Deuxième partie

Une géométrie naturelle

Introduction

1 Des premières inférences à la théorie

Dans la première partie, nous avons essayé de montrer comment la perception des objets indéformables engendre des objets mentaux, et comment ceux-ci engendrent des évidences. Une fois dégagées – fut-ce à titre d'hypothèses – ces modalités de naissance de la pensée géométrique, encore faut-il montrer qu'elles peuvent déboucher sur une théorie géométrique quelque peu ample et cohérente. C'est à quoi nous consacrons cette deuxième partie. Il se fait assez naturellement que cette première géométrie argumentée recouvre l'essentiel de la matière de géométrie plane du début du secondaire[1].

Comme il s'agit d'une première géométrie accrochée à des intuitions quotidiennes, nous avions d'abord voulu l'appeler *géométrie naïve*, au sens où on parle aussi de *théorie naïve des ensembles*[2]. E. C. Wittmann nous a convaincus que *géométrie naturelle* serait mieux reçu par cette partie du public qui aurait tendance à comprendre *naïf* dans le sens de peu informé, peu sérieux, voire pas mathématique.

Nous cherchons à montrer qu'il est possible, à partir des premières inférences évidentes (qui s'expriment en termes d'objets mentaux) de construire une géométrie élémentaire logiquement satisfaisante. Pour réaliser cet objectif, nous avons éliminé tout contexte, et de ce fait l'exposé est impropre à un enseignement vivant. Néanmoins, il pourra donner aux enseignants des clefs d'explication des difficultés rencontrées par les élèves dans des contextes divers. Étant proches du registre de pensée des enfants, ces clefs devraient fonctionner mieux que celles tirées d'une géométrie axiomatisée globalement.

2 Des évidences de départ

Comme nous l'avons vu dans la première partie, l'environnement familier nous offre des évidences géométriques. Nous n'en avons pas fait le tour, mais elles sont assez nombreuses. D'où une première question au départ d'une géométrie naturelle : quelles sont ces évidences ? Il est nécessaire de savoir ce qui est déjà là

[1] Niveau du collège en France.

[2] Voir par exemple R. Halmos, *Naive set theory*, [1960]. Il est important de savoir que la majorité des mathématiciens ne recourent jamais à la théorie axiomatique des ensembles. Pour ce qu'ils font, la théorie naïve (ou informelle) des ensembles est une référence sûre. Ainsi, ce n'est pas seulement aux débutants qu'une pensée informelle vient à point.

au départ, quelles sont ces connaissances qui, étant disponibles et claires, ne doivent pas être revues dans l'immédiat et peuvent servir à aller plus loin.

Une objection peut être que ces évidences, par leur grand nombre, sont sources de confusion. « [. . .] je ne pense pas, écrit Choquet [1964], qu'il soit désirable, comme l'ont préconisé certains professeurs, de prendre au départ de très nombreux axiomes : le jeu mathématique basé sur trop de règles, devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude. » Mais le propos de Choquet n'était pas d'écrire une géométrie naturelle. Il proposait, pour les élèves de la fin du secondaire des années soixante, une géométrie axiomatisée globalement, conduisant rapidement aux espaces vectoriels[3]. Nous voulons au contraire chercher un passage naturel, une voie de moindre difficulté, entre le savoir géométrique familier, nullement négligeable, et les premières propositions non évidentes de la géométrie.

Heureusement, ces évidences assez nombreuses ont entre elles des parentés qui permettent de les répartir en quelques ensembles cohérents. Ces regroupements nous ont fourni une répartition en chapitres pour la géométrie naturelle. Voyons comment ces chapitres ont été conçus.

Chaque chapitre évoque d'abord une "structure de base" et traite ensuite de phénomènes qui lui sont apparentés. Nous avons identifié six structures de base (voir ci-dessous), d'où les six chapitres de cette partie.

Expliquons plus en détails la forme des chapitres. Dans chacun d'eux, la structure de base est donc exposée pour commencer, sous forme de quelques expériences, quelques phénomènes porteurs d'évidences intuitives (nous les appelons *phénomènes de base*. La suite du chapitre amène d'autres phénomènes. Certains sont aussi évidents que les premiers. La plupart de ceux qui ne sont pas évidents s'expliquent en prenant appui sur la structure de base. Mais parfois, l'explication s'appuie sur une évidence supplémentaire, qui est alors évoquée sur le tas. Bien entendu, les explications s'appuient aussi sur des propositions déjà démontrées.

Nous avons écrit ces chapitres en imaginant devant nous un interlocuteur sensé, susceptible d'être attentif aux données immédiates de l'environnement et n'ayant retenu que peu de choses de la géométrie enseignée en primaire (par exemple, il sait reconnaître un triangle, un rectangle,. . .). Nous imaginons – nous espérons – qu'il nous quittera en ayant compris et appris un certain nombre de propriétés géométriques non évidentes, et aussi qu'il aura compris comment on manœuvre pour acquérir de nouvelles connaissances en géométrie élémentaire.

Cette partie de notre étude doit être considérée comme un

[3] G. Papy, de son côté, a proposé une géométrie axiomatisée globalement à partir de l'âge de douze ans. Cf. G. Papy [1970].

premier essai. Nous nous proposons de le revoir prochainement en argumentant nos choix, ainsi qu'en proposant des alternatives tenant compte de ce que les évidences intuitives varient d'une personne à l'autre. Nous le compléterons aussi, entre autres du côté de la géométrie de l'espace, et l'accompagnerons de notes méthodologiques expliquant les modes de raisonnement.

Le chapitre 5, intitulé *Une perpendiculaire et deux obliques*, part de la structure de base constituée d'une droite, une perpendiculaire et deux obliques (figure 1). Il se poursuit par d'assez nombreuses évidences relatives à la médiatrice d'un segment, au triangle isocèle, au losange, à un cercle muni d'une corde, à la bissectrice d'un angle. Il débouche sur la tangente au cercle et sur deux propriétés non évidentes, celle du cercle circonscrit à un triangle et celle du cercle inscrit.

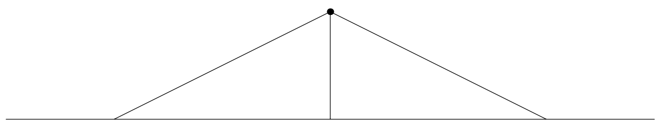


Fig. 1

Le chapitre 6, intitulé *Trois segments,* part des évidences relatives à l'inégalité triangulaire et débouche sur l'intersection de deux cercles et les cas d'égalité des triangles.

Le chapitre 7, intitulé *Rectangles, cercles et angles,* part de quelques propriétés élémentaires du rectangle. Il traite ensuite de l'angle au centre dans un cercle, de l'arc qu'il intercepte et de la corde qui sous-tend cet arc. Il conduit aux propriétés des angles inscrits dans un cercle et se termine par la question des quadrilatères inscriptibles.

Le chapitre 8, intitulé *Parallèles et angles,* part de la structure de base constituée par deux parallèles et une transversale. Il rassemble au départ un tout petit nombre d'évidences, et débouche sur une série assez longue de propriétés des angles des polygones.

Le chapitre 9 traite des puzzles de carrés et de triangles qui conduisent au théorème de Pythagore et à sa réciproque.

Le chapitre 10, intitulé *Parallèles et longueurs,* part d'une situation de base proche du chapitre 8 : un réseau régulier de parallèles, traversé par une ou deux sécantes. De quelques évidences au départ, il tire de multiples propriétés sur la conservation des rapports, les homothéties, les systèmes de coordonnées et les équations de droites.

3 Ce que la géométrie naturelle est ou voudrait être

Comment situer cette géométrie naturelle, en particulier par rapport aux géométries les plus connues ? Comme la plupart des autres exposés théoriques, elle est, nous l'avons dit, construite en dehors de tout contexte concret. Elle ne s'appuie sur aucun thème, au rebours par exemple de la géométrie de Clairaut [1741], qui visait tout au long la mesure des terrains.

Les évidences de départ de la géométrie naturelle sont issues de l'environnement familier, des objets et relations qui y sont omniprésents et qui ont le statut d'objets mentaux. Rappelons-les (voir section 5 du chapitre 2) pour l'essentiel :

les points, droites, segments et angles,
les parallèles, perpendiculaires et sécantes,
les égalités et inégalités de grandeurs,
les translations, symétries orthogonales et demi-tours.

Ces structures sont celles que l'être humain rencontre immanquablement et sans cesse lorsqu'il s'efforce de saisir l'espace pour y vivre et agir. Non pas l'espace entité abstraite et vide, mais l'espace peuplé de formes et de mouvements.

La géométrie naturelle cherche à respecter deux principes, qui la distinguent des géométries constituées.

Le premier, déjà relevé ci-dessus, est qu'*elle n'exclut au départ aucun des moyens de connaissance et de pensée disponibles*. Par contraste, les géométries les plus connues, du fait même qu'elles sont des théories unifiées au départ d'un *petit* nombre d'axiomes, et même si ceux-ci sont proches de perceptions et d'expériences quotidiennes, excluent un certain nombre de moyens de pensée. Donnons-en quelques exemples.

Euclide, souvenons-nous (voir l'appendice page 66), évoque brièvement les mouvements, mais s'en passe le plus vite possible. Hilbert [1899] les accepte, au sens où les congruences directes sont des déplacements idéalisés. Mais il n'adopte pas comme terme primitif les symétries et mouvements simples (symétrie orthogonale, translation, demi-tour) qui servent dans le quotidien à se convaincre de certaines congruences. Choquet [1964] écarte les angles au départ et exprime sa satisfaction d'avoir réussi à ne les introduire que très tard. Artin [1957] ne prend en compte au départ, parmi les objets et transformations qui possèdent un correspondant dans le quotidien, que les points, les droites, les parallèles et les translations. Les homothéties, qu'il utilise aussi, sont des transformations savantes. Bachmann [1973] ne considère ni les points, ni les droites, mais s'appuie par contre sur les symétries orthogonale et centrale. Enfin, et bien entendu, lorsque la géométrie est immédiatement vectorielle, elle est dès son origine assez loin des intuitions quotidiennes (voir Dieudonné [1968])[4].

La géométrie naturelle cherche à respecter un deuxième principe, qui complète le premier : *elle ne s'appuie au départ sur aucune connaissance non disponible au débutant.*

En soulignant cela, nous pensons surtout, par contraste, à toutes les géométries qui présupposent la connaissance des nombres réels, et donc ne s'adressent pas aux débutants. C'est le cas bien entendu de la géométrie construite d'emblée dans le cadre d'un espace vectoriel (voir à nouveau Dieudonné [1968]). On trouve aussi les réels au départ de la géométrie chez Choquet [1964], chez Birkhoff et Beatley [1959], et dans la géométrie proposée naguère par le GEM [1982].

Nous croyons réaliste qu'une première géométrie s'intéresse d'abord aux grandeurs et aux formes elles-mêmes, sans renvoyer immédiatement à leurs expressions numérisées. Les nombres (autres que les naturels) sont, à travers les mesures, un produit de l'activité géométrique, ils n'en sont pas un préalable[5].

Ces deux principes montrent que la géométrie naturelle proposée ici s'efforce de partir du quotidien. Elle n'est pas une forme adaptée aux élèves, vulgarisée, d'une géométrie constituée.

Toutefois, elle est formée avec des matériaux qu'on retrouve, au moins en partie, dans les géométries constituées. Elle utilise, comme celles-ci, la logique ordinaire. Et par delà son objectif principal qui est d'apprendre à saisir l'espace, elle est une première étape vers ces géométries. Elle s'attarde en particulier sur le parallélogramme, les projections parallèles et la propriété de Thalès, faisant ainsi un bout de chemin vers la notion d'espace vectoriel.

4 Et la rigueur ?

La géométrie naturelle est informelle au sens où elle se sert d'objets mentaux issus de l'expérience quotidienne et où elle n'est pas axiomatisée dans son ensemble. D'où la question : est-elle rigoureuse ? Évite-t-elle les pièges logiques ?

Voici un premier élément de réponse. Dans une théorie axiomatisée de grande ampleur, chaque concept doit tenir la route d'un bout à l'autre. Pour cela, il prend en compte le champ entier, souvent gigantesque, des objets de la théorie. Il est muni d'emblée de caractéristiques techniques lui permettant de traverser indemne les arcanes des démonstrations les plus difficiles.

[4] Le fait que chacune de ces géométries ait sélectionné sévèrement ses termes primitifs et ses axiomes, répondant chaque fois à une intention théorique significative, est extrêmement intéressant. Qu'on ne se méprenne donc pas sur notre intention : rappeler ces sélections sévères n'est pas une critique, car chacune, grâce précisément aux contraintes imposées, révèle un aspect profond de la géométrie. On peut même dire que pour bien connaître, en mathématicien, *la géométrie*, il est essentiel d'en connaître *plusieurs versions axiomatiques*.

[5] Rappelons, pour situer historiquement notre propos, que la géométrie d'Euclide ne recourt à aucun nombre à part des naturels. Hilbert et Artin construisent tous deux le corps de leur géométrie au sein même de la théorie. Le corps de la géométrie de Hilbert, étant fondé sur un calcul de segments, est d'ailleurs beaucoup plus proche du quotidien que celui d'Artin.

La géométrie naturelle au contraire ne s'intéresse pas tout de suite à un vaste champ d'objets et de phénomènes, entièrement cerné d'entrée de jeu. Elle s'intéresse d'abord, que la chose soit explicite ou non, à des champs restreints d'objets. Dans chacun de ces champs, des objets mentaux définis sans trop de technicité sont de bons instruments d'explication des phénomènes. Bornons-nous à un seul exemple : si dans un contexte donné, on ne rencontre aucun « angle mesurant plus de 180 degrés », une certaine idée familière des angles fonctionnera bien. Un jour il faudra en changer[6]. Autant attendre d'apercevoir les raisons qui imposeront ce changement[7]. Voici ce qu'écrit Morris Kline [1997] à ce sujet : « Avant qu'on puisse apprécier une formulation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée est formulée, quelles exceptions et quels pièges l'énoncé s'efforce d'éviter. Donc il faut être capable d'évoquer toute une richesse d'expérience acquise avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. »

Par commodité, nous avons parlé jusqu'ici de *la géométrie naturelle*, au singulier. Cela risque de donner à croire qu'il s'agit d'un nouveau canon pédagogique. Loin de nous cette idée. D'abord il s'agit d'un essai, qui doit être mis à l'épreuve auprès du public intéressé. Ensuite la solution que nous présentons n'est pas unique. En effet, à tout moment, nous avons eu à choisir entre divers chemins raisonnables. Parce que nous voulions un texte bref, nous n'avons proposé aucune alternative.

Avertissement. – Dans cette partie, nous utilisons les termes *identiques* et *les mêmes* pour renvoyer à deux figures congruentes. Par exception, nous utilisons *égal* lorsque la figure est un segment ou un angle. Ces termes familiers nous ont paru les plus appropriés pour une géométrie informelle. Mais nous ne souhaitons pas imposer ce vocabulaire. On trouvera à l'appendice page 301 des arguments pour éclairer d'autres choix éventuels.

Remerciements. – Sept personnes nous ont fait part de leurs difficultés et de leurs critiques à la lecture d'une première version de cette *Géométrie naturelle*. Ce sont J. Bartholomé, régente en français, C. David, sans profession, M. de Terwangne, institutrice primaire, A. Frère, institutrice primaire, M. Meuret, institutrice maternelle, P. Planche, régent en géographie, A. Warnier, licenciée en mathématiques.Nous avons clarifié notre texte en tenant compte de toutes leurs observations et les remercions chaleureusement.

[6] Les angles dont il est question aux chapitres 5 et 6 ci-après sont strictement inférieurs à 180 degrés. C'est pourquoi nous en parlons sans définition ni précautions particulières. Il s'agit de la notion d'angle la plus spontanée, et elle fonctionne bien dans ce cadre. À partir du chapitre 7 par contre, nous envisageons des angles de 180 degrés et davantage, ce qui mérite une mise au point.

[7] C'est en gros dans ces termes-là qu'on peut parler des paliers de rigueur qu'évoque Freudenthal [1973].

5

Perpendiculaires et obliques

1 Une perpendiculaire et des obliques

Phénomène de base 1. – La figure 1 montre un point P, une droite d et divers chemins pour aller de P à d. Pour y voir plus clair, disposons la droite d horizontalement (figure 2). Le chemin le plus court suit la perpendiculaire.

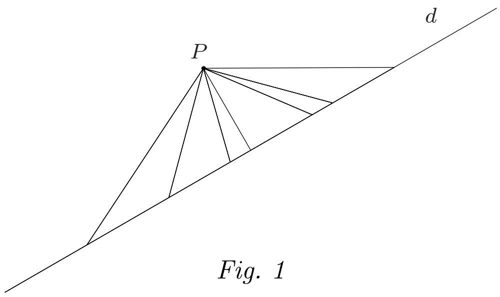


Fig. 1

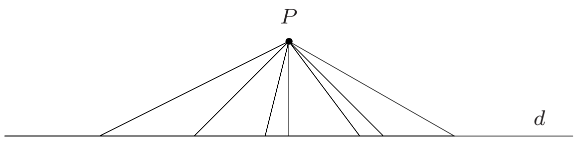


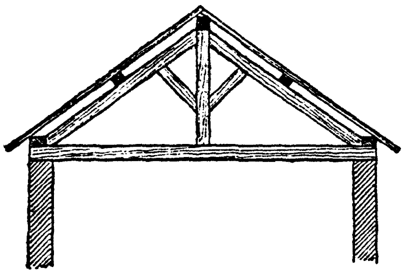
Fig. 2

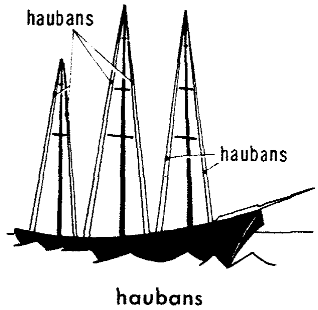
Cette observation est assez importante pour que nous la mettions clairement en évidence.

1. *Si d'un point extérieur à une droite, on mène vers celle-ci une perpendiculaire et des obliques, la perpendiculaire est plus courte que chaque oblique.*

La distance donnée par la perpendiculaire est appelée *distance du point à la droite.*

2 La perpendiculaire et deux obliques égales





Donnons-nous une droite d horizontale, un point P et la perpendiculaire. À partir de là, nous allons faire quatre observations.

Phénomène de base 2. – Donnons-nous en outre deux baguettes de même longueur, plus longues que la distance de P à d (figure 3). Disposons ces deux baguettes symétriquement de la manière suivante (voir figure 4) :

- plaçons la première à gauche avec une extrémité en P ; l'autre extrémité touche la droite horizontale en B ;
- plaçons la deuxième baguette à droite avec une extrémité en P ; l'autre extrémité touche la droite horizontale en B'.

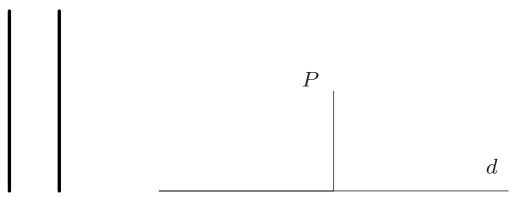


Fig. 3

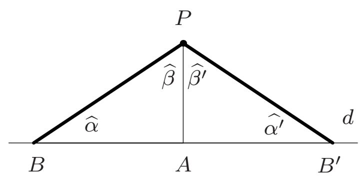


Fig. 4

Puisque nous sommes partis d'une situation symétrique – la droite (elle est infinie) et la perpendiculaire – et que nous avons rajouté les deux segments symétriquement, la figure finale est complètement symétrique. Il en résulte que les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ entre les deux baguettes et d sont égaux, les segments $[AB]$ et $[AB']$ sont égaux, et les angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$ sont aussi égaux (figure 4).

Phénomène de base 3. – Donnons-nous deux angles aigus égaux $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ découpés dans du carton (figure 5 à la page suivante). Disposons-les ensuite symétriquement l'un à gauche et l'autre à droite, comme le montre la figure 6, avec un côté le long de d et l'autre passant par P. À nouveau, nous avons rajouté symétriquement des éléments à une figure symétrique. Le résultat est symétrique : les deux segments $[BP]$ et $[B'P]$ sont égaux, ainsi que les deux segments $[AB]$ et $[AB']$ et les deux angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$.

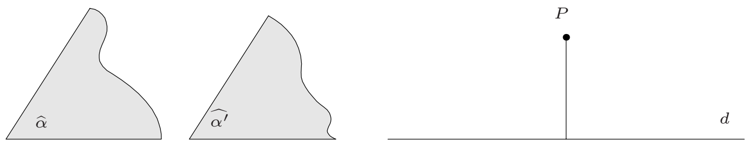


Fig. 5

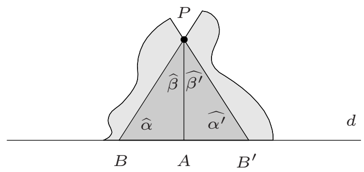


Fig. 6

PHÉNOMÈNE DE BASE 4. – Donnons-nous deux baguettes de même longueur (figure 7) et disposons-les symétriquement le long de d avec une de leurs extrémités au pied A de la perpendiculaire, comme le montre la figure 8. Dessinons ensuite les segments $[BP]$ et $[B'P]$. La figure obtenue ainsi étant entièrement symétrique, $[BP]$ et $[B'P]$ sont égaux, de même que les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$, et les angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$.

Fig. 7

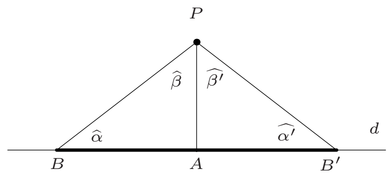


Fig. 8

PHÉNOMÈNE DE BASE 5. – Donnons-nous deux angles égaux $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\beta'}$ découpés dans du carton (figure 9). Disposons-les symétriquement avec leur sommet en P et un de leurs côtés le long de la perpendiculaire comme le montre la figure 10. Cette figure étant entièrement symétrique, les deux segments obliques $[PB]$ et $[PB']$ sont égaux, les deux segments $[AB]$ et $[AB']$ sont égaux, et les deux angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$ sont aussi égaux.

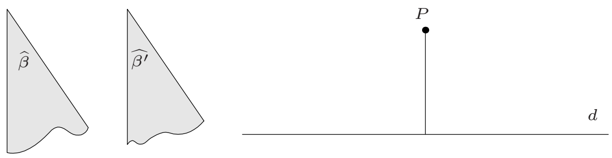


Fig. 9

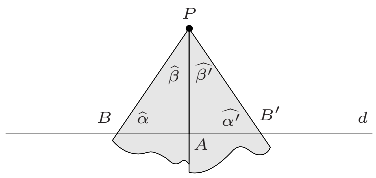


Fig. 10

Dans la suite nous reviendrons à diverses reprises sur ces phénomènes de base. Ils sont résumés dans la proposition suivante.

2. *D'un point extérieur à une droite, on mène vers celle-ci une perpendiculaire et deux obliques. Si une quelconque des quatre propriétés suivantes est vérifiée, les trois autres le sont aussi :*

(a) les deux obliques sont égales ;

(b) les angles formés par la droite et chacune des deux obliques sont égaux ;

(c) les pieds des deux obliques sont à égale distance du pied de la perpendiculaire ;

(d) les angles formés par la perpendiculaire et chacune des deux obliques sont égaux.

En reparcourant les deux phénomènes de base 2 et 3, on s'aperçoit qu'on peut aussi les simplifier en s'arrangeant pour que la perpendiculaire n'y joue plus de rôle. Ceci nous conduit à une autre proposition, un peu plus légère, dans laquelle nous isolons les conclusions *(a)* et *(b)* de la proposition 2.

3. *D'un point extérieur à une droite, on mène deux obliques vers celle-ci. Si une des deux propriétés est vérifiée, l'autre l'est aussi :*

(a) les deux obliques sont égales ;

(b) les angles formés par la droite et chacune des deux obliques sont égaux.

3 Un segment et sa médiatrice

Rappelons qu'on appelle *médiatrice d'un segment* la droite perpendiculaire à celui-ci en son milieu. Le terme *médiatrice* dérive du latin *medius* : qui est au milieu.

La figure 11a illustre cette définition. On voit mieux la situation lorsqu'on amène le segment à l'horizontale (figure 11b).

Fig. 11 (a,b)

Voici maintenant une première question à propos de la médiatrice : si on considère un point P sur la médiatrice d'un segment (figure 12a), ce point est-il à distance égale des extrémités du segment ?

En posant cette question, on se retrouve dans la situation du phénomène de base 4 à la page précédente : les deux distances sont égales (figure 12b).

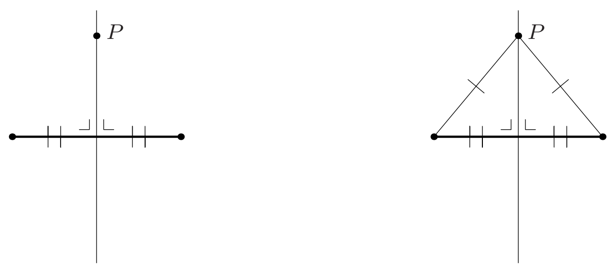


Fig. 12 (a,b)

Voici ensuite une deuxième question, inverse de la première : si on considère un point P à égale distance des extrémités d'un segment (figure 13a), ce point est-il sur la médiatrice du segment ?

Du point P, menons la perpendiculaire au segment (figure 13b). Ceci fait, nous nous retrouvons dans la situation du phénomène de base 2 à la page 78 : les segments $[AB]$ et $AB']$ sont égaux (figure 13c). Ainsi la perpendiculaire est bien médiatrice du segment, et le point P est sur la médiatrice.

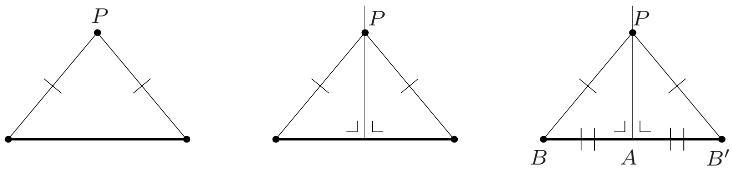


Fig. 13 (a,b,c)

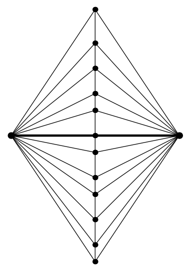


Fig. 14

La figure 14 montre un segment, sa médiatrice et un ensemble de points à égale distance des extrémités du segment.

La proposition suivante résume ce que nous venons d'observer à propos de la médiatrice.

4. *(a) Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à égale distance des extrémités de celui-ci.*

(b) Si un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment, il est sur la médiatrice de celui-ci.

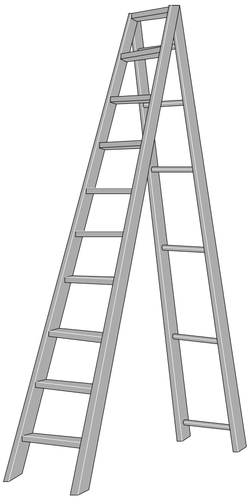
Cette proposition double peut aussi s'énoncer d'un seul coup sous la forme :

4′. *Un point est sur la médiatrice d'un segment si et seulement s'il est à distance égale des extrémités de celui-ci.*

Ainsi la médiatrice d'un segment est constituée de tous les points situés à égale distance des extrémités de celui-ci et de ces points seulement. « Être à égale distance des extrémités d'un segment » est donc une propriété qui caractérise les points de la médiatrice du segment. On exprime cela en disant :

4″. *La médiatrice d'un segment est le lieu des points situés à égale distance de ses extrémités.*

4 Le triangle isocèle



-

Alvéoles de la mosquée de Tichitt

La figure 15 montre quelques triangles isocèles. À la figure 16, les mêmes triangles sont posés sur leur base. C'est dans cette position qu'on reconnaît le plus facilement un triangle isocèle. On voit qu'il est symétrique, avec deux côtés inclinés de la même manière, l'un montant de gauche à droite et l'autre de droite à gauche.

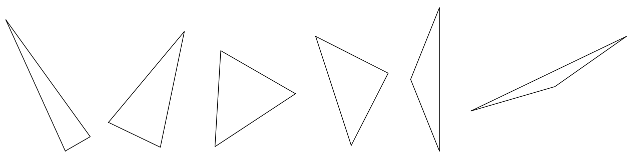


Fig. 15

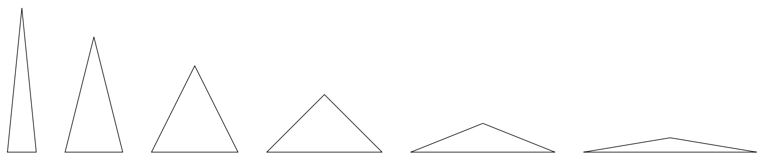


Fig. 16

4.1 Quelques propriétés du triangle isocèle

Le triangle isocèle est une figure familière. Il possède de nombreuses propriétés. Voici les principales.

5. *Il a deux côtés égaux (figure 17 à la page suivante).*

Isocèle est d'ailleurs dérivé de deux mots grecs : *isos* qui veut dire *égal* et *skalos* qui veut dire *jambe*. Un triangle isocèle est un triangle qui a deux jambes égales.

6. *Il a les angles à la base égaux (figure 18).*

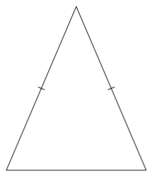


Fig. 17

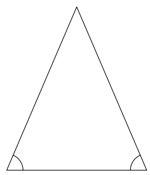


Fig. 18

7. *Il possède un axe de symétrie ; celui-ci :*

1. *passe par le sommet ;*
2. *est perpendiculaire à la base (figure 20) ;*
3. *coupe la base en deux segments égaux (figure 19) ;*
4. *coupe l'angle au sommet en deux angles égaux (figure 21).*

En mettant ensemble les propriétés 2 et 3, on voit que l'axe est médiatrice de la base.

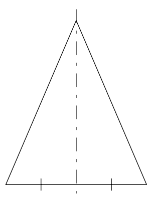


Fig. 19

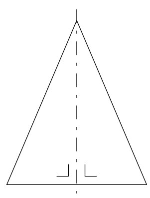


Fig. 20

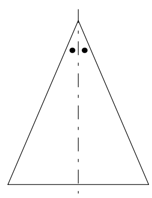


Fig. 21

Pour la plupart des personnes, les propriétés 5 et 6 à la page précédente donnent une sorte de portrait de base du triangle isocèle. La propriété 7 est plus savante et appartient plutôt à un portrait enrichi.

4.2 Conditions déterminantes du triangle isocèle

8. *Si un triangle a deux angles égaux (figure 22), alors il est isocèle.*

Du sommet P abaissons la perpendiculaire au côté opposé (figure 23). Nous nous trouvons dans la situation du phénomène de base 3 à la page 78. Et nous reconnaissons un triangle isocèle.

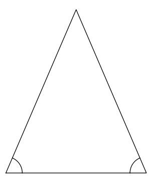


Fig. 22

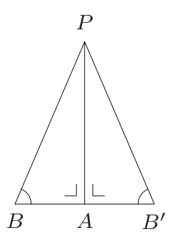


Fig. 23

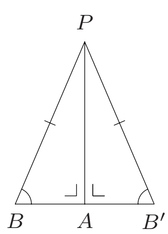


Fig. 24

9. *Si un sommet d'un triangle est sur la médiatrice du côté opposé (figure 25 à la page suivante), alors il est isocèle.*

Nous nous trouvons là dans les circonstances du phénomène de base 4 à la page 79 (voir figure 26). Nous aboutissons bien encore à un triangle isocèle.

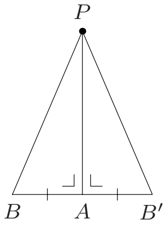


Fig. 25

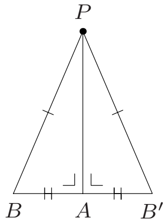


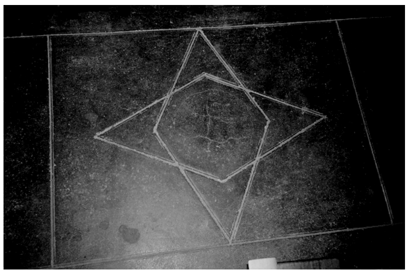
Fig. 26

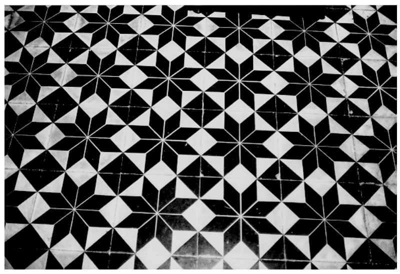
10. *Si dans un triangle la hauteur issue d'un sommet est médiatrice du côté opposé (voir à nouveau la figure 25), alors il est isocèle.*

Comme dans le cas précédent, nous nous trouvons dans la situation du phénomène de base 4 à la page 79 : le triangle est bien isocèle.

5 Le losange

Le nom de *losange* vient du gaulois *lausa* qui veut dire *pierre plate*.





La figure 27 montre quelques losanges en position quelconque. Les figures 28 et 29 montrent les mêmes losanges dans les deux positions où on observe mieux leur symétrie. Prises ensemble, ces deux figures montrent des formes possibles d'un losange articulé.

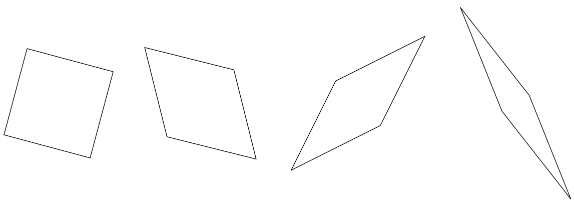


Fig. 27

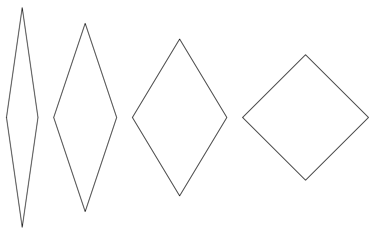


Fig. 28

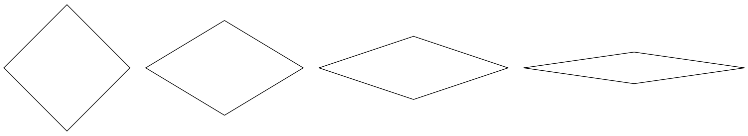


Fig. 29

5.1 Quelques propriétés du losange

11. *Le losange a quatre côtés égaux (figure 30).*

12. *Il a les angles opposés égaux (figure 31).*

13. *Il a les côtés opposés parallèles.*

On le voit sur la figure 32a, et sans doute mieux sur la figure 32b.

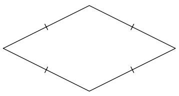


Fig. 30

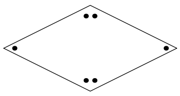


Fig. 31

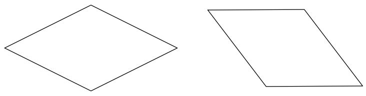


Fig. 32 (a,b)

14. *Chacune de ses diagonales le divise en deux triangles isocèles identiques (figure 33).*

15. *Chacune de ses diagonales est un axe de symétrie (figure 33).*

16. *Ses diagonales sont perpendiculaires et se rencontrent en leur milieu (figure 34).*

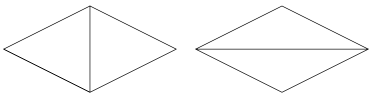


Fig. 33

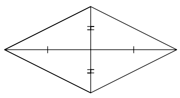


Fig. 34

5.2 Une condition déterminante du losange

17. *Si dans un quadrilatère les diagonales sont perpendiculaires et se rencontrent en leur milieu, ce quadrilatère est un losange.*

Considérons deux segments perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu (figure 35 à la page suivante). La symétrie de la figure (ou une double application du phénomène de base 4 à la page 79) montre que les quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ sont égaux (figure 36 à la page suivante).

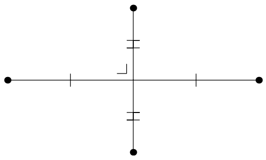


Fig. 35

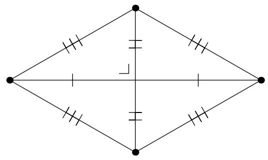
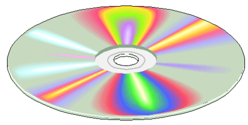


Fig. 36

6 Un cercle et une droite



Le cercle est une figure familière, qu'il est à peine besoin de présenter. Alors que les triangles isocèles n'ont pas tous la même forme, et les losanges non plus, tous les cercles ont la même forme. La seule différence qui peut exister entre deux cercles est leur grandeur. De plus, pour bien voir un cercle sur une feuille ou un tableau en position frontale, il n'est pas besoin de l'orienter de façon particulière : toutes les orientations se valent (figure 37).

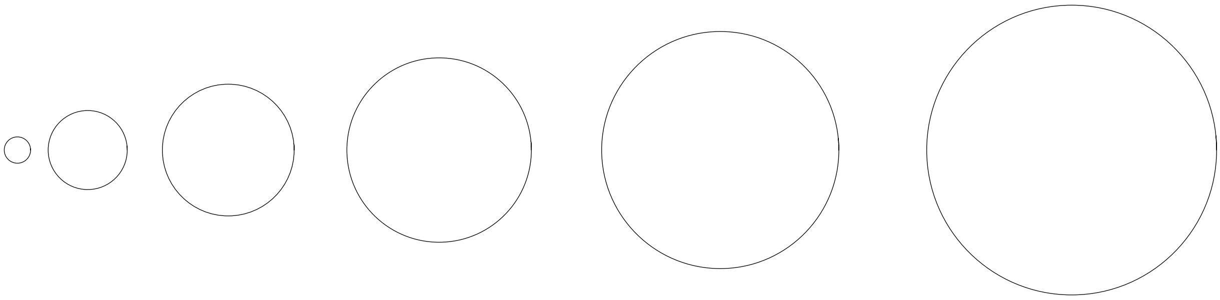


Fig. 37

Voici quelques propriétés du cercle.

18. *Tous les points d'un cercle sont à égale distance d'un point appelé* centre. *Cette distance est le* rayon.

Signalons qu'on appelle aussi rayon tout segment qui joint le centre du cercle à l'un de ses points.

19. *Tout point qui se trouve à une distance du centre égale au rayon est sur le cercle.*

20. *Ces deux propriétés se résument en une seule : un cercle de centre O et de rayon r est le lieu des points qui se trouvent à distance r de O.*

21. *Tous les points intérieurs à un cercle sont à une distance du centre inférieure au rayon.*

22. *Tous les points extérieurs à un cercle sont à une distance du centre supérieure au rayon.*

23. *Tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie pour celuici (figure 38a).*

On voit mieux cette symétrie du cercle si on amène le diamètre en position verticale (figure 38b).

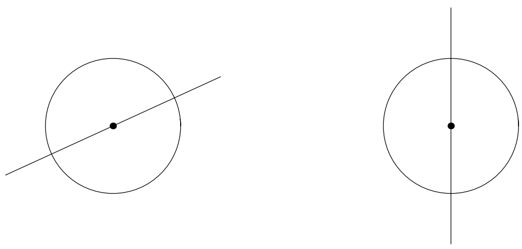


Fig. 38 (a,b)

Considérons maintenant une figure formée par un cercle et une droite d qui le rencontre (figure 39a). Ici on voit mieux la symétrie si on dispose la droite horizontalement (figure 39b).

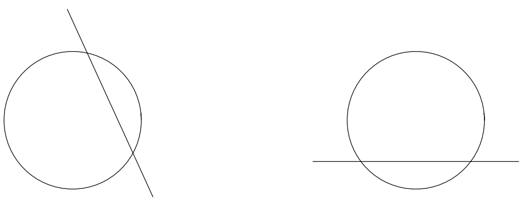


Fig. 39 (a,b)

Première question : si on trace la médiatrice de la corde (figure 40a), est-ce qu'elle passe par le centre ? (Rappelons qu'on appelle *corde* d'un cercle n'importe quel segment dont les extrémités sont sur le cercle.) Le centre étant à égale distance des extrémités de la corde (figure 40b), il est sur la médiatrice (voir proposition 4b à la page 81).

Fig. 40 (a,b)

Question réciproque : si on abaisse la perpendiculaire du centre sur la corde (figure 41a), est-elle médiatrice de celle-ci ? En dessinant deux rayons comme sur la figure 41b, nous nous retrouvons dans les conditions du phénomène de base 2 à la page 78 : le pied de la perpendiculaire divise la corde en deux segments égaux, et la perpendiculaire est bien la médiatrice supposée (figure 41c).

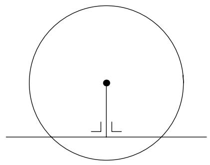


Fig. 41 (a,b,c)

Nous résumons cela par la proposition suivante.

24. *(a) Si on trace la médiatrice d'une corde d'un cercle, cette médiatrice passe par le centre du cercle et est donc un diamètre.*

(b) Si on abaisse la perpendiculaire du centre d'un cercle sur une corde, cette perpendiculaire est la médiatrice de la corde.

Phénomène de base 6. – Si, comme à la figure 42a, on considère une corde perpendiculaire à un diamètre et qui s'éloigne continûment du centre, on voit ses points d'intersection avec le cercle se rapprocher de plus en plus. À la fin, ils se rejoignent. La droite, qui n'a pas cessé d'être perpendiculaire au diamètre, n'a plus alors qu'un seul point de contact avec le cercle. Elle est présentée à la figure 42b. Tous ses autres points sont extérieurs au cercle, puisqu'ils sont à une distance du centre supérieure au rayon (figure 42c).

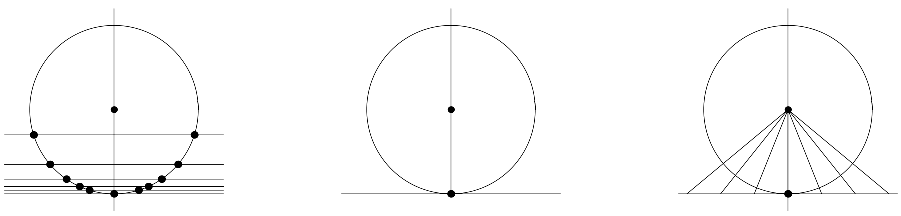


Fig. 42 (a,b,c)

On appelle *tangente* à un cercle toute droite perpendiculaire à un rayon à son extrémité. Une tangente ne touche le cercle qu'en un point. Le mot latin *tangere* veut dire toucher.

Soit maintenant une droite, un point extérieur à la droite et la perpendiculaire joignant le point à la droite (figure 43a à la page suivante). Dessinons le cercle qui a son centre au point donné et qui a pour rayon la perpendiculaire. La droite est tangente au cercle (figure 43b).

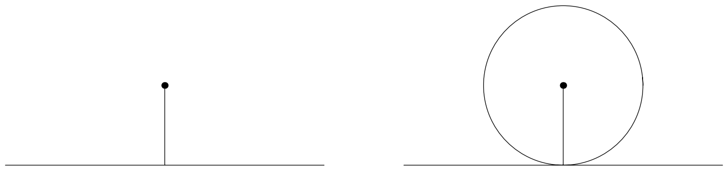


Fig. 43 (a,b)

Aucun autre cercle de même centre n'est tangent à la droite. Voyons cela en détail. Si nous dessinons un *autre* cercle dont le centre ce trouve au même point, son rayon est soit plus petit que la distance du point à la droite (figure 44a) soit plus grand (figure 44b) :

– s'il est plus petit, aucun de ses rayons ne peut toucher la droite, car si un des rayons arrivait jusqu'à la droite, il serait au moins égal à la perpendiculaire (voir la proposition 1 à la page 77) ;
– si au contraire le rayon est plus grand que la perpendiculaire, en dessinant deux rayons comme sur la figure 44c, nous retrouvons les conditions du phénomène de base 2 à la page 78. Il y a deux points du cercle qui se trouvent sur la droite.

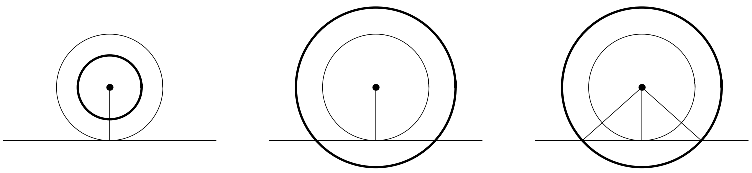


Fig. 44 (a,b,c)

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

25. *En prenant pour centre un point extérieur à une droite, on peut dessiner un et un seul cercle auquel la droite est tangente.*

7 Un angle et sa bissectrice

Appelons ici *bissectrice d'un angle* la demi-droite qui coupe celui-ci en deux angles égaux. La figure 45a montre un angle et sa bissectrice. On discerne mieux l'égalité des deux angles résultant du partage si on dispose la bissectrice verticalement, comme le montre la figure 45b ou la figure 45c.

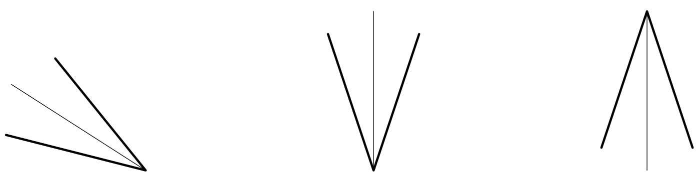


Fig. 45 (a,b,c)

Considérons un point P sur la bissectrice d'un angle (figure 46a). De ce point menons des perpendiculaires aux deux côtés de l'angle (figure 46b). Comme la figure est symétrique par rapport à la bissectrice, et que nous la complétons par deux constructions symétriques, la perpendiculaire dessinée à gauche est égale à la perpendiculaire dessinée à droite. Donc le point de la bissectrice est à égale distance des deux côtés de l'angle (figure 46c).

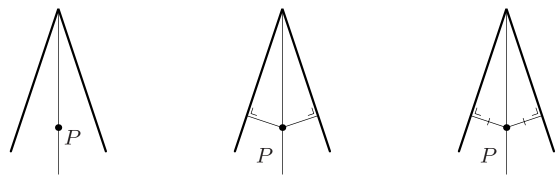


Fig. 46 (a,b,c)

26. *Tout point de la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés de celui-ci.*

Considérons maintenant un point P intérieur à l'angle et situé à égale distance de ses côtés (figure 47a). Traçons les perpendiculaires $[PB]$ et $[PB']$ aux deux côtés. Ces deux segments sont égaux. Joignons les points P et A (figure 47b). Nous allons montrer que les angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{B'AP}$ sont superposables, et que par conséquent, le point P est sur la bissectrice de l'angle.

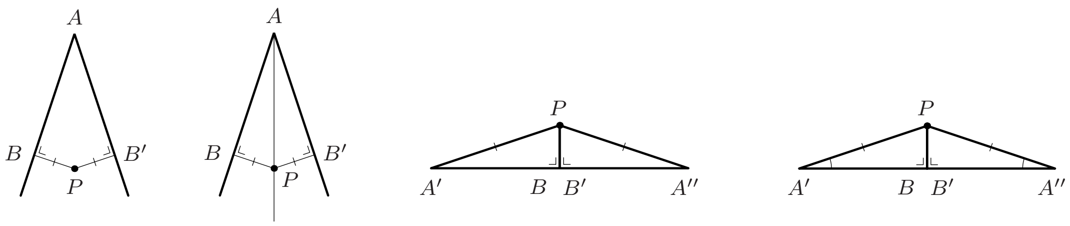


Fig. 47 (a,b,c,d)

Pour montrer cela, une manœuvre nous sera utile : elle est destinée à amener les conditions du phénomène de base 2 à la page 78. Transportons les deux triangles PBA et $PB'A$ de manière que leurs côtés $[PB]$ et $[PB']$ soient accolés, comme le montre la figure 47c. Nous sommes effectivement dans les conditions du phénomène de base 2, puisque $[PA']$ est superposable à $[PA'']$. Ainsi les angles $PA'B$ et $PA''B'$ sont superposables (figure 47d).

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante[1].

27. *Tout point à l'intérieur d'un angle et situé à égale distance de ses côtés est sur la bissectrice de celui-ci.*

Ces deux propositions peuvent se résumer en un seule.

[1] Dans ce chapitre le terme *angle*, qui n'a pas été défini, renvoie à l'angle quotidien, toujours strictement inférieur à 180°. Dans ces conditions, la locution *l'intérieur d'un angle* ne présente pas d'ambiguïté.

28. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points intérieurs à l'angle et équidistants de ses côtés.*

Cette proposition a pour conséquence la proposition suivante.

29. *En prenant comme centre un point de la bissectrice d'un angle, on peut tracer un cercle tangent aux deux côtés de l'angle (figure 48).*

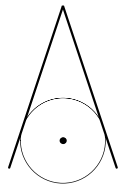


Fig. 48

8 Un triangle dans un cercle

Jusqu'à présent dans ce chapitre, nous avons étudié des propriétés de symétrie de figures simples, toutes plus ou moins parentes entre elles. Ces propriétés n'avaient pas grand chose d'étonnant : elles résultaient de manière naturelle de la symétrie.

Maintenant nous allons étudier une propriété des triangles qui n'est pas du tout évidente, et comme nous allons le voir, la situation sera peu symétrique. Cette propriété concerne les médiatrices d'un triangle. Rappelons qu'on appelle *médiatrices d'un triangle*, les médiatrices de ses côtés.

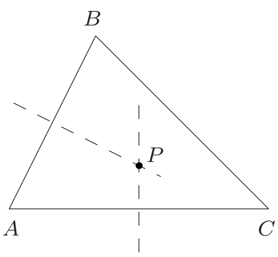


Fig. 49

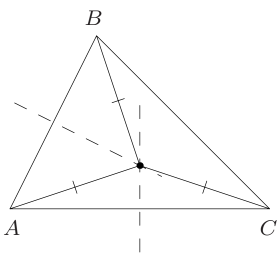


Fig. 50

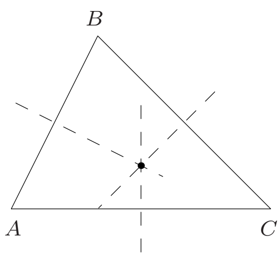


Fig. 51

Considérons un triangle ABC quelconque (figure 49) et deux de ses médiatrices. Elles se rencontrent en un point P. Puisque ce point est sur la médiatrice de $[AC]$, il est à égale distance de A et de C (voir proposition 4a à la page 81). Pour la même raison, puisqu'il est sur la médiatrice de $[AB]$, il est à égale distance de A et de B. Donc il est à égale distance de B et de C (figure 50), et par conséquent il est sur la médiatrice de $[BC]$ (voir proposition 4b). C'est ce que montre la figure 51. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

30. *Dans n'importe quel triangle, les médiatrices se rencontrent en un même point.*

Puisque le point de concours des médiatrices est à égale distance des trois sommets du triangle, ce point est le centre d'un cercle qui passe par ces trois sommets.

Remarquons que pour chaque triangle il n'y a qu'un seul cercle qui passe par ses trois sommets. Le point de rencontre des

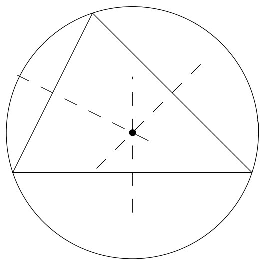


Fig. 52

médiatrices est en effet la seule position possible pour le centre d'un tel cercle : celui-ci doit se trouver à égale distance des trois sommets, et donc, en vertu de la proposition 4b, sur chacune des médiatrices. Nous avons donc la proposition suivante.

31. *Pour n'importe quel triangle, il existe un cercle qui passe par ses trois sommets, et il n'y en a qu'un seul.*

La figure 52 montre un tel cercle, que l'on appelle *cercle circonscrit* au triangle.

9 Un cercle dans un triangle

Venons-en maintenant à une propriété des bissectrices d'un triangle. Rappelons qu'on appelle *bissectrices d'un triangle*, les bissectrices de ses angles.

Considérons un triangle ABC quelconque et deux de ses bissectrices. Elles se rencontrent en un point P. Puisqu'il est sur la bissectrice de l'angle en A, ce point se trouve à égale distance de $[AB]$ et de $[AC]$ (voir proposition 26 à la page 90). Pour la même raison, et puisqu'il est sur la bissectrice de l'angle en C, il est à égale distance de $[AC]$ et de $[BC]$. Donc ce point est à égale distance de $[AB]$ et de $[BC]$, et par conséquent, il est sur la bissectrice de l'angle en B (voir proposition 27 à la page 90). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

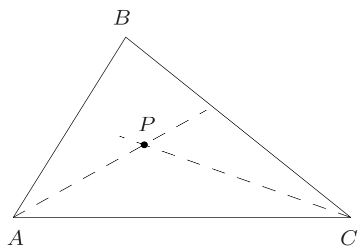


Fig. 53

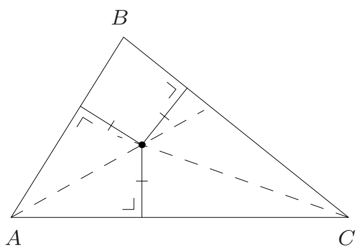


Fig. 54

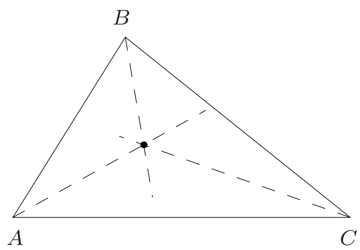


Fig. 55

32. *Dans n'importe quel triangle, les bissectrices se rencontrent en un même point.*

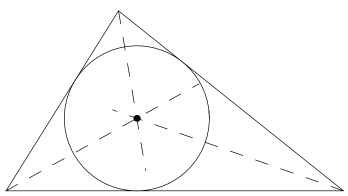


Fig. 56

Puisque le point de concours des bissectrices est à égale distance des trois côtés du triangle, nous avons aussi la proposition suivante.

33. *Dans n'importe quel triangle, il existe un cercle tangent à ses trois côtés.*

La figure 56 montre un tel cercle, que l'on appelle *cercle inscrit* au triangle.

Remarquons aussi que pour chaque triangle il n'y a qu'un seul cercle qui est tangent à ses trois côtés. Le point de rencontre des bissectrices est en effet la seule position possible pour le centre d'un tel cercle : celui-ci doit se trouver à égale distance des trois côtés, et donc, en vertu de la proposition 27, sur chacune des bissectrices.

6

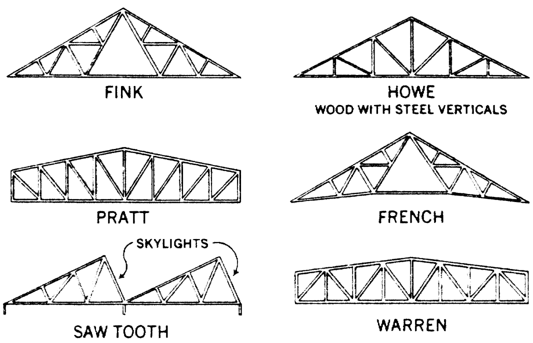
Trois segments

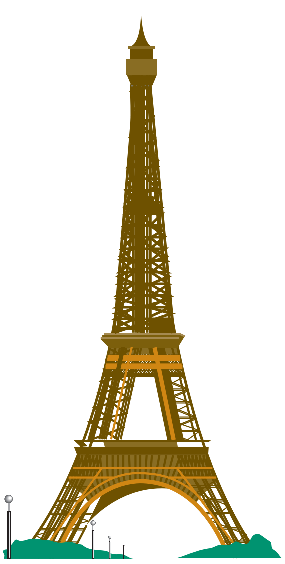
Considérons trois phénomènes géométriques qui n'ont pas l'air d'avoir grand chose en commun.

Le premier est que le plus court chemin d'un point à un autre est celui qui va en ligne droite.

Le second est que deux cercles, selon la façon dont ils sont disposés, se rencontrent soit en deux points, soit en un seul, soit en aucun.

Le troisième concerne les triangles. Si on considère tous les polygones réalisés à l'aide de tiges articulées (absolument rigides), on s'aperçoit que le triangle est le seul qui soit indéformable. C'est pourquoi on l'utilise pour construire des charpentes et plus généralement des structures rigides. Par exemple, pour rigidifier une étagère, il suffit de la munir d'une barre transversale qui décompose le rectangle en deux triangles.





Nous montrons dans ce chapitre que, malgré l'apparence, ces trois phénomènes ont entre eux un lien de parenté assez étroit.

1 L'inégalité triangulaire

Phénomène de base 1. – Soit, comme sur la figure 1 à la page suivante, trois segments (ou trois baguettes) $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ disposés en triangle. Le chemin direct de A à C est plus court que le chemin qui passe par B. Nous pouvons écrire cela sous la forme

$$|AC| < |AB| + |BC|.$$

De manière générale, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

1. *Chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.*

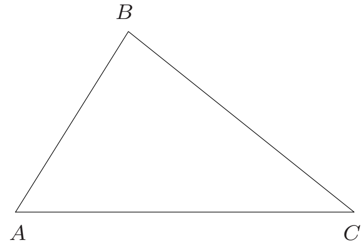


Fig. 1

Cette propriété est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

Donnons-nous maintenant trois segments inégaux.

Phénomène de base 2. – À la figure 2a, le plus grand des trois segments est plus grand que la somme des deux autres. Il est clair que nous ne pouvons pas former un triangle dans ce cas (figure 2b).

Fig. 2 (a,b)

Phénomène de base 3. – À la figure 3a, le plus grand des trois segments est égal à la somme des deux autres. Nous ne pouvons pas non plus former un triangle (figure 3b).

Fig. 3 (a,b)

Cette situation nous conduit à la proposition suivante, illustrée par la figure 4.

2. *Si trois segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ sont tels que*

$$|AB| + |BC| = |AC|,$$

alors les points A, B et C sont alignés.

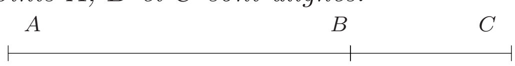


Fig. 4

Phénomène de base 4. – Enfin à la figure 5a , le plus grand des trois est plus petit que la somme des deux autres. Cela nous permet de les disposer en triangle, comme le montre la figure 5b.

Fig. 5 (a,b)

Dans le cas particulier où deux des trois segments donnés sont égaux, nous pouvons former un triangle dès que la somme des deux segments égaux est plus grande que le troisième. Le triangle obtenu est alors isocèle. La figure 6 illustre deux cas possibles.

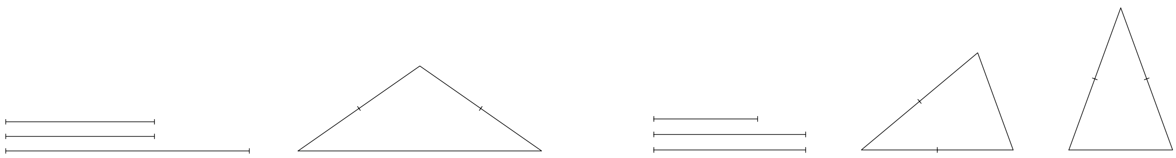


Fig. 6

2 Deux cercles

Pour étudier les positions respectives possibles de deux cercles, on est amené à considérer aussi trois segments : deux d'entre eux correspondent aux rayons des deux cercles, et le troisième est donné par la distance entre leurs centres.

2.1 Intersection de deux cercles

Phénomène de base 5. – Dans un premier temps, donnons-nous deux cercles de rayons différents (figure 7). Quelles sont toutes les façons de les disposer l'un par rapport à l'autre ? Partant du cas où les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre comme à la figure 7, déplaçons progressivement le petit cercle vers la gauche.

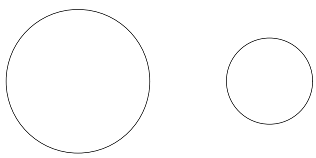
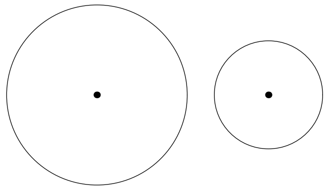


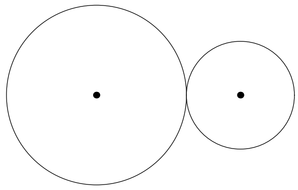
Fig. 7

Nous obtenons successivement les situations suivantes :

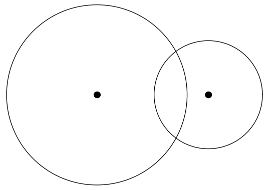
(a) Le petit cercle est à l'extérieur du grand, et les deux cercles ne se rencontrent pas.



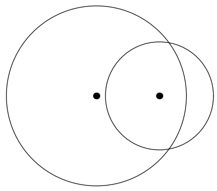
(b) Le petit cercle est encore à l'extérieur du grand, mais il le touche juste en point.



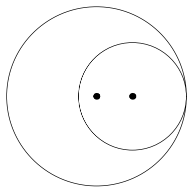
(c) Le centre du petit cercle est encore à l'extérieur du grand cercle, mais les deux cercles se rencontrent maintenant en deux points.



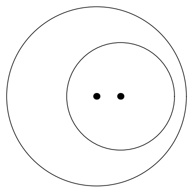
(d) Le centre du petit cercle est maintenant à l'intérieur du grand cercle et le petit cercle déborde encore à l'extérieur du grand ; les cercles se rencontrent encore en deux points.



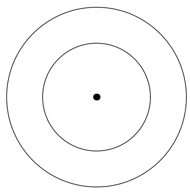
(e) Le petit cercle est à l'intérieur du grand, mais il le touche encore en un point.



(f) Le petit cercle est entièrement à l'intérieur du grand, et les deux cercles ne se rencontrent pas.



(g) Les deux cercles ont le même centre.



2.2 Trois segments et deux cercles

Nous pouvons rapprocher ces observations de celles faites avec trois segments à la section précédente. Pour cela, revenons à l'idée de faire un triangle avec trois segments p, q et r (figure 8a). Pour y voir clair, disposons le plus grand segment, à savoir r, horizontalement. Pour construire un triangle, nous devons accrocher p par exemple à l'extrémité gauche de r, et q à l'extrémité droite (figure 8b). Ceci fait, nous devons tourner p autour de son point d'attache, et q autour du sien, jusqu'à ce que les deux extrémités se rencontrent. Mais toutes les positions que l'extrémité de p peut occuper sont sur un cercle, et de même pour toutes les positions que peut occuper l'extrémité de q. Si les deux cercles ne se rencontrent pas, il n'y aura pas de triangle possible. En d'autres termes, nous cherchons le troisième sommet du triangle : il doit se trouver sur les deux cercles à la fois, c'est-à-dire en un point où ils se rencontrent. Il n'y a pas de tel point sur la figure 8c.

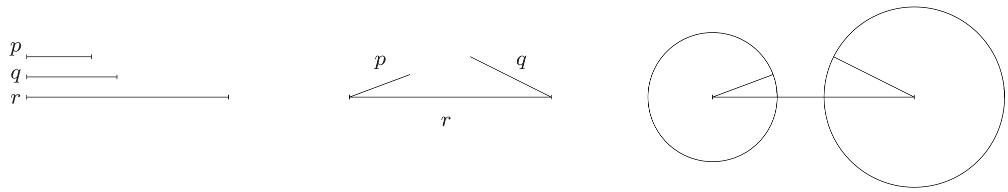
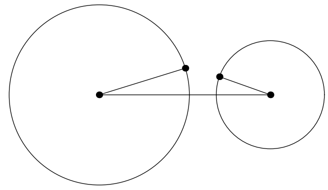


Fig. 8 (a,b,c)

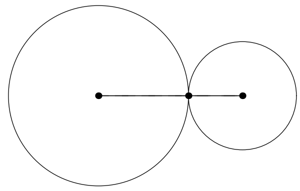
À la section précédente nous avons rencontré les différents cas qui peuvent se présenter : soit les deux cercles ne se rencontrent pas (cas a, f et g), soit ils se rencontrent en un point (cas b et e), soit ils se rencontrent en deux points (cas c et d). Comme nous avons en effet placé le plus grand des trois segments horizontalement (figure 8b), seuls les cas a, b et c nous intéressent : le segment qui joint les centres des cercles y est le plus grand. Les deux autres sont les rayons des deux cercles.

Reprenons ces différents cas, en marquant chaque fois sur la figure les rayons et le segment déterminé par les centres des deux cercles :

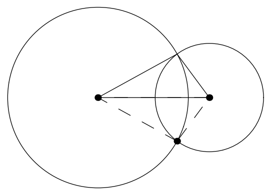
(*a*) Le segment déterminé par les deux centres est plus grand que la somme des deux autres et, comme nous l'avons déjà observé, on ne peut pas construire de triangle avec les trois segments.



(*b*) Le segment déterminé par les centres est égal à la somme des deux autres ; les deux cercles se touchent en un seul point ; il n'y a pas de triangle possible.



(*c*) Le segment déterminé par les centres (qui reste le plus grand des trois segments) est cette fois plus petit que la somme des deux autres, et il y deux triangles possibles.



2.3 Axe de symétrie de deux cercles

La figure formée par deux cercles de centres distincts possède un axe de symétrie. La droite qui joint les deux centres est en effet axe de symétrie pour chacun des deux cercles (voir la proposition 23 à la page 87). On voit bien cette symétrie si on amène l'axe en position verticale. Les différentes positions relatives de deux cercles ont été représentées avec leur axe de symétrie à la figure 9.

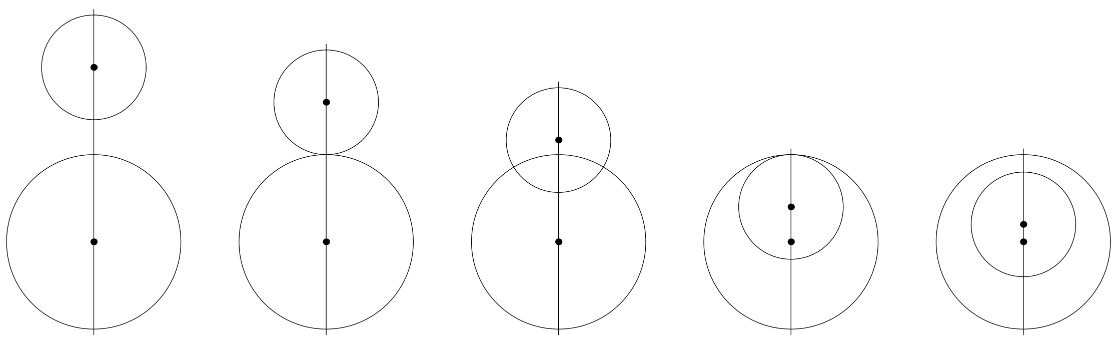


Fig. 9

Dans le cas où les deux cercles se rencontrent en deux points, dessinons la *corde commune aux deux cercles*, c'est-à-dire la corde qui passe par les deux points de rencontre des cercles (figure 10 à la page suivante). La figure est parfaitement symétrique et cette corde est perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres.

Considérons maintenant les deux cas où les cercles se touchent en un point. Pour des raisons de symétrie, ce point se trouve sur la droite qui joint les deux centres. Menons en ce point la perpendiculaire à cette droite (figure 11). Elle est tangente aux deux cercles[1]. Les deux cercles et la droite ont un seul point en commun. Dans le premier cas, on dit que les deux cercles sont *tangents extérieurement*, et dans le deuxième *tangents intérieurement.*

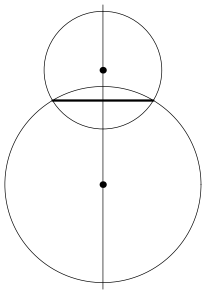


Fig. 10

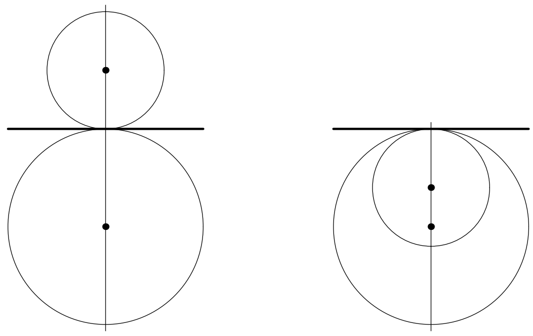


Fig. 11

3 Deux triangles

Le problème que nous nous posons maintenant est celui de savoir quand deux triangles sont identiques. Une première réponse est simple : il suffit de les superposer. Mais pour cela, il faut qu'au moins un des deux soit transportable, ce qui n'est pas toujours le cas.

Voyons donc comment – *avec un minimum d'information* – nous pouvons affirmer que deux triangles sont identiques. Nous considérerons trois cas.

3.1 Le cas « côté-angle-côté »

3. *Si deux triangles ont un angle égal et les côtés adjacents à cet angle égaux deux à deux, ils sont identiques.*

Soient donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ (figure 12).

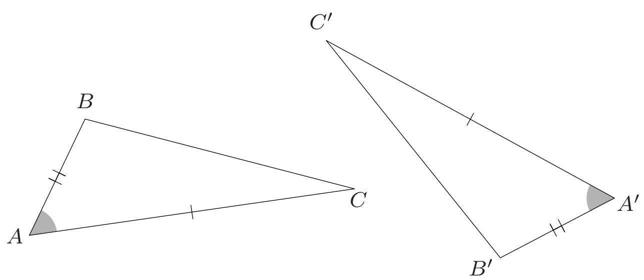


Fig. 12

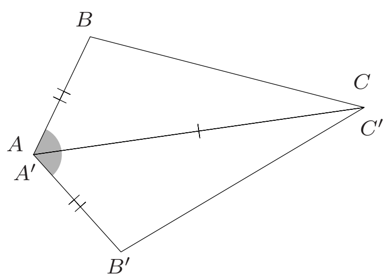


Fig. 13

[1] La notion de *droite tangente à un cercle* a été introduite au chapitre 5 à la page 88.

Supposons que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, et qu'en outre $|AB| = |A'B'|$ et $|AC| = |A'C'|$. Transportons mentalement $A'B'C'$ vers ABC de sorte que $[A'C']$ vienne sur $[AC]$. Si à ce moment B et B' sont de part et d'autre de $[AC]$ (comme le montre la figure 13 à la page précédente), retournons $A'B'C'$. Alors $[A'B']$ prend la direction de $[AB]$ (grâce à l'égalité des angles). Donc B' vient sur B. Ceci fait, les trois points A', B', C' coïncident respectivement avec A, B, C, et les deux triangles coïncident.

3.2 Le cas « angle-côté-angle »

4. *Si deux triangles ont un côté égal et les angles adjacents à ce côté égaux deux à deux, ils sont identiques.*

Soient donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ (figure 14).

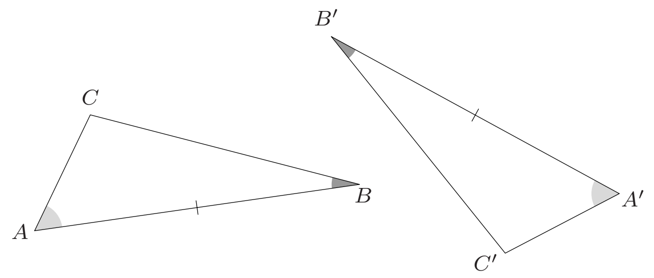


Fig. 14

Supposons que $|AB| = |A'B'|$ et qu'en outre $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Transportons mentalement $A'B'C'$ vers ABC de sorte que $[A'B']$ vienne sur $[AB]$. Si à ce moment C et C' sont de part et d'autre de $[AB]$, retournons $A'B'C'$. Alors $[A'C']$ prend la direction de $[AC]$ et $[B'C']$ la direction de $[BC]$ (grâce à l'égalité des angles). Dans ces conditions, les trois côtés des deux triangles coïncident, et donc les deux triangles coïncident.

3.3 Le cas « côté-côté-côté »

5. *Si deux triangles ont leurs trois côtés égaux deux à deux, ils sont identiques.*

Soient donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ (figure 15).

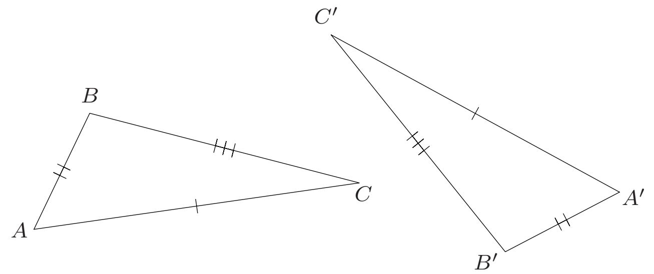


Fig. 15

Supposons que $|AB| = |A'B'|$, que $|BC| = |B'C'|$ et que $|CA| = |C'A'|$. Transportons mentalement $A'B'C'$ vers ABC de sorte que $[AB]$ vienne sur $[A'B']$. Si à ce moment C et C' sont de part et d'autre de $[AB]$, retournons $A'B'C'$. Le point C est un des deux points d'intersection du cercle de centre A et de rayon $|AC|$ et du cercle de centre B et de rayon $|BC|$. Il en va de même pour C', puisque $|AC| = |A'C'|$ et que $|BC| = |B'C'|$ (deux cercles de même centre et de même rayon sont identiques). Donc, les points C et C' coïncident, puisqu'ils se trouvent du même côté de $[AB]$. Les deux triangles sont identiques.

Ces trois théorèmes permettent de conclure que deux triangles sont identiques, même dans des circonstances où cette identité n'est pas du tout évidente. Par exemple, si on sait que les deux dessins de la figure 16 représentent le même cube en perspective, on en déduit que les deux triangles grisés sont identiques, parce que leurs côtés sont égaux deux à deux.

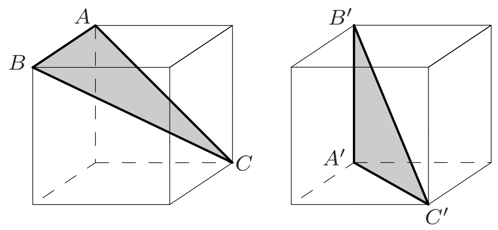


Fig. 16

Revenons enfin à une observation que nous avions faite au début de ce chapitre : un triangle réalisé en tiges articulées est indéformable. L'explication de cette propriété est maintenant simple : si un tel triangle pouvait être déformé, sans bien entendu que les longueurs des tiges soient modifiées, alors on aurait deux triangles non superposables avec des côtés deux à deux de même longueur. Mais nous savons par la proposition 5 que c'est impossible.

7

Rectangles, cercles et angles

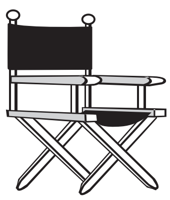
1 Horizontale et verticale

Phénomène de base 1. – Sur un tableau vertical, dessinons une ligne horizontale et une ligne verticale qui se rencontrent. Elles forment quatre angles droits.

Phénomène de base 2. – Sur un tableau vertical, plaçons un angle droit dont un côté est vertical. Son autre côté est alors horizontal. Plaçons-y un autre angle droit dont un côté est horizontal. Son autre côté est alors vertical.

Phénomène de base 3. – Sur un tableau vertical, dessinons une ligne horizontale (figure1a) et, au dessus de cette ligne, deux segments verticaux de même longueur dont les extrémités inférieures reposent sur cette ligne (figure 1b). La droite qui passe par leurs extrémités supérieures est horizontale (figure 1c).

Fig. 1 (a,b,c)



Phénomène de base 4. – Formons une croix au moyen de deux segments égaux se coupant en leur milieu (figure 2a à la page suivante). Pour voir plus clairement la forme dessinée par les extrémités de la croix, dessinons une ligne horizontale sur un tableau vertical, et déposons-y la croix (figure 2b). Les quatre extrémités de la croix forment un rectangle (figure 2c).

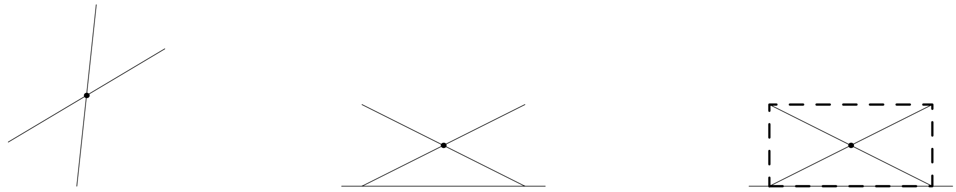
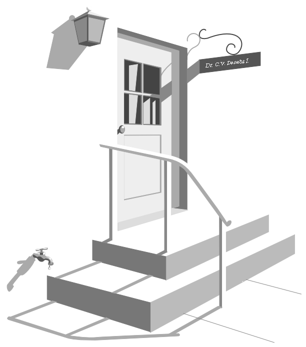
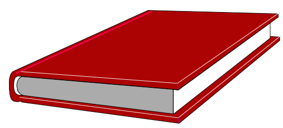


Fig. 2 (a,b,c)

2 Rectangles

Le rectangle est sans doute la figure la plus commune dans les objets produits par l'homme. Il est présent autour de nous dans toutes les positions. Par exemple, le plus souvent, les portes et les fenêtres sont des rectangles verticaux, le dessus d'une table est un rectangle horizontal, les armoires sont formées par assemblage de rectangles horizontaux et verticaux. Les livres ont des couvertures rectangulaires et on les tient souvent en position inclinée.





La figure 3 montre quelques rectangles en position quelconque. La figure 4 les montre rangés les uns à côtés des autres.

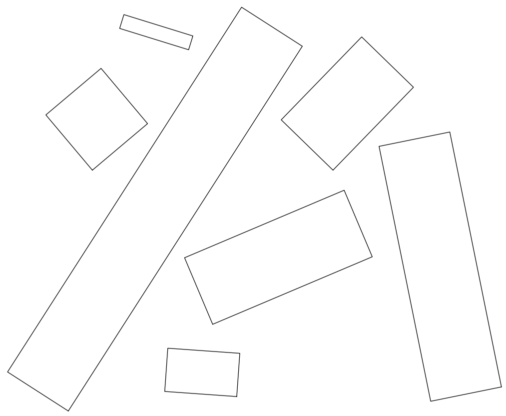


Fig. 3

Fig. 4

2.1 Propriétés du rectangle

1. *Le rectangle a quatre angles droits.*

2. *Quand un rectangle a deux côtés verticaux, ses deux autres côtés sont horizontaux.*

3. *Le rectangle a ses côtés opposés parallèles.*

4. *Le rectangle a ses côtés opposés égaux.*

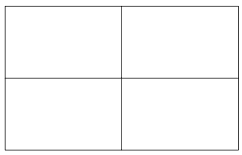


Fig. 5

5. *Les médianes du rectangle se rencontrent en leur milieu et le décomposent en quatre rectangles identiques (figure 5).*

6. *Chaque diagonale découpe le rectangle en deux triangles identiques (figure 6). Chacun de ceux-ci peut être superposé à l'autre par rotation d'un demi-tour autour du milieu de la diagonale.*

7. *Les diagonales du rectangle sont égales et se rencontrent en leur milieu (figure 7). Elles divisent le rectangle en deux fois deux triangles isocèles identiques.*

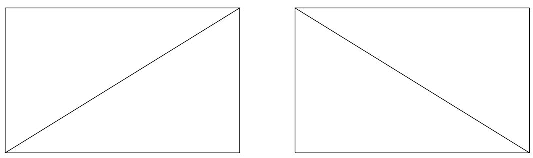


Fig. 6

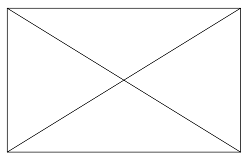


Fig. 7

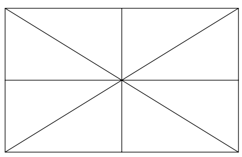


Fig. 8

8. *Les diagonales et les médianes du rectangle se rencontrent en un même point. Elles divisent le rectangle en huit triangles identiques (figure 8).*

2.2 Conditions déterminantes du rectangle

9. *Si un quadrilatère a deux côtés égaux perpendiculaires à un même troisième et situés d'un même coté de celui-ci, il est un rectangle.*

Plaçons le troisième côté de la figure horizontalement sur un tableau vertical, avec les deux côtés égaux orientés vers le haut. Ils sont verticaux (phénomène de base 2 à la page 102). La figure se trouve dans les conditions du phénomène de base 3. Le quatrième côté est donc horizontal et la figure est un rectangle.

10. *Si un quadrilatère a trois angles droits, il est un rectangle.*

Plaçons en effet un premier côté en position horizontale sur un tableau vertical avec à ses extrémités deux côtés qui forment avec lui un angle droit. Ils sont verticaux (phénomène de base 2). Le dernier côté forme un angle droit avec un des côtés verticaux. Il est donc horizontal et le quadrilatère est un rectangle.

11. *Si les deux diagonales d'un quadrilatère sont égales et se rencontrent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.*

Il suffit de placer la croix formée par les diagonales comme dans le phénomène de base 4 pour reconnaître un rectangle.

3 Angles au centre

Soit un cercle et un angle dont le sommet se trouve au centre du cercle (figure 9a). On appelle un tel angle *angle au centre*. La portion de cercle que détermine l'angle est appelée *arc de cercle intercepté par l'angle* (figure 9b), et le segment reliant les deux extrémités de cet arc est appelé *corde interceptée par l'angle* (figure 9c).

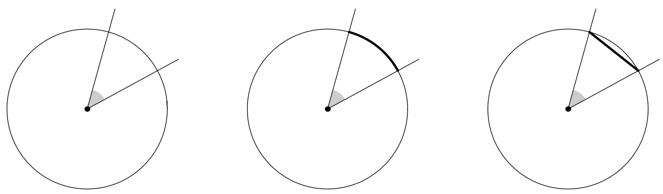


Fig. 9 (a,b,c)

Phénomène de base 5. – Donnons-nous deux angles au centre égaux (figure 10a). Faisons tourner l'un des deux autour du centre, en même temps que l'arc et la corde correspondants, de manière à le superposer à l'autre (figure 10b). Les cordes et les arcs interceptés par les deux angles coïncident.

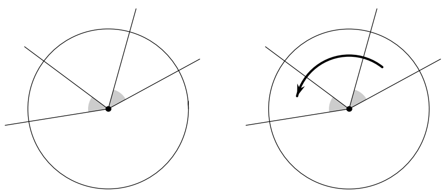


Fig. 10 (a,b)

Phénomène de base 6. – Donnons-nous maintenant deux angles interceptant des arcs égaux (figure 11a à la page suivante). Faisons glisser un des deux arcs le long du cercle de manière à les superposer, en faisant suivre l'angle au centre qui intercepte cet arc. Les angles au centre qui interceptent les deux arcs coïncident (figure 11b).

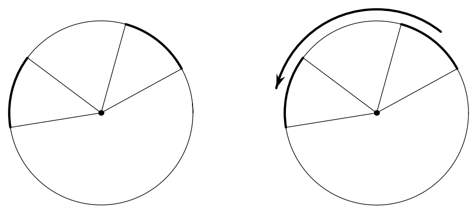


Fig. 11 (a,b)

Nous pouvons résumer tout ceci de la manière suivante :

12. *Dans n'importe quel cercle,*

- *deux angles au centre égaux interceptent des cordes et des arcs égaux ;*
- *deux arcs égaux sont interceptés par des angles au centre égaux.*

Considérons la situation particulière où les deux angles égaux sont obtenus en dessinant deux diamètres du cercle (figure 12a). Tournons cette figure pour mieux voir la symétrie (figure 12b). Nous pouvons y reconnaître un rectangle (figure 12c). Nous savons en effet que lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont égales et se rencontrent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.

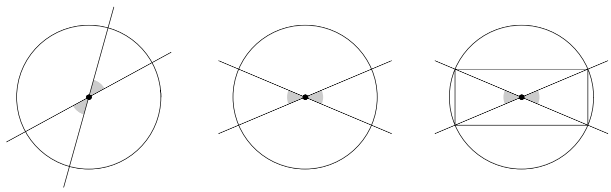


Fig. 12 (a,b,c)

4 Angles inscrits

Un *angle inscrit* à un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés le traversent. La figure 13a montre un tel angle. À nouveau, cet angle intercepte un arc de cercle (figure 13b) et une corde (figure 13c).

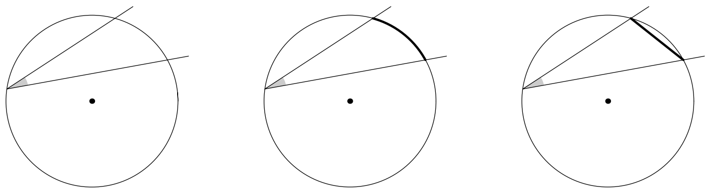


Fig. 13 (a,b,c)

Un cas particulier se présente lorsque la corde interceptée est un diamètre (figure 14a). En traçant le diamètre qui passe par le sommet de l'angle (figure 14b), nous pouvons, comme à la figure 12, faire apparaître un rectangle (figure 14c).

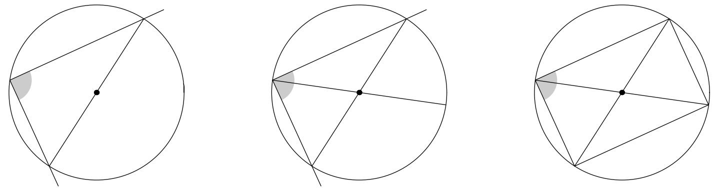


Fig. 14 (a,b,c)

Nous venons donc de démontrer la proposition suivante :

13. *Dans n'importe quel cercle, un angle inscrit qui intercepte un diamètre est un angle droit.*

Soit maintenant un angle inscrit dont un côté est un diamètre (figure 15a). Complétons la figure pour y faire à nouveau apparaître un rectangle et ses deux diagonales(figure 15b). Dans cette figure, il y a un angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit de départ. Les médianes découpent ce rectangle en huit triangles identiques (figure 15c). L'angle au centre vaut donc deux fois l'angle inscrit.

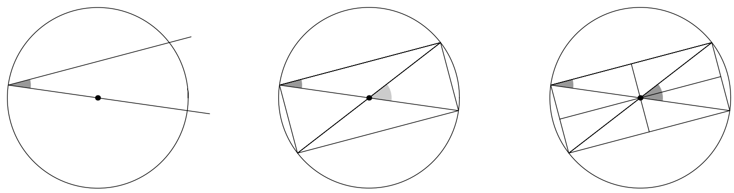


Fig. 15 (a,b,c)

Cette propriété s'étend à n'importe quel angle inscrit. Si le centre du cercle se trouve à l'intérieur de l'angle (figure 16a), on décompose celui-ci en deux angles inscrits ayant chacun un diamètre (le même) pour côté (figure 16b). Chacun d'eux vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc (figure 16c). Au total, l'angle inscrit de départ vaut donc la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.

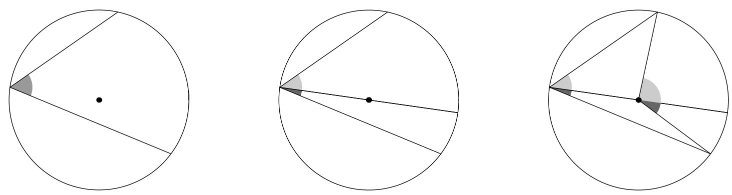


Fig. 16 (a,b,c)

La figure 17 montre la même situation pour un autre cas de figure, celui où l'angle inscrit est obtus.

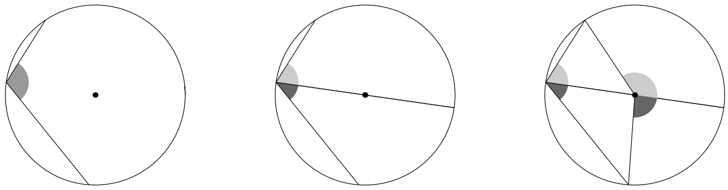


Fig. 17

Si le centre du cercle se trouve à l'extérieur de l'angle (figure 18a), on considère deux angles inscrits ayant chacun pour côté un (même) diamètre (figure 18b), et dont l'angle inscrit de départ est la différence. Chacun d'eux vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc, comme le montrent les figures 18c et 18d. L'angle inscrit de départ vaut donc également la moitié de l'angle au centre[1] interceptant le même arc.

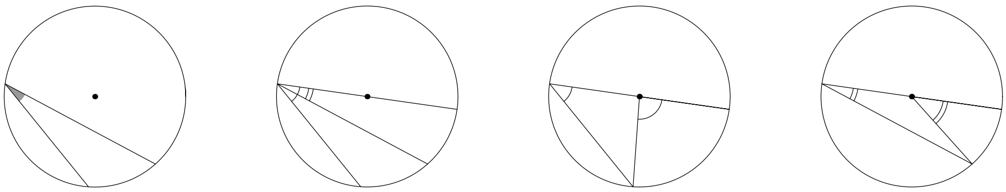


Fig. 18 (a,b,c,d)

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

14. *Dans n'importe quel cercle, un angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.*

Par conséquent, des angles inscrits interceptant le même arc de cercle sont égaux. Pour visualiser cette propriété, considérons un arc de cercle et une suite d'angles inscrits l'interceptant. Faisons parcourir l'arc de cercle supérieur par le sommet de l'angle (figure 19) : tous les angles obtenus sont égaux.

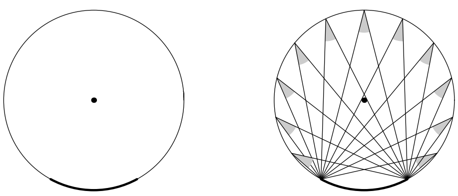


Fig. 19

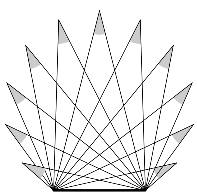


Fig. 20

Une nouvelle question se pose alors. Considérons la corde déterminée par cet arc. Y a-t-il des angles qui interceptent ce

[1] Nous rencontrons ici pour la première fois un angle de plus de 180°. Il ne nous pose pas de problème dans l'immédiat. Si nous voulions développer une théorie générale des angles, nous devrions tenir compte de ce type d'angles.

segment, autres que les angles inscrits que nous venons de déterminer (figure 20), mais qui leur soient égaux ?

Il y a évidemment les angles symétriques par rapport à la corde (figure 21). Pour vérifier qu'il n'y en a pas d'autres, procédons comme suit. Concentrons-nous sur les angles dont le sommet est situé au dessus du segment (par symétrie, nous pourrions examiner de même les angles dont le sommet se trouve en dessous du segment). Considérons tous les angles dont le sommet se trouve sur une demi-droite quelconque partant du milieu du segment choisi, et au dessus de ce segment (figure 22a). Cette demi-droite rencontre le cercle en un point, qui est le sommet d'un des angles inscrits interceptant cette corde (figure 22b). Si l'on prend sur la demi-droite un point intérieur au cercle comme sommet d'un angle, celui-ci est plus grand que l'angle considéré (figure 22c) ; si l'on prend le sommet à l'extérieur du cercle, l'angle est plus petit que l'angle considéré (figure 22d).

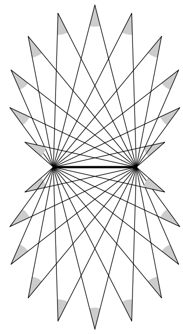


Fig. 21

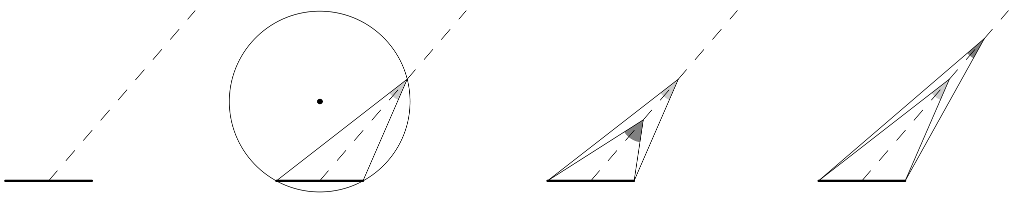


Fig. 22 (a,b,c,d)

Nous pouvons parcourir ainsi toutes les directions. Par conséquent, les seuls angles qui conviennent sont bien ceux de la figure 21.

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante :

15. *Soit un segment $[AB]$ et un point P. Tous les angles*

– *égaux à $\widehat{APB}$,*
– *qui interceptent le segment $[AB]$*
– *et qui se trouvent du même côté de $[AB]$ que P*

sont sur l'arc de cercle qui passe par A, B et P (figure 23).

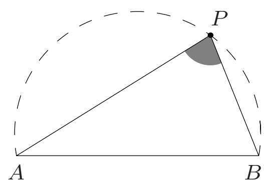


Fig. 23

Il est utile de se rappeler que la proposition 31 à la page 92 (chapitre 5) garantit l'existence et l'unicité du cercle passant par A, B et P.

5 Quadrilatères dans un cercle

Terminons ce chapitre sur les cercles et les angles en examinant les quadrilatères dont les sommets se trouvent sur un cercle. Nous avons vu que n'importe quel triangle possède un cercle circonscrit (cf. proposition 31 à la page 92). Qu'en est-il des quadrilatères ?

On peut aisément vérifier que tous les quadrilatères ne sont pas inscriptibles à un cercle. Inscrivons un quadrilatère dans un cercle (figure 24a). Choisissons trois de ces sommets. En vertu de la proposition 31, ce cercle est le seul passant par ces trois points (figure 24b). Si on remplace le quatrième sommet par un point qui ne se trouve pas sur ce cercle, on ne pourra pas trouver de cercle qui passe par les quatre sommets de ce nouveau quadrilatère (figure 24c). Si on en trouvait un, on aurait deux cercles qui passeraient par les trois points.

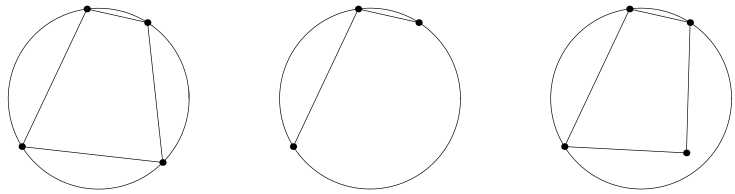


Fig. 24 (a,b,c)

La figure 25 montre un quadrilatère[2] inscrit dans un cercle. Considérons les angles opposés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$. L'angle $\widehat{\alpha}$ vaut la moitié de $\widehat{\alpha'}$ et $\widehat{\beta}$ vaut la moitié de $\widehat{\beta'}$ (proposition 14 à la page 108). Comme $\widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'}$ vaut quatre droits, la somme des deux angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ vaut deux droits.

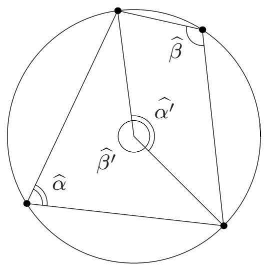
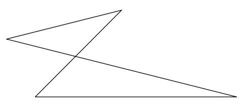


Fig. 25

D'autre part, lorsqu'un quadrilatère a deux angles opposés dont la somme vaut deux droits, on peut l'inscrire dans un cercle. En effet, soit $ABCD$ un tel quadrilatère (figure 26a à la page suivante) dont la somme des angles en B et D vaut deux droits. On considère trois de ses sommets A, B et C. Un cercle passe par ces trois points (figure 26b). On sait que si l'on choisit un quatrième sommet D' sur le cercle, l'angle en D' sera égal à l'angle en D, puisque chacun d'eux ajouté à l'angle en B donne deux droits. On sait aussi que tous les angles égaux à D' et qui interceptent la corde $[AC]$ (et qui se trouvent du même côté de $[AC]$ que D) sont sur l'arc de cercle entre A et C (proposition

[2] Nous ne considérons pas de quadrilatère croisé comme le montre la figure ci-contre.



15 à la page 109). Donc le point D doit se trouver sur cet arc de cercle. Le quadrilatère est donc inscriptible (figure 26d).

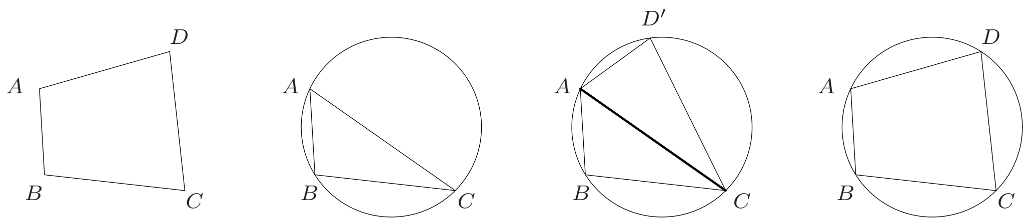


Fig. 26 (a,b,c,d)

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante :

16. *Un quadrilatère est inscriptible à un cercle si et seulement si la somme de deux de ses angles opposés vaut deux droits.*

8

Parallèles et angles

La figure 1a montre deux ensembles de lignes droites qui se croisent. Chaque ensemble est clairement identifiable : ses lignes sont toutes parallèles entre elles. En disposant cette figure de manière qu'un des ensembles soit horizontal, on y voit plus facilement toute une série d'angles et de segments égaux qui vont nous intéresser (figure 1b).

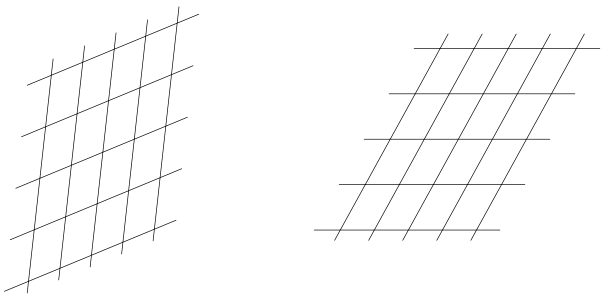


Fig. 1 (a,b)

Comme le montre la figure 2, l'ombre au soleil d'une damier vu par transparence a souvent une forme analogue à celle de la figure 1.

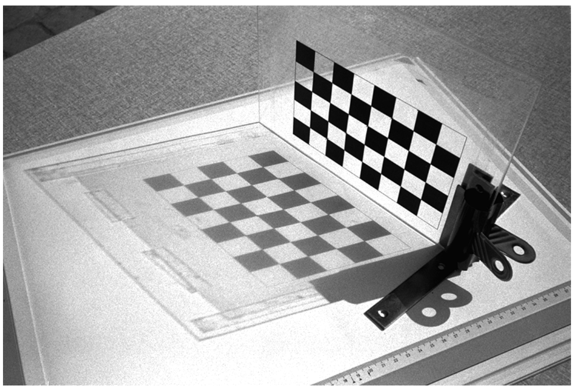


Fig. 2

1 Parallèles, angles et demi-tour

Phénomène de base 1. – Dans un premier temps, dessinons seulement deux droites qui se rencontrent : les droites a et b de la figure 3a. Nous y voyons des angles égaux (figures 3b et 3c), que l'on appelle *angles opposés par le sommet*. En plaçant les deux lignes comme sur la figure 4, on voit encore mieux l'égalité des deux angles.

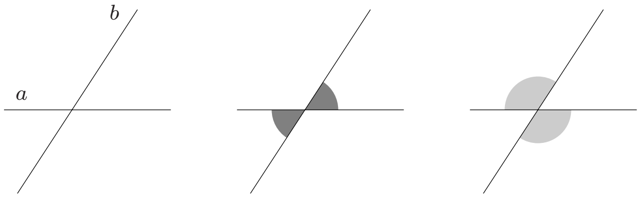


Fig. 3 (a,b,c)

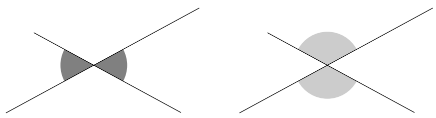


Fig. 4

Phénomène de base 2. – Traçons ensuite deux droites parallèles et une transversale (figure 5). Nous voyons que les deux droites sont inclinées de la même façon sur la transversale : les angles grisés de la figure 6 sont donc égaux. On les appelle *angles correspondants*. La figure 7 montre d'autres couples d'angles correspondants.

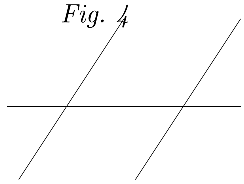


Fig. 5

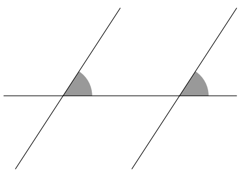


Fig. 6

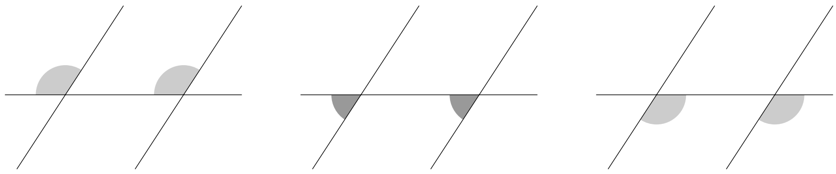


Fig. 7

Sur la figure 8, on voit les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ qui sont égaux car ce sont des angles correspondants. Mais les angles $\widehat{b}$ et $\widehat{c}$ sont aussi égaux car ils sont opposés par le sommet. Ainsi les deux angles grisés de la figure 9 sont égaux. Des angles disposés de cette façon sont appelés *angles alternes internes.* La figure 10 montre une autre paire d'angles alternes internes.

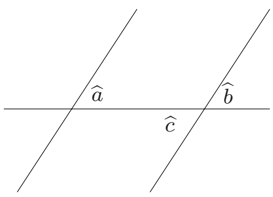


Fig. 8

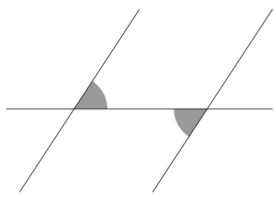


Fig. 9

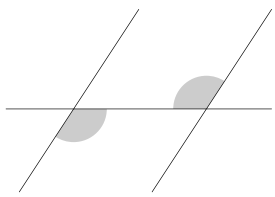


Fig. 10

Considérons maintenant les phénomènes suivants.

Phénomène de base 3. – Donnons-nous deux angles égaux $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ (figure 11) et déposons-les sur une droite c, du même côté de c et inclinés du même côté (figure 12). Les côtés des deux angles qui ne reposent par sur c sont parallèles[1].

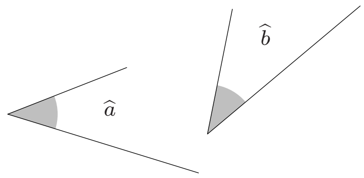


Fig. 11

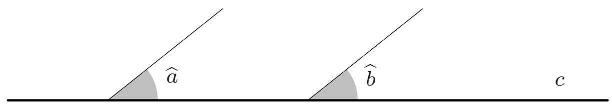


Fig. 12

Phénomène de base 4. – Considérons encore la figure 12. On peut passer de l'angle $\widehat{a}$ à l'angle $\widehat{b}$ en faisant glisser $\widehat{a}$ le long de c. Durant tout le mouvement, le côté de $\widehat{a}$ qui n'est pas sur c reste parallèle à lui-même (figure 13).

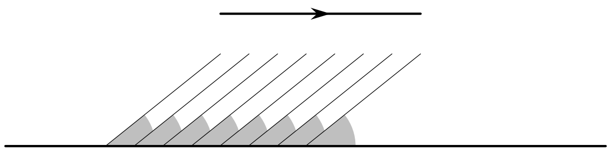


Fig. 13

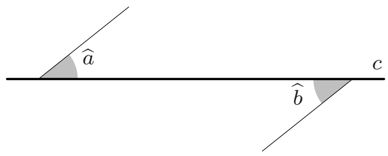


Fig. 14

Phénomène de base 5. – Donnons-nous deux angles égaux a et b (figure 11) et déposons-les sur une droite c, de part et d'autre de c et inclinés comme à la figure 14. Les côtés des deux angles qui ne sont pas sur c sont parallèles.

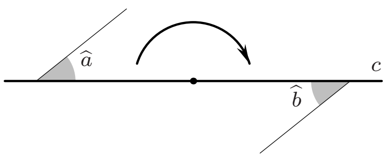


Fig. 15

Phénomène de base 6. – Considérons encore la figure 14. On peut passer de l'angle a à l'angle b en faisant tourner a d'un demi-tour autour du milieu du segment qui relie les deux sommets (figure 15).

La proposition suivante résume nos observations et expériences :

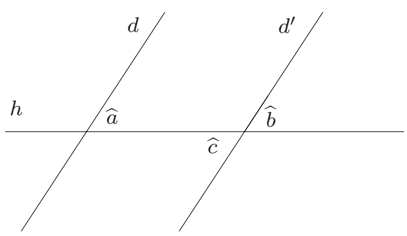


Fig. 16

1. *Soit trois lignes droites h, d et d' telles que h et d se rencontrent (figure 16). Si une des trois propriétés suivantes est vérifiée, alors les deux autres le sont aussi :*

1. *d et d' sont parallèles ;*
2. *les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont égaux ;*
3. *les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{c}$ sont égaux.*

[1] On comparer ca ceci au phénomène de base 3 à la page 78.

Notons au passage qu'en formulant le phénomène de base 6 à la page précédente, nous avons imaginé de faire faire un demi-tour à une figure. Nous recourrons plusieurs fois dans la suite à la proposition suivante :

2. *Si on fait faire à une droite d'un plan un demi-tour autour d'un point, la droite à l'arrivée est parallèle à la droite de départ.*

2 La somme des angles d'un triangle

Intéressons-nous maintenant à ce qu'on appelle couramment *la somme des angles d'un triangle*. On dit en abrégé *somme des angles* pour *somme des mesures des angles*. Rappelons qu'on mesure habituellement les angles en degrés.

La figure 17 montre quatre triangles. Nous allons prouver un résultat étonnant : quel que soit le triangle, la somme de ses angles est la même.

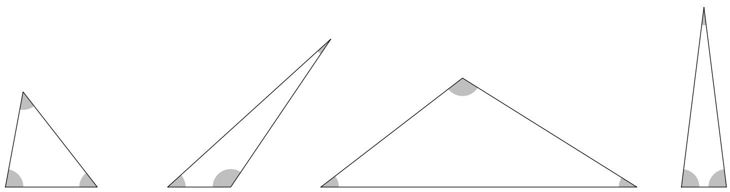


Fig. 17

Donnons-nous donc un triangle (figure 18). Complétons-le par une ligne parallèle à l'un de ses côtés (figure 19).

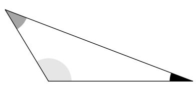


Fig. 18

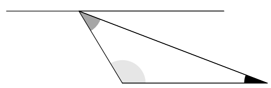


Fig. 19

Nous y retrouvons de deux manières distinctes deux parallèles coupées par une transversale. D'abord, à la figure 20, on voit des angles alternes-internes, qui sont donc égaux. Ensuite, à la figure 21, on trouve deux autres angles égaux. On conclut que la juxtaposition des trois angles du triangle donne un angle plat, c'est-à-dire 180°.

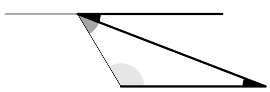


Fig. 20

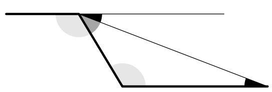


Fig. 21

3. *La somme des angles de n'importe quel triangle vaut* 180°.

3 La somme des angles d'un quadrilatère

La figure 22 montre quatre quadrilatères. Nous allons maintenant prouver un nouveau résultat étonnant : quel que soit le quadrilatère choisi, la somme de ses angles est la même, et elle vaut quatre angles droits (ce que l'on voit facilement pour le rectangle).

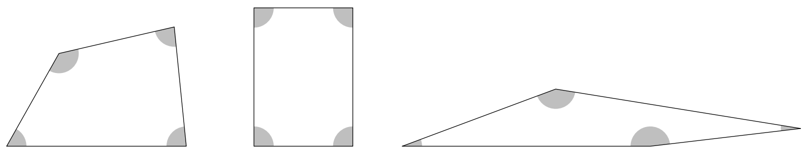


Fig. 22

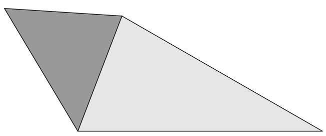


Fig. 23

N'importe quel quadrilatère peut être découpé en deux triangles par un coup de ciseau le long d'une diagonale (figure 23). La somme des angles est donnée par la somme des angles des deux triangles. Elle vaut donc 360°.

4. *La somme des angles de n'importe quel quadrilatère convexe vaut*
360°.

Nous n'avons envisagé que les quadrilatères *convexes*, ce qui veut dire que nous n'avons pas pris en considération les quadrilatères qui, comme celui de la figure 24, ont un angle rentrant. Nous n'avons pas non plus considéré les quadrilatères dont deux côtés se croisent (comme par exemple celui de la figure 25).

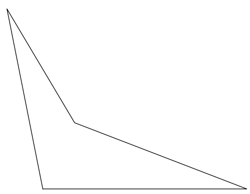


Fig. 24

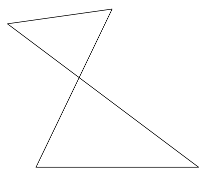


Fig. 25

4 La somme des angles d'un polygone quelconque

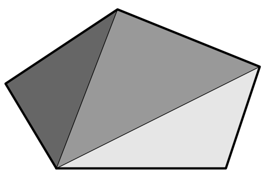


Fig. 26

Dans ces conditions, on peut décomposer un polygone à n côtés en $n-2$ triangles. On voit dans ces cas-là que la somme des angles du polygone vaut $(n-2)\times 180°$.

Par exemple, on peut décomposer un pentagone en trois triangles. La somme de ses angles vaut donc $3\times 180°$. On peut décomposer un hexagone en quatre triangles. La somme de ses angles vaut donc $4\times 180°$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

5. *La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut* $(n-2) \times 180°$.

5 Les angles des polygones réguliers

Un *polygone régulier* est un polygone dont tous les côtés sont égaux et dont tous les angles sont égaux.

Une manière de calculer la somme des angles d'un polygone régulier fait appel à la proposition 5. Prenons par exemple un pentagone régulier (figure 27). La somme de ses angles vaut $3 \times 180°$, c'est-à-dire $540°$. Comme il y a cinq sommets, l'angle en chaque sommet vaut $\frac{540°}{5} = 108°$.

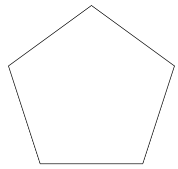


Fig. 27

De manière générale :

6. *L'angle en chaque sommet d'un polygone régulier ayant n côtés vaut* $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$.

6 Pavages

La figure 28 représente un pavage avec des dalles carrées. Elle suffit à montrer que l'on peut assembler certains polygones de sorte

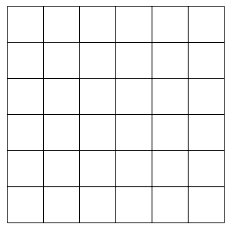


Fig. 28

(*a*) qu'ils ne se recouvrent pas,

(*b*) qu'ils ne laissent aucune lacune (aucune partie non recouverte) entre eux,

(*c*) que l'assemblage puisse être étendu à tout le plan.

Nous allons nous intéresser à des pavages de ce genre en ajoutant deux conditions :

(*d*) la première est que, comme c'est déjà le cas pour la figure 28, tous les polygones soient identiques ;

(*e*) la seconde est qu'ils se côtoient toujours le long d'un côté entier ; par exemple, le pavage de la figure 29 ne satisfait pas à cette condition.

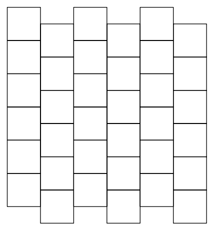


Fig. 29

Nous venons de voir qu'on peut paver le plan avec des carrés. Avec quels autres polygones réguliers est-ce encore possible ?

Puisque l'angle du triangle équilatéral vaut 60 degrés, on peut assembler six triangles équilatéraux autour d'un point (figure 30 à la page suivante). En effet, le tour complet vaut 360 degrés, c'est-à-dire exactement 6 fois soixante degrés. Qui plus est cette figure peut être étendue pour couvrir le plan entier, comme le montre la figure 31 à la page suivante.

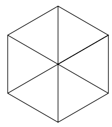


Fig. 30

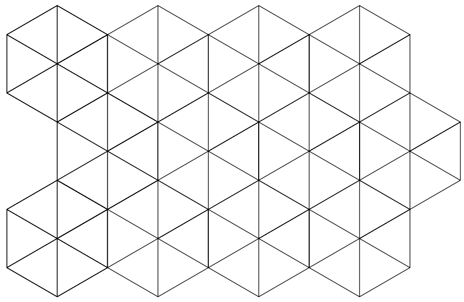


Fig. 31

Que se passe-t-il lorsque l'on prend des pentagones réguliers ? En chaque sommet, l'angle intérieur vaut $\frac{3\times 180°}{5} = 108°$. En juxtaposant trois angles on obtient un angle total de 324°, ce qui n'est pas assez (figure 32a). En en juxtaposant quatre, on obtient 432°, ce qui est trop (figure 32b). Il est donc impossible de paver le plan avec des pentagones réguliers.

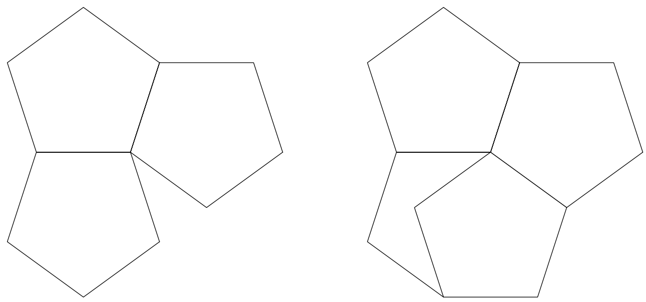


Fig. 32 (a,b)

Les angles intérieurs des hexagones réguliers valent

$$\frac{(6-2)\times 180°}{6} = \frac{4\times 180°}{6} = 120°.$$

Trois hexagones s'ajustent parfaitement en chaque nœud, comme le montre la figure 33. Ici aussi, cette figure peut être étendue au plan entier (voir figure 34). En divisant chaque hexagone en six triangles équilatéraux, on retrouve le pavage de la figure 31.

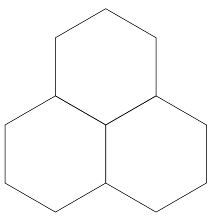


Fig. 33

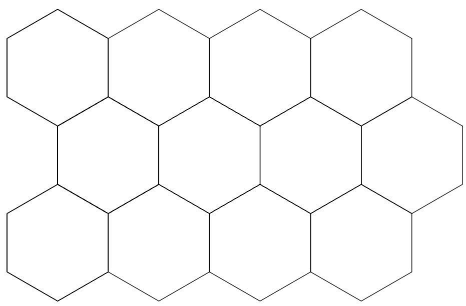


Fig. 34

Dans le cas de l'heptagone régulier, en chaque sommet l'angle intérieur vaut $\frac{5\times180°}{7}$, c'est-à-dire entre 128° et 129°. Trois angles juxtaposés mesurent au total plus de 384°, ce qui est trop. On ne peut donc pas paver en n'utilisant que des heptagones réguliers.

On peut observer, et on prouverait sans peine, que plus le nombre de côtés d'un polygone régulier est élevé, plus grand est l'angle en chacun de ses sommets. Ceci montre qu'il n'est pas possible de paver le plan avec des polygones réguliers dont le nombre de côté est plus grand que six.

On dit qu'un pavage du plan est *régulier* lorsque, satisfaisant aux conditions que nous nous sommes données ci-dessus, il est réalisé avec des polygones réguliers.

Nous avons donc démontré que :

7. *Il y a trois pavages réguliers : les pavages avec des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers. Ils ont respectivement six, quatre et trois polygones autour de chaque nœud.*

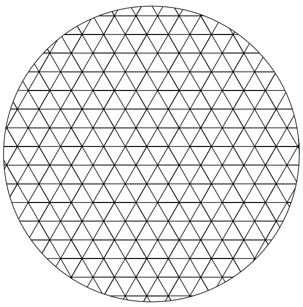


Fig. 35

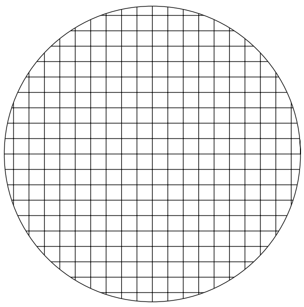


Fig. 36

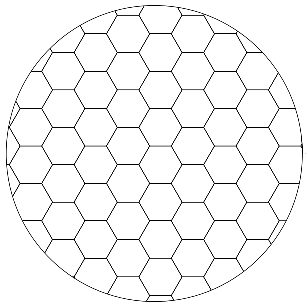


Fig. 37

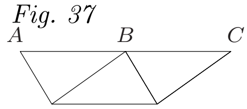


Fig. 38

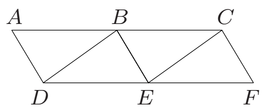


Fig. 39

La question des pavages du plan est vaste. Contentons-nous ici de nous poser à ce sujet une dernière question : avec quels types de polygones quelconques peut-on paver le plan ?

Montrons d'abord qu'on peut paver le plan avec un triangle quelconque. La figure 38 montre trois triangles identiques, accolés de telle sorte que les côtés $[AB]$ et $[BC]$ soient alignés (la somme des angles se trouvant en B vaut 180°). Ajoutons un triangle à cet assemblage (figure 39) ; les côtés $[DE]$ et $[EF]$ sont alignés. En continuant de même, on forme une bande (figure 40), que l'on peut prolonger indéfiniment des deux côtés.

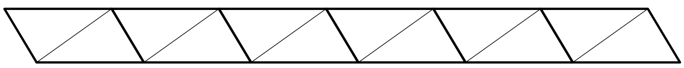


Fig. 40

En accolant indéfiniment de telles bandes, on arrive à paver tout le plan (figure 41 à la page suivante).

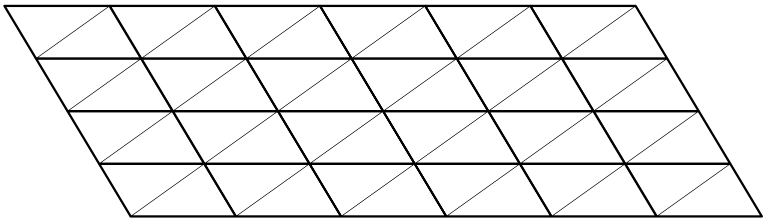


Fig. 41

8. *On peut paver le plan avec n'importe quel triangle.*

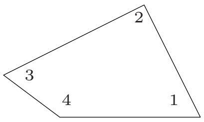


Fig. 42

Ce qui est plus surprenant, c'est que l'on peut également paver avec n'importe quel quadrilatère. Partons d'un premier quadrilatère comme le montre la figure 42. Numérotons ses angles. Créons-en un deuxième en tournant le premier d'un demi-tour autour du milieu d'un de ses côtés, ce qui amène l'angle 2 à côté de l'angle 1. Continuons de même en faisant tourner le deuxième quadrilatère, ce qui amène l'angle 3 à côté de l'angle 2. On fait ensuite de même avec le troisième quadrilatère, ce qui amène l'angle 4 à côté de l'angle 3. Puisque la somme des angles intérieurs de n'importe quel quadrilatère mesure 360°, les quatre quadrilatères occupent exactement le tour complet autour du point où les angles se rassemblent (figure 43).

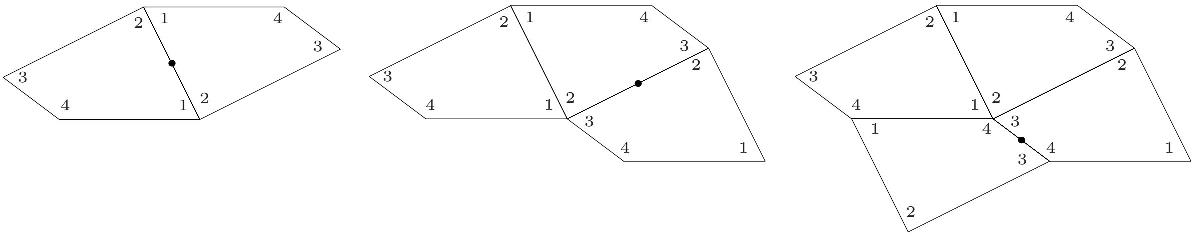


Fig. 43

Peut-on maintenant étendre ce début de pavage au plan entier ? Repartons à la figure 44 de l'octogone obtenu à la figure 43 en accolant quatre quadrilatères. On veut lui accoler une copie de lui-même, comme le suggère la figure 45. Il suffit de numéroter

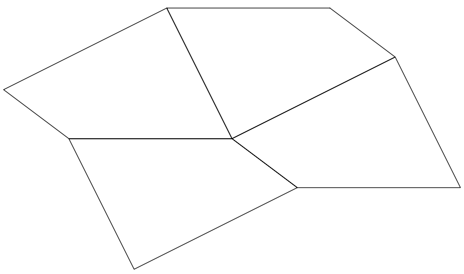


Fig. 44

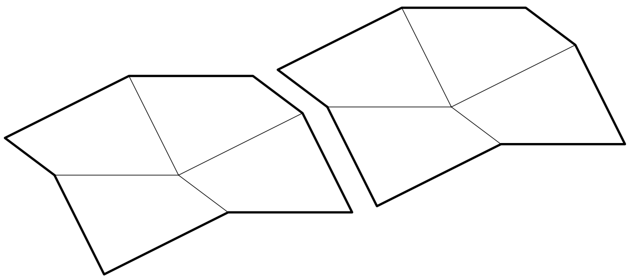


Fig. 45

certains angles comme précédemment pour voir que les deux octogones se raccordent parfaitement, la somme des angles au point

P valant 360° (figure 46). On peut alors composer toute une bande d'octogones comme le montre la figure 47.

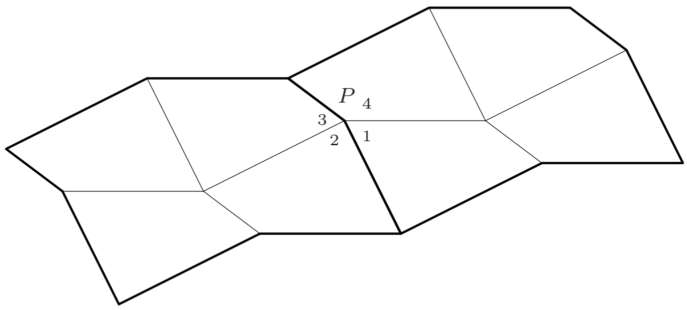


Fig. 46

Ceci fait, on montre par un argument analogue que le bord du dessus de la bande est identique au bord du dessous. Ceci permet d'empiler de telles bandes comme le montre la figure 48. Et donc on peut de cette façon couvrir tout le plan.

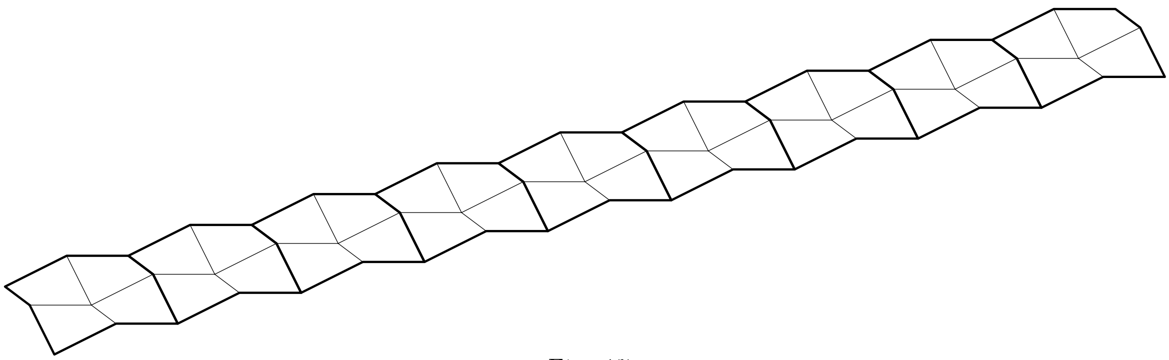


Fig. 47

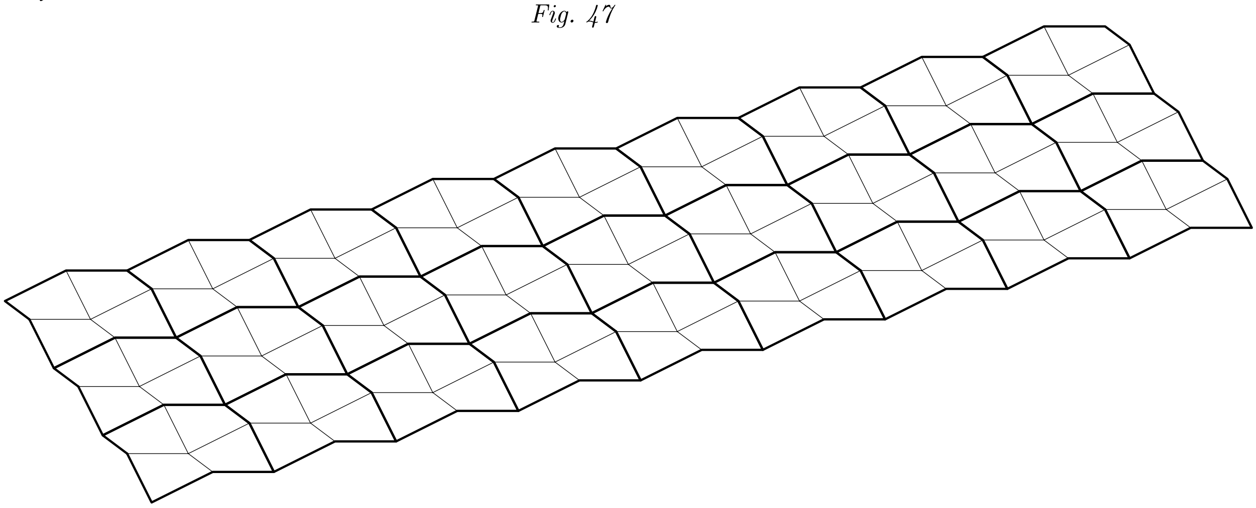


Fig. 48

9. *On peut paver le plan avec n'importe quel quadrilatère.*

Dernière question enfin : peut-on paver le plan avec n'importe quel pentagone ? La réponse est non, puisque, comme nous l'avons vu, c'est déjà impossible avec des pentagones réguliers. Mais la figure 49 montre que c'est possible avec certains pentagones.

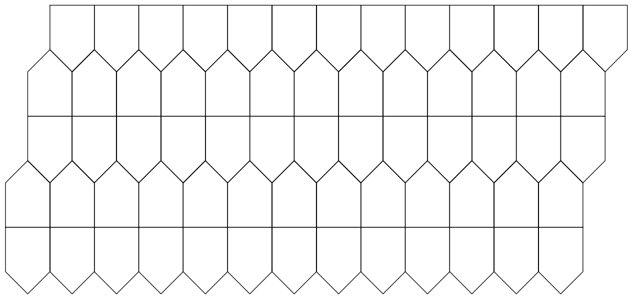


Fig. 49

9

Le théorème de Pythagore

1 En considérant des surfaces

Considérons un triangle rectangle et construisons un carré sur chacun de ses côtés (figure 1). Nous allons montrer que la somme des deux carrés construits sur les côtés a et b de l'angle droit égale le carré construit sur l'hypoténuse (*additionner des carrés* veut dire ici additionner leurs aires ; dans tout triangle rectangle, on appelle *hypothénuse* le plus grand côté).

Pour cela, considérons un grand carré de côté $a+b$ et quatre copies de notre triangle (figure 2).

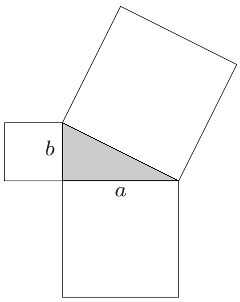


Fig. 1

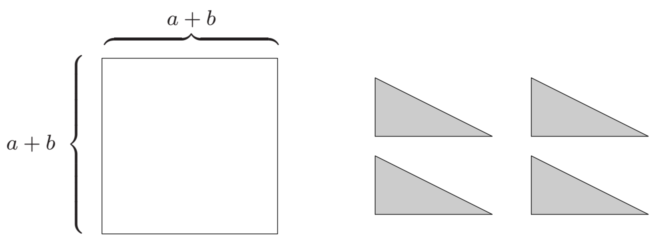


Fig. 2

Disposons nos quatre triangles dans le carré, d'abord comme le montre la figure 3a, puis comme le montre la figure 3b.

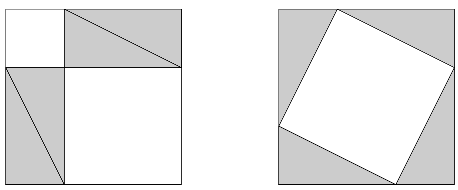


Fig. 3 (a,b)

La partie blanche de la figure 3a est égale à la partie blanche de la figure 3b. Or la partie blanche de la figure 3a est la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Quant à la partie blanche de la figure 3b, elle est le carré construit sur l'hypoténuse. Pour affirmer cela, nous devons être sûrs que cette partie blanche est bien un carré. Or elle a quatre côtés égaux. De plus chacun de ses angles est droit. On le voit au fait qu'ils ont tous été construits de la même façon : ils sont donc égaux et valent chacun 360 degrés/4 (cf. proposition 4 du chapitre 8 à la page 116).

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

1. *Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit est égale au carré construit sur l'hypoténuse.*

En utilisant la formule de l'aire du carré, on voit que le théorème de Pythagore a pour expression

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

où a, b et c sont ici les mesures des trois côtés du triangle prises dans une même unité.

Cette formule est souvent utile pour calculer des longueurs de segments.

Si l'on connaît les mesures a et b des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, il est donc possible de calculer la mesure de l'hypoténuse c :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2 Réciproque du théorème

Considérons maintenant un triangle dont nous ne savons pas s'il est rectangle ou non. Mais supposons qu'on nous dise que la somme des carrés construits sur deux de ses côtés est égale au carré construit sur le troisième. Le triangle est-il rectangle ?

Montrons que oui (la démonstration qui suit s'inspire de FESEC [1996]). Soit le triangle de la figure 4, avec l'hypothèse que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Le côté c est le plus grand. Disposons-le horizontalement, ce que montre la figure 5. Le pied de la hauteur issue de P tombe sur le côté c. (Les situations montrées par les figures 7 et 8 sont impossibles parce que c n'y est pas le plus grand côté.)

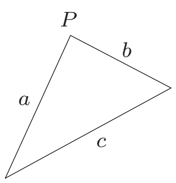


Fig. 4

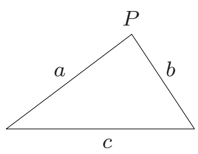


Fig. 5

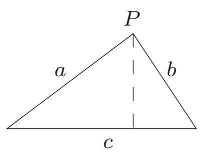


Fig. 6

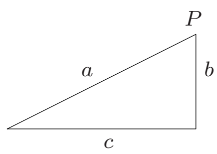


Fig. 7

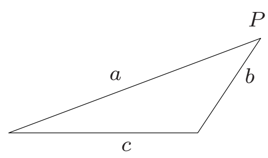


Fig. 8

La figure 9a à la page suivante reproduit la figure 5, mais nous y avons ajouté une verticale issue du sommet P.

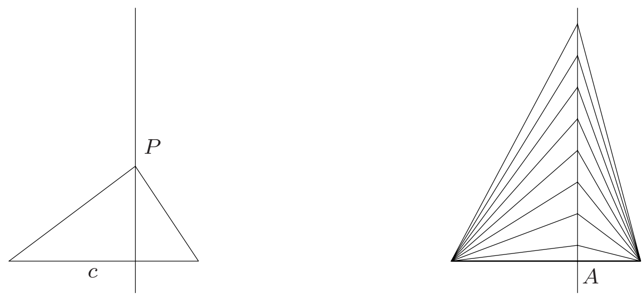


Fig. 9 (a,b)

Imaginons maintenant de déformer le triangle en promenant le sommet P le long de cette verticale. Partons du point A vers le haut. Lorsque P est en A, on a clairement

$$a^2 + b^2 < c^2.$$

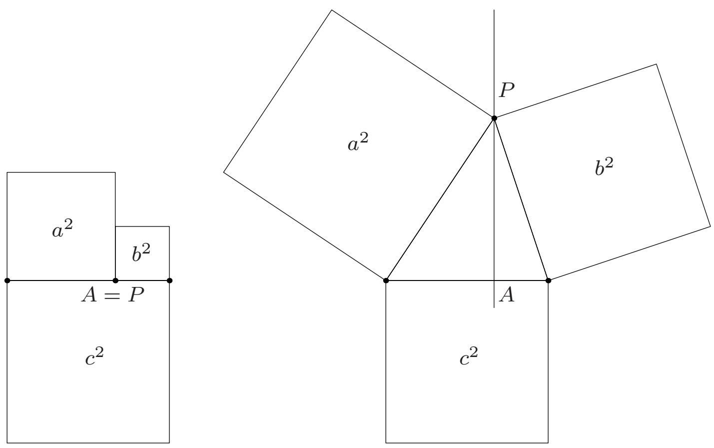


Fig. 10 (a,b)

C'est ce qu'illustre la figure 10a. Lorsque P monte, les carrés construits sur les côtés a et b grandissent, alors que le carré construit sur c reste le même. Lorsque P coïncide avec A, l'angle au sommet du « triangle » est en quelque sorte un « angle plat » : il vaut 180°. Lorsque P monte indéfiniment, l'angle tend vers 0. Pour une certaine position intermédiaire, l'angle est droit, et on a

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

En dessous de cette position on a donc

$$a^2 + b^2 < c^2,$$

et au dessus de cette position

$$a^2 + b^2 > c^2.$$

La figure 10b illustre cette dernière inégalité.

Donc le triangle avec un angle droit, étant le seul pour lequel on a l'égalité, est bien le triangle donné.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

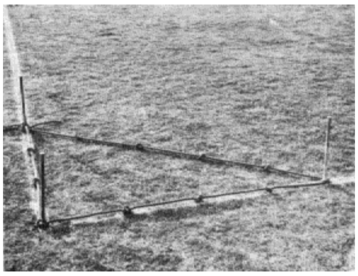


Fig. 11

2. *Si, dans un triangle, la somme des carrés construits sur deux des côtés est égale au carré construit sur le troisième, alors le triangle est rectangle.*

Cette proposition est souvent utilisée pour tracer des angles droits sans utiliser une équerre : il suffit d'assembler en triangle des segments (des ficelles tendues) dont les côtés sont proportionnels à 3, 4 et 5. En effet, on a

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

On peut combiner les propositions 1 et 2 en une seule, de la manière suivante.

3. *Un triangle est rectangle si et seulement si la somme des carrés construits sur deux de ses côtés est égale au carré construit sur le troisième.*

10

Parallèles et longueurs

Comme au chapitre 8, nous partons ici d'un réseau de parallèles équidistantes coupé par des transversales. Mais cette fois nous nous intéresserons moins aux ensembles d'angles égaux qu'aux ensembles de segments égaux.

1 Parallèles et transversales

Les cinq phénomènes de base suivants plantent le décor de ce chapitre.

Phénomène de base 1. – Considérons un réseau de parallèles équidistantes (figure 1a). Posons une droite (une baguette) en travers sur ce réseau (figure 1b). Les parallèles déterminent sur celle-ci des segments égaux (figure 1c).

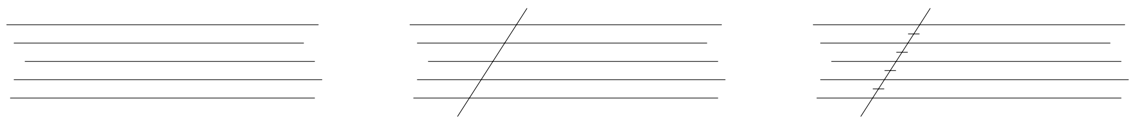


Fig. 1 (a,b,c)

Phénomène de base 2. – Sur un réseau de parallèles équidistantes (figure 2a), posons deux transversales parallèles (figure 2b). Tous les segments déterminés sur ces deux parallèles sont égaux (figure 2c).

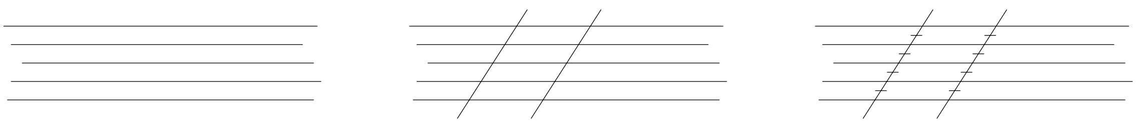


Fig. 2 (a,b,c)

Phénomène de base 3. – Considérons un réseau de parallèles équidistantes traversé par deux droites parallèles (figure 3a). Nous venons de voir que le réseau découpe sur ces transversales des chaînes de segments égaux. Rajoutons à chaque chaîne et du même côté, un segment égal aux précédents (figure 3b)). La droite qui joint leurs extrémités est parallèle aux droites du réseau : elle prolonge celui-ci (figure 3c).

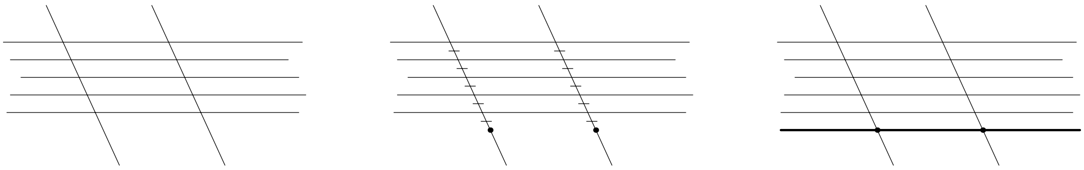


Fig. 3 (a,b,c)

Phénomène de base 4. – Considérons un réseau de parallèles équidistantes traversé par deux droites quelconques (figure 4a). Rajoutons à chaque chaîne de segments égaux et du même côté, un segment égal aux segments de la chaîne (figure 4b). La droite qui joint leurs extrémités est parallèle aux droites du réseau : elle prolonge celui-ci (figure 4c).

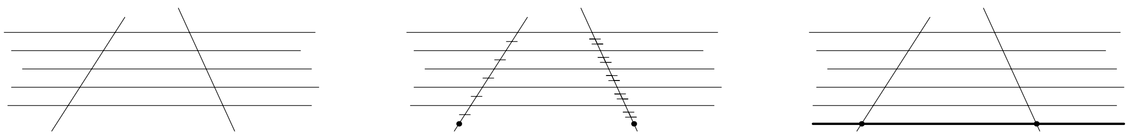


Fig. 4 (a,b,c)

Phénomène de base 5. – Considérons deux réseaux croisés de parallèles équidistantes (figure 5a). Partant d'un point A, allons vers un point B en avançant d'un segment, puis en montant obliquement d'un segment (figure 5b). Allons de même du point B au point C, puis de C à D, etc. À chaque étape, nous avons avancé horizontalement d'une certaine longueur toujours la même, puis nous sommes montés aussi d'une certaine longueur (autre) toujours la même. Les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, etc. ont tous la même pente. Les points A, B, C, D... sont alignés (figure 5c).

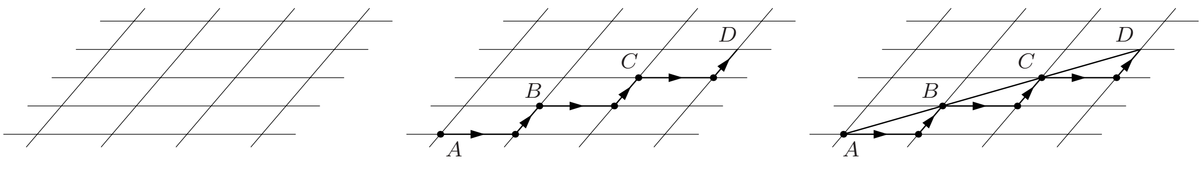


Fig. 5 (a,b,c)

La figure 6 à la page suivante montre divers exemples où on voit qu'en progressant rythmiquement toujours de tant dans une direction, puis de tant dans l'autre, on passe par des points alignés.

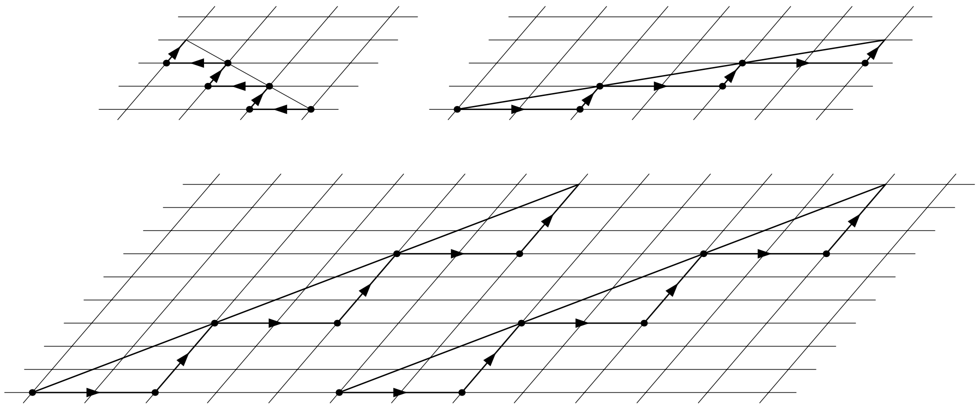


Fig. 6

2 Le parallélogramme

La figure 7 montre quelques parallélogrammes en position quelconque. La figure 8 les montre chacun avec deux côtés horizontaux.

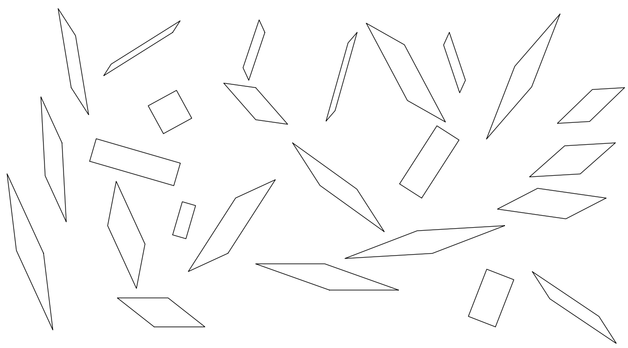


Fig. 7

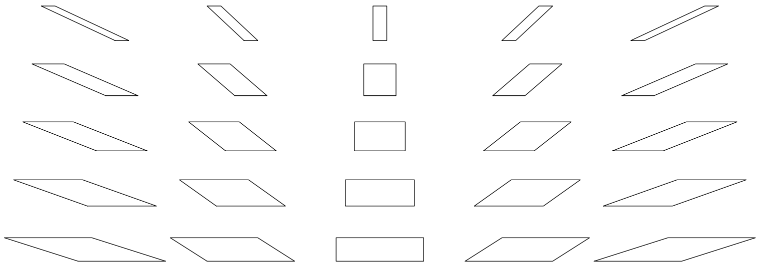


Fig. 8

Le soleil donne souvent l'image d'une fenêtre sur un mur ou un plancher sous la forme d'un parallélogramme. On obtient également des parallélogrammes en déformant un rectangle articulé.

Fig. 9

Phénomène de base 6. – Donnons-nous un rectangle, (figure 9). Si on imagine ce rectangle articulé et qu'on le déforme, on n'obtient que des parallélogrammes (figure 10).

Fig. 10

2.1 Propriétés du parallélogramme

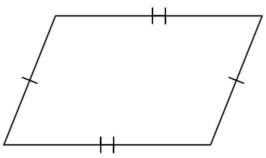


Fig. 11

1. *Le parallélogramme a ses côtés opposés parallèles.*

2. *Le parallélogramme a ses côtés opposés égaux (figure 11).*

Cette observation recoupe le phénomène de base2 (page 127).

3. *Le parallélogramme a ses angles opposés égaux (figure 12).*

Pour s'en convaincre, il suffit de prolonger ses côtés (figure 13) et d'observer les angles correspondants et alternes internes (cf. la section 1 du chapitre 8, page 113).

Fig. 12

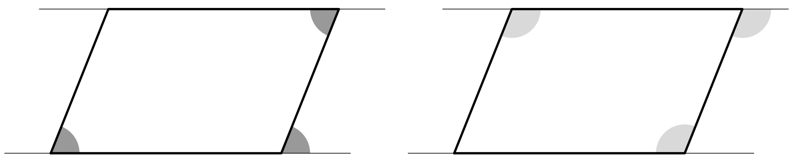


Fig. 13

4. *Les médianes du parallélogramme se rencontrent en leur milieu et le décomposent en quatre parallélogrammes identiques (figure 14 à la page suivante).*

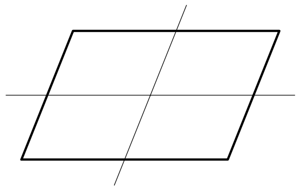


Fig. 14

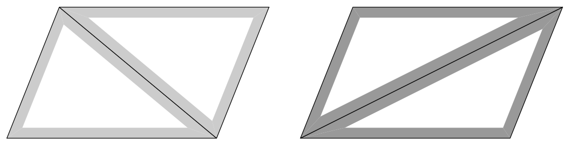


Fig. 15

5. *Chaque diagonale décompose le parallélogramme en deux triangles identiques (figure 15). Chacun de ceux-ci peut être superposé à l'autre par rotation d'un demi-tour autour du milieu de la diagonale (figure 16).*

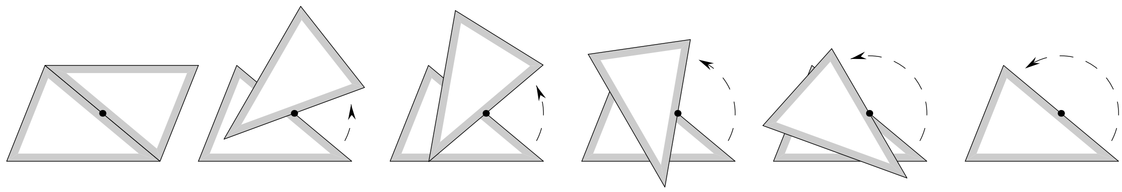


Fig. 16

6. *Les diagonales du parallélogramme se rencontrent en leur milieu (figure 17).*

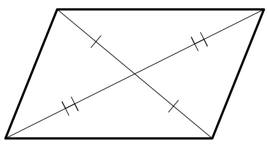


Fig. 17

Pour nous en assurer, relisons la figure 16 en sens inverse (figure 18), mais après avoir ajouté une médiane au triangle de départ. (Dans un triangle, une *médiane* est un segment qui joint le milieu d'un côté au sommet opposé.)

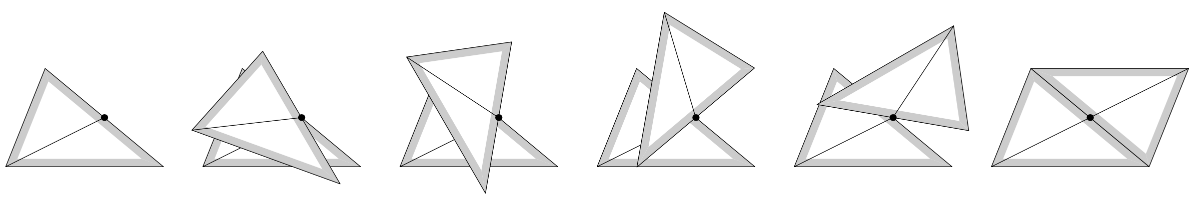


Fig. 18

Après le demi-tour, cette médiane vient s'aligner sur la position qu'elle avait au départ. Les deux médianes (celle au départ et celle à l'arrivée) dessinent donc la diagonale du parallélogramme.

Les deux côtés juxtaposés des deux triangles forment la deuxième diagonale.

7. *Les médianes et les diagonales du parallélogramme se rencontrent en un même point (figure 19).*

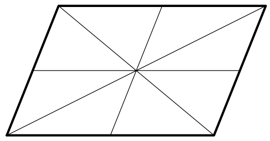


Fig. 19

Repartons en effet du parallélogramme muni de ses deux médianes (figure 20a). Joignons les points A et B, ainsi que B et C (figure 20b). Les points A, B et C sont alignés, et donc B est sur la diagonale $[AC]$ du parallélogramme (cf. le phénomène de base 5 à la page 128). On raisonne de même pour l'autre (figure 20c).

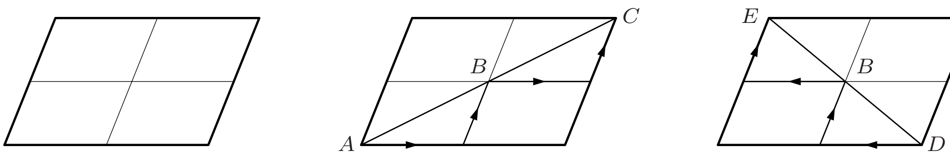


Fig. 20 (a,b,c)

2.2 Conditions déterminantes du parallélogramme

8. *Si un quadrilatère convexe a deux paires de côtés parallèles, il est un parallélogramme.*

9. *Si un quadrilatère a deux côtés parallèles et égaux, il est un parallélogramme (figure 21).*

C'est un cas particulier du phénomène de base3 (page 127).

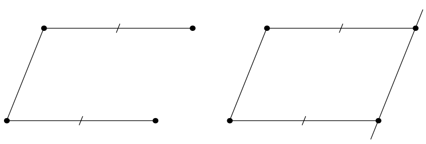


Fig. 21

10. *Si un quadrilatère convexe a les côtés opposés égaux, il est un parallélogramme.*

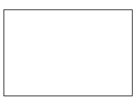


Fig. 22

En effet, avec deux paires de côtés égaux, on peut construire un rectangle (figure 22). Et si on imagine ce rectangle articulé de manière à pouvoir le déformer sans croiser les tiges, on n'obtient que des parallélogrammes (phénomène de base6 à la page 130).

11. *Si un quadrilatère a les diagonales qui se rencontrent en leur milieu, il est un parallélogramme.*

En effet, soit deux segments qui se rencontrent en leur milieu (figure 23a).

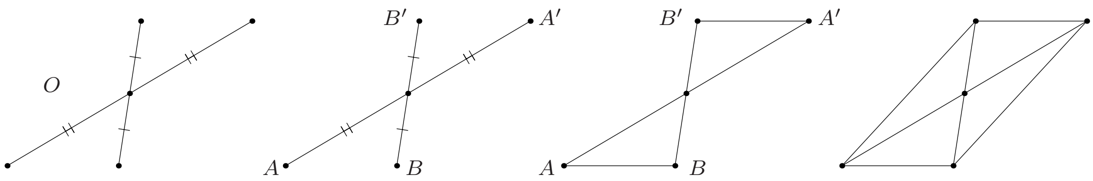


Fig. 23 (a,b,c,d)

En faisant tourner cette figure d'un demi-tour autour de ce milieu O, on amène le point A en A', et B en B' (figure 23b). Donc AB est parallèle à $A'B'$ (cf. la propositon 6 du chapitre 8, page 114), et comme en outre $[AB] = [A'B']$, la figure $ABA'B'$ est un parallélogramme (figures 23c et 23d) .

12. *Si on superpose deux triangles identiques et qu'on fait tourner l'un d'eux d'un demi-tour autour du milieu d'un de ses côtés, on obtient un parallélogramme (figure 24).*

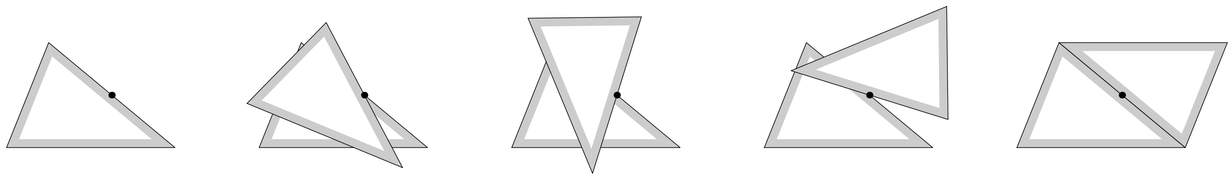


Fig. 24

3 Parallèles et rapports de longueurs

3.1 Le rapport de deux longueurs

Dans cette section nous étudions surtout les rapports de longueurs. Précisons donc cette notion.

Considérons deux segments a et b (figure 25a). Supposons qu'un troisième segment c soit contenu trois fois dans a et cinq fois dans b (figure 25b). Nous dirons alors que *a est à b comme 3 est à 5*, ou encore que *le rapport de a à b vaut $\frac{3}{5}$*. Et de même pour d'autres nombres (naturels) que 3 et 5.

Fig. 25 (a,b)

Il nous arrivera souvent ci-après de considérer des rapports égaux. Par exemple sur la figure 26 à la page suivante, a est à b

comme c est à d (et comme 3 est à 2). Nous exprimerons cette égalité de deux rapports en écrivant

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

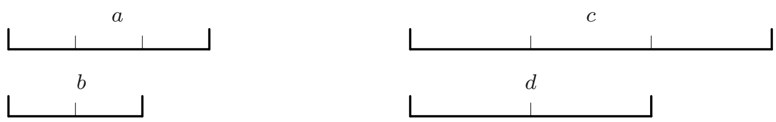


Fig. 26

Nous ferons, pour la suite de ce chapitre, l'importante supposition suivante : *nous n'envisageons que des couples de segments pour lesquels il existe un troisième segment (éventuellement égal à l'un des deux premiers) qui est contenu un nombre entier de fois dans le premier segment du couple, et aussi un nombre entier de fois dans le second.*

3.2 Des parallèles aux égalités de rapports

Donnons-nous trois droites parallèles et deux transversales (figure 27a). Supposons que $[A_1B_1]$ soit à $[B_1C_1]$ comme 3 est à 7, et donnons-nous des points de subdivision qui montrent ce rapport (figure 27b). Par ces points, traçons de nouvelles parallèles (figure 27c). Celles-ci divisent $[A_2B_2]$ en trois segments égaux, et $[B_2C_2]$ en sept segments égaux (cf. phénomène de base1 à la page 127). Donc

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}.$$

Cette conclusion est valable pour un rapport quelconque. Nous avons donc démontré la proposition suivante.

13. *Trois parallèles déterminent des segments sur une transversale quelconque. Les rapports entre ces segments sont les mêmes sur n'importe quelle transversale.*

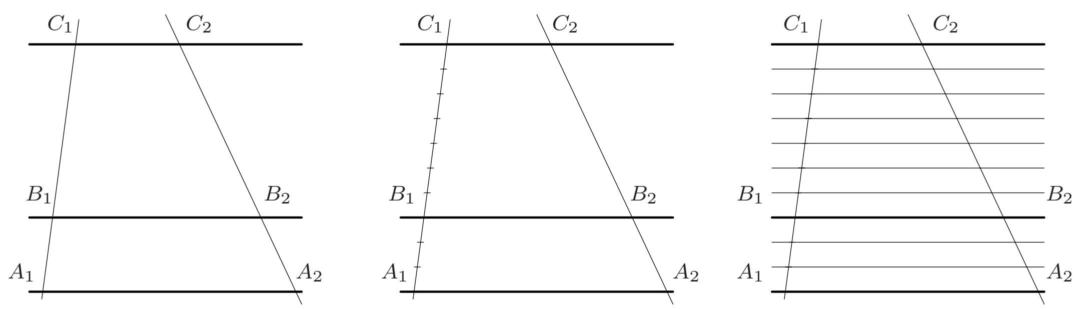


Fig. 27 (a,b,c)

La figure 28 à la page suivante montre divers cas où cette proposition s'applique. Dans tous ces cas,

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}.$$

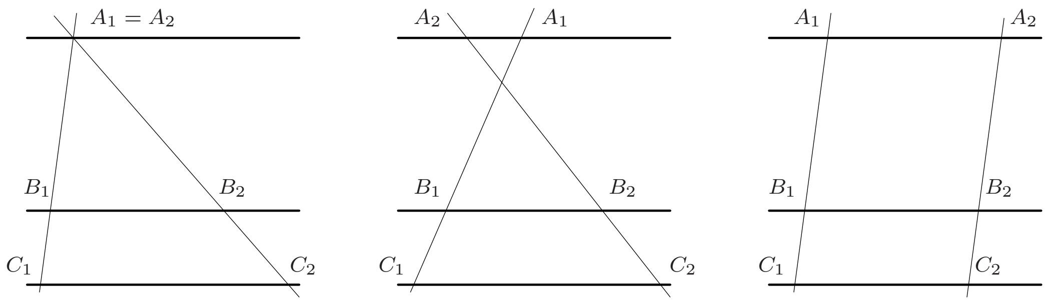


Fig. 28

Cette proposition est bien sûr également vraie pour les autres rapports déterminés sur ces transversales par les même parallèles :

$$\frac{[A_1C_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2C_2]}{[B_2C_2]} \quad \text{et} \quad \frac{[A_1B_1]}{[A_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[A_2C_2]}.$$

3.3 Des parallèles et des égalités de rapports à de nouvelles parallèles

Donnons-nous deux droites parallèles et deux transversales (figure 29a). Supposons que

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}.$$

Donnons-nous des points de subdivision qui montrent ces rapports (figure 29b). Par ces points sur $[A_1B_1]$, menons des parallèles à A_1A_2. Puisque celles-ci découpent $[A_2B_2]$ en segments égaux, elles passent par les points de subdivision déjà marqués sur $[A_2B_2]$ (figure 29c).

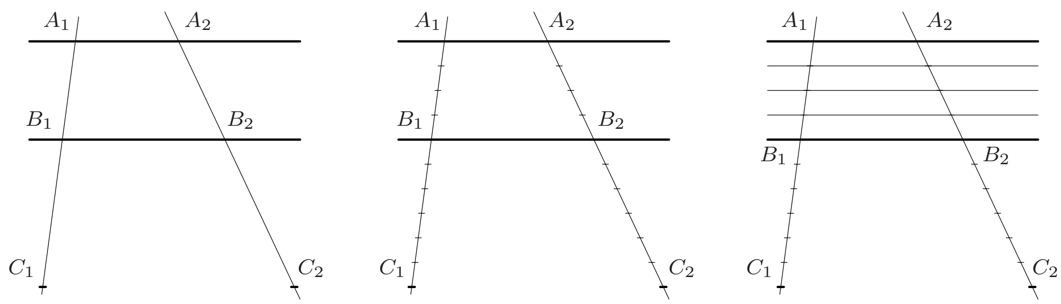


Fig. 29 (a,b,c)

Ceci fait, joignons le premier point de subdivision de $[B_1C_1]$ au premier point de subdivision de $[B_2C_2]$ (figure 30a à la page suivante). La droite que nous traçons ainsi est aussi parallèle à A_1A_2 (voir le phénomène de base 4 à la page 128). Nous pouvons de même joindre tous les points de subdivision de $[B_1C_1]$

aux points correspondants de $[B_2C_2]$. Toutes ces droites sont parallèles. En particulier C_1C_2 est parallèle à A_1A_2 et B_1B_2 (figure 30b).

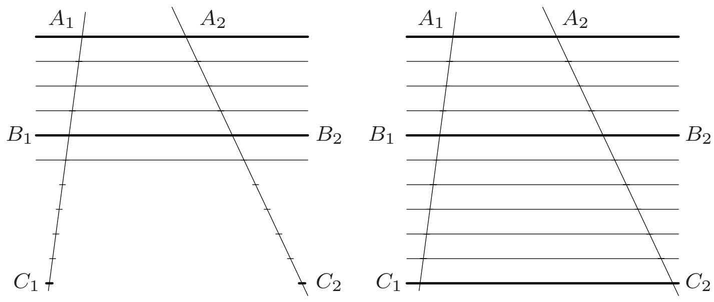


Fig. 30 (a,b)

D'où la proposition suivante.

14. *Soient deux parallèles A_1A_2 et B_1B_2 et deux transversales comme sur la figure 29a. Si*

$$\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]},$$

alors C_1C_2 est parallèle à A_1A_2 et B_1B_2.

Cette proposition est bien sûr également vraie lorsque l'on remplace l'égalité $\frac{[A_1B_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[B_2C_2]}$ par une des deux égalités suivantes :

$$\frac{[A_1B_1]}{[A_1C_1]} = \frac{[A_2B_2]}{[A_2C_2]} \quad \text{ou} \quad \frac{[A_1C_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[A_2C_2]}{[B_2C_2]}.$$

Voici un cas particulier important de cette proposition.

15. *Soient deux droites sécantes (figure 31a). Si*

$$\frac{[OB_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[OB_2]}{[B_2C_2]},$$

alors C_1C_2 est parallèle à B_1B_2 (figure 31b).

Pour voir que cette proposition se ramène à la précédente, il suffit de considérer que les points A_1 et A_2 de la figure 29 sont confondus, ce qui conduit à la figure 31c.

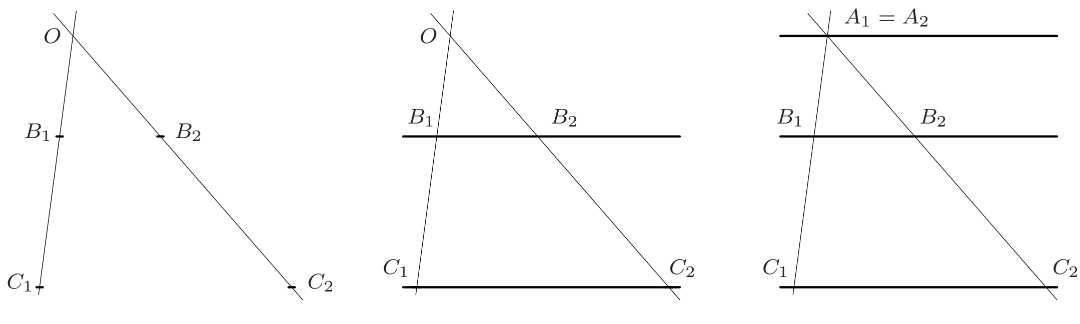


Fig. 31 (a,b,c)

À nouveau, cette proposition est également vraie lorsque l'on remplace l'égalité $\frac{[OB_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[OB_2]}{[B_2C_2]}$ par l'une des deux égalités suivantes :

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[OB_2]}{[OC_2]} \quad \text{ou} \quad \frac{[OC_1]}{[B_1C_1]} = \frac{[OC_2]}{[B_2C_2]}.$$

3.4 Des parallèles à de nouvelles égalités de rapports

Donnons-nous deux droites parallèles et une transversale (figure 32a). Puis ajoutons une deuxième transversale (figure 32b).

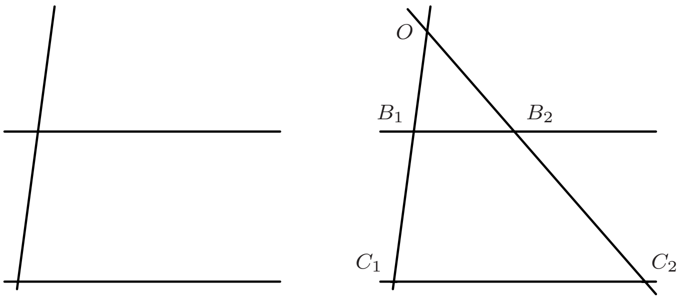


Fig. 32 (a,b)

Nous savons que

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[OB_2]}{[OC_2]}.$$

Soient $[OB_1]$ et $[OC_1]$ divisés en segments égaux (figure 33a). Par les points de subdivision, menons des parallèles à OC_2 (figure 33b). Ces droites découpent $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$ en segments égaux (voir les phénomènes de base 4 et 2 à la page 127). Donc

$$\frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]} = \frac{[OB_1]}{[OC_1]}.$$

On aurait pu faire le même raisonnement en subdivisant $[OC_2]$, comme le montre la figure 33c.

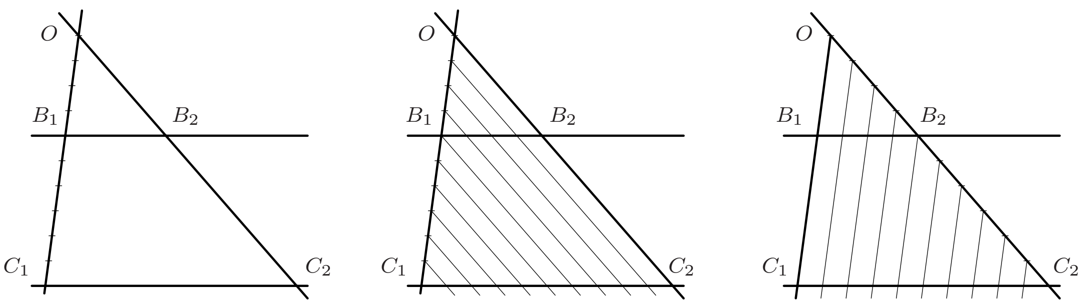


Fig. 33

Nous arrivons donc, de deux façons, à la proposition suivante.

16. *Soient deux parallèles et deux transversales comme sur la figure 32a. On a*

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[OB_2]}{[OC_2]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}.$$

3.5 Des égalités de rapport à l'alignement

Regardons maintenant la réciproque de cette proposition. Donnons-nous deux droites parallèles et une transversale. Soit O un point de celle-ci, non situé sur une des parallèles. Situons les points B_1, B_2, C_1 et C_2 (figure 34a), de sorte qu'on ait

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}.$$

Donnons-nous des points de subdivision qui montrent ces rapports (figure 34b).

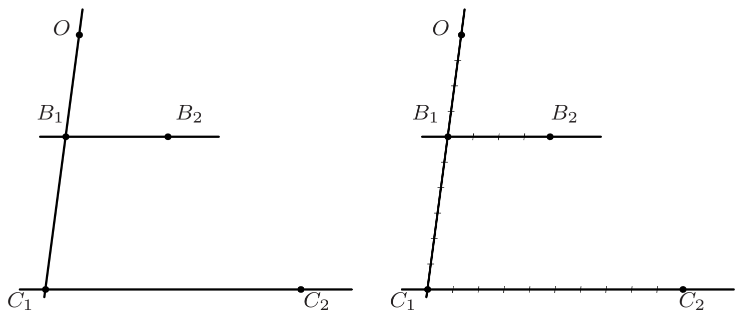


Fig. 34 (a,b)

Par les points de subdivision de $[OC_1]$, menons des parallèles à C_1C_2, et par les points de subdivision de $[C_1C_2]$, menons des parallèles à OC_1 (figure 35a). Deux de ces parallèles se croisent en B_2. La figure 35b nous renvoie au phénomène de base 5 à la page 128, et montre que O, B_2 et C_2 sont alignés. Nous avons donc prouvé la proposition suivante.

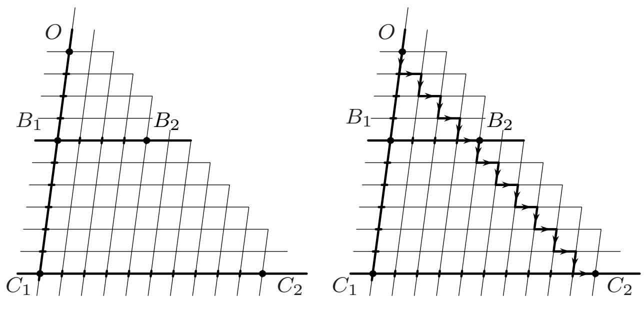


Fig. 35 (a,b)

17. *Soient deux parallèles, une transversale et des points O, B_1, B_2, C_1 et C_2 comme à la figure 34a à la page précédente. Si*

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]}.$$

alors les points O, B_2 et C_2 sont alignés,

Les questions que nous venons de traiter amènent à envisager les systèmes de coordonnées et les équations de droites. Nous ébauchons ci-après le chemin qui permet d'y arriver sans peine. Reprenons nos deux dernières propositions, en orientant autrement les figures. En fait, nous avons démontré ceci :

(*a*) *sur la figure 36 et les figures analogues, on a*

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]} \ ; \qquad (1)$$

(*b*) *si sur la figure 37 ou une figure analogue, on a la relation* (1), *alors les points O, B_2 et C_2 sont alignés.*

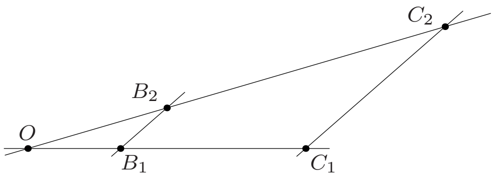


Fig. 36

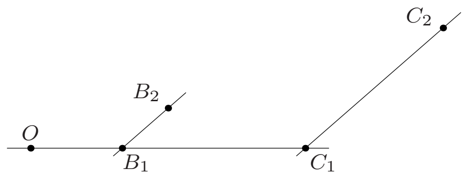


Fig. 37

Supposons maintenant qu'un même segment soit contenu un nombre entier de fois dans $[OB_1]$, $[OC_1]$, $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$, comme le montre la figure 38. Alors, contrairement à ce que nous avons fait jusqu'à présent, envisageons des rapports tels que

$$\frac{[OB_1]}{[B_1B_2]} \quad \text{ou encore} \quad \frac{[OC_1]}{[C_1C_2]}$$

entre des segments de directions différentes.

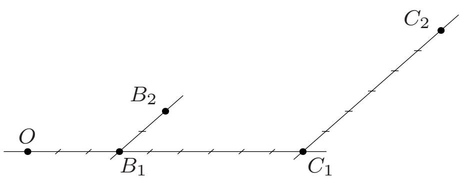


Fig. 38

Mais puisque

$$\frac{[OB_1]}{[OC_1]} = \frac{[B_1B_2]}{[C_1C_2]},$$

nous avons aussi

$$\frac{[OB_1]}{[B_1B_2]} = \frac{[OC_1]}{[C_1C_2]}.$$

De façon plus générale, sur une figure telle que la figure 39, on aura

$$\frac{[OB_1]}{[B_1B_2]} = \frac{[OC_1]}{[C_1C_2]} = \frac{[OD_1]}{[D_1D_2]} = \frac{[OE_1]}{[E_1E_2]} = \frac{[OF_1]}{[F_1F_2]} = \frac{[OG_1]}{[G_1G_2]}.$$

et tous les points qui ont un 2 pour indice sont alignés.

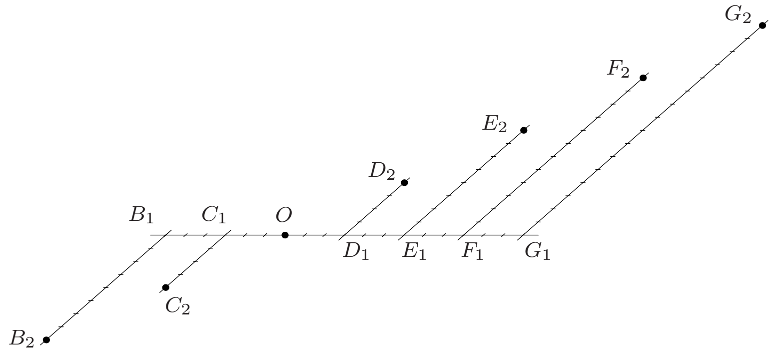


Fig. 39

Au cours de ce chapitre, nous avons dit ne prendre en considération que des couples de segments pour lesquels on peut en trouver un troisième, éventuellement très petit, qui va un nombre entier de fois dans le premier segment, et aussi un nombre entier de fois dans le second. On a l'impression que cela doit être vrai pour deux segments quelconques. Tel n'est pourtant pas le cas, comme l'ont montré déjà les Pythagoriciens vers le V^{e} siècle avant J.-C. C'est là un des grands problèmes de la géométrie, mais dont nous n'aurons pas le loisir de nous occuper ici.