Première partie

Les origines de la géométrie

Introduction
une certaine épistémologie

Zurück zu den Zachen selbst.

Edmund Husserl

Pour repenser l'enseignement de la géométrie, il semble essentiel de s'interroger sur la façon dont cette discipline se constitue au départ de l'environnement quotidien.

Or l'environnement est peuplé d'objets dont la plupart ne se déforment pas et que l'on peut donc à loisir considérer de divers points de vue, selon qu'on les déplace ou qu'on se déplace par rapport à eux. Le matériau de la pensée géométrique à son début est constitué de ces objets-là, et non de figures immobiles, et moins encore de sous-ensembles d'un ensemble de points appelé *espace*.

Nous nous proposons de chercher comment les premiers concepts, les premières inférences de la géométrie peuvent naître des sensations, des perceptions et des actions sur les objets. En ce sens, nous nous intéressons aux *origines de la géométrie*.

Ceci dit, nous devons avant tout préciser sur quel terrain nous poursuivrons notre enquête. Car diverses possibilités peuvent être envisagées.

1 Trois approches des origines

1.1 L'histoire

La première possibilité serait de regarder du côté de l'histoire. Comment les hommes ont-ils, une première fois, résolu par la force du raisonnement quelques questions géométriques rencontrées dans leur environnement ? Une telle interrogation nous fait remonter à la nuit des temps, c'est-à-dire plutôt à la préhistoire qu'à l'histoire. Mais alors, faute de documents, nous en sommes réduits à des conjectures peut-être à jamais insolubles[1].

D'où la question : que pouvons-nous tirer des documents les plus anciens ? Ils sont certes tous largement postérieurs à l'émergence dans l'humanité d'une première pensée géométrique. Mais l'historien Fernand Braudel [1969] nous a appris à chercher, dans les sources historiques léguées par une époque donnée, les traces

[1] Pourtant, E. Husserl dans *L'origine de la géométrie* [1962] estime qu'en étudiant dans le présent les phénomènes qui ont objectivement dû provoquer l'apparition de la pensée géométrique, il est possible de reconstituer la démarche des premiers êtres humains qui ont « fait de la géométrie ».

d'un passé parfois beaucoup plus lointain. C'est ce qu'il a appelé *le temps long de l'histoire*.

Parmi les écrits anciens, on pense tout de suite à Euclide. Mais les *Éléments* témoignent d'une géométrie déjà longuement élaborée, inspirée par un projet global de construction déductive et qui de ce fait se trouve très loin des commencements qui nous préoccupent. On peut toutefois penser par exemple qu'aux rares endroits où Euclide recourt à des mouvements, il manifeste le caractère inévitable et donc nécessairement primitif de ce recours. Comment en effet les hommes auraient-ils conçu la congruence de deux objets plans sans porter l'un sur l'autre comme à la quatrième notion commune du Livre I : « Les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. » (cf. Euclide [1990]).

D'autres géométries anciennes sont plus proches qu'Euclide d'un état premier de la géométrie. Il s'agit surtout des géométries indienne et chinoise. Comme l'écrit J.-Cl. Martzloff [1990], les mathématiques chinoises sont « dépourvues d'axiomes, de définitions, de théorèmes, de raisonnement hypothético-déductif. » Elles recourent surtout à des moyens de preuve intuitifs, essentiellement des découpages d'aires en quelques parties que l'on réarrange ensuite autrement. Mais par ce type de procédé, elles démontrent des propriétés non triviales[2].

1.2 L'ethnologie

En dehors de l'histoire, une autre façon d'étudier les origines de la géométrie consiste à observer la pratique des peuples primitifs, lorsqu'ils mesurent des terrains, élèvent des habitations ou des monuments, ornent des surfaces[3]. C'est un courant de recherche qui s'amplifie depuis quelques années sous la dénomination d'*ethnomathématique*.

1.3 La psychologie génétique

Par ailleurs, les origines de la géométrie ont aussi été étudiées par les psychologues généticiens et singulièrement par Jean Piaget et ses successeurs. Mais leur point de vue est très différent des précédents : il s'agit pour eux d'étudier l'acquisition des connaissances non plus dans l'histoire de l'humanité (ce que l'on appelle la *phylogenèse*), mais bien dans celle des individus à partir du plus jeune âge et jusqu'à l'adolescence (on parle alors de l'*ontogenèse*). Mais de quelles connaissances s'agit-il ? Piaget[4] s'intéresse aux connaissances géométriques observables chez la plupart des individus ayant connu jusqu'à l'adolescence une vie familiale, sociale et scolaire « ordinaire »[5]. Il en décrit la genèse au cours de l'enfance. Ces connaissances sont élémentaires,

[2] Voir par exemple les démonstrations du théorème de Pythagore dans M.-F. Coste-Roy *et al.* [1980].
[3] Voir par exemple Marcia Ascher [1991].
[4] Voir Piaget [1947], [1948] et [1967].
[5] Il s'agit *en fait* des adolescents d'une certaine société genevoise du XX^e siècle.

elles relèvent pour l'essentiel du sens commun, de ce fait elles semblent aller de soi pour les adultes et ne s'étendent donc pas à l'explication de phénomènes intrigants. Piaget ne discute pas le rôle de l'école dans leur acquisition. Mais il est clair que l'école y est pour beaucoup[6].

Chacune des trois approches que nous venons de relever – l'histoire, l'ethnologie et la psychologie génétique – est une modalité de l'épistémologie, c'est-à-dire de l'explication du fondement de la science ou des savoirs, de leur genèse et de leur portée.

Ce que nous comptons faire ici relève d'une quatrième voie qui se situe pour l'essentiel dans le présent (elle n'est pas d'abord historique), dans la civilisation qui est la nôtre (elle n'est pas ethnologique), et dans la pensée adulte (elle n'est pas psychogénétique). Ceci mérite une explication détaillée.

2 Une quatrième voie

2.1 Qu'est-ce qui provoque la pensée géométrique ?

Et tout d'abord qu'est-ce qui met en route la pensée géométrique ? Ce sont évidemment des phénomènes intrigants, des choses qui, dans notre environnement, sont assez aisément constatables mais non immédiatement explicables. On se demande à leur sujet : comment cela se fait-il ?

La géométrie élémentaire est parsemée de phénomènes qui ne vont pas de soi. Par exemple, par trois points passe un cercle et un seul. Ou encore, tous les points d'où on voit un segment sous un angle donné sont disposés sur deux arcs de cercle.

H. Freudenthal [1973] a tenu lui aussi à bien marquer que la pensée géométrique est provoquée par des questions, dont il donne une bonne vingtaine d'exemples. En voici quelques-unes. On remarquera que leurs énoncés sont clairs, accessibles à n'importe qui, tandis que les réponses, elles, ne sont pas évidentes.

> Pourquoi une feuille de papier se plie-t-elle selon une droite ?
>
> Pourquoi une feuille de papier enroulée devient-elle rigide ?
>
> Pourquoi une bande de papier que l'on noue prend-elle la forme d'un pentagone régulier ?
>
> D'où proviennent les ombres ?
>
> Quelle est l'intersection d'un plan et d'une sphère, de deux sphères ?
>
> Pourquoi le rayon d'un cercle peut-il être reporté exactement six fois autour de son périmètre ?
>
> Comment une belle étoile naît-elle de cette construction ?
>
> Pourquoi la ligne droite est-elle la plus courte ?

---

[6] Au contraire de Piaget, L. Vygotski [1997] contraste les modalités d'acquisition des savoirs d'une part dans la famille et le milieu social, et d'autre part à l'école.

> Pourquoi des triangles congruents peuvent-ils paver le plan, alors que des pentagones congruents en général ne le peuvent pas ?
>
> Comment arrive-t-on à mesurer de grandes distances sur la terre, le diamètre de la terre, les distances des corps célestes ?
>
> etc., etc.

2.2 Où trouver des explications ?

Il n'y a qu'un recours pour expliquer les phénomènes intrigants, c'est de s'appuyer sur des phénomènes qui vont de soi, qui ne sont pas intrigants. Or l'environnement quotidien nous offre des évidences géométriques en assez grand nombre. En voici trois exemples.

> Nous reconnaissons sans peine qu'une figure plane possède un axe de symétrie, à condition qu'elle nous soit présentée dans un plan frontal, avec son axe en position verticale.
>
> Lorsqu'on pose une échelle à deux montants égaux sur un sol horizontal, on s'aperçoit que les deux montants prennent une égale inclinaison.
>
> Pour aller chercher de l'eau dans un fleuve dont la berge est rectiligne, le plus court chemin est la perpendiculaire à la berge.

Ces trois évidences et d'autres analogues tiennent, si on peut dire, à la *nature des choses*.

Au XVII^e siècle, Blaise Pascal[7] affirmait l'existence de choses évidentes susceptibles de former la base de la géométrie, et de choses non évidentes à éclairer par les premières. Il écrivait : « [L'ordre de la géométrie] ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours[8]. » Il s'impose, disait-il encore, « de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres », et aussi de « ne point prouver toutes les choses connues de tous les hommes et de prouver toutes les autres. »

Mais c'est là une affirmation générale. Où pouvons-nous trouver à préciser cette idée de la lumière naturelle en géométrie ? Pascal ne nous a pas laissé d'exposé de la géométrie élémentaire. Descartes non plus. Par contre Antoine Arnauld [1667], ami de Pascal, et plus tard Claude-Alexis Clairaut [1741] ont écrit des éléments de géométrie fondés sur des évidences (et donc en rupture avec la rigueur grecque). À lire ces auteurs, on s'aperçoit que

[7] Voir B. Pascal [1657-58].

[8] *Au défaut du discours*, c'est-à-dire *à défaut de la preuve*. On note la référence de Pascal à la *lumière naturelle* et à la *nature*. C'est dans le même sens que nous avons parlé ci-dessus de la *nature des choses*. Avant Pascal, Descartes [1637] avait reconnu l'existence de la lumière naturelle lorsqu'il écrivait, au début du *Discours de la méthode*, que « le bon sens est la chose du monde la mieux partagée », et lorsque dans le premier principe de sa méthode il se promettait de « ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire [...] de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute. »

leur lumière naturelle est aussi la nôtre, que ce qu'ils trouvaient évidents, nous le trouvons aussi. Certes, bien d'autres considérations par delà la lumière naturelle se trouvent à la base de la géométrie – des géométries – d'aujourd'hui. Mais la lumière naturelle importe à ceux qui enseignent la géométrie élémentaire, car elle constitue le terrain d'expérience et de réflexion des débutants.

2.3 D'où vient la lumière naturelle ?

Mais alors que pouvons-nous faire de plus qu'Arnauld et Clairaut ? Sommes-nous réduits à les imiter, à mettre seulement leur discours au goût du jour ? Certainement pas. D'abord parce que leur horizon, la direction dans laquelle ils orientaient leurs élèves, était celle de la géométrie d'Euclide. Nous devons aujourd'hui refaire une géométrie naturelle orientée vers les géométries contemporaines[9]. Il faut toujours partir du terrain de l'élève, mais sans oublier où l'on va.

Mais il y a plus. Arnauld et Clairaut ont exhibé des évidences et s'en sont servi pour construire des preuves. Nous le ferons aussi, dans la deuxième partie de ce travail. Mais d'abord nous chercherons à expliquer la nature et l'origine des évidences, des premiers concepts et des premières inférences géométriques, les modalités des premières formations discursives.

Divers travaux nous y aideront. En suivant Maurice Merleau-Ponty [1945], nous tenterons de voir comment se constitue dans la conscience l'idée de la constance de la forme et des dimensions d'un objet indéformable. Nous trouverons dans Ernst Mach [1922] les conditions dans lesquelles l'être humain perçoit certaines symétries simples. Nous chercherons comment l'on passe de la connaissance d'un objet singulier à celle d'une classe d'objets, comment se constituent les objets mentaux. Nous nous appuierons à ce propos sur les contributions de Lev Vygotski [1997]. Nous essayerons ensuite de classer les objets, les figures, selon la plus ou moins grande difficulté d'accès que nous avons à leur structure. Puis nous chercherons à voir en quoi consistent les évidences nécessaires à la construction d'une première géométrie. Nous verrons que ce sont des évidences d'implication, issues de la causalité physique.

Toutes ces questions dépendent d'une analyse de la nature des choses. Elles renvoient entre autres aux symétries des objets, à celle des organes de perception de l'être humain, aux directions physiques de base, à savoir la verticale et l'horizontale. Elles ne relèvent a priori ni de l'histoire, ni de l'ethnologie, ni de la psychologie génétique, même si ces trois disciplines aident souvent, par les questions et les analyses qu'elles proposent, à comprendre les phénomènes en cause.

[9] Et plus particulièrement vers l'algèbre linéaire.

En approfondissant ainsi la nature et les origines de la lumière naturelle, nous espérons reconnaître les conditions qui en favorisent la maturation, en particulier chez les enfants, et contribuer par là à l'efficacité de l'enseignement de la géométrie.

Terminons par deux remarques. D'abord notre propos ne se situe pas dans la ligne d'une épistémologie philosophique. Nous ne cherchons pas à préciser nos opinions sur l'origine et la valeur des vérités mathématiques. Par exemple, nous expliquons qu'en dessinant aux instruments, on peut réaliser qu'un quadrilatère qui possède deux côtés congruents perpendiculaires à un troisième est un rectangle. En faisant ce constat utile, nous ne voulons prendre aucune position pour ou contre une philosophie empiriste ou idéaliste. Nous voulons demeurer dans le concret des observations utiles aux enseignants, en quelque sorte au niveau d'un bon sens éclairé, d'une expérience argumentée. Deuxièmement, il est vrai que la science cognitive tente aujourd'hui de cerner rigoureusement certains phénomènes de connaissance. Mais elle ne permet pas, ou pas encore, pour autant que nous soyons capables d'en juger, de construire sur l'acquisition de la géométrie une synthèse – fut-elle provisoire – dont l'enseignement a grand besoin. C'est à une telle synthèse que nous nous efforçons de contribuer.

Avertissement. – Dans cette première partie, nous utilisons le terme *congruent* pour désigner l'identité de forme et de grandeur. Bien que ce soit un terme d'origine savante, nous le préférons à *isométrique*, parce qu'il nous évite la référence à une mesure des distances, qui n'a rien à voir avec notre propos.

Dans d'autres parties de cette étude, nous utiliserons d'autres mots, et nous annoncerons ces choix. Sur tous les termes qui tournent autour de *congruent* et *isométrique*, voir l'appendice à la page 301.

1

La perception des objets

Tout ce que je sais du monde, même par science, je le sais à partir d'une vue mienne ou d'une expérience du monde sans laquelle les symboles de la science ne voudraient rien dire.

Maurice Merleau-Ponty

[...] si peu que nous sachions du monde environnant historique des premiers géomètres, il est toutefois certain [...] que c'était un monde de choses (parmi lesquelles les hommes eux-mêmes en tant que sujets de ce monde).

Edmund Husserl

Dans ce chapitre, nous étudions la perception de la forme, des symétries et des dimensions des objets indéformables, d'abord plans, puis à trois dimensions. Nous montrons aussi comment la perception des symétries provoque un sentiment esthétique élémentaire.

1 La constitution mentale des objets

Le monde environnant contient une foule d'objets indéformables (sauf si on les sollicite trop violemment[1]) et qui peuvent occuper des positions diverses par rapport à nous. Dans notre recherche sur les origines de la géométrie, nous nous occupons d'abord de tels objets et non, comme nous l'avons dit dans l'introduction, de figures immobiles ou de parties de l'espace.

Au départ se trouve nécessairement la question : comment reconnaissons-nous qu'un objet *conserve sa grandeur et sa forme*, bien que *son apparence change* selon les positions qu'il occupe par rapport à nous ? Merleau-Ponty [1945] essaye de répondre à cette question principalement pour les objets plans d'une taille telle que le regard peut les embrasser lorsqu'ils sont amenés de-

[1] Cette simple affirmation renvoie au paradoxe suivant : comment sait-on qu'un objet est indéformable ? En pratique, on vérifie que ses mesures ne changent pas. Mais pour vérifier cela, on doit disposer d'un instrument de mesure, une règle graduée par exemple, et celle-ci pour être utile doit nécessairement être indéformable. On peut, en demeurant au plan du bon sens, ne pas se préoccuper de ce cercle vicieux. On peut aussi, en suivant Hans Freudenthal [1983], décréter qu'il existe des transformations (et des transports) d'objets que l'on qualifie de *douces* (des *gentle transformations*), qui par définition ne déforment pas les objets. Nous suggérons au lecteur de ne pas s'inquiéter à ce sujet.

vant l'observateur en position frontale, à distance de toucher. La grandeur et la forme objectives de l'objet seraient celles que nous lui attribuons dans cette position privilégiée[2].

Mais qu'est-ce que la constance de cette forme et de cette grandeur à travers la variation des apparences ? Pour chaque objet, ce *système d'apparences* liées aux conditions de sa présentation est un système structuré, et la constance de cette structure s'identifie à ce que nous appelons la constance de la grandeur et de la forme.

Par exemple, dit Merleau-Ponty, « si je tiens mon porte-plume près de mes yeux et qu'il me cache presque tout le paysage, sa grandeur réelle reste médiocre, parce que ce porte-plume qui masque tout est aussi un porte-plume *vu de près*, et que cette condition, toujours mentionnée dans ma perception, ramène l'apparence à des proportions médiocres. »

À l'opposé, si on me présente un objet tout nouveau pour moi, un objet comme je n'en ai jamais vu de semblable, il se réduit dans l'immédiat à sa seule apparence présente. Il n'atteindra pour moi son existence objective que lorsque j'aurai intégré en un tout cohérent l'ensemble de ses aspects possibles[3].

Par ailleurs, expliquer ainsi la perception objective des objets solides, c'est faire de cette perception une analyse a posteriori où sont engagés les concepts scientifiques de distance et d'orientation. Mais ce n'est pas par cette voie argumentée que se constitue la perception objective elle-même. C'est plutôt par l'expérience vécue des diverses perceptions et leur organisation, cette dernière se situant à un niveau *prélogique*[4].

[2] Nous utiliserons beaucoup dans la suite cette notion de *position privilégiée*. Elle est définie ici en première approximation. Nous la préciserons à la section 2.

[3] Pour approfondir cette question de la constance de la grandeur et de la forme, la citation suivante de Merleau-Ponty n'est sans doute pas superflue. « Une forme ou une grandeur seulement apparente, écrit-il, est celle qui n'est pas encore située dans le système rigoureux que forment ensemble les phénomènes et mon corps. Aussitôt qu'elle y prend place, elle retrouve sa vérité, la déformation perspective n'est plus subie, mais comprise. L'apparence n'est trompeuse et n'est apparence au sens propre que quand elle est indéterminée. La question de savoir comment il y a pour nous des formes et des grandeurs vraies, objectives ou réelles se réduit à celle de savoir comment il y a pour nous des formes déterminées, et il y a des formes déterminées, quelque chose comme « un carré », un « losange », une configuration spatiale effective, parce que notre corps comme point de vue sur les choses et les choses comme éléments abstraits d'un seul monde forment un système où chaque moment est immédiatement significatif de tous les autres.

« Dans toutes ses apparences, l'objet garde ses caractéristiques invariables, demeure invariable lui-même, et il est objet, parce que toutes les valeurs possibles qu'il peut prendre en grandeur et en forme sont d'avance renfermées dans la formule de ses rapports avec le contexte. Ce que nous affirmons avec l'objet comme être défini, c'est en réalité un *facies totus universi* qui ne change pas, et c'est en elle que se fonde l'équivalence de toutes ses apparitions et l'identité de son être. »

[4] Voici comment Merleau-Ponty s'exprime à ce sujet. Pour moi qui commence à saisir la constance d'un objet solide, « la distance de moi à l'objet n'est pas une grandeur qui croît ou décroît, mais une tension qui oscille autour d'une norme ; l'orientation oblique de l'objet par rapport à moi n'est pas mesurée par l'angle qu'il forme avec le plan de mon visage, mais éprouvée comme un déséquilibre, comme une inégale répartition de ses influences sur moi ; les variations de l'apparence ne sont pas des changements de grandeur en plus ou en moins, des distorsions réelles : simplement, tantôt ses parties se mêlent et se confondent, tantôt elles s'articulent nettement l'une sur l'autre et dévoilent leurs richesses. Il y a un point de maturité de ma perception qui satisfait à la fois à ces trois normes et vers lequel tend tout le processus perceptif. »

Le fait de parler d'un niveau prélogique n'implique toutefois pas que la personne soit passive. Elle n'absorbe pas un flot de perceptions advenant au hasard. Que faisons-nous en effet pour connaître un objet ? Nous exécutons diverses manœuvres, dont certaines sont purement réflexes, et d'autres plus ou moins consientes et volontaires. Nous dirigeons notre regard vers l'objet . Nous l'éloignons ou le rapprochons de nous (ou bien nous nous éloignons ou nous rapprochons de lui) pour qu'il apparaisse dans notre champ de vision claire, ni trop grand, ni trop petit. Nous ajustons la courbure de nos cristallins pour donner de la netteté à l'image. Nous réglons le diamètre de nos pupilles pour obtenir un éclairage adéquat. Nous faisons pivoter l'objet pour qu'il vienne en position frontale. Nous le tournons encore pour situer le cas échéant un de ses axes de symétrie dans le plan de symétrie de notre appareil visuel. Nous le retournons pour en considérer l'autre face. Toutes ces manœuvres amènent en outre à identifier au passage des perceptions et des souvenirs de perceptions. Le temps intervient ici.

Les changements de position de l'objet par rapport à nous et les changements correspondants de la perception sont continus, ce qui contribue à assurer l'identité de l'objet perçu. Comme l'écrit R. Arnheim [1976] : « Dans la perception, les divers aspects d'un objet, loin de constituer une « déroutante variété », s'enchaînent en séquences continues. Ce sont plus qu'une multitude de cas éparpillés au hasard, des transformations progressives. » Et il conclut : « L'identité n'a donc pas à être extrapolée au hasard[5]. »

Qui plus est, les actions qui contribuent à la constitution mentale de l'objet s'enchaînent et se coordonnent non pas au hasard, mais guidées par une intention de connaître. On cherche entre autres le point de maturité, la position privilégiée dont parle Merleau-Ponty.

Il s'agit là d'une forme d'intelligence, ce qui est la thèse principale de R. Arnheim [1976], intelligence non pas déductive, mais au moins discursive puisqu'elle procède par étapes enchaînées. Elle est proche de l'intelligence des situations en ce qu'elle coordonne des perceptions et des mouvements, non des idées[6]qui procède par étapes enchaînées, et il ne se réfère pas à l'existence du discours auquel renvoie l'étymologie du terme *discursif*. C'est en ce sens que l'on peut avec Merleau-Ponty parler d'un « niveau prélogique ».

Merleau-Ponty ajoute encore un peu plus tard : « La constance des formes et des grandeurs dans la perception n'est donc pas une fonction intellectuelle, mais une fonction existentielle, c'est-à-dire qu'elle doit être rapportée à *l'acte prélogique* [nous soulignons] par lequel le sujet s'installe dans son monde. »

[5] Arnheim ajoute une observation significative à propos de l'environnement de l'objet perçu : « Les variations de chaque objet sont non seulement organisées entre elles, mais encore liées de façon ordonnée à d'autres variations similaires qui se produisent simultanément dans le reste du champ visuel. Ainsi, quand l'observateur se meut dans un milieu donné, les tailles projectives de tous les constituants de ce milieu se modifient à l'avenant. Le milieu dans son ensemble est sujet à un changement de taille unifié, logique. » Nous verrons plus tard en outre (cf. chapitre 4) que la continuité des perceptions contribue de manière importante à la formation des raisonnements géométriques.

[6] Sur les notions d'*intelligence discursive* et d'*intelligence des situations*, voir H. Wallon [1970].

2 Reconnaître la congruence ou la similitude

Dans la première section, nous avons cherché à voir comment nous connaissons et arrivons à connaître un objet. Mais nous n'avons envisagé qu'un objet quelconque. Autrement dit, nous n'avons pas pris en compte le rôle joué dans ce processus par les diverses formes possibles des objets.

Or notre environnement – minéral, végétal, animal, humain, manufacturé – est peuplé d'objets présentant des régularités, possédant des symétries. Nous avons tendance à l'oublier à force de vivre au milieu d'eux. Or ce sont seulement ces objets qui ont permis la constitution de la géométrie. Celle-ci n'aurait pas eu de matériau dans un univers complètement désordonné.

Voyons donc maintenant comment nous arrivons à reconnaître les symétries les plus simples. Les considérations qui suivent, empruntées pour l'essentiel à Ernst Mach [1922], ont trait à la perception des objets plans congruents, mais elles se transposent sans peine à deux parties congruentes d'un même objet plan.

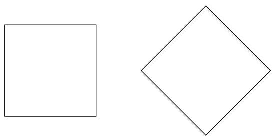


Fig. 1

Mach observe que la congruence se perçoit sans peine si les deux objets et l'observateur se trouvent dans des positions symétriques déterminées, et se perçoit mal ou pas du tout dans les autres cas[7].

« Deux formes, dit-il, peuvent être *géométriquement congruentes, mais complètement différentes sur le plan physiologique*[8], comme le montrent les deux carrés de la figure 1, dont la parenté n'est pas du tout reconnaissable sans des opérations mécaniques et[9] *intellectuelles*[10]. Un petit nombre de tests fort simples nous rendront familiers les rapports impliqués ici. Regardons une tache arbitrairement choisie (figure 2). Si nous plaçons la même tache deux ou plusieurs fois sur un rang et dans la même orientation, nous obtenons une impression particulière et agréable : nous reconnaissons sans difficulté, au premier coup d'œil, l'identité de toutes les figures (figure 3).

Fig. 2

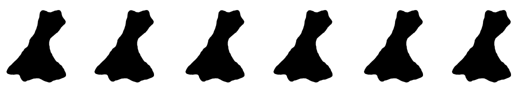


Fig. 3

[7] Mach envisage des objets plans en position frontale à distance de toucher. Les connaissances sur la perception ont progressé depuis l'époque de Mach, sans pourtant, nous semble-t-il, infirmer les observations de celui-ci. Le lecteur intéressé trouvera une porte d'entrée dans la littérature actuelle sur la perception dans J. Ninio [1989].

[8] Ici et dans toutes les citations qui suivent, c'est Mach qui souligne.

[9] Le contexte semble indiquer qu'il faudrait lire ici *ou* au lieu de *et*.

[10] Mach oppose *physiologique* à *intellectuel* (ce qui relève de l'entendement). Dans son exposé, le physiologique est principalement le visuel. Il parle aussi à cet égard de sensations *optiques*. Ce qu'il nomme sensation peut, nous semble-t-il, être interprété par *perception*, dans la mesure où son analyse prend en compte deux pôles seulement : le premier qui relève des sens, et le second de l'intellect.

Mais si nous tournons une tache par rapport à l'autre de façon suffisamment nette, leur identité de forme ne peut plus être reconnue sans l'intervention de l'intelligence (figure 4). Il est possible, en revanche, de déceler une parenté frappante entre les deux formes, lorsqu'à cette première tache on en ajoute une autre, en position symétrique par rapport au plan médian de l'observateur (figure 5). Toutefois, si le plan [l'axe] de symétrie s'écarte sensiblement du plan médian de l'observateur – comme dans la figure 6 –, l'affinité de forme n'est plus reconnaissable qu'en tournant la figure sur cet axe, ou par le biais d'*opérations intellectuelles*[11]. Si nous adjoignons à cette tache, la même tache tournée sur elle-même à 180° dans le même plan, la parenté de forme devient par contre à nouveau repérable[12] (figure 7). C'est de cette façon que l'on obtient la symétrie centrale. »

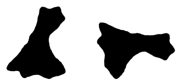


Fig. 4

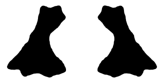


Fig. 5

Fig. 6

Mach étend ensuite son analyse aux objets semblables. Il écrit :

« Par une diminution de toutes les dimensions de la tache dans les mêmes proportions, nous obtenons une tache *géométriquement semblable*. Mais tout de même que ce qui est géométriquement congruent n'est pas pour autant physiologiquement (optiquement) congruent, et que ce qui est géométriquement symétrique n'est pas pour autant symétrique optiquement, de même ce qui est géométriquement semblable n'est pas pour autant *semblable optiquement*. Ce n'est que lorsque la tache géométriquement semblable est placée à côté de l'autre dans une *orientation identique*, qu'alors les deux paraissent *optiquement semblables* (figure 8). Une rotation de l'une de ces taches fait disparaître cette ressemblance (figure 9). Si nous substituons à l'une d'entre elles une autre tache, symétrique par rapport au plan médian de l'observateur, il se produit une ressemblance symétrique, qui a aussi une valeur optique (figure 10). Enfin, la rotation d'une figure de 180° dans son plan, qui produit une homothétie de rapport négatif [zentrisch-symmetrische Aehnlichkeit], possède encore une valeur physiologico-optique (figure 11). »

Fig. 7

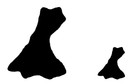


Fig. 8

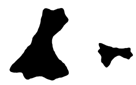


Fig. 9

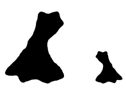


Fig. 10

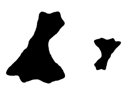


Fig. 11

Mach remarque ensuite que la plupart des situations dans lesquelles on perçoit des congruences et des similitudes sont aussi

[11] On rattache sans peine cette observation à l'expérience suivante : « En plaçant un sujet humain au centre d'une sphère sur laquelle sont fixés des disques d'égal diamètre, on constate que la constance est beaucoup plus parfaite selon l'horizontale que selon la verticale. La lune énorme à l'horizon et très petite au zénith n'est qu'un cas particulier de la même loi. Au contraire chez les singes le déplacement vertical est aussi naturel dans les arbres que le déplacement horizontal l'est pour nous sur la terre, aussi la constance selon la verticale est-elle excellente. Koffka, *Principles of Gestalt Psychology,* pp. 94 et suivantes. (Cité par Merleau-Ponty, op. cit.)

[12] Beaucoup de personnes trouvent la perception de la congruence plus difficile dans ce cas.

celles où l'œil est guidé par des parallèles effectives ou virtuelles : les couples constitués d'une droite (un segment) et de son image par une translation ou une homothétie (parallèles effectivement présentes dans la figure), ou la direction constante des droites (absentes de la figure mais empruntées par le regard) joignant les points homologues dans les translations et les symétries orthogonales[13]. Il s'agit donc d'une prégnance de la droite et du parallélisme, guidant le regard dans la reconnaissance des formes.

Il est important pour notre propos de relever clairement les trois façons de reconnaître la congruence de deux objets.

La première est la *perception* directe, et elle est possible lorsque les deux objets sont par rapport à l'observateur dans une situation de symétrie appropriée.

La seconde relève d'une *opération mécanique.* Celle-ci peut consister soit à amener le couple d'objets dans la position privilégiée où la congruence est perçue, soit plus simplement à les superposer.

La troisième passe par des *opérations intellectuelles.* Un exemple d'une telle opération est l'application d'un des théorèmes sur la congruence des triangles. Mach donne un autre exemple, qui concerne les figures semblables : « Dans les configurations géométriques semblables – écrit-il – , *toutes* les distances homologues sont proportionnelles. Mais ceci *relève de l'entendement*, non de la *sensation.* Si nous plaçons en vis-à-vis un triangle de côtés a, b, c avec un triangle de côtés $2a$, $2b$, $2c$, nous reconnaissons cette relation simple, non point immédiatement mais intellectuellement, par des mesures. Si nous voulions qu'en plus ressorte une ressemblance *optique*, il faudrait encore que les triangles soient orientés convenablement. »

Résumons notre démarche. Les objets de forme et de dimensions constantes sont les matériaux de la géométrie à ses débuts. Nous avons vu avec Merleau-Ponty comment un tel objet se constitue mentalement. En étudiant avec Mach la reconnaissance des congruences et des similitudes, nous nous sommes rapprochés de ce qu'on pourrait appeler le premier problème d'une géométrie spontanée : quand peut-on dire que deux objets ou deux parties d'un objet sont « les mêmes » du point de vue de la grandeur et (ou) de la forme, et à quoi reconnaît-on qu'ils sont les mêmes ?

Les critères perceptifs et mécaniques relèvent de la vie et de l'intelligence pratiques. On peut dire que la géométrie intervient dès que des critères intellectuels permettent *d'inférer* la congruence ou la similitude. *Mais alors que la reconnaissance visuelle ne porte jamais que sur des objets particuliers, les critères géométriques sont applicables à des catégories d'objets, des objets mentaux* (cf. chapitre 2, section 2). Vue sous cet angle, la géométrie apparaît comme un système d'instruments intellectuels qui

[13] Mach mentionne, à cet égard, les translations, mais non les symétries orthogonales.

pallie les insuffisances de la perception et permet de les dépasser. Elle étend notre connaissance des objets au delà des limites, à vrai dire étroites, de notre perception. Elle est comme un instrument d'optique qui donnerait plus de puissance à notre vue. En ce sens on peut dire qu'elle nous aide à *saisir l'espace.* Comme dit Freudenthal [1973], « la géométrie au niveau de base, c'est saisir l'espace ». En éclairant les situations spatiales, elle nous met à l'aise dans l'espace.

Toutefois, si la géométrie commence avec les opérations intellectuelles, il faut souligner avec force qu'elle se constitue sur le terrain des expériences sensorielles et mécaniques et serait impossible sans ces dernières. Mach insiste beaucoup sur cet ancrage de la géométrie dans la réalité sensible et l'action. Il écrit : « Ce sont [...] les sensations d'espace [...] qui servent de point de départ et de fondement à toute géométrie. » Et encore : « Les propriétés physiologiques ont probablement donné la première impulsion à la recherche en géométrie. » Cette affirmation nous renvoie sans doute à une préhistoire mystérieuse où les êtres humains, reconnaissant les configurations les plus symétriques et les plus simples, ont commencé à explorer plus avant l'espace à la force de leur esprit.

Mach affirme enfin que la géométrie, née sur le terrain des perceptions et du fait de leurs limitations, ne perd pas le contact avec elles. « Une géométrie scientifique, écrit-il, est impensable hors de la coopération de l'intuition sensible et de l'entendement. »

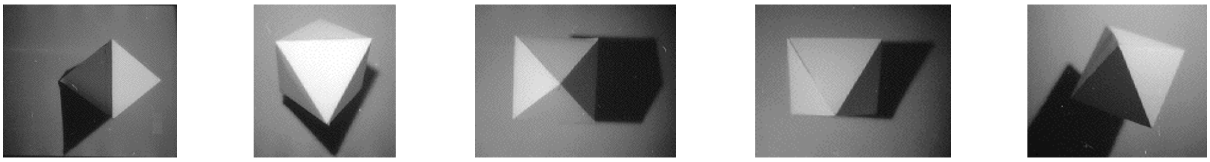
Ces affirmations ont des conséquences importantes entre autres pour les enseignements maternel et primaire. C'est sur le terrain des perceptions et de l'action que se prépare l'apprentissage de la géométrie.

Avant de passer – à la section suivante – des objets plans aux objets à trois dimensions, précisons le sens que nous attribuons désormais à l'expression : objet en *position privilégiée*. À la section 1 nous avons désigné ainsi, pour un objet plan, un position frontale dans laquelle l'objet occupe un angle de vision nette. Si l'objet possède des éléments de symétrie (parties tranlatées l'une de l'autre, axe ou centre de symétrie), nous exigerons en outre que ces éléments de symétrie soient accordés à ceux des organes de perception de l'observateur. Il n'est donc pas exclu, par exemple si un objet possède plusieurs axes de symétrie, qu'il possède aussi plusieurs positions privilégiées (en l'occurence celles dans lesquelles un axe est vertical).

3 De deux à trois dimensions

Bien que nous n'ayons parlé jusqu'ici quasiment que d'objets plans, beaucoup de nos considérations s'étendent aux objets à trois dimensions. Toutefois, ceux-ci sont plus difficiles à saisir objectivement que les objets plans. C'est ce dont nous nous occupons maintenant.

Considérons un objet à trois dimensions que nous ne connaissons pas, ou que nous ne nous attendons pas à rencontrer, par exemple l'octaèdre régulier photographié dans des positions diverses à la figure12.



(a) *(b)* *(c)* *(d)* *(e)*

Fig. 12

Dans les positions (a), (b), (c) et (d), il possède un plan de symétrie coïncidant avec celui de l'observateur. Dans les cas (a), (b) et (c), un de ses axes de symétrie est en position de bout, c'est-à-dire dirigé directement vers l'observateur. Cet axe est d'ordre 2 dans le cas (a), d'ordre 3 dans le cas (b) et d'ordre 4 dans le cas (c). En position (e), l'octaèdre est vu de côté.

Cet objet est assez simple : deux pyramides accolées par leur base carrée. Néanmoins, il offre à notre vue des aspects multiples et trompeurs. Les positions les plus symétriques par rapport à l'observateur sont aussi celles qui en donnent la vue la plus partielle. La première va jusqu'à cacher six faces sur huit ! Nous sommes loin de pouvoir, comme pour les objets plans, choisir une vue fidèle, en quelque sorte objective, liée à des conditions de symétrie.

Au contraire, c'est en regardant l'objet « de côté », en rompant l'accord de symétrie entre lui et l'observateur, que nous le découvrons le plus complètement, que nous percevons le plus complètement l'articulation de ses parties les unes sur les autres. C'est ce que montre la figure (e).

Ainsi un objet à trois dimensions n'est jamais vu complètement, ni le mieux possible. Évidemment, s'il est polyédral, on peut lui substituer le même objet réduit à ses arêtes, et alors on le voit mieux. Mais il y a des objets courbes, qui n'ont pas d'arêtes.

Toutefois, si l'objet est de dimensions modérées, on peut avec les mains tâter ses parties cachées à la vue. Parfois il est significatif de le tâter avec les deux mains, en un geste symétrique.

On le voit, la perception objective d'un objet solide, de sa forme et de sa grandeur, résulte de la constitution d'un ensemble structuré de perceptions. Mais au contraire des objets plans, cet ensemble n'est pas constitué de perceptions infidèles s'ordonnant autour d'une perception fidèle. Il est constitué de multiples perceptions particulières, visuelles et tactiles, mais alors que certaines des perceptions visuelles révèlent bien l'une ou l'autre symétrie particulière et mal l'articulation globale, d'autres montrent mieux l'articulation des parties et cachent les symétries.

En établissant un lien, en quelque sorte des filiations entre les diverses perceptions, la continuité des mouvements contribue à la structuration de celles-ci, à la connaissance géométrique de l'objet[14].

Tout ceci concerne la perception des objets à trois dimensions. Revenons au point de vue particulier de la congruence de deux objets ou de deux parties d'un objet. Dans les cas plans, lorsque la congruence était difficile à percevoir, nous avons dit que l'on recourait à des opérations mécaniques (la superposition des deux objets) ou intellectuelles. Pour les objets à trois dimensions, la superposition est généralement impossible, vu l'impénétrabilité de la matière. Tout au plus peut-on superposer deux faces de deux polyèdres pour en vérifier la coïncidence. Ainsi, si les opérations mécaniques échouent, il ne reste plus que les opérations intellectuelles.

La difficulté des perceptions et l'impossibilité des superpositions rendent l'*accès* à la géométrie de l'espace plus compliqué que l'accès à la géométrie plane. La première n'est pas plus difficile seulement parce qu'on y raisonne ordinairement sur des dessins et que ceux-ci sont infidèles, mais c'est d'abord parce que la perception des objets de l'espace eux-mêmes est le siège de difficultés propres : celles qui font que toute perception est incomplète. Même si, à la limite, on décidait d'étudier la géométrie de l'espace toujours sur des maquettes, et jamais sur des figures, d'importantes difficultés propres à l'espace seraient toujours là.

---

[14] Il est intéressant de rappeler que les difficultés de perception des objets de l'espace étaient pour Husserl un exemple privilégié de phénomène formant la matière d'étude de la phénoménologie. « Quelle que soit une chose de l'espace, l'expérience de celle-ci obéira à certaines contraintes invisibles au premier abord, mais saisissables si j'y réfléchis un peu : une chose dans l'espace ne peut pas être vue en entier, d'un seul coup, elle doit être appréhendée en plusieurs visions successives ; ces visions doivent être cohérentes ; chacune d'elles apporte une correction à toutes les autres. » (cité par Ph. Huneman et E. Kulich).

4 Géométrie et esthétique

> Aisthesis *fut employé par les Grecs pour évoquer une « sensation » qui est tout à la fois perception et procès de connaissance.*
>
> Encyclopédie philosophique universelle

Nous avons presque terminé[15] la partie de cette étude consacrée à la constitution mentale de l'objet ainsi qu'à la perception des congruences. Toutefois, il nous reste à traiter un point sur lequel Mach revient plusieurs fois et qui nous paraît particulièrement important, à savoir la relation – peut-être surprenante – de cette matière avec le sentiment esthétique.

Dans un des passages cités ci-dessus, Mach remarque *l'impression particulière et agréable*[16] que l'on éprouve à la vue de deux formes translatées l'une de l'autre dans un plan frontal (figure 3 à la page 20). Un peu plus loin, comme nous l'avons vu, il rattache cette impression esthétique à la constance de la direction des droites reliant chaque point remarquable d'une des deux figures à son homologue dans l'autre. Il ajoute, a contrario, que « quand l'orientation est perturbée, cette relation, et avec elle l'impression d'unité (l'impression esthétique) l'est aussi. »

Parlant de la droite, il écrit : « la *ligne droite*[17] en tous ses éléments, conserve la même direction, et excite partout *la même*[18] sensation d'espace. D'où son avantage esthétique évident. Par ailleurs, les lignes droites qui se trouvent dans le plan médian ou qui lui sont perpendiculaires bénéficient d'une situation intéressante, en ce qu'elles occupent une situation de symétrie et se comportent de la même manière par rapport aux deux moitiés de l'appareil visuel. On ressent toute autre position des lignes droites comme une distorsion par rapport à la symétrie et comme « allant de travers ». »

Des considérations de ce genre s'appliquent à toutes les situations où l'accord entre une symétrie des objets et les directions privilégiées de l'appareil perceptif entraînent la reconnaissance aisée de congruences. Ainsi ce qui est remarquable et clair sur le plan de la perception est aussi ce qui apparaît comme ordonné, un et beau. A contrario, lorsque Merleau-Ponty évoque ci-dessus la sensation de *déséquilibre*, « d'inégale répartition des influences sur moi » d'un objet orienté obliquement, n'est-ce pas à une impression inesthétique qu'il renvoie ? Et de même ce qu'il appelle le *point de maturité* de la perception renvoie à un sentiment esthétique.

15 L'étymologie mise en exergue nous a été signalée par Michel Thomas.
16 Nous soulignons.
17 Mach souligne.
18 Mach souligne.

Ces observations concernent, nous venons de le rappeler, certaines catégories particulières d'objets et de perceptions, et elles ne renvoient à aucune relation saisie intellectuellement. Elles prennent place au niveau de cette intelligence primitive (mentionnée ci-dessus) qui organise les perceptions. Elles ne concernent donc pas la beauté que l'on peut discerner dans les idées mathématiques et qui pose un problème distinct.

Néanmoins, la reconnaissance perceptive de certaines relations de forme et de grandeur se trouve *au seuil d'une emprise mentale sur l'ordre des choses*, puisqu'elle conduit à la formation des objets mentaux et des concepts (voir chapitre 2). Elle est la porte d'entrée et la condition de l'intelligibilité géométrique du monde.

La valeur esthétique des congruences et similitudes reconnaissables à vue est confirmée par leur usage dans les arts. Mach en parle à propos de l'architecture, de la musique (impliquant une extension au temps des considérations ci-dessus) et plus spécialement des arts décoratifs et des arts primitifs. On trouve en abondance dans tous ces arts des effets de congruence et de répétition accessibles à la perception, mais peu ou pas du tout de structures géométriques plus compliquées, accessibles seulement à l'intelligence. C'est que les arts s'adressent à la perception d'abord, et non d'abord à l'intellect.

Certes, l'art ne se limite pas à la production d'objets symétriques simples, ou en d'autres termes, les symétries simples ne suffisent pas à produire de l'art. Mais ne peut-on pas dire qu'elles sont un des matériaux fondamentaux des arts mentionnés ci-dessus ? Et ceci même dans les œuvres les plus délicates et les plus profondes. Que l'on songe aux temples grecs, aux cathédrales, aux grandes œuvres poétiques[19] et musicales. Les quatuors de Mozart par exemple sont un entrelac de motifs et d'accords dont les répétitions et les symétries s'entendent clairement, correspondent à des translations sur l'échelle du temps et celle des fréquences, ainsi qu'à des transpositions de timbre par le passage d'un instrument à un autre.

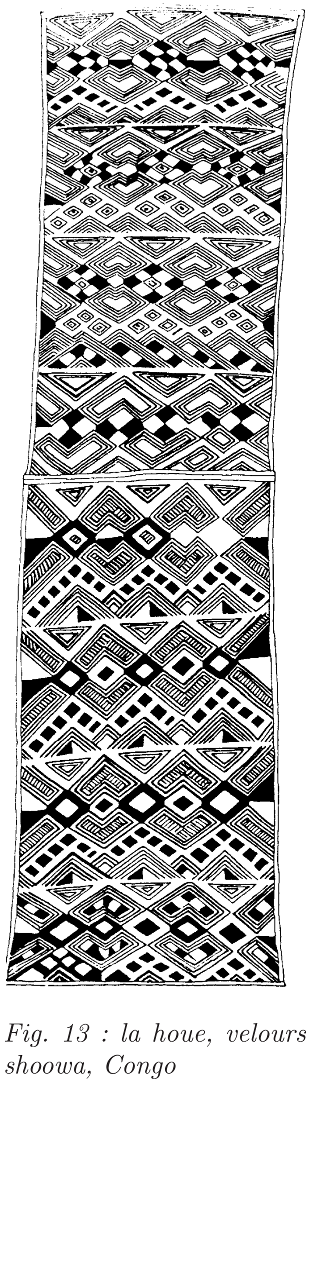


Fig. 13 : la houe, velours shoowa, Congo

Cette présence des symétries simples dans l'art semble bien être universelle. On la trouve abondamment, nous l'avons dit, dans les arts primitifs. La figure 13 en témoigne. On la retrouve jusque dans les œuvres contemporaines les plus libérées des contraintes qui pesaient sur les formes traditionnelles de l'art. Les exemples abondent. Contentons-nous de mentionner l'orientation parallèle des grandes touches de peinture chez Monnet et Cézanne, le rythme chez ce dernier des pommes et des baigneuses, l'usage de la droite et des concordances de directions chez les cubistes (figure 14), les symétries des structures d'inspiration végétale dans l'art nouveau (figure 15 à la page 29), l'exacerbation de la symétrie chez des peintres tels que Mondrian ou de

[19] Les règles de la métrique poétique et de la rime sont des règles de symétrie.

sculpteurs tels que Annesley (figure 16 à la page suivante). Picasso exprime la nécessité de ces formes aisément reconnaissables et qui se répondent lorsqu'il dit : « La peinture est poésie ; elle s'écrit toujours en vers avec des rimes plastiques, jamais en prose. Les rimes plastiques sont des formes qui riment entre elles ou qui créent des assonances avec d'autres formes ou avec l'espace qui les entoure[20]. »

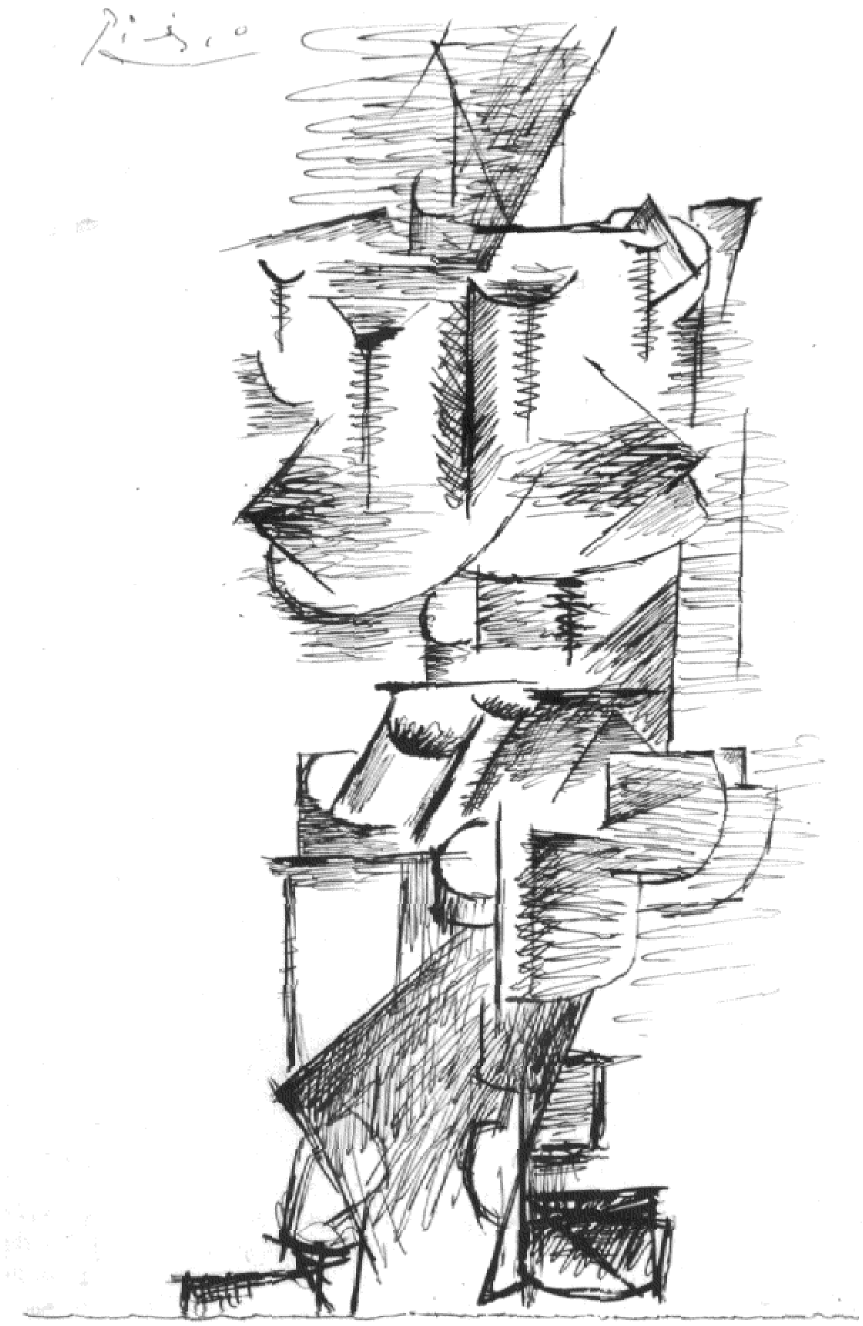


Fig. 14 : Femme debout, Pablo Picasso, 1912

[20] Cité par R. Arnheim [1976].

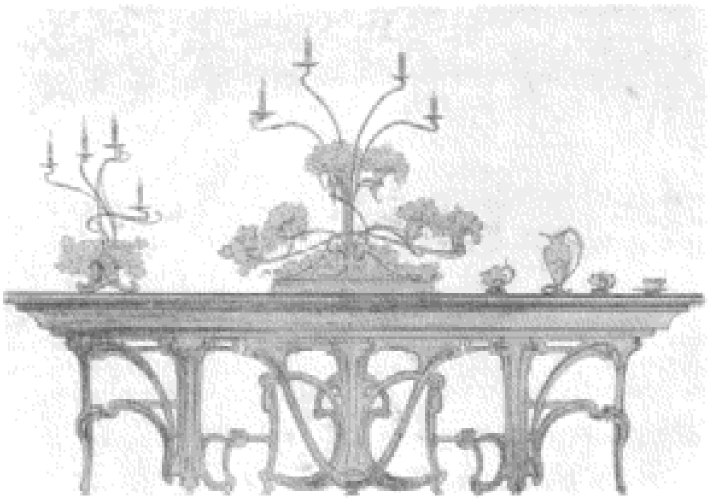


Fig. 15 : Projet pour une garniture de table, Horta, 1896

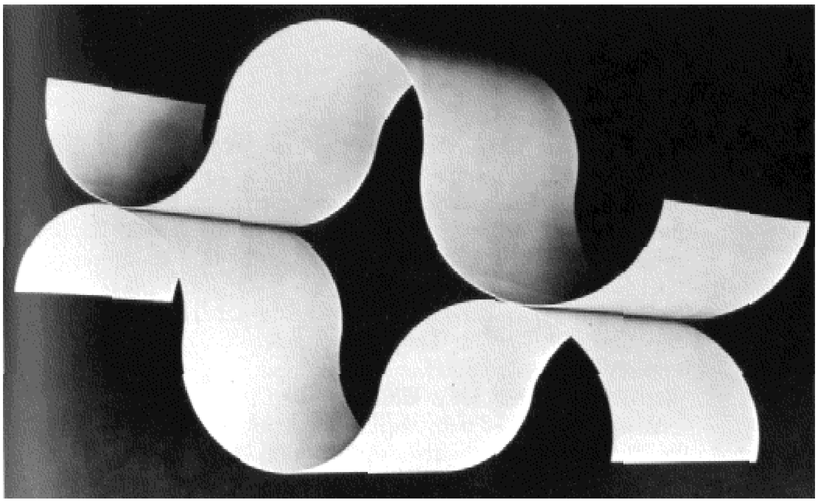


Fig. 16 : Orinoco, Annesley, 1965

Dans un tout autre domaine, le choix par un grand nombre de firmes commerciales d'un logo symétrique simple montre bien le prix que les hommes attachent à de tels objets pour la facilité et l'agrément de leur perception. Autre exemple, les symboles mathématiques les plus communs présentent des symétries simples :

$$+ \quad - \quad \times \quad := \approx < > \quad \cap \cup \quad \Rightarrow \int \ \forall \ \exists$$

Bien entendu, comme nous l'avons déjà observé, la production de symétries *ne suffit pas* à la création artistique. Le génie de Mozart est d'avoir créé les éléments de telles symétries (les accords et les mélodies de base) et de les avoir organisées de cette façon qui nous touche. Mais d'autre part il se sert bien tout le temps de ces symétries simples, et celles-ci sont déjà porteuses par elles-mêmes d'un pouvoir esthétique élémentaire[21].

Nous arrivons ainsi à une conclusion dont la portée nous semble considérable. Le monde est intelligible parce qu'il est peuplé de régularités, de symétries. Or celles-ci sont aussi à l'origine d'un sentiment d'équilibre, d'un plaisir intime. Ainsi la science et l'art ont le même matériau de départ. L'un l'organise dans l'abstrait, sur le mode de la généralité, l'autre dans le concret, sur le mode de l'œuvre singulière.

Mais l'intelligibilité et la beauté sont là dès les commencements. La géométrie n'est pas belle seulement pour ceux qui l'ont longuement pratiquée, elle l'est aussi – dans un certain registre – dès sa naissance et pour tout le monde.

[21] Nous n'abordons pas ici la remarque fréquente qu'une symétrie trop parfaite nuit à l'impression esthétique