Il faut donc essayer d'organiser le travail pour y voir clair.

On peut par exemple coder les différents côtés des triangles en couleurs différentes. On le fait en ne codant qu'une seule face de chaque triangle. On observe alors qu'il y a deux types de triangles (figure 14). Appelons-les types P et F (comme pile et face). Les assemblages seront de type PP, FF et PF. Puisqu'il y a trois côtés à chaque triangle et que l'on fait correspondre les côtés de même longueur, il y aura trois assemblages de chaque type (figure 15 à la page suivante).

Si le professeur travaille avec des triangles magnétiques et les enfants avec des triangles en carton, les enfants remarquent très vite que pour reproduire le matériel de leur professeur, ils ne doivent coder qu'une seule face de chaque triangle. Pour que les enfants puissent s'en rendre compte, et donc aussi découvrir qu'il y a deux types de triangles, il est important qu'ils ne reçoivent pas des triangles déjà codés.

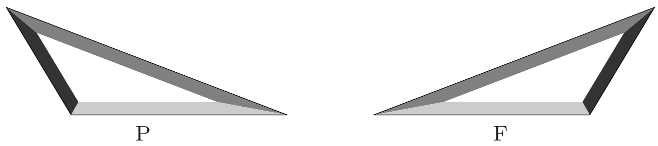


Fig. 14

On remarque une parenté entre les assemblages de triangles de type PP et de type FF. On ne peut toutefois pas les superposer l'un à l'autre en les faisant simplement glisser et tourner. Il faut pour cela en soulever un et le retourner. Lorsque deux figures sont telles qu'en en soulevant une et en la retournant, on peut la superposer à l'autre, on dira qu'elles sont *figures superposables par retournement*. Les figures qu'on peut superposer en les faisant glisser et tourner de manière adéquate, on dira qu'elles sont *superposables par déplacement*. Tous les triangles de type P sont superposables par déplacement et tous ceux de type F également. Un triangle de type P et un de type F sont superposables par retournement.

Ces assemblages donnent donc neuf figures. Parmi toutes ces figures, on reconnaît des parallélogrammes (*A, B, C, D, E* et *F*). On remarque que ce sont celles qui sont obtenues comme assemblages de triangles de même type (PP ou FF), c'est-à-dire superposables par déplacement.

Examinons maintenant les parallélogrammes. Les autres figures, celles qui sont obtenues par assemblage de deux triangles de type différents (PF), c'est-à-dire superposables par retournement, sont des cerfs-volants et des pointes de flèche que nous analyserons plus tard.

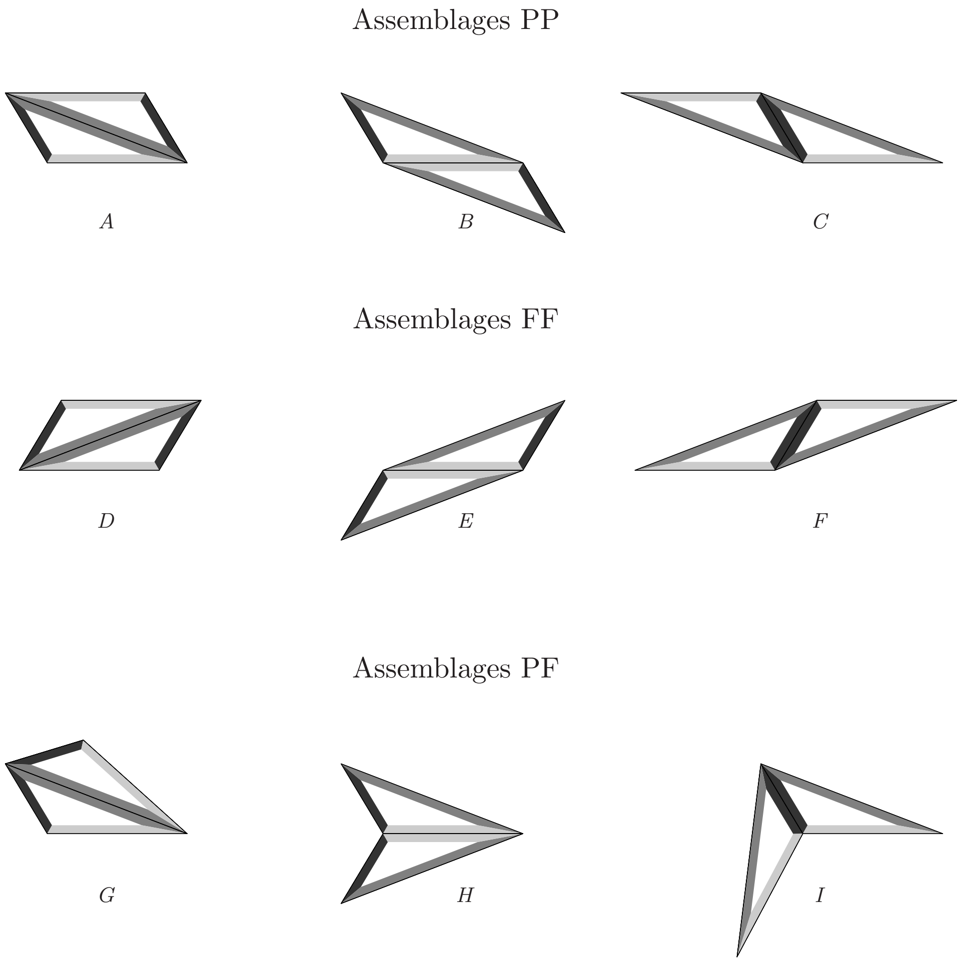


Fig. 15

3 Les parallélogrammes

On a obtenu des parallélogrammes en juxtaposant deux triangles superposables par déplacement. On peut faire exactement l'inverse : découper des parallélogrammes en deux triangles. Pour parvenir à le faire, il faut découper suivant la diagonale du parallélogramme. On obtient alors deux triangles qui sont superposables par déplacement. Lorsqu'on découpe le même parallélogramme (voici un nouvel abus de langage : comment découper le même parallélogramme puisqu'il a déjà été découpé et qu'il n'est donc plus un parallélogramme ?) en suivant l'autre diagonale, on obtient à nouveau deux triangles superposables (figures 16 et 17 à la page suivante). Sauf cas particuliers, ces nouveaux triangles ne se superposent pas aux deux premiers .

Nous supposons que cette propriété importante a déjà été travaillée au primaire. Si ce n'était pas le cas, cela vaut la peine de faire précéder l'activité d'assemblage des triangles par une activité telle que *Couper en deux, c'est bête comme chou ! Voire, cf. C. De Block-Docq et N. Rouche* [1996].

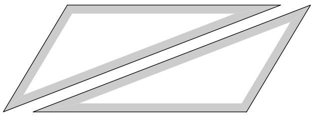


Fig. 16

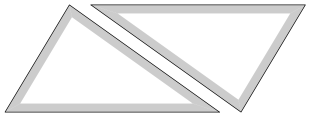


Fig. 17

On peut donc voir les parallélogrammes comme les figures géométriques constituées de deux triangles superposables par déplacement accolés le long d'un côté commun. Ceci fournit immédiatement des informations à leur sujet :

On identifie ci-contre la famille des parallélogrammes à celle des figures obtenues comme assemblages de triangles superposables par déplacement. Il faut toutefois remarquer une dissymétrie entre le découpage de parallélogramme et l'assemblage de triangles. Si l'on découpe un parallélogramme suivant une diagonale, on obtient toujours deux triangles superposables. Si l'on assemble deux triangles superposables, on n'obtient un parallélogramme que s'ils sont superposables par déplacement.

– Leurs côtés opposés ont la même longueur. Les triangles qui les constituent étant superposables, les longueurs de leurs côtés correspondants sont forcément les mêmes.
– Les angles opposés ont même amplitude (figure 18). Les angles se correspondant dans deux figures superposables ont en effet même amplitude. Ceci indique immédiatement que les angles en B et en D ont même amplitude. Pour les angles en A et en C, la superposabilité des triangles entraîne que les angles marqués d'un point ont même amplitude, ainsi que les angles marqués d'une étoile, ce qui implique évidemment l'égalité des amplitudes des sommes des angles considérés.

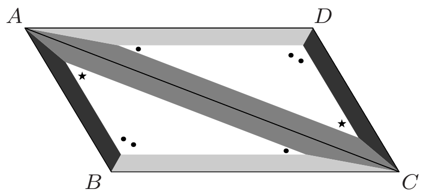


Fig. 18

– Les côtés opposés sont parallèles. C'est sans doute la caractéristique la plus marquante du parallélogramme . On peut se rendre compte qu'elle découle aussi de la manière dont on a formé ici les parallélogrammes. En effet chaque assemblage donnant un parallélogramme peut être obtenu de la manière suivante : on superpose deux triangles superposables et on en fait tourner un d'un demi-tour. Quand on fait tourner d'un demi-tour une figure rectiligne, chaque côté de cette figure prend une position parallèle par rapport à celle qu'il occupait avant le demi-tour (*cf.* la figure 3 à la page 147). Par exemple (figure 18), le côté $[CD]$ avait au départ la même position que le côté $[AB]$. Après avoir tourné d'un demi-tour, il a pris une position parallèle au côté $[AB]$.

Il y a d'autres manières de construire des parallélogrammes que d'assembler des triangles. Partons de trois points A, B et C. *Combien y a-t-il de parallélogrammes ayant ces trois points comme sommets ?* Les trois parallélogrammes ayant A, B et C comme sommets sont représentés à la figure 19 à la page suivante.

Au lieu de dessiner le triangle ABC, d'en faire un copie et d'accoler de différentes manières ces deux triangles, pour construire chacun de ces parallélogrammes, on peut :

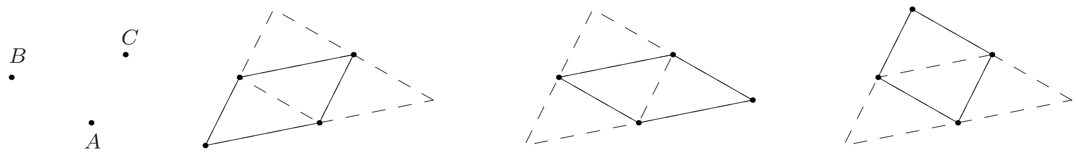


Fig. 19

– tracer les côtés parallèles deux à deux, par exemple en traçant par A la parallèle à $[BC]$ et par C la parallèle à $[AB]$ (figure 20) ;

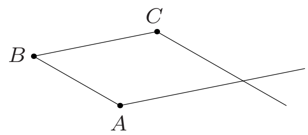


Fig. 20

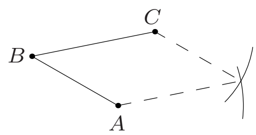


Fig. 21

Il y a une différence entre celui qui sait ce qu'est un parallélogramme et donc sait à peu près où devra se trouver le quatrième sommet, et un logiciel tel que *cabri-géomètre* qui cherchera précisément l'intersection de deux cercles et trouvera donc deux sommets possibles. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire d'ajouter la condition de convexité.

On peut faire la même remarque pour l'intersection d'un cercle et d'une droite que pour l'intersection de deux cercles.

– tracer les côtés opposés de même longueur, par exemple en traçant un cercle de centre A et de rayon $|BC|$ et un cercle de centre C et de rayon $|AB|$, et en choisissant le bon point d'intersection de ces deux cercles (figure 21) ;
– tracer deux côtés parallèles et de même longueur, par exemple en traçant par A un côté parallèle à $[BC]$ de même longueur que lui, dans l'un ou l'autre sens, mais en étant attentif à la convexité de la figure (figure 22).

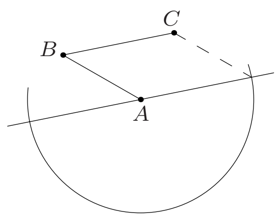


Fig. 22

Ces constructions permettent de regarder les propriétés du parallélogramme de manière plus dynamique. Chacun des procédés utilisés permet d'aboutir à une figure dont on est sûr qu'elle est un parallélogramme. Les propriétés utilisées caractérisent entièrement le type de figure. Nous dirons qu'elles *déterminent* la figure. Nous dirons encore que ces propriétés sont des *conditions déterminantes du parallélogramme.* Reprenons-les clairement :

Pour les élèves, les conditions déterminantes s'écrivent sous forme de synthèses dans des tableaux de la manière suivante :

Je sais que	Je déduis que
...	...

Elles sont différentes des synthèses descriptives que l'on a faites jusqu'ici. Ce sont des outils pour la suite.

1. *Lorsqu'un quadrilatère a les côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme (figure 23 à la page suivante).*

2. *Lorsqu'un quadrilatère convexe a les côtés opposés de même longueur, c'est un parallélogramme (figure 24).*

3. *Lorsqu'un quadrilatère convexe a deux côtés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme (figure 25).*

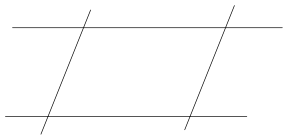


Fig. 23

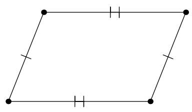


Fig. 24

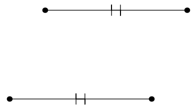


Fig. 25

4 Assembler deux triangles rectangles

Nous avons considéré jusqu'à présent deux triangles *quelconques*. En fait ils n'étaient pas tout à fait quelconques : ils n'étaient ni rectangles, ni isocèles, ni équilatéraux... Par exemple s'ils avaient été équilatéraux, il n'y aurait eu qu'une seule figure, quelle que soit la manière dont les deux triangles auraient été assemblés ! Occupons-nous maintenant des triangles rectangles.

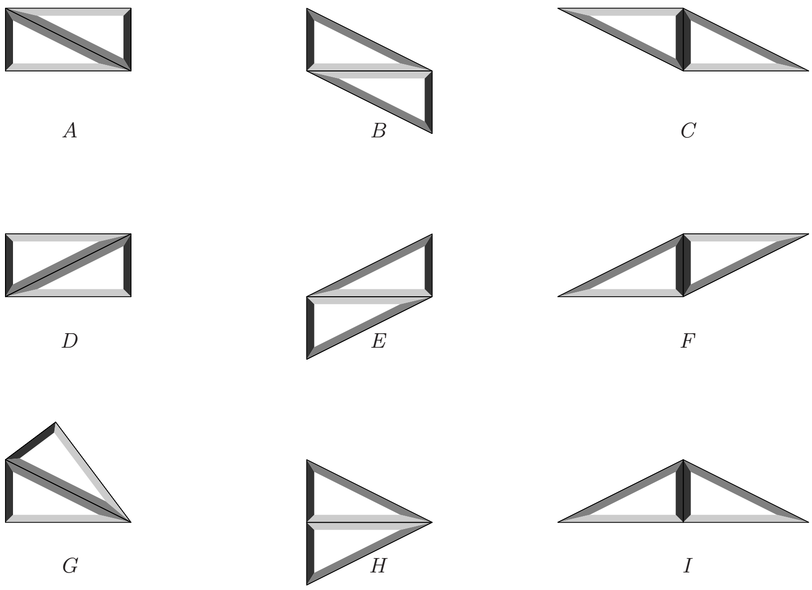


Fig. 26

Les différents assemblages de deux triangles rectangles superposables sont présentés à la figure 26. Certains des parallélogrammes sont devenus des rectangles (assemblages A et D), et les pointes de flèches sont devenues des triangles isocèles (assemblages H et I). Dans le premier cas, cela montre que le rectangle est un parallélogramme particulier. Dans le deuxième cas, il est plus difficile de concevoir le triangle isocèle comme cas particulier des cerfs-volants ou des pointes de flèches, car celles-ci sont des quadrilatères ! On est ainsi confronté à la question de l'alignement :

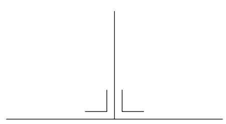


Fig. 27

4. *Si on accole deux angles droits le long d'un côté commun, les autres côtés des angles s'alignent (figure 27).*

5 Assembler deux triangles isocèles

On a obtenu des triangles isocèles en juxtaposant deux triangles rectangles superposables par retournement. Cette juxtaposition se fait le long d'un des côtés de l'angle droit. Ce côté devient l'axe du triangle isocèle (figure 28). On peut faire exactement l'inverse : découper un triangle isocèle de manière à obtenir deux triangles rectangles superposables par retournement. On peut aussi le faire sans découper le triangle. On prend le milieu de la base et on plie le triangle isocèle en deux, puis on le déplie. Les deux parties se juxtaposent parfaitement.

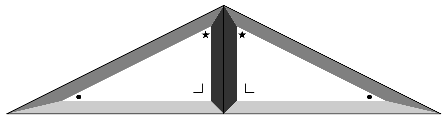


Fig. 28

On peut donc voir les triangles isocèles comme les figures géométriques constituées de deux triangles rectangles superposables par retournement accolés le long d'un côté de l'angle droit. Ceci fournit immédiatement des informations à leur sujet.

– Ils ont deux côtés de même longueur.
– Ils ont deux angles de même amplitude.
– Ils possèdent un *axe de symétrie* :
    · cet axe passe par un sommet et coupe le côté opposé en son milieu (c'est une *médiane*) ;
    · il passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé (c'est une *hauteur*) ;
    · il passe par le milieu d'un côté et lui est perpendiculaire (c'est une *médiatrice*) ;
    · il partage un angle du triangle en deux angles de même amplitude (c'est une *bissectrice*).

Il y a d'autres manières de construire des triangles isocèles que d'assembler deux triangles rectangles. Partons de deux points A et B. *Où peut être le troisième pour que le triangle ayant les trois points pour sommets soit isocèle ?*

Il y a deux types de solutions, présentées séparément à la figure 29 à la page suivante et conjointement à la figure 30.

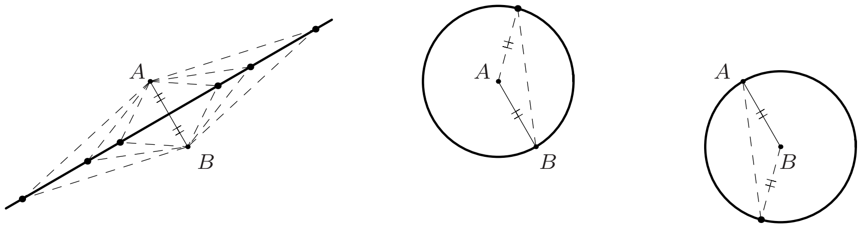


Fig. 29

Si on cherche le sommet C du triangle tel que le côté $[AC]$ ait même longueur que $[BC]$, on obtient le premier type de solutions : le sommet se trouve n'importe où sur la médiatrice du segment $[AB]$, sauf au milieu de ce segment. On peut aussi chercher le sommet C de telle manière que le côté $[AC]$ (ou le côté $[BC]$) ait même longueur que le côté $[AB]$. On obtient, dans ce cas, le deuxième type de solutions : le sommet C se trouve sur un cercle de centre A (ou de centre B) et de rayon $|AB|$.

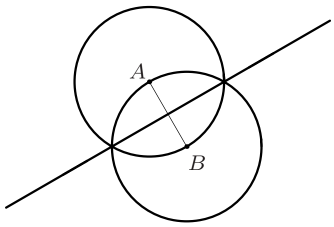


Fig. 30

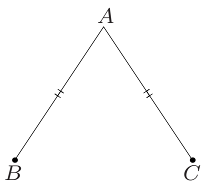


Fig. 31

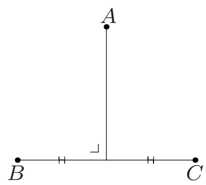


Fig. 32

Comme dans le cas du parallélogramme, ces deux types de constructions permettent de concevoir certaines propriétés de manière plus dynamique. On obtient ainsi les premières *conditions déterminantes* du triangle isocèle :

5. *Si un triangle a deux côtés de même longueur, alors c'est un triangle isocèle (figure 31).*

6. *Si un triangle a un sommet sur la médiatrice des deux autres, alors c'est un triangle isocèle (figure 32).*

On peut aussi se poser la question de la construction d'un triangle isocèle lorsqu'on n'a pas deux sommets, mais la position relative de deux côtés, c'est-à-dire lorsqu'on connaît l'angle que forment ces deux côtés.

Il y a à nouveau deux possibilités de solutions (figure 33 à la page suivante) :

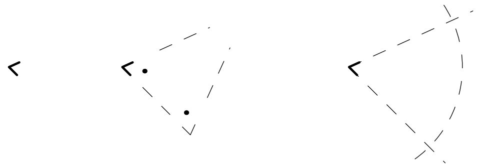


Fig. 33

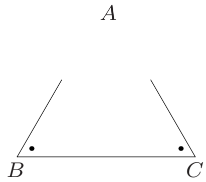


Fig. 34

- On prolonge un des côtés, ce qui donne un segment. Du côté de celui-ci où se trouve l'angle, on reporte un angle de même amplitude. Ceci détermine le troisième côté du triangle.
- Un autre cas se présente lorsque l'angle donné n'est pas un des deux angles de même amplitude. On peut construire le triangle en trouvant les points de rencontre des côtés de l'angle (éventuellement prolongés) avec un cercle dont le centre est le sommet de l'angle.

La première de ces deux constructions permet de compléter la liste des conditions déterminantes du triangle isocèle :

7. *Si un triangle a deux angles de même amplitude, alors c'est un triangle isocèle (figure 34).*

Si l'on a un triangle isocèle, on peut également répertorier tous les moyens de construire son axe. Ces constructions indiquent les conditions déterminantes de l'axe d'un triangle isocèle :

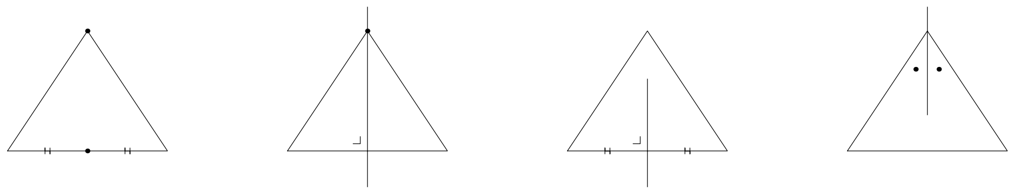


Fig. 35

8. *Pour chaque triangle isocèle que l'on peut dessiner, chacune des propriétés* être médiane*,* être hauteur*,* être médiatrice *et* être bissectrice *est condition déterminante de son axe (figure 35).*

6 Les angles des triangles et des polygones

Le rectangle possède quatre angles droits. Lorsqu'on fait la somme de ses quatre angles on obtient donc 360°. Si on prend un triangle rectangle, qu'on en fait une copie, qu'on juxtapose de manière adéquate cette copie au premier triangle, on obtient un rectangle. Cette manœuvre permet de déterminer la somme des angles de ce triangle (figure 36 à la page suivante).

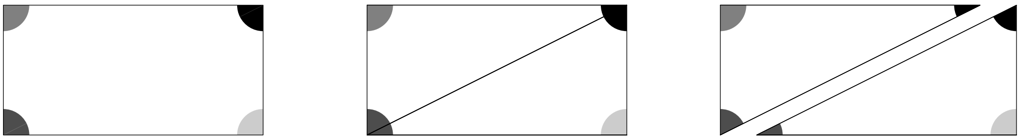


Fig. 36

En effet, si on redécoupe le rectangle suivant sa diagonale, deux des angles droits sont aussi coupés en deux. Comme les angles des deux triangles rectangles superposables ont évidemment même amplitude, la somme des angles du rectangle vaut deux fois la somme des angles de chacun des deux triangles. Celle-ci vaut donc 180°. De plus, dans chaque triangle rectangle, la somme des deux angles aigus vaut dès lors 90°. De tels angles sont appelés *angles complémentaires*.

On peut remarquer que la manœuvre de découpage du rectangle qui vient d'être réalisée ne se transfère à la somme des angles que parce que l'on a découpé suivant une diagonale et que, par conséquent, des angles ont aussi été découpés. Si on découpe par exemple le rectangle en deux quadrilatères comme à la figure 37, on voit que la somme des angles du rectangle n'est pas la même que la somme de tous les angles des deux quadrilatères obtenus !

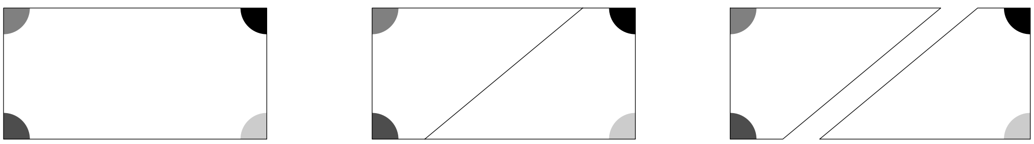


Fig. 37

Pour calculer la somme des angles d'un triangle quelconque, on peut le découper en triangles rectangles. Reprenons par exemple le premier triangle que nous avions utilisé pour faire des assemblages (figure 14 à la page 149). Comment le découper en deux triangles rectangles ? Il suffit de tracer la hauteur relative au côté le plus grand (figure 38 à la page suivante). On voit alors que la somme des angles du triangle ABC est :

la somme des angles aigus du triangle ADC
\+ la somme des angles aigus du triangle ADB,

c'est-à-dire $\widehat{A_1} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A_2}$, ou encore $90° + 90° = 180°$. On peut aussi calculer cette somme de la manière suivante :

la somme des angles du triangle rectangle ADC
\+ celle des angles du triangle rectangle ADB
− les deux angles droits en D.

C'est donc $180° + 180° - 90° - 90°$, c'est-à-dire 180°.

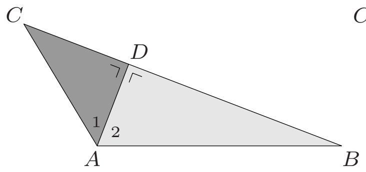


Fig. 38

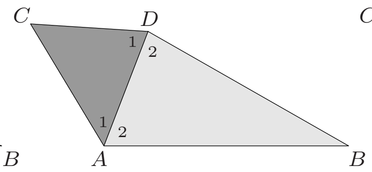


Fig. 39

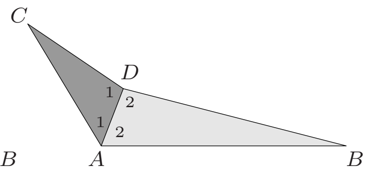


Fig. 40

Poursuivons notre exploration de la somme des angles de figures géométriques en revenant aux quadrilatères. On est parti du rectangle pour passer au triangle. Le triangle permet maintenant de repasser à n'importe quel quadrilatère (non croisé) : celui-ci peut être découpé en deux triangles par un coup de ciseau le long d'une diagonale (figures 39 et 40). Cette fois, la somme des angles est donnée par la somme des angles du triangle ADC et du triangle ABD. Elle vaut donc 360°.

On peut encore chercher à généraliser ce résultat : quelle est la somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque. En utilisant la décomposition en triangles, on s'aperçoit que cette somme dépend du nombre de côtés ou de sommets du polygone (figures 41 et 42).

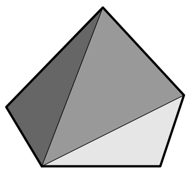


Fig. 41

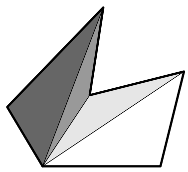


Fig. 42

Par exemple, on peut décomposer un pentagone en trois triangles. La sommes des angles intérieurs vaut donc $3 \times 180°$. On peut décomposer un hexagone en quatre triangles. La somme des angles intérieurs vaut donc $4 \times 180°$. En général, si un polygone a n côtés (et donc n sommets), on pourra le décomposer en $(n-2)$ triangles. La somme de ses angles intérieurs vaudra donc $(n-2) \times 180°$.

7 Emboîtement de familles de quadrilatères

Assembler des triangles et découper des figures en triangles s'est avéré très utile pour étudier des propriétés de figures. Cela peut aussi être utile pour classer les figures. Le tableau 1 à la page suivante rassemble différents cas et les conclusions que l'on peut en tirer à propos des quadrilatères en les regardant comme assemblages de triangles.

Triangles superposables par déplacement		
Lorsqu'on assemble deux triangles quelconques, on obtient un parallélogramme.		
La figure :	peut toujours être obtenue comme assemblage de :	
rectangle	deux triangles rectangles	le rectangle est un parallélogramme particulier
losange	deux triangles isocèles	le losange est un parallélogramme particulier
carré	deux triangles isocèles rectangles	le carré est un parallélogramme particulier
Triangles superposables par retournement		
Lorsqu'on assemble deux triangles quelconques, on obtient un cerf-volant (ou une pointe de flèche)		
La figure :	peut toujours être obtenue comme assemblage de :	
losange	deux triangles isocèles	le losange est un cerf-volant particulier
le carré	deux triangles isocèles rectangles	le carré est un cerf-volant particulier

Tabl. 1

8 Assembler plus de deux triangles

Pour assembler trois triangles, on commence par en assembler deux. On en ajoute ensuite un troisième. En assemblant trois triangles superposables par déplacement, on peut par exemple obtenir les assemblages de la figure 43.

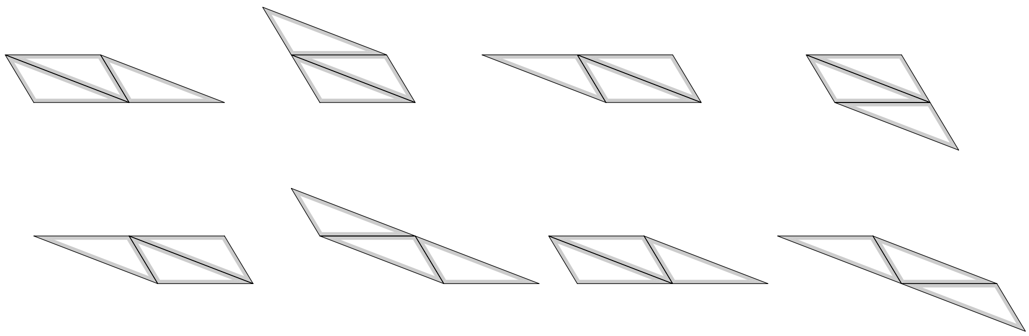


Fig. 43

Pour obtenir ces huit assemblages, on a pris deux des trois parallélogrammes obtenus en assemblant deux triangles. On y a ensuite ajouté un troisième triangle le long d'un côté du parallélogramme, et cela de toutes les manières possibles. Pour avoir tous les assemblages possibles il aurait encore fallu prendre le troisième parallélogramme obtenu en assemblant deux triangles. On peut observer que certaines figures apparaissaient en double. En réalité, avec trois triangles superposables par déplacement, on n'obtient que trois assemblages différents (figure 44).

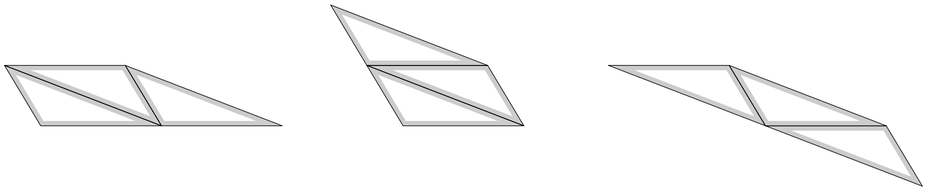


Fig. 44

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que, dans chacune de ces figures, deux côtés de deux triangles différents s'alignent. Les figures obtenues sont des trapèzes. La raison de cet alignement peut être trouvée dans la somme des angles de tout triangle qui vaut 180°, c'est-à-dire un angle plat. L'endroit où se passe cet alignement est précisément l'endroit où se rencontrent trois angles différents des triangles. Puisque les trois triangles sont superposables, ceci revient au même que les trois angles d'un des triangles.

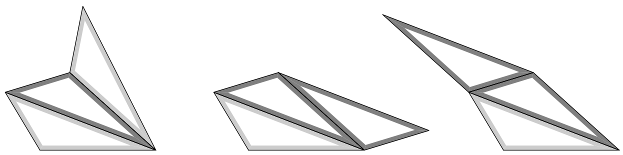


Fig. 45

Une activité peut être de trouver à quelle(s) condition(s) le premier assemblage de la figure 45 se referme lorsqu'on le poursuit avec d'autres triangles, ou à quelle(s) condition(s) un alignement se produit dans les deux autre figures.

Les assemblages avec des triangles superposables par retournement semblent ne rien donner de particulièrement remarquable (figure 45).

L'alignement dans le cas des triangles superposables par déplacement a plusieurs conséquences importantes. Il permet par exemple de poursuivre l'assemblage de triangles en constituant comme à la figure 46 une bande de triangles (qu'on peut aussi voir comme une bande de parallélogrammes).

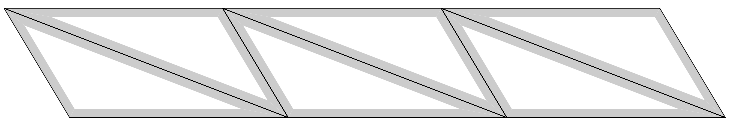


Fig. 46

On accolant plusieurs bandes on peut alors couvrir toute la feuille de travail, et même plus... En juxtaposant des copies du même triangle, on peut donc réaliser un pavage[2].

[2] Construire un *pavage* consiste à juxtaposer des formes de telle manière que :

– les différentes formes s'ajustent parfaitement sans se chevaucher ;

– l'on puisse continuer aussi loin de que l'on veut.

Une autre manière de poursuivre l'assemblage consiste à placer un quatrième triangle en combinant les deux premiers assemblages de la figure 44 à la page précédente. On obtient alors un nouveau triangle qui ressemble au triangle de départ, sauf qu'il est plus grand (figure 47). L'alignement de deux côtés des triangles se réalise ici trois fois. On remarque que tous les côtés de ce nouveau triangle sont deux fois plus longs que ceux du triangle de départ, mais que son aire est quatre fois plus grande.

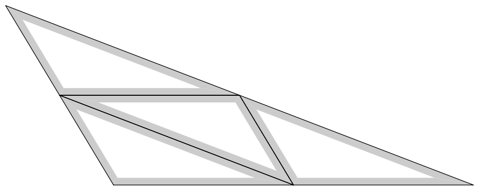


Fig. 47

On peut alors continuer à assembler 5, 6, 7 ou 8 triangles. Nous ne regarderons ici que les cas les plus intéressants.

Repartant des trapèzes de la figure 44 à la page précédente, on peut réaliser l'assemblage de six triangles comme à la figure 48. On prend un des trapèzes, on lui accole une copie superposable par déplacement. Quel que soit le trapèze que l'on choisit, on obtient le même hexagone. Cette figure a les propriétés suivantes :

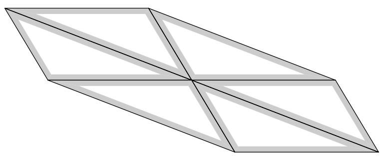


Fig. 48

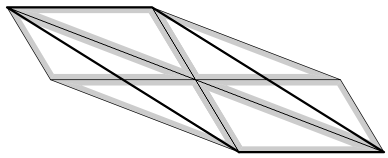


Fig. 49

- les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
- les côtés opposés ont même longueur ;
- les diagonales joignant les sommets opposés se coupent en leur milieu.

On dit d'une figure qui possède ces propriétés que le point d'intersection des diagonales est un *centre de symétrie*.

Ces propriétés ne dépendent pas du nombre de côtés. D'ailleurs cette figure possède plusieurs sous-figures qui possèdent ces propriétés. Regardons par exemple le quadrilatère dont le contour est dessiné en gras à la figure 49. Ce quadrilatère possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur. La condition déterminante 3 à la page 153 permet d'affirmer que c'est un parallélogramme.

Ceci nous donne une propriété supplémentaire du parallélogramme : ses diagonales se coupent en leur milieu. En effet, tout parallélogramme peut s'intégrer à un hexagone comme celui de la figure 48 à la page précédente. On peut partir d'un parallélogramme quelconque et voir comment construire cet hexagone. Le fil de cette construction est repris à la figure 50.

Pour le construire, les diagonales sont importantes et il est utile de les mettre en évidence. Partant de leur point de rencontre, on construit deux nouveaux parallélogrammes en traçant un segment parallèle à deux côtés du parallélogramme de départ et de même longueur qu'eux (condition déterminante 3 à la page 153). Les autres côtés parallèles de ces deux parallélogrammes en déterminent un nouveau (condition déterminante 1 à la page 152). Ces trois parallélogrammes permettent alors d'exhiber quatre triangles superposables par déplacement. En recommençant cela de l'autre côté du parallélogramme de départ, on a bien reconstruit le « même » hexagone que celui de la figure 48 à la page précédente.

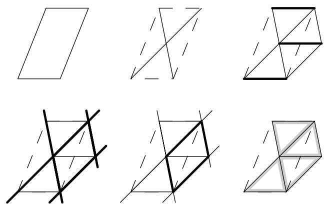


Fig. 50

Le parallélogramme possède donc les trois propriétés énoncées ci-dessus. Le point de rencontre des diagonales du parallélogramme est son centre de symétrie.

Partons du triangle divisé en quatre de la figure 47 à la page précédente. Juxtaposons-en deux copies comme à la figure 51. La figure obtenue est un parallélogramme divisé en quatre parallélogrammes, eux-mêmes divisés en deux triangles. L'analyse de cette figure indique que les médianes du grand parallélogramme se coupent en leur milieu. Leur point de rencontre se trouve sur la diagonale du grand parallélogramme et coupe d'ailleurs cette dernière en deux parties de même longueur.

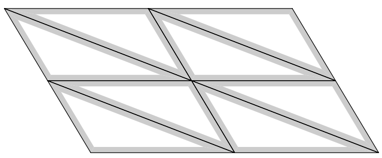


Fig. 51

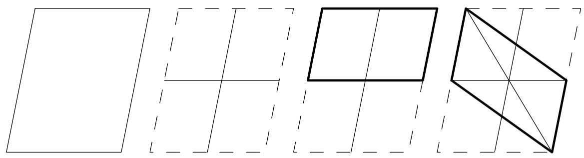


Fig. 52

Pour vérifier que cette propriété est vraie pour tous les parallélogrammes, il faut s'assurer que tout parallélogramme se décompose de cette manière en huit triangles superposables par déplacement. On peut aussi suivre le fil suivant repris à la figure 52.

On trace un parallélogramme et ses médianes, c'est-à-dire les segments qui joignent les milieux des côtés opposés. Comme les côtés opposés du parallélogramme ont même longueur, les moitiés de côtés opposés ont aussi même longueur, ce qui permet de trouver de nouveaux parallélogrammes de deux types dans cette figure grâce à la condition déterminante 3 à la page 153. Le premier type permet de déduire que les médianes du parallélogramme sont parallèles à certains côtés. Le deuxième type permet de déduire que les médianes se coupent en leur milieu et au même point que les diagonales. Pour cela, on utilise la propriété qui vient être vue : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

On sait que chaque parallélogramme se décompose de deux manières en deux triangles superposables par déplacement. On aurait pu faire exactement le même genre d'assemblage avec le deuxième type de triangles obtenu par découpage le long de l'autre diagonale. En assemblant de manière adéquate huit exemplaires de ce triangle, on obtient à la figure 53.

On peut encore reprendre les triangles des figures 51 et 53 pour les combiner autrement. On peut obtenir par exemple les figures 54 et 55. La première montre très clairement la double propriété des médianes et des diagonales du parallélogrammes. La seconde montre que lorsqu'on joint les milieux des côtés d'un parallélogramme, on obtient un nouveau parallélogramme.

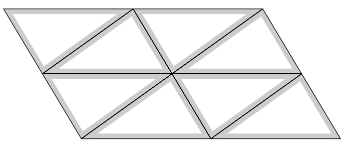


Fig. 53

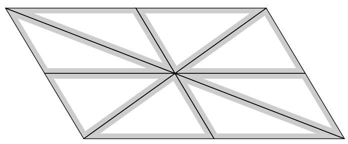


Fig. 54

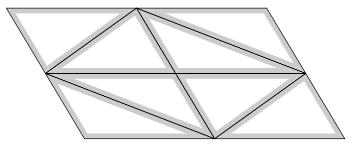


Fig. 55

Dans le cas où les triangles sont rectangles, le parallélogramme est un rectangle. Ce que l'on vient de faire reste vrai. Remarquons que, cette fois, tous les triangles de la figure 56 sont superposables (par déplacement ou par retournement), et que dans le cas de la figure 57, la figure obtenue en joignant les milieux des côtés du rectangle, est un losange.

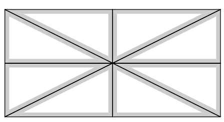


Fig. 56

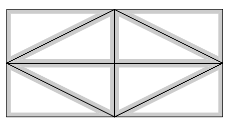


Fig. 57

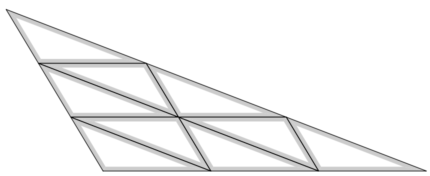
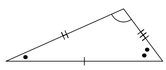


Fig. 58

Pour en terminer avec les assemblages de triangles, on va encore prolonger l'assemblage de quatre triangles de la figure 47 à la page 161. En assemblant neuf triangles, on peut encore agrandir le triangle qu'on obtient (figure 58 à la page précédente). Les alignements des côtés garantissent que c'est bien un triangle que l'on obtient à nouveau. Chaque côté a été triplé. L'aire du triangle a été multipliée par neuf. On peut poursuivre ces assemblages en agrandissant encore le triangle en lui ajoutant 7 nouveau triangles[3].

9 Cerfs-volants et pointes de flèche

En assemblant des triangles quelconques superposables, nous avons rencontré, entre autres, des cerfs-volants et des pointes de flèche (figure 59).



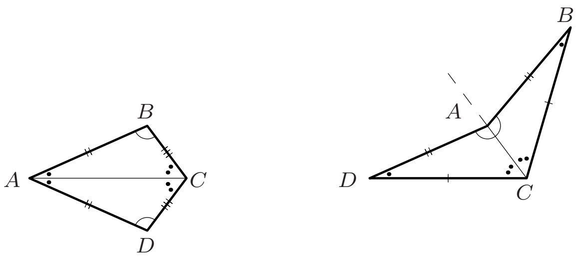


Fig. 59

Les codages permettent de dégager une liste de propriétés de ces figures :

- avoir deux paires de côtés consécutifs de même longueur ;
- avoir deux angles de même amplitude ;
- avoir une diagonale bissectrice des deux autres angles.

Grâce à la condition déterminante 5 des triangles isocèles (avoir deux côtés de même longueur), nous pouvons reconnaître que les triangles ABD et BDC sont isocèles. Ceci nous permet de trouver une propriété supplémentaire des cerfs-volants et pointes de flèches :

- avoir une diagonale médiatrice de l'autre.

En effet, comme AC est bissectrice des angles en A et en C, ce qui est une condition déterminante de l'axe de symétrie des triangles isocèles, AC est médiatrice de $[BD]$. Remarquons que dans le cas de la pointe de flèche, il est nécessaire de considérer les angles supplémentaires en A.

Examinons les conditions déterminantes de ces figures (figure 60 à la page suivante).

[3] On peut utiliser ce type d'assemblages pour établir que la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2.

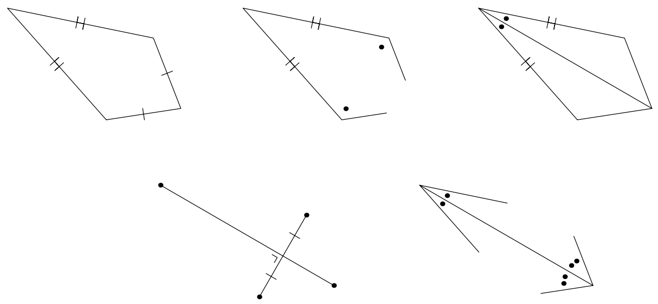


Fig. 60 (a,b,c,d,e,f)

Les conditions déterminantes 9, 10 et 11 sont équivalentes aux cas d'isométrie des triangles.

9. *Si un quadrilatère a deux paires de côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

10. *Si un quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur et deux angles adjacents à ces côtés de même amplitude, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche (voir figure 60(b).*

11. *Si un quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur et une diagonale bissectrice de l'angle entre ces deux côtés, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

12. *Si un quadrilatère a une diagonale médiatrice de l'autre, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

13. *Si un quadrilatère a une diagonale bissectrice de deux angles, alors c'est un cerf-volant ou une pointe de flèche.*

On peut encore remarquer que le losange est un cerf-volant particulier : il suffit de prendre comme triangles de départ deux triangles isocèles superposables que l'on accole de manière adéquate. Comme deux triangles isocèles superposables le sont par déplacement *et* par retournement, le losange est *à la fois* un parallélogramme et un cerf-volant.

Les propriétés des triangles isocèles et des cerfs-volants permettent de mettre au point et de justifier des techniques de construction des médiatrices et des bissectrices :

- *Construction de la médiatrice d'un segment.* Pour déterminer la médiatrice d'un segment, il suffit de considérer ce dernier comme la base d'un triangle isocèle. La médiatrice est l'axe de ce triangle. On peut aussi voir ce segment comme diagonale d'un cerf-volant ou d'un losange, et déterminer l'un ou l'autre en deux ou quatre coups de compas.
- *Construction de la bissectrice d'un angle.* Pour construire une bissectrice, on regarde l'angle comme l'angle au sommet d'un triangle isocèle. Il suffit alors de déterminer l'axe de ce triangle. Une autre manière de construire la bissectrice est de « coincer » un losange ou un cerf-volant dans cet angle. On y arrive en trois coups de compas.

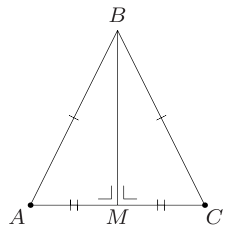


Fig. 61

La configuration du triangle isocèle permet également d'introduire la symétrie orthogonale : par exemple, dans le triangle isocèle ABC (figure 61), on regarde le point C comme étant l'image du point A par la symétrie d'axe BM.

Grâce aux configurations du triangle isocèle et du cerf-volant, on peut alors mettre au point et justifier des constructions de l'image d'un point par cette symétrie.

– *Triangle isocèle* : pour déterminer l'image A' d'un point A par une symétrie d'axe m (figure 62(a)), il suffit de voir cet axe comme l'axe d'un triangle isocèle dont A est un point de la base (figure 62(b)). Pour trouver A', il suffit donc de reporter sur la perpendiculaire à l'axe, de l'autre côté de l'axe, la même distance que celle entre l'axe et A (figure 62(c)).

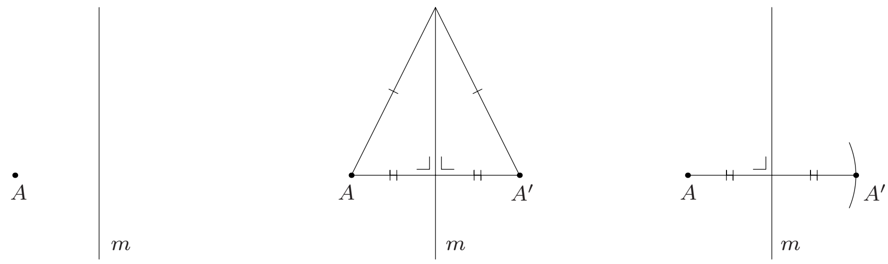


Fig. 62 (a,b,c)

– *Cerf-volant* : pour déterminer l'image A' d'un point A par une symétrie d'axe m (figure 63(a)), il suffit de voir cet axe comme la diagonale d'un cerf-volant ; les points A et A' sont les extrémités de l'autre diagonale (figure 63(b)). Pour trouver A', il suffit donc de choisir deux points B et C sur l'axe et de tracer deux arcs de cercles passant par A et dont les centres sont B et C. Leur deuxième point d'intersection est A' (figure 63(c)).

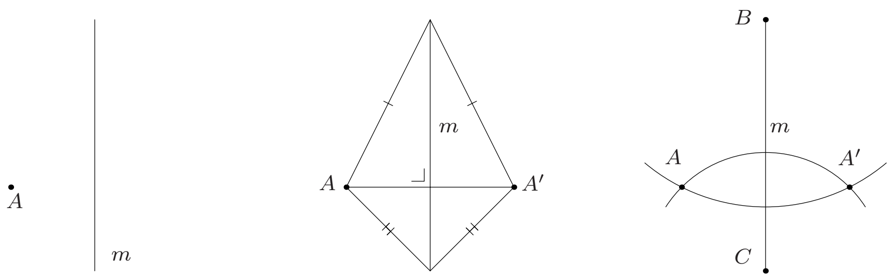


Fig. 63 (a,b,c)

En considérant en outre les configurations du rectangle, du trapèze isocèle et du quadrilatère croisé formé par les diagonales du trapèze isocèle, on élabore une synthèse à propos de la construction de l'image d'un segment par une symétrie orthogonale (figure 64). (Dans cette synthèse n'apparaissent pas les deux cas triviaux où le segment est inclus ou perpendiculaire à l'axe.)

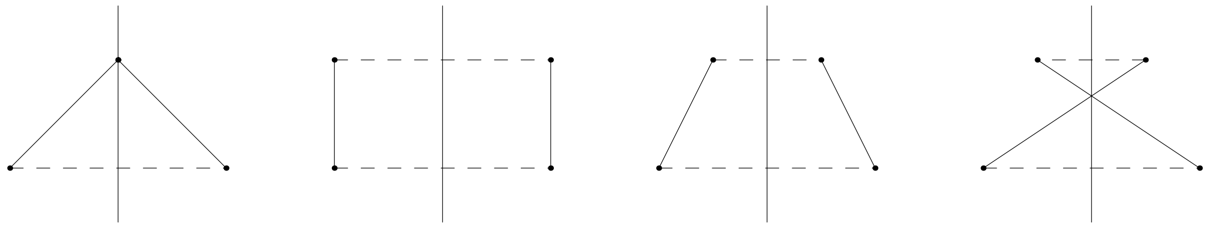


Fig. 64

10 Paver avec des quadrilatères

Nous avons vu à la section 8 à la page 159 qu'il est possible de paver le plan avec n'importe quel triangle (c'est-à-dire en utilisant des triangles superposables à un triangle quelconque). *Est-il possible de le faire avec n'importe quel quadrilatère ?*

L'activité de recherche libre amène les élèves, après beaucoup d'essais et erreurs, à penser que l'on peut paver le plan avec des quadrilatères quelconques à condition qu'ils soient tous superposables par déplacement (figure 65). Le fait que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360° achève alors de les convaincre[4] : en chaque un nœud du pavage on peut toujours placer quatre quadrilatères de telle sorte que s'y assemblent quatre angles dont la somme vaut 360° (ils sont chacun superposable à un angle différent du quadrilatère).

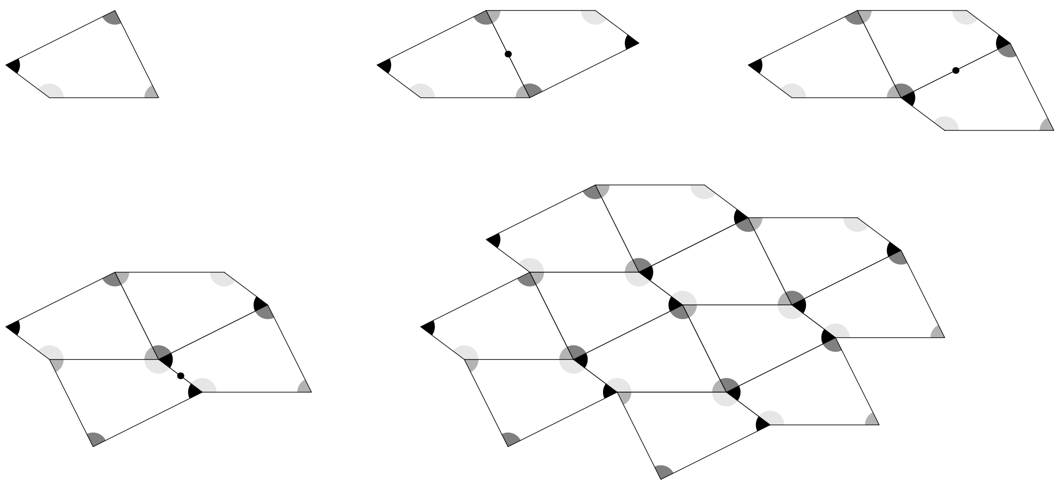


Fig. 65

[4] Cet argument peut ne pas convaincre suffisamment du fait que l'on peut poursuivre le pavage « à l'infini de tous les côtés ». Une manière plus complète de s'en convaincre est proposée à la section 6 à la page 121 (chapitre 8).

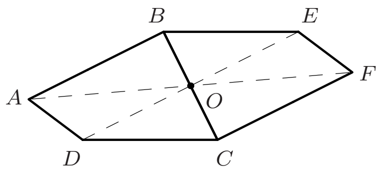


Fig. 66

Une fois cette propriété établie, on passe en revue et on analyse différentes étapes dans la réalisation du pavage. L'activité est donc relancée par l'assemblage de deux quadrilatères et par l'analyse de la figure obtenue.

Dans ce début de pavage (figure 66), on détecte plusieurs parallélogrammes : il y a en effet trois quadrilatères dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Leurs diagonales se coupent en leur milieu. Comme deux quelconques parmi ces trois parallélogrammes ont une diagonale en commun, elles se coupent toutes en un même point central O. On l'on appelle *centre de symétrie* de la figure.

Le tableau 2 montre comment le travail de recherche peut s'écrire sous forme de synthèse au cahier.

Je sais que	Je déduis que
Les côtés $[AB]$ et $[CF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$ABFC$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[BC]$ et de $[AF]$.
Les côtés $[DC]$ et $[BE]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DBEC$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[BC]$ et de $[DE]$
Les côtés $[AD]$ et $[EF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DAEF$ est un parallélogramme. Ses diagonales ont le même milieu : O est le milieu de $[DE]$ et de $[AF]$.
Conclusion *Le point M est le milieu des segments $[AF]$, $[DE]$ et $[BC]$; c'est le centre de symétrie de l'hexagone. On dit aussi que c'est le centre de la symétrie centrale ou de la rotation de* 180° *qui applique le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $CBEF$.*	

Tabl. 2

On analyse maintenant la figure obtenue par l'ajout d'un troisième quadrilatère (figure 67 à la page suivante). Le passage entre les quadrilatères $ABCD$ et $CBEF$ vient d'être analysé, de même que celui entre les quadrilatères $CBEF$ et $EHGF$. Pour passer du quadrilatère $ABCD$ à $EHGF$, le repérage de quatre parallélogrammes fait apparaître quatre segments parallèles et de même longueur : ce sont ceux qui relient chaque sommet du premier quadrilatère au sommet correspondant du second. Ces segments sont les traces de la translation qui applique $ABCD$ sur $EHGF$.

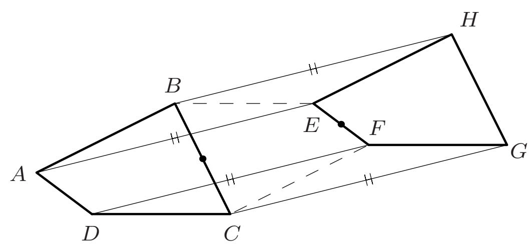


Fig. 67

Ces observations peuvent aussi faire l'objet d'une synthèse écrite au cahier (tableau 3).

Je sais que	Je déduis que
Les côtés $[AB]$ et $[EH]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$ABHE$ est un parallélogramme. Les droites BH et AE sont parallèles et les segments $[BH]$ et $[AE]$ ont même longueur.
Les côtés $[BC]$ et $[HG]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$BHGC$ est un parallélogramme. Les droites BH et CG sont parallèles et les segments $[BH]$ et $[CG]$ ont même longueur.
Les côtés $[CD]$ et $[GF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DCGF$ est un parallélogramme. Les droites CG et DF sont parallèles et les segments $[CG]$ et $[DF]$ ont même longueur.
Les côtés $[AD]$ et $[EF]$ ont même longueur (quadrilatères isométriques) et sont parallèles (rotation de 180°).	$DAEF$ est un parallélogramme. Les droites AE et DF sont parallèles et les segments $[AE]$ et $[DF]$ ont même longueur.

Conclusion

Le quadrilatère $ABCD$ est « relié » au quadrilatère $EHGF$ par des droites BH, AE, DF et CG qui sont parallèles et des segments $[BH]$, $[AE]$, $[DF]$ et $[CG]$ qui ont même longueur (ce sont les côtés non dessinés des parallélogrammes). On dit que le quadrilatère $EHGF$ est l'image du quadrilatère $ABCD$ par une translation.

Tabl. 3

L'étape suivante de cette activité consiste à observer ce qui se passe lorsque l'on ajoute un quatrième quadrilatère comme à la figure 68 à la page suivante. Un travail d'analyse analogue aux précédents fait apparaître un point central O, milieu des diagonales de parallélogrammes. C'est le centre de la symétrie qui applique le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $HIJG$.

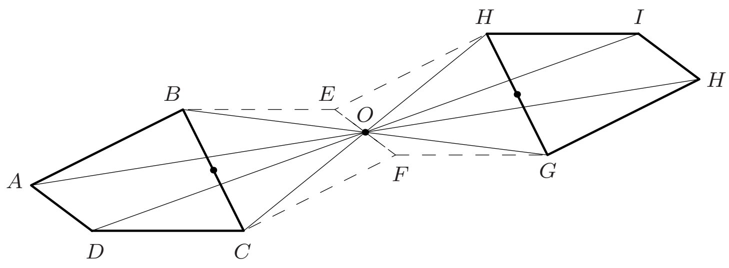


Fig. 68

Une synthèse analogue aux précédentes peut alors être établie avec les élèves.

On complète l'étude des trois transformations ainsi obtenues (symétrie orthogonale, symétrie centrale et translation) par les constructions aux instruments des images de points par symétrie centrale et translation. Ceci se fait à partir des configurations présentée dans les figures 66, 67 et 68.

12

Figures en mouvement

Notre contribution dans ce chapitre, consiste à mettre à la disposition des enseignants du début du secondaire une façon d'articuler situations-problèmes et construction théorique.

Les situations-problèmes sélectionnées sont destinées à des élèves de 11 à 13 ans. Elles s'enchaînent de manière à ce que les notions acquises dans l'une soient utiles pour travailler les suivantes. Chaque situation-problème se clôture par une synthèse qui met en évidence des formulations, des modes de pensée et des énoncés. Dans la pratique, elles sont écrites par les élèves sous la guidance du professeur, elles articulent les formulations, les figures-clefs et les raisonnements qui ont émergé dans la situation-problème. Elles diffèrent d'une classe à l'autre. Celles qui sont proposées ici donnent une idée de ce type de synthèse.

Les situations proposées inaugurent une approche argumentée de la géométrie : elles mettent en place des outils d'analyse pour une approche discursive des figures.

Il y a tout d'abord quelques mouvements qui introduisent le temps dans des configurations spatiales : une partie de figure est regardée avant une autre, on distingue un départ et une arrivée. La notion de figures superposables est structurée par ce qui apparaît comme une régularité visuelle.

Ensuite, par le biais de constructions aux instruments, d'autres outils d'analyse des figures sont mis en place : les tracés sont regardés à la lumière des mouvements qui les engendrent.

Une troisième série d'activités articule des propriétés des triangles et des quadrilatères à celles des mouvements. On voit ainsi se tisser, à partir d'objets apparemment hétérogènes, des réseaux de propriétés.

Les choix d'activités sont guidés par deux préoccupations :

1. *Montrer l'importance des transformations*. Les liens naturels qu'elles entretiennent avec la perception contribuent à en faire des outils de pensée efficaces, accessibles à des débutants. Il nous semble que les difficultés rencontrées parfois dans l'apprentissage des transformations et surtout dans leur usage pour démontrer sont dues à ce qu'on en donne des définitions trop générales et que l'on néglige les intuitions de mouvement.

2. *Montrer l'importance des constructions aux instruments.* L'enseignement par logiciels que nous préconisons par ailleurs ne peut se substituer entièrement à une appréhension de la géométrie par les mains. La réalisation de figures mobilise une coordination des mouvements du regard et des mains et requiert un va-et-vient entre les propriétés des instruments et celles des figures.

1 Papiers peints

Le professeur dispose pour chaque élève de papiers peints du type de ceux montrés par la figure 1 à la page suivante, dont quelques-uns ont le format de la figure 2 à la page 174. Il en distribue progressivement, selon l'avancement de chacun[1]. Le professeur dispose aussi de feuilles transparentes pour décalquer des motifs. Les consignes de travail suggérées ci-dessous sont données l'une après l'autre. Elles sont encadrées dans le texte, chacune fait l'objet de commentaires oraux avant que l'on passe à la suivant. À la faveur des comparaisons entre les diverses réalisations, des acquis antérieurs refont surface, des questions surgissent et un vocabulaire commun s'installe. La synthèse est une activité à part entière qui intervient tout à la fin.

L'objectif est de découvrir trois familles de transformations du plan : les translations, les rotations et les symétries orthogonales, dans un contexte où elles sont toutes trois présentes. On attend des élèves qu'à l'issue de ce travail, ils puissent distinguer chacune de ces transformations et indiquer les éléments qui la déterminent. Le contexte induit que ce qui se passe localement peut être étendu au plan tout entier. Mais cette extension n'est pas un but à ce stade, qui est celui d'une première initiation. Elle ne figure donc dans pas la synthèse.

Activité 1

Colorier différents papiers peints choisis parmi ceux de la figure 1 à la page suivante.

[1] Cette activité est inspirée par les travaux de Brigitte Sénéchal [1979], à laquelle nous avons emprunté les jolis papiers peints formés de gouttes.

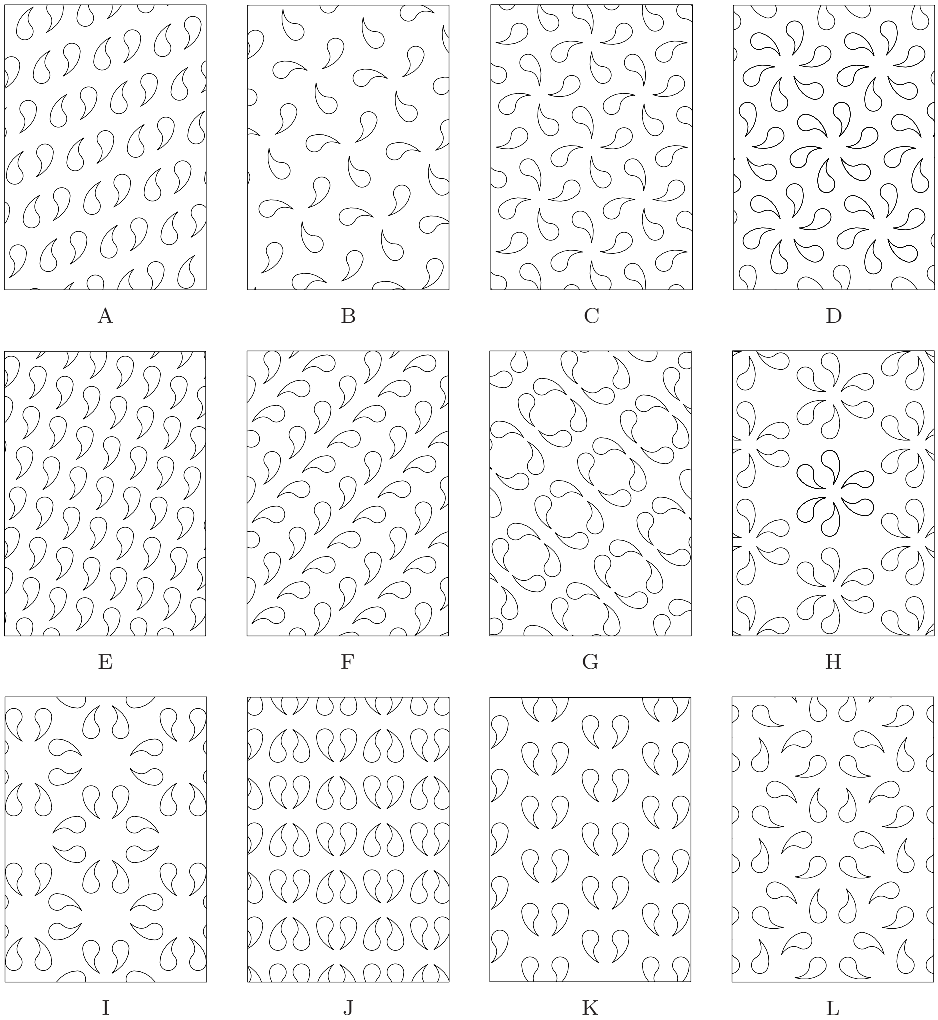


Fig. 1

Commentaires

Cette activité part de ces objets familiers que sont les papiers peints. Des questions analogues peuvent être posées à partir de frises ou de pavages du plan par exemple, d'extraits tirés de l'œuvre d'Escher. Nous fournissons un choix de papiers peints assez large afin de ménager la surprise : trois procédés suffisent pour expliquer comment sont conçus les papiers peints proposés ici. Il n'est pas nécessaire pour cela que tous les élèves travaillent tous les papiers peints. Le professeur peut répartir le travail et l'adapter aux différents rythmes des élèves.

Dans le coloriage libre, les choix spontanés font apparaître des régularités, des rythmes qui structurent chaque papier peint.

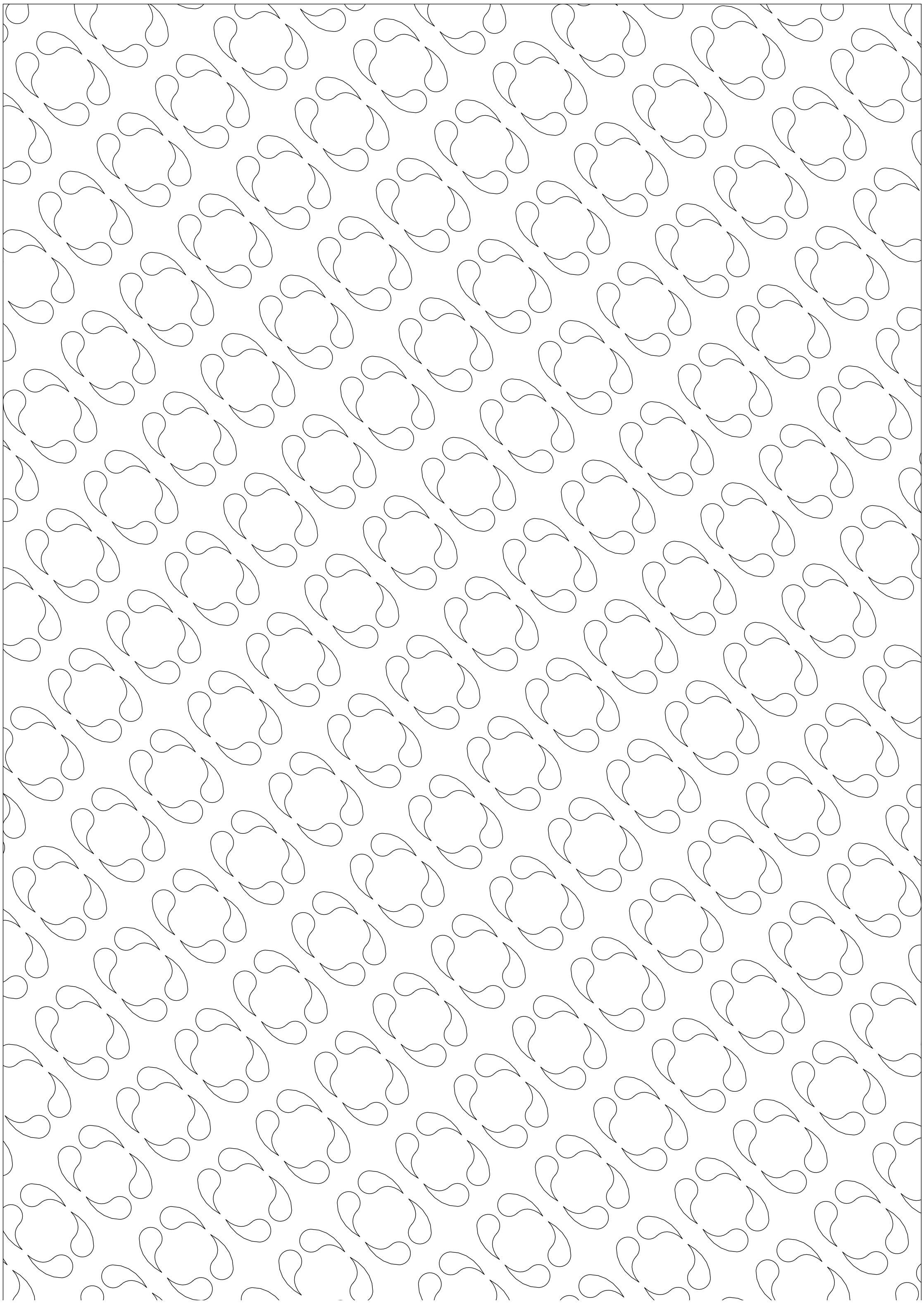


Fig. 2

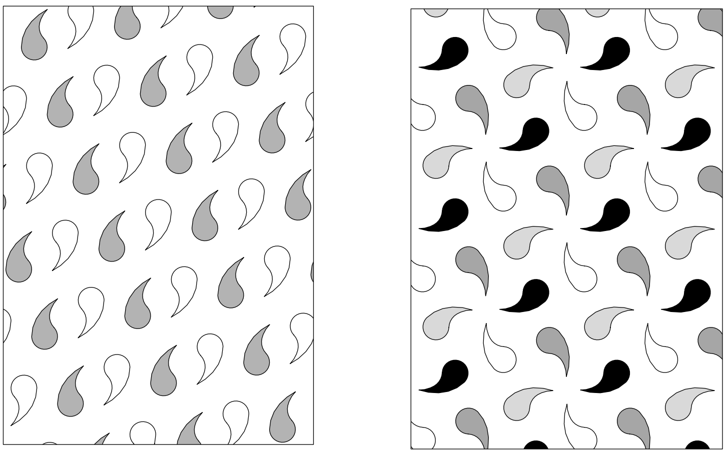
Cette première phase est fondamentale : les contrastes entre les régularités et les différences (à l'intérieur de chaque papier et d'un papier à l'autre) stimulent la recherche de rythmes visuels qui incitent à découvrir une règle de coloriage. L'explicitation de la règle est liée pour les rotations et les translations, au mouvement du regard qui va d'une goutte à l'autre : on dit que les gouttent glissent, qu'elles tournent d'un demi-tour. À propos des symétries orthogonales, les élèves reconnaissent ce qu'ils appellent *symétrie en miroir* ou *symétrie* tout court. C'est souvent la seule transformation apprise dans l'enseignement fondamental.

Une règle particulièrement significative consiste à colorier de même toutes les gouttes disposées de la même façon, ce qui correspond à un mouvement de glissement en ligne droite et introduit la notion de translation.

Activité 2

Colorier d'une même couleur toutes les gouttes qui sont images l'une de l'autre par une translation.

La seconde mise en couleur organise la vision des différents papiers peints : on compare le nombre de couleurs employées, la disposition des gouttes de couleurs différentes. On voit apparaître des alignements, des groupes de gouttes de couleurs différentes. Ces observations aident à déterminer la couleur des gouttes tronquées par le cadre. Regardons les papiers peints A, C (figure 3) et K.



A C

Fig. 3

Pour le papier peint A, deux couleurs sont nécessaires pour indiquer les gouttes images l'une de l'autre par translation. Deux gouttes (quelconques) de couleurs différentes sont image l'une de l'autre par une rotation d'un demi-tour (180°). Pour s'en rendre compte on décalque une goutte, par exemple une blanche, et on tourne le calque pour qu'elle vienne se superposer à une goutte grise. On peut préciser ce mouvement en cherchant avec une pointe de compas (ou une aiguille) le point autour duquel on doit tourner pour que le mouvement corresponde à un seul geste.

Quatre couleurs sont nécessaires pour le papier peint C. Il y a plusieurs façons de voir un groupe de quatre gouttes, toutes de couleurs différentes. La figure 4 en présente deux. Dans la première, la rotation d'un quart de tour est beaucoup plus facile à voir, car les quatre gouttes pointent vers le centre.

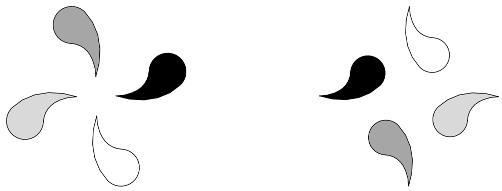


Fig. 4

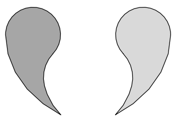


Fig. 5

Dans le papier peint K, chaque goutte ne peut être superposée à une goutte de couleur différente que si l'on retourne le calque (figure 5).

Activité 3

Pour les papiers peints A, B et E, repérer trois translations par des flèches.

La figure 6(a) à la page suivante montre trois translations parmi d'autres qui répondent à la question. Il arrive souvent que des élèves considèrent indûment des flèches situées à différents endroits comme des translations distinctes. C'est le cas de la figure 6(b). On voit ici l'intérêt de travailler sur une figure qui montre qu'un même mouvement de translation déplace « beaucoup » de motifs. C'est ce que montre la figure 6(c). Pour visualiser cela, on considère un papier peint et sa copie sur transparent. On pose la copie sur le papier peint, puis on la déplace : on voit ainsi que chaque translation qui envoie une goutte sur une autre, fait subir le même mouvement aux autres gouttes (pour peu qu'on imagine que le papier peint peut être prolongé, qu'on n'en voit qu'une « fenêtre »).

On introduit la représentation d'une translation par une flèche : la flèche a en effet les mêmes caractéristiques qu'une translation, elle a une direction, un sens et une longueur.

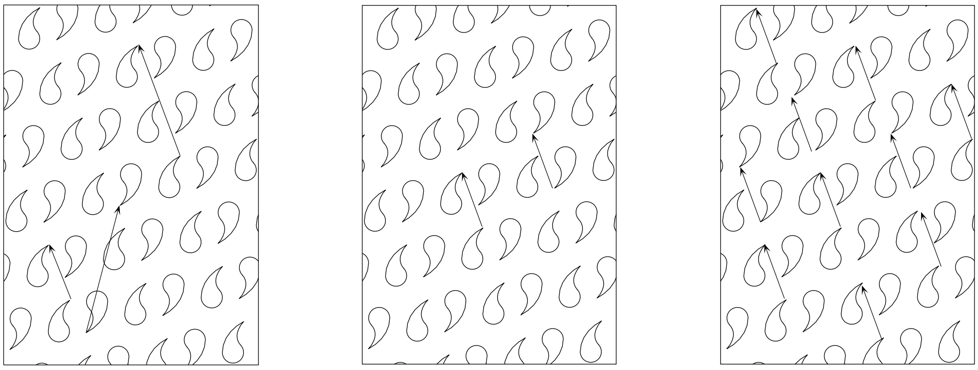


Fig. 6 (a,b,c)

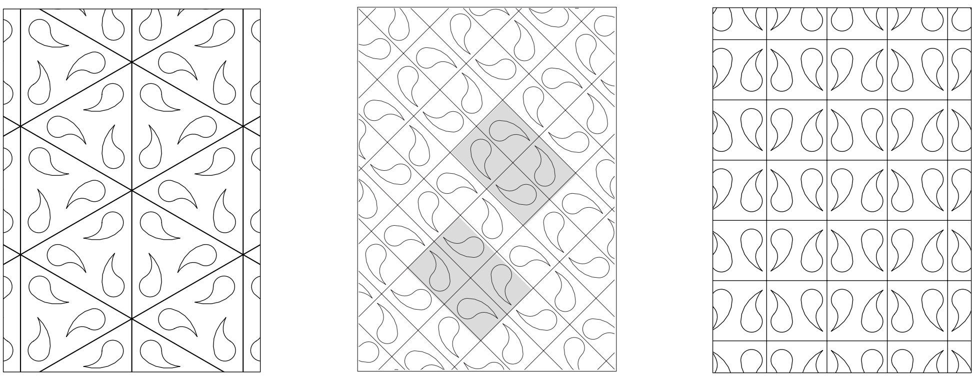
Activité 4

Pour les papiers peints F, G, H, I, J, K et L, repérer des symétries orthogonales qui envoient une goutte sur une autre.

En marquant le « pli » qui envoie une goutte sur l'autre, certains élèves, qui ne considèrent qu'une paire de gouttes à la fois, dessinent d'abord des axes très courts. D'autres procèdent par pliage, ce qui montre des axes traversant tout le papier peint. On peut observer sur un papier peint reproduit sur transparent que le pliage qui envoie une goutte sur une autre superpose toute autre goutte à une autre.

Le tracé d'un axe, pour être précis, conduit le plus souvent les élèves à déterminer deux paires de ses points suffisamment éloignés. Rares sont ceux qui utilisent spontanément le fait que l'axe est perpendiculaire au segment qui relie une paire de points. Ce fait sera examiné lors de la synthèse.

Les axes font apparaître des *bandes* ou des *boîtes*. Regardons par exemple les papiers peints de la figure 7.



L G J

Fig. 7

À l'intérieur des triangles du papier peint L, on a des rotations de 120° et 240°. Chaque *boîte* du papier peint G contient une seule goutte, mais on peut aussi voir des rectangles qui comportent quatre gouttes, images les unes des autres par des symétries orthogonales d'axes perpendiculaires et par une rotation de 180°. Pour le papier peint J, à l'intérieur de chaque *boîte* carrée, les deux gouttes sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°.

Activité 5

Sur les papiers peints A, C, D et K, repérer des rotations de 180° qui envoient une goutte sur une autre goutte.

Il importe de traiter cette rotation à part des autres, d'une part parce que, sur le plan de la perception, on la distingue parfois difficilement de la symétrie orthogonale (chacune à sa façon, est un mouvement de « volte-face ») et d'autre part parce qu'elle joue un rôle fondamental dans l'étude du parallélogramme. Ici aussi le mouvement de rotation du calque est éclairant. Eu égard à ce mouvement nous préférons la considérer comme une rotation particulière, plutôt que comme une symétrie centrale. La recherche d'un centre qui envoie une goutte sur une autre fera entrevoir que le même mouvement concerne d'autres gouttes et même le papier peint tout entier.

Activité 6

On colorie deux gouttes sur un papier peint. Décrire le mouvement qui permet d'envoyer une goutte sur l'autre.

Cette activité contribue à installer une image mentale pour chaque isométrie. La description demandée comporte la détermination de la flèche, de l'axe ou du centre.

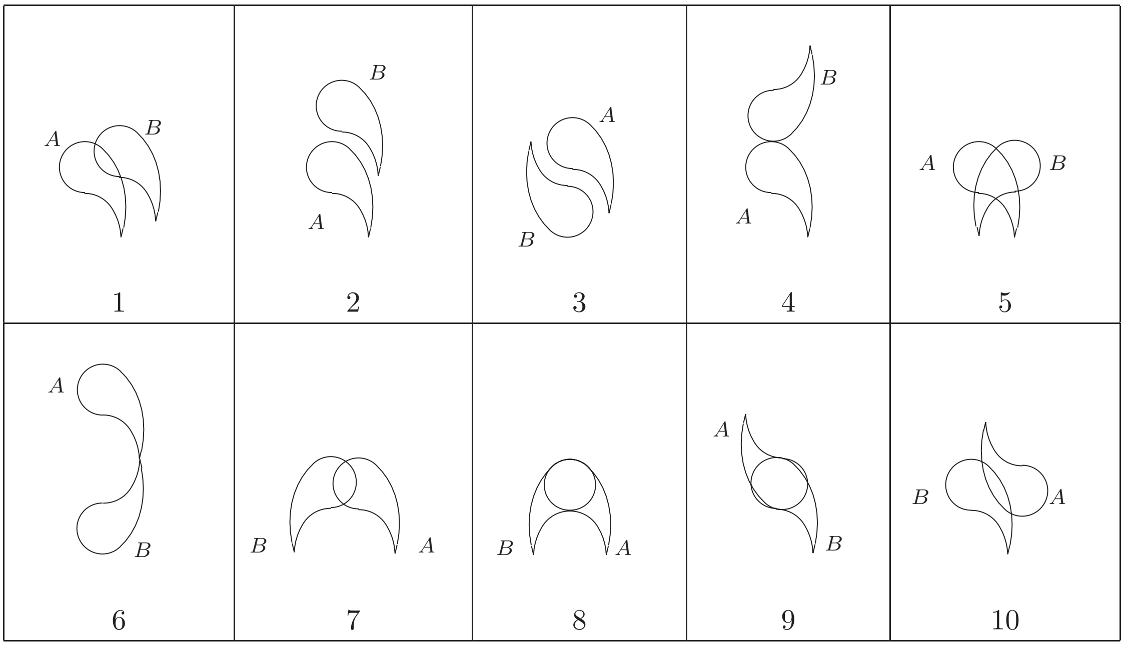
Pour repérer les centres de rotation autres que celles de 180°, il est avantageux d'utiliser du papier calque et de chercher le centre à vue à l'aide d'une pointe de compas. Ceci n'est pas nécessaire pour les papiers peints dans lesquels les centres sont à l'intersection des axes de symétrie (comme le papier G).

On peut déterminer les angles des autres rotations sans devoir mesurer : ce sont toujours des diviseurs entiers de 360°.

Lorsqu'on sélectionne deux gouttes quelconques et qu'on cherche comment envoyer l'une sur l'autre, on constate qu'on y arrive toujours par un des trois mouvements qu'on a identifiés, suivi (ou précédé) éventuellement d'une translation.

Exercice

1. Identifier, dans les figures ci-dessous, le mouvement qui envoie le motif A sur le motif B.



2. Selon le cas, tracer l'axe ou la flèche, ou encore repérer le centre.

En focalisant l'attention sur une seule paire de gouttes, cet exercice cerne l'essentiel des notions visées par les activités qui précèdent et apporte quelques compléments :

– distinguer une figure de départ et son image n'est pas nécessaire pour déterminer une symétrie orthogonale ou une rotation de 180°,
– envisager des figures qui se chevauchent.

Synthèse

En examinant les différents papiers peints, nous avons décrit comment un motif est envoyé sur un autre. Nous avons utilisé un calque pour observer les différents mouvements.

Translation

Dans une translation, le calque glisse en ligne droite.

1. *Une translation est déterminée par une flèche qui relie n'importe quel point de départ à son image.*

Toutes les flèches d'une même translation sont parallèles ; elles ont même sens et même longueur.

Il suffit de dessiner une seule flèche pour déterminer une translation.

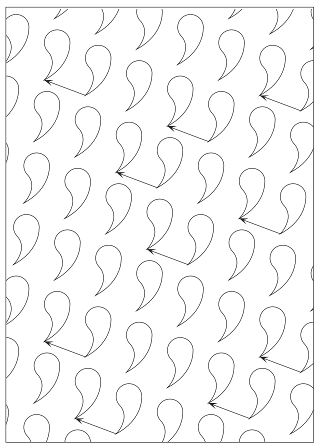


Fig. 8

Rotation de 180°

La figure 9 montre plusieurs segments qui relient chaque fois un point de départ et son image à l'arrivée pour une même rotation[2] de 180°.

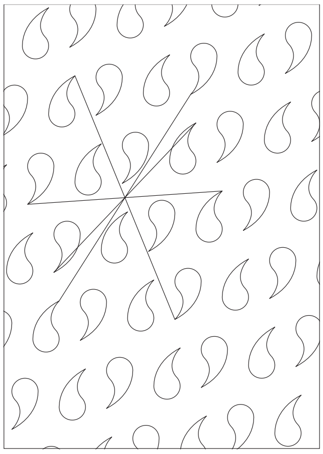


Fig. 9

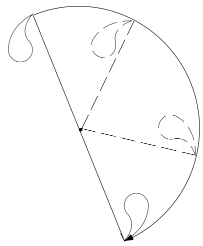


Fig. 10

La figure 10 détaille le mouvement pour un motif particulier.

Dans une rotation de 180°, le calque tourne autour d'un point.

Lorsqu'on relie un point quelconque du motif au centre, le segment tracé balaie la moitié d'un disque dans le plan de la feuille. À l'arrivée, il se trouve dans le prolongement de sa position de départ.

2. *Une rotation de 180° est déterminée par son centre.*

Pour trouver le centre, on peut relier un point de départ à son image. Le centre est au milieu de ce segment.

On peut aussi tracer deux segments qui relient chacun un point de départ à son image, le centre appartient aux deux segments. Il est déterminé à condition que les deux segments soient sécants.

Remarquons que si un point est sa propre image, alors il est le centre.

[2] Parmi les rotations rencontrées, celles de 180° et de 90° seront utilisées dans l'étude du parallélisme, de la perpendicularité et des propriétés des quadrilatères. Notre synthèse porte uniquement sur celle de 180°. Un synthèse analogue doit être faite pour les rotations de 90°.

Symétrie orthogonale

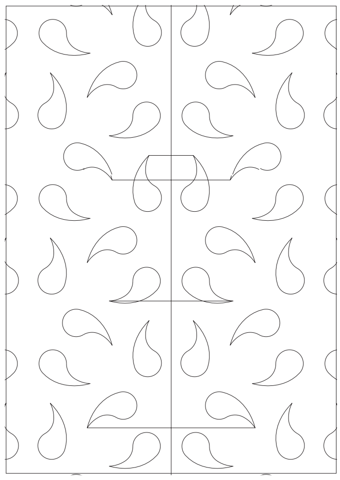


Fig. 11

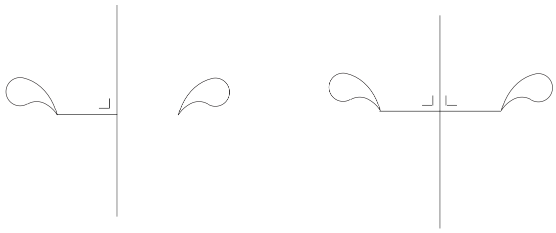


Fig. 12 (a,b)

La figure 11 montre plusieurs couples pour une même symétrie orthogonale.

Dans la figure 12(a), on a mené un segment issu d'un point du motif de départ, perpendiculaire à l'axe et s'arrêtant à celui-ci. La figure 12(b) montre cette perpendiculaire à l'arrivée après un mouvement autour de l'axe (comme celui d'une porte qui tourne autour de sa charnière).

Le segment tracé a balayé la moitié d'un disque dans l'espace. À l'arrivée, le segment est perpendiculaire à l'axe.

Pour superposer la figure de départ et la figure à l'arrivée par l'intermédiaire d'un transparent, il faut poser le calque sur l'autre face.

3. *Pour déterminer une symétrie orthogonale, on peut tracer son axe.*

Pour tracer l'axe, on peut relier un point de départ à son image et repérer le milieu de ce segment. L'axe est perpendiculaire à ce segment et passe par ce point milieu.

On peut aussi tracer deux segments qui relient chaque fois un point de départ à son image et repérer les milieux de ces segments. L'axe passe par ces deux milieux. Il est déterminé à condition que les milieux ne coïncident pas.

Remarquons que si un point est sa propre image, alors il appartient à l'axe.

2 Tracer des perpendiculaires et des parallèles

Activité 1

Les élèves disposent d'instruments de dessin et de feuilles qu'ils peuvent plier ou découper. On demande de tracer trois ou quatre perpendiculaires à une droite donnée, passant par des points donnés. Ces points sont tantôt sur la droite, tantôt en dehors. Il s'agit de découvrir et de décrire plusieurs procédés de construction différents. On demande la même chose pour des parallèles.

Commentaires

Ce qui fait problème ici, ce sont les procédés qui ne recourent pas à des mesures. Au cours de l'activité, les élèves sont invités à décrire oralement le procédé utilisé, de manière à ce qu'un autre élève puisse l'appliquer. On procède ensuite à une rédaction écrite collective. On met en évidence, pour l'un ou l'autre procédé, les mouvements et les propriétés sous-jacents .

Nous commentons ci-après ce que peuvent apporter des constructions par pliage et des constructions avec équerre et règle non graduée.

On plie la feuille le long de la droite donnée. On choisit le point par lequel la perpendiculaire doit passer ; on replie de manière à ce que ce premier pli se superpose à lui-même. On ouvre et obtient deux plis perpendiculaires (figure 13).

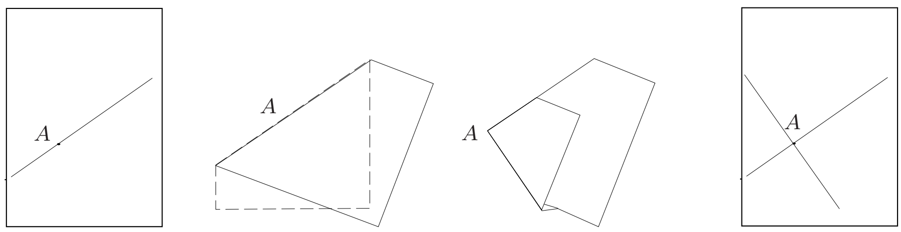


Fig. 13

Si on plie à nouveau de la même façon, de manière à ce que le pli passe par autre point donné, on détermine une seconde perpendiculaire à la droite donnée.

Lorsqu'on place l'équerre de façon à ce qu'un côté qui borde l'angle droit glisse le long de la droite donnée (figure 14), chaque fois que l'autre côté de l'angle droit rencontre un point donné, on peut tracer une perpendiculaire. L'équerre fait un mouvement de translation et toutes les perpendiculaires à la droite donnée sont parallèles entre elles.

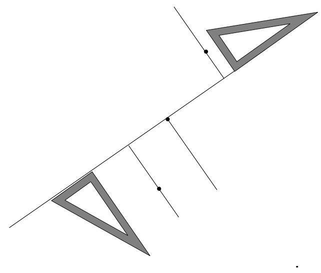
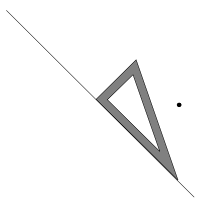
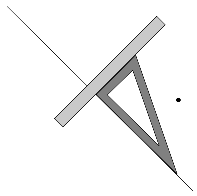
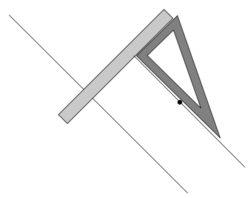


Fig. 14

Pour construire des parallèles sans procéder à aucune mesure, les élèves passent le plus souvent par la construction de deux perpendiculaires. Le procédé de glissement de l'équerre le long de la règle n'arrive pas spontanément. Il est nécessaire de l'introduire. La coordination des actions pour positionner la règle et l'équerre est difficile à acquérir. Nous pensons cependant que cette conquête contribue de manière substantielle à saisir les relations entre droites, points et mouvement de translation. Ce procédé est efficace lorsqu'on est amené à construire plusieurs parallèles, comme par exemple dans les dessins en perspective parallèle.

Lorsque la manœuvre est bien maîtrisée, le professeur distribue une suite de figures montrant certaines étapes de la construction. Les élèves rédigent les légendes. Quelques textes sont reproduits au tableau, ils sont corrigés et remaniés. Dans l'exemple ci-dessous, le commentaire met en évidence le mouvement de translation.

Pour tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné :

		
On place l'équerre contre la droite. Un de côtés de l'équerre doit longer la droite.	On place une règle le long d'un autre côté de l'équerre.	On maintient la règle dans cette position et on glisse l'équerre le long de la règle. On arrête ce mouvement de translation lorsque le côté de l'équerre qui longeait la droite passe par le point donné.

La figure 15 à la page suivante montre une autre façon de placer l'équerre et fait voir le mouvement de translation le long de la droite donnée.

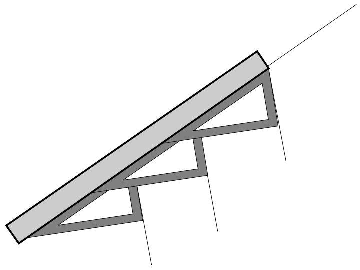


Fig. 15

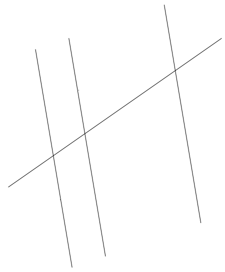


Fig. 16

Les tracés aux instruments ne montrent que les demi-droites situées d'un même côté de la droite donnée, il faut donc les prolonger (figure 16). Apparaît ainsi une figure clef : un faisceau de parallèles coupées par une sécante. La figure 17 montre qu'on peut placer le même « coin » de l'équerre de l'autre côté de la droite donnée. Elle montre aussi la rotation de 180° qui permet de passer d'une position à l'autre. Ce phénomène sera expliqué lors de la synthèse.

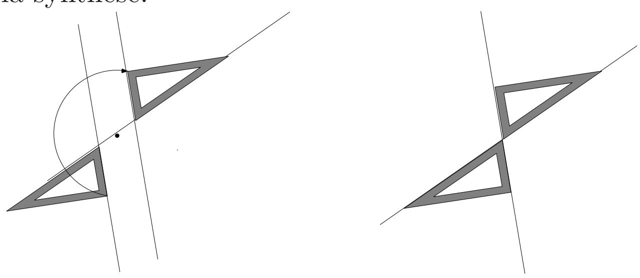


Fig. 17

Synthèse

Perpendiculaires et parallèles

4. *Quand on a un point et une droite, on peut toujours construire une perpendiculaire à la droite de façon à ce que cette perpendiculaire passe par le point. On ne peut en construire qu'une.*

5. *Quand on a un point et une droite, on peut toujours construire une parallèle à cette droite de façon à ce que la parallèle passe par le point. On ne peut en construire qu'une.*

6. *Une droite est déterminée quand on connaît deux de ses points.*

7. *Une droite est déterminée quand on connaît un de ses points et sa direction.*

8. *Quand des droites sont perpendiculaires à une même autre droite, on est sûr que ces droites sont parallèles entre elles.*

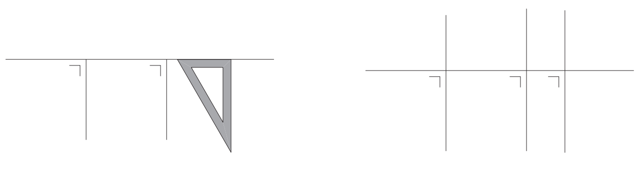


Fig. 18

9. *Quand des droites sont parallèles, elles forment avec une sécante non perpendiculaire des angles aigus de même amplitude (de même pour les angles obtus).*

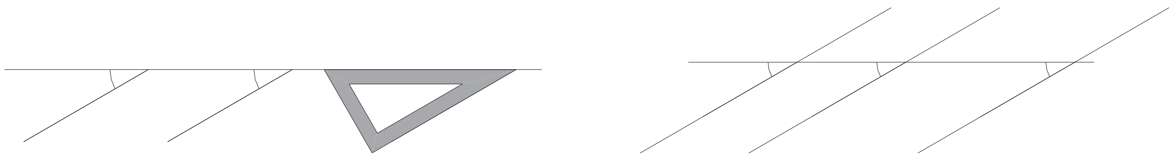


Fig. 19

10. *Quand des droites sont parallèles et qu'on trace une perpendiculaire à l'une, elle est perpendiculaire aux autres.*

Translation et droites parallèles

11. *Dans une translation, une droite à l'arrivée est parallèle à la droite de départ*

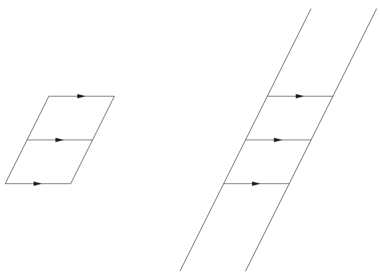


Fig. 20

12. *Quand deux droites sont parallèles, on peut déterminer beaucoup de translations qui envoient une droite sur l'autre.*

Fig. 21

Plus tard, lorsque les élèves auront été amenés à engager ces énoncés dans des raisonnements, on peut reformuler les énoncés pour les rendre d'emblée disponibles pour un raisonnement déductif. Cette initiation peut se faire sous la forme d'un tableau à compléter.

Si on sait que	**on peut conclure que**
une droite est image d'une autre par une translation,	ces droites sont parallèles ;
des droites sont parallèles,	une droite est image de l'autre par une translation ;
des droites sont parallèles,	elles forment avec une sécante non perpendiculaire des angles aigus de même amplitude ; idem pour des angles obtus ;
des droites sont perpendiculaires à une même troisième,	ces droites sont parallèles.

Rotation de 180° et droites parallèles

Le mouvement des aiguilles d'une horloge donne une bonne image des rotations. La rotation de 180°, par exemple, correspond au mouvement de l'aiguille des minutes pendant une demi-heure. Après la demi-heure, cette aiguille vient se placer dans le prolongement de sa position de départ.

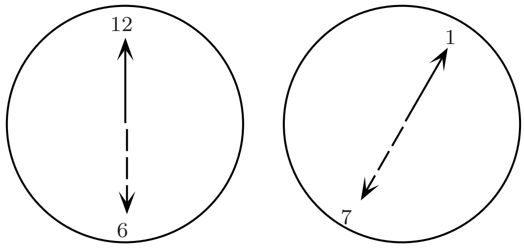


Fig. 22

Si on colle une droite à la flèche pour qu'elle suive le même mouvement, on voit qu'après une demi-heure, la direction à l'arrivée est la même que la direction au départ.

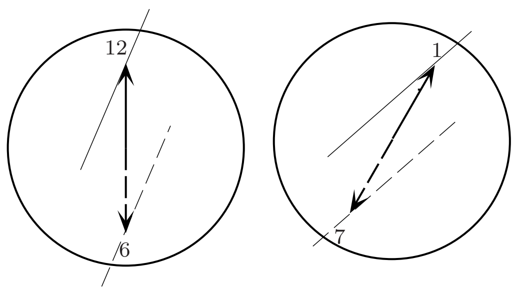


Fig. 23

13. *Lorsqu'une droite tourne de 180° autour d'un de ses points, elle vient se superposer à elle-même.*

14. *Lorsqu'une droite tourne de 180° autour d'un point extérieur, la droite à l'arrivée est parallèle à celle de départ.*

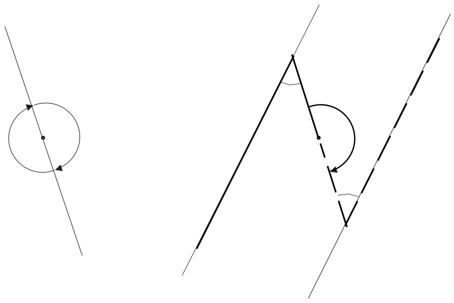


Fig. 24

Plus tard ces énoncés peuvent être reformulés de manière à ce qu'ils soient d'emblée disponibles pour l'argumentation.

Si on sait que	**on peut conclure que**
deux droites sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°,	ces droites sont parallèles ;
deux droites sont parallèles,	ces droites sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°.

Exercice

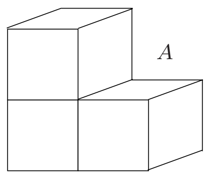


Fig. 25

On donne à chaque élève des cubes attachables (au moins quatre) et un dessin en perspective cavalière d'un assemblage de trois cubes identiques (module A). Il s'agit de fabriquer des modules composés de quatre cubes. Tous les modules doivent être différents (il y en a six). Compléter les dessins ci-dessous chaque fois qu'un nouveau module est découvert.

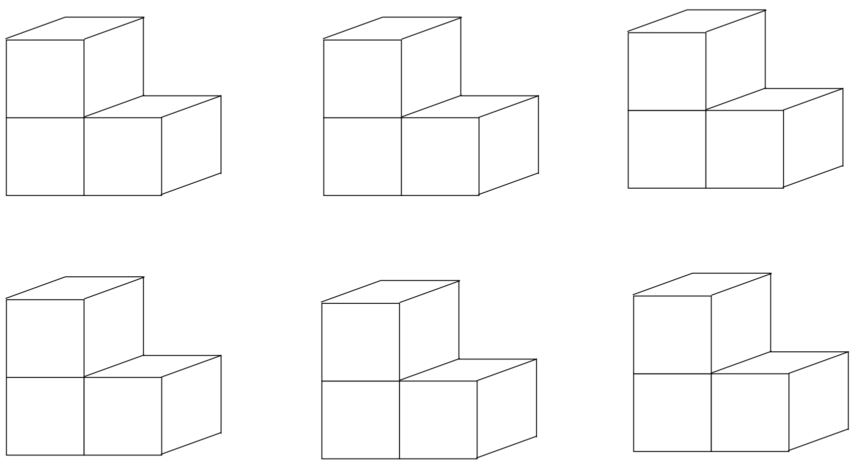


Fig. 26

Commentaires

Cet exercice de dessin vise à exercer le tracé de parallèles dans un contexte où l'usage de la règle et de l'équerre permet de construire rapidement plusieurs arêtes parallèles. Il peut être exécuté sans qu'aucune propriété de la perspective parallèle ait été donnée au préalable.

Un premier travail à main levée est souvent nécessaire pour imaginer les étapes des tracés aux instruments.

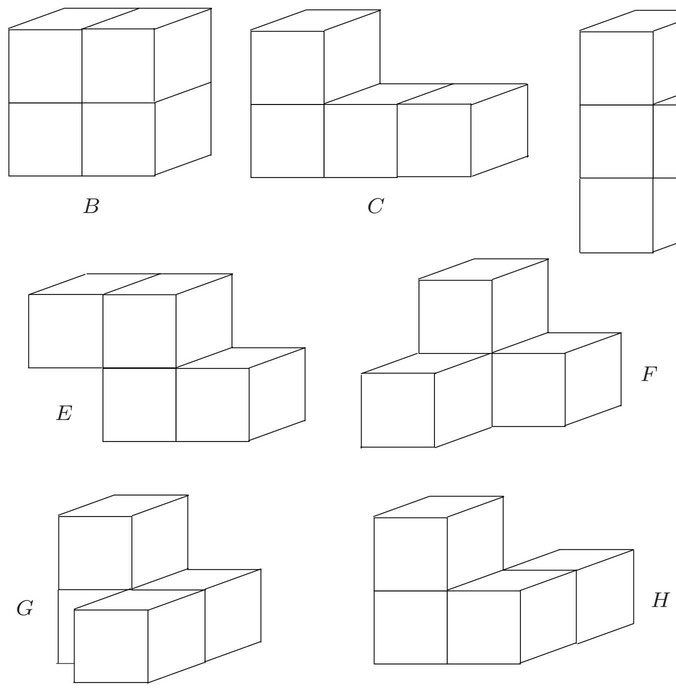


Fig. 27

Il arrive souvent dans les classes que sept assemblages apparaissent comme distincts. Ils sont montrés à la figure 27.

Il est intéressant alors de placer les solides G et H *en miroir* pour faire voir qu'ils sont symétriques.

Signalons que les sept solides A (voir figure 25 à la page précédente), B, C, D, E, F et G peuvent être assemblés pour former un cube. On peut aussi former un cube en assemblant les solides A, C, D, E, F, G et H.

3 Assembler des triangles quelconques

Les élèves disposent de deux triangles quelconques. Ils sont découpés dans du papier fort.

Il est nécessaire pour y voir clair de discerner les deux faces d'un même triangle en les coloriant de couleurs différentes. Deux triangles posés sur des faces d'une même couleur sont superposables par déplacement, deux triangles posés sur des faces de couleurs différentes sont superposables par retournement.

Activité 1

Combien[3] de quadrilatères distincts peut-on former en accolant deux triangles quelconques superposables ?

Commentaires

Les élèves gardent une trace des quadrilatères obtenus en contournant au fur et à mesure les figures déposées sur les cahiers.

Pour obtenir un quadrilatère convexe avec des triangles qui ne comportent pas d'angles droits, il faut accoler des côtés de même longueur.

Lorsqu'on utilise deux triangles à l'endroit, on obtient trois parallélogrammes différents : ils ne sont pas superposables ; d'un parallélogramme à l'autre, on repère facilement des côtés et des angles qui n'ont pas même mesure (figure 28).

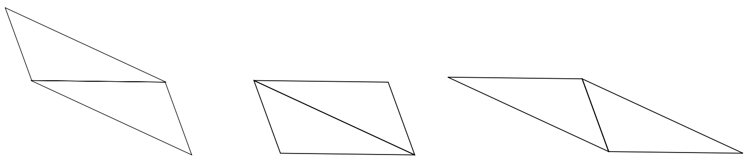


Fig. 28

Lorsqu'on utilise deux triangles à l'envers, on obtient aussi trois parallélogrammes. Chacun d'eux est superposable par retournement à l'un des trois précédents. On s'en assure soit en reportant un quadrilatère sur l'autre, soit en comparant les mesures d'angles et de côtés des différents quadrilatères et en vérifiant qu'ils sont agencés de la même façon.

On convient d'appeler *cerfs-volants*, les quadrilatères que l'on obtient lorsqu'on utilise un triangle à l'endroit et un triangle à l'envers.

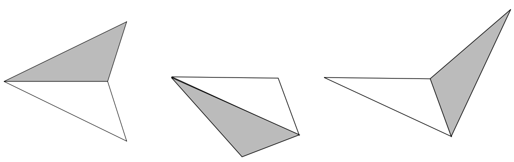


Fig. 29

On conclut donc que lorsqu'on assemble deux triangles quelconques superposables le long d'un de leur coté, on peut former

[3] Ces activités d'assemblage sont assez proches de celles que nous avons proposées dans F. Van Dieren-Thomas *et al.* [1993], toutefois, le rôle des mouvements est ici plus explicite et les synthèses sont plus développées.

six quadrilatères distincts (à savoir, qui ne sont superposables ni par déplacement, ni par retournement).

Cette activité de dénombrement ouvre une question : comment se fait-il que tous les assemblages par déplacement aboutissent à des parallélogrammes ? On y répond en regardant la rotation de 180° suivante : un triangle est posé sur un autre, il vient ensuite se placer contre celui-ci (figure 30).

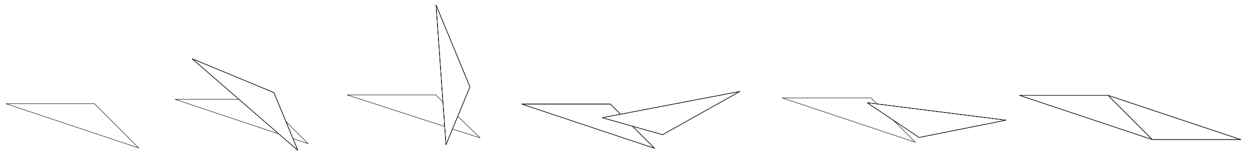


Fig. 30

Ce mouvement évoque celui qui lie rotation de 180° et parallélisme (figure 31).

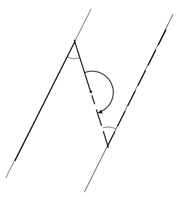


Fig. 31

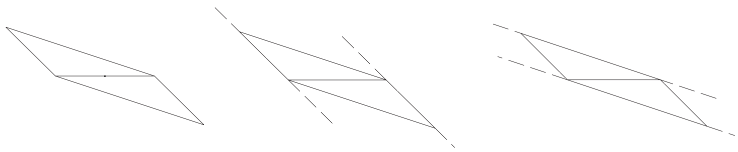


Fig. 32 (a,b,c)

Ce rapprochement constitue l'essence de la démonstration[4] que voici (voir figure 32) :

(*a*) Le quadrilatère est formé de deux triangles superposables par rotation de 180°.

(*b*) On prolonge un côté du parallélogramme pour faire apparaître une droite qui tourne de 180° autour d'un point extérieur ; la droite à l'arrivée est parallèle à celle de départ (énoncé 14 à la page 186).

(*c*) On fait le même raisonnement pour l'autre paire de côtés.

Synthèse

Parallélogramme et rotation de 180°

15. *Lorsque deux polygones sont superposables, les côtés correspondants ont même longueur et les angles correspondants ont même amplitude.*

-

[4] Cette démonstration ne sera faite que si l'on estime que les élèves ont saisi la portée de la question. Il n'est en effet pas facile de s'interroger sur l'existence d'une figure que l'on a sous les yeux. Même dans ce cas, la démonstration sera faite oralement, gestes à l'appui. Elle ne doit pas être mémorisée.

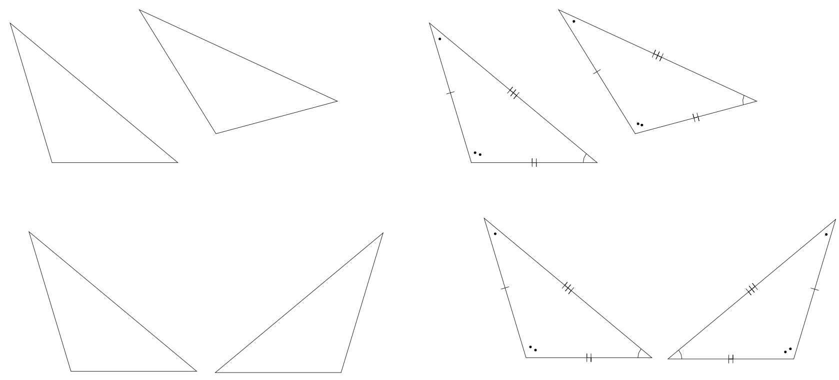


Fig. 33

16. *Le parallélogramme a ses côtés opposés parallèles.*

17. *Lorsqu'un quadrilatère est formé de deux triangles superposables et que l'un peut être envoyé sur l'autre par une rotation de 180°, le quadrilatère obtenu est un parallélogramme.*

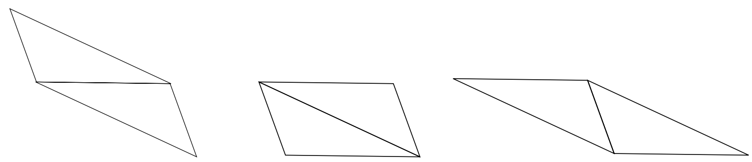


Fig. 34

Activité 2

Assembler deux triangles pour former un parallélogramme et coder les éléments qui ont même mesure. Compléter la figure pour établir une liste des propriétés du parallélogramme.

Commentaires

Les propriétés du parallélogramme sont connues. Les rattacher à une figure clef et à des mouvements de rotation et de translation leur donne une intelligibilité et une cohérence nouvelles.

Le codage des éléments qui sont superposables par une rotation de 180° fait apparaître les propriétés des côtés et des angles du parallélogramme qui sont liées à cette rotation.

Pour relier les propriétés des diagonales et des médianes à celles des mouvements de rotation ou de translation, il faut ajouter quelques éléments à la figure.

Figures et propriétés correspondantes sont présentées dans la synthèse.

Synthèse

Côtés et angles du parallélogramme

Le parallélogramme étant formé de deux triangles superposables par rotation de 180°, il a les propriétés suivantes :

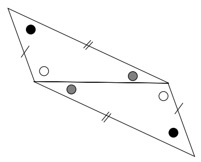


Fig. 35

18. *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.*

19. *Le parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.*

20. *Le parallélogramme a ses angles opposés de même amplitude.*

Diagonales du parallélogramme

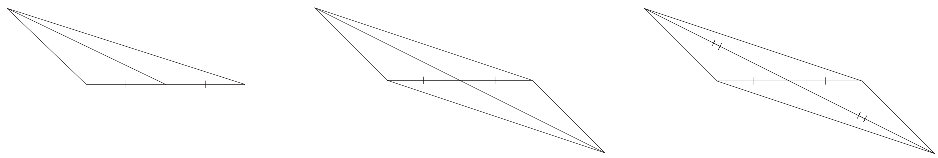


Fig. 36 (a,b,c)

(a) Sur chacun des deux triangles identiques avec lesquels on va former des parallélogrammes, on trace le segment qui joint un sommet au centre de rotation. On superpose les deux triangles.

(b) On fait tourner un des deux triangle de 180° autour du centre. Le segment de départ et son image sont alignés (énoncé 13 à la page 186).

(c) On code les éléments superposables.

On conclut :

21. *Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.*

Médianes du parallélogramme

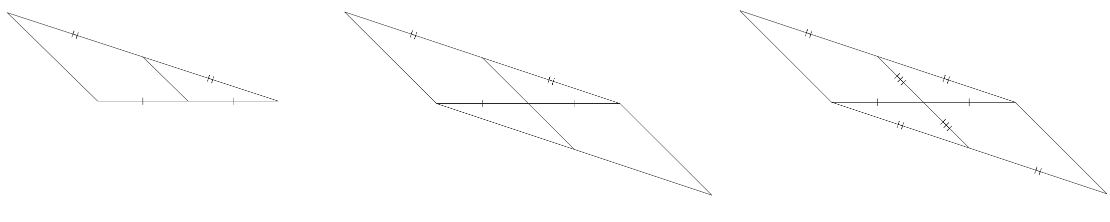


Fig. 37 (a,b,c)

(a) On joint le milieu d'un côté au centre de rotation pour les deux triangles que l'on commence par superposer.

(b) On fait tourner un des deux triangles de 180° autour du centre. Le segment de départ et son image sont alignés (énoncé 13).

(c) On code les éléments superposables.

On fait de même pour l'autre médiane. On conclut :

22. *Dans un parallélogramme, les médianes et les diagonales se coupent en un même point.*

23. *Les médianes se coupent en leur milieu.*

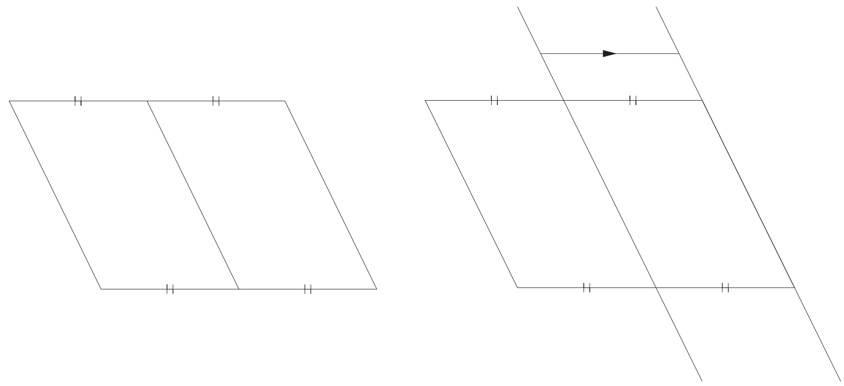


Fig. 38 (a,b)

(a) On trace une médiane du parallélogramme et on code les segments de même longueur.

(b) La médiane peut glisser le long d'un côté du parallélogramme et arriver sur un autre côté.

On fait de même pour l'autre médiane. On conclut avec l'énoncé 24 :

24. *Chaque médiane est parallèle à deux côtés du parallélogramme.*

Égalités de longueurs et relations de parallélisme conduisent à la figure39 qui montre que les quatre parallélogrammes formés par les médianes sont superposables.

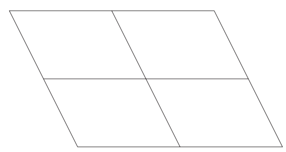


Fig. 39

Activité 3

Coder, dans le cerf-volant, les segments et les angles qui ont même mesure.

Commentaires

Le cerf-volant est utile en géométrie en raison surtout de sa symétrie orthogonale. C'est pourquoi la symétrie orthogonale intervient dans la définition que nous proposons. Comme pour le triangle isocèle, cette symétrie permet de voir toutes les propriétés d'un seul coup.

Synthèse

Cerf-volant et symétrie orthogonale

On peut toujours décomposer un cerf-volant en deux triangles de sorte qu'on passe d'un triangle à l'autre en le retournant autour du côté commun pris comme charnière. Dans ce mouvement, un triangle sort du plan pour venir s'appliquer sur l'autre.

25. *Le cerf-volant est formé de deux triangles superposables, images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale dont l'axe est le côté commun.*

Le travail de codage conduit aux propriétés du cerf-volant que l'on rapproche de celles de la symétrie orthogonale.

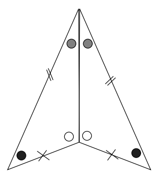


Fig. 40

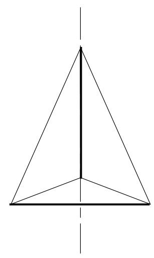


Fig. 41

Les figures 40 et 41 montrent que :

26. *Une diagonale du cerf-volant est l'axe de symétrie qui envoie un triangle sur l'autre.*

Cette diagonale est bissectrice des angles qu'elle partage.

Les côtés situés de part et d'autre de l'axe ont même longueur.

27. *Dans un cerf-volant, les diagonales sont perpendiculaires.*

La figure 41 illustre cette propriété : les sommets qui n'appartiennent pas à l'axe sont images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale, le segment qui les relie est perpendiculaire à l'axe.

4 Assembler des triangles rectangles

Cette activité se déroule selon un schéma analogue aux deux précédentes. Elles peut être travaillée de manière plus autonome par les élèves, soit dans des travaux d'équipes, soit dans des travaux personnels.

Activité 1

Combien de quadrilatères distincts peut-on former en assemblant deux triangles rectangles superposables ?

Commentaires

La figure 42 montre les figures que l'on obtient en s'organisant comme pour les triangles quelconques : les trois premières par rotation de 180° autour du milieu d'un côté, les trois suivantes par symétrie orthogonale autour d'un des côtés.

Lorsqu'on accole deux côtés qui bordent l'angle droit, les autres côtés d'angles droits s'alignent.

On obtient donc de nouvelles figures : deux triangles et même, lorsqu'on songe à accoler deux côtés de longueurs inégales, un quadrilatère non convexe.

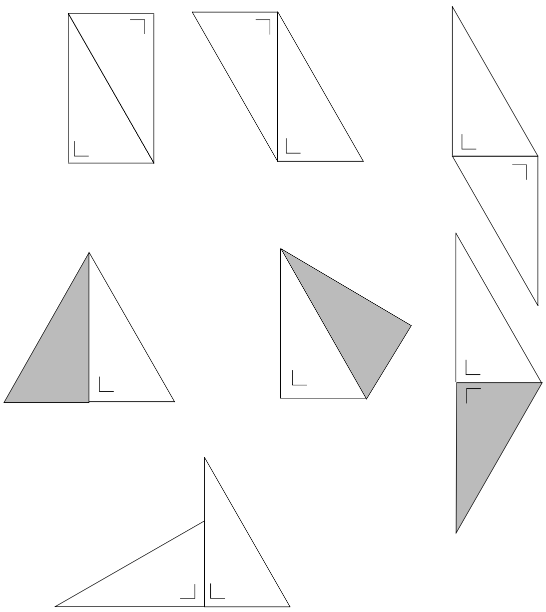


Fig. 42

Les triangles obtenus sont isocèles, on les reconnaît à leurs côtés et à leurs angles de même mesure.

Parmi les quadrilatères on trouve un rectangle. Comment expliquer qu'au départ, d'un seul angle droit, celui du triangle, on obtient les quatre angles droits du rectangle[5] ? Le mouvement de rotation montré par la figure 43 explique l'apparition du second angle droit.

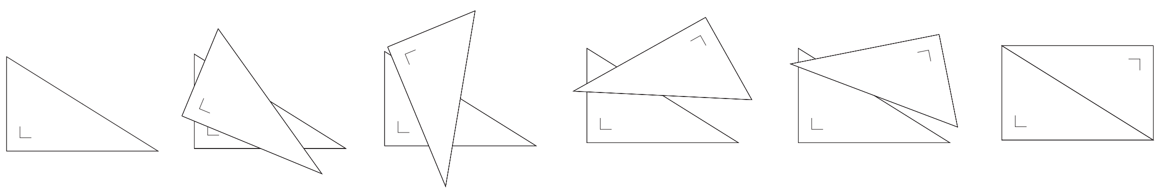


Fig. 43

[5] La note 4 à la page 190 indique comment envisager cette démonstration dans les classes.

La figure 44 montre une première translation de l'équerre qui envoie un côté du parallélogramme sur l'autre, et en dessous une seconde translation analogue. Dans chaque mouvement, l'angle droit est conservé. On explique ainsi la présence des deux autres angles droits.

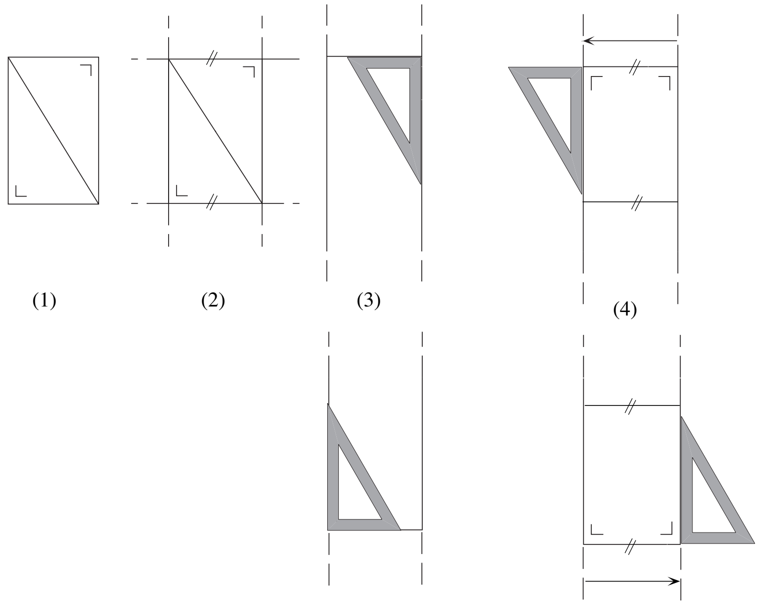


Fig. 44

Les activités qui suivent regroupent par thèmes les questions qui viennent lors des assemblages. Dans les classes, elles ne se présentent pas dans le même ordre et ne sont pas nécessairement traitées de manière aussi exhaustive. Les questions posées préparent directement les synthèses qui figurent en fin de section.

Activité 2

Vrai ou faux ?

- Dans un triangle rectangle, il n'y a jamais d'angle obtus.
- Dans n'importe quel triangle rectangle, les angles aigus ont même amplitude.
- Dans tous les triangles rectangles, la somme des amplitudes des angles est la même.
- Dans tous les triangles, la somme des amplitudes des angles est la même.

Commentaires

Ces questions ménagent des surprises :

– elles conduisent à évaluer une somme d'angles sans qu'on connaissen pour autant l'amplitude de chacun,
– elles concernent des angles intérieurs mais les configurations qui les éclairent conduisent le regard à l'extérieur de la figure.

Les activités qui précèdent ont familiarisé avec cette idée que certaines propriétés peuvent être expliquées en juxtaposant des figures superposables.

Ainsi on peut découvrir, en assemblant deux triangles rectangles superposables, que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires,(figure 45 à la page suivante dans la synthèse).

Ou encore, en assemblant trois triangles quelconques superposables, que la somme des angles de n'importe quel triangle vaut 180° (figure 47 à la page 199) dans la synthèse.

Activité 3

Comparer les propriétés des médianes et des diagonales du rectangle avec celles du parallélogramme.

Commentaires

Les propriétés des médianes et des diagonales du rectangle sont celles du parallélogramme, puisque le rectangle est formé de triangles superposables par rotation de 180°.

Les propriétés spécifiques du rectangle apparaissent en examinant les effets sur l'angle droit de départ, de la rotation de 180°, puis d'une translation, .

Activité 4

Examiner les propriétés du triangle isocèle. Établir les énoncés correspondants.

Commentaires

Voir le triangle isocèle comme une façon d'assembler des triangles rectangles permet de saisir ses propriétés d'un seul coup. les propriétés de la symétrie orthogonale et celles du triangle isocèle se construisent ensemble autour d'une même figure. Les énoncés qui transposent cette analyse sont rassemblées dans la synthèse.

Synthèse

Du triangle rectangle au rectangle

28. *N'importe quel rectangle est décomposé par chacune de ses diagonales en deux triangles rectangles superposables.*

29. *Lorsqu'un quadrilatère est formé de deux triangles rectangles superposables et que l'un peut être envoyé sur l'autre par rotation de 180°, on obtient un rectangle*

30. *Si on sait qu'un parallélogramme a un angle droit, alors on peut dire que c'est un rectangle.*

Angles d'un triangle rectangle

31. *Les angles aigus d'un triangle rectangle forment un angle droit. On dit que ces angles sont complémentaires.*

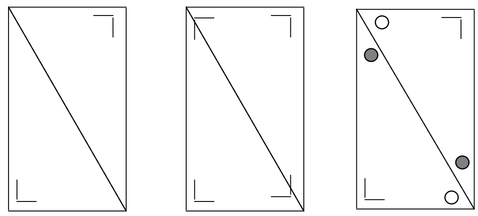


Fig. 45 (a,b,c)

(a) On part d'un rectangle formé de deux triangles rectangles superposables par une rotation de 180°.

(b) On indique tous les angles droits.

(c) On repère les angles superposables par rotation de 180°.
À deux endroits, il apparaît qu'un angle droit est formé par deux angles du triangle rectangle de départ : les angles aigus sont donc complémentaires et on ne verra jamais d'angle obtus dans un triangle rectangle !

Somme des amplitudes des angles d'un triangle

32. *La somme des amplitudes des angles d'un triangle vaut 180°.*

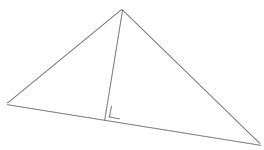


Fig. 46

Soit un triangle quelconque (figure 46). On peut toujours y tracer une hauteur intérieure : deux triangles rectangles apparaissent. En tout pour les deux triangles on a une somme de 360°. Il faut enlever les 180° qui ne correspondent pas aux angles du triangle de départ.

On trouvera donc toujours 180° pour somme des amplitudes des angles d'un triangle.

On peut aussi expliquer cette propriété en assemblant trois copies d'un même triangle.

-

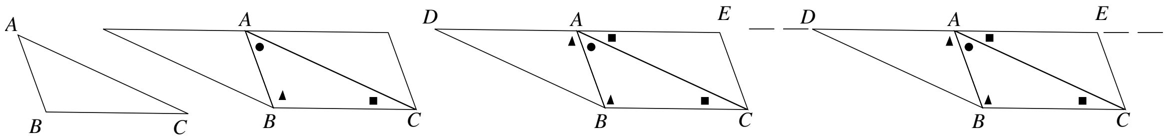


Fig. 47 (a,b,c,d)

(a) et *(b)* On dépose le triangle ABC sur la table et on place deux copies de ce triangle de manière à ce que chacune d'elles soit l'image du triangle ABC par une rotation de 180° autour du milieu d'un de ses côtés.

(c) On code les angles superposables.

(d) On se convainc que les côtés $[AD]$ et $[AE]$ sont placés dans le prolongement l'un de l'autre : on sait que chacun de ces côtés est parallèle à $[BC]$, on sait aussi qu'on ne peut construire qu'une seule parallèle à une droite donnée qui passe par un point donné. Les deux côtés sont donc sur une même droite.

Propriétés des diagonales et des médianes du rectangle

33. *Les médianes et les diagonales du rectangle ont aussi les propriétés des médianes et des diagonales du parallélogramme.*

En outre elles ont les propriétés suivantes (voir figure 48) :

34. *Les médianes du rectangle sont perpendiculaires entre elles.*

35. *Les diagonales du rectangle ont même longueur.*

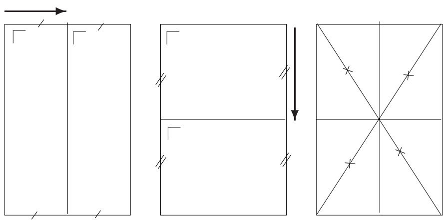


Fig. 48 (a,b,c)

Les deux translations qui, dans un parallélogramme, envoyaient chaque médiane sur un côté, sont ici perpendiculaires.

Chaque médiane est donc perpendiculaire à deux côtés en leurs milieux. Chacune est un axe de symétrie du rectangle.

Le codage qui s'ensuit montre que les diagonales du rectangle ont même longueur.

Du triangle rectangle au triangle isocèle

36. *Un angle droit est un demi angle plat (les deux parties se superposent par symétrie orthogonale).*

37. *Lorsqu'un triangle est formé de deux triangles rectangles superposables et que l'un peut être envoyé sur l'autre par symétrie orthogonale, on obtient un triangle isocèle.*

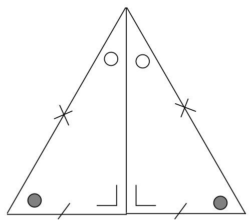


Fig. 49

38. *N'importe quel triangle isocèle peut être décomposé en deux triangles rectangles superposables.*

Propriétés des côtés et des angles du triangle isocèle

39. *Dans un triangle isocèle, deux côtés ont même longueur.*

40. *Dans un triangle isocèle deux angles ont même amplitude.*

Propriétés de la hauteur relative à la base d'un triangle isocèle

41. *Dans un triangle isocèle, la hauteur principale partage le triangle en deux triangles rectangles superposables.*

42. *Dans un triangle isocèle, la hauteur principale partage la base en deux segments de même longueur.*

43. *Dans un triangle isocèle, la hauteur principale partage l'angle qu'elle coupe en deux angles de même amplitude.*

5 Assembler des triangles isocèles

Activité

Combien de quadrilatères distincts peut-on former en juxtaposant deux triangles isocèles superposables ?

Commentaires et synthèse

La figure 50 montre les six façons d'assembler les triangles. Parmi les quadrilatères obtenus, il n'y en a que trois distincts : un parallélogramme, un cerf-volant et un losange que l'on reconnaît à ses côtés de même longueur.

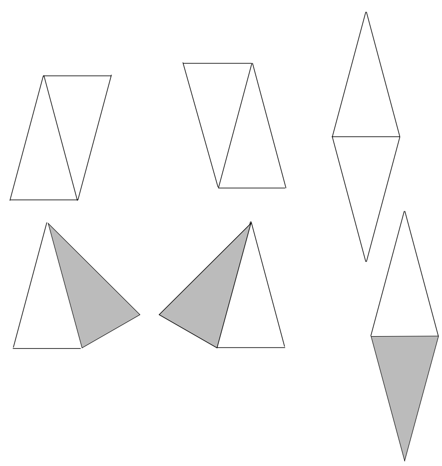


Fig. 50

Comme le losange est obtenu à partir d'une rotation de 180°, il a les mêmes propriétés que le parallélogramme.

44. *Le losange est un parallélogramme qui a ses côtés de même longueur.*

Comme le losange est aussi obtenu à partir d'une symétrie orthogonale, il a les mêmes propriétés que le cerf-volant.

45. *Le losange est un cerf-volant qui a ses côtés opposés de même longueur.*

Activité 2

Coder les éléments du losange qui sont superposables et relever les propriétés du losange qui apparaissent ainsi.

Commentaires et synthèse

Les égalités peuvent être repérées soit par symétrie orthogonale autour d'un côté, soit par rotation de 180° autour d'un milieu, soit à partir des propriétés des triangles isocèles qui ont été assemblés.

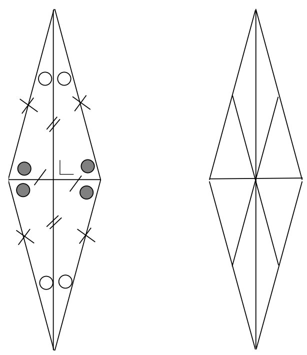


Fig. 51

Propriétés des côtés et des angles du losange

46. *Les angles opposés ont même amplitude.*

47. *Les quatre côtés ont même longueur.*

Propriétés des diagonales et des médianes du losange

Outre les propriétés des diagonales et des médianes du parallélogramme dont elles héritent, les diagonales et les médianes du losange ont les propriétés suivantes.

48. *Les diagonales du losange :*

- *sont perpendiculaires ;*
- *sont chacune un axe de symétrie de la figure ;*
- *partagent les angles qu'elles touchent en deux angles de même amplitude ;*
- *partagent le losange en quatre triangles rectangles superposables.*

49. *Les médianes du losange :*

- *ont même longueur ;*
- *partagent le losange en quatre losanges superposables.*

6 Assembler des triangles isocèles rectangles

Activité 1

Combien de quadrilatères distincts peut-on former en rapprochant deux triangles rectangles isocèles superposables ?

Commentaires

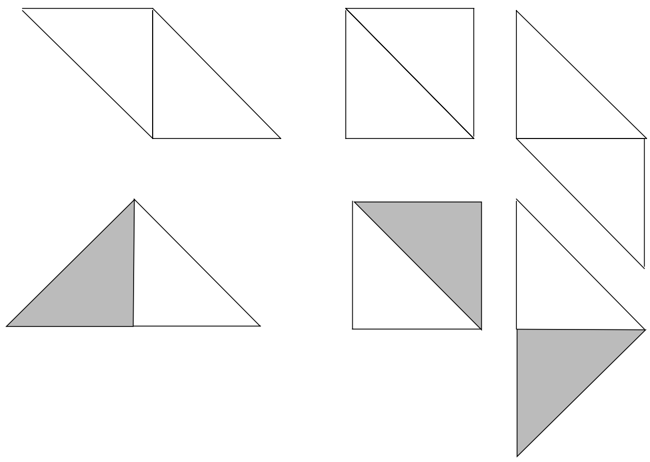


Fig. 52

On trouve deux parallélogrammes superposables, deux carrés superposables, deux triangles isocèles superposables. Finalement, deux quadrilatères distincts.

Activité 2

Coder les éléments du carré qui sont superposables et relever les propriétés du carré qui apparaissent ainsi.

Commentaires et synthèse

La démarche est la même que pour le rectangle et le losange.

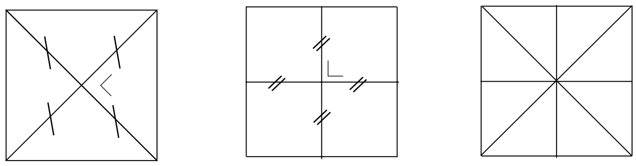
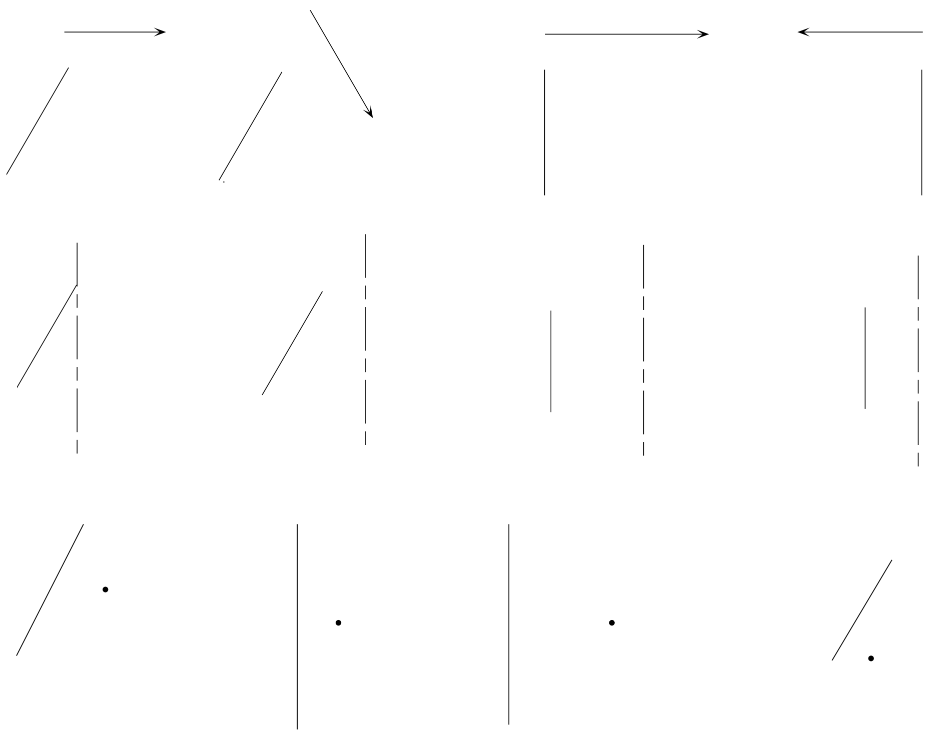


Fig. 53

Le carré apparaît comme un losange dont tous les angles sont droits ou comme un rectangle dont tous les côtés ont même longueur. C'est le moment d'élaborer un tableau récapitulatif des propriétés des côtés, des angles, des diagonales et des médianes des différents quadrilatères et de construire un diagramme des différents ensembles de quadrilatères.

Exercices

1. Construire l'image d'un segment par translation, par symétrie orthogonale, par rotation de 180°.



   Examiner chaque fois qu'il y a lieu le quadrilatère convexe déterminé par quatre points : ceux qui déterminent le segment de départ et ceux qui déterminent le segment à l'arrivée.

2. Fabriquer un pochoir pour construire un papier peint. Pour cela :

   – découper un triangle dans du carton ;

- dessiner puis découper un motif à l'intérieur du triangle ;
- déposer le pochoir sur une feuille, reproduire le motif et aussi le contour du triangle ;
- déplacer le pochoir de manière à ce que les deux triangles forment un quadrilatère et contourner à nouveau le motif et le triangle ;
- poursuivre ainsi de proche en proche, de façon à ce que les triangles couvrent la feuille sans laisser de trous et sans recouvrements.

Les régularités du papier peint dépendent du triangle choisi et aussi des régularités éventuelles du motif.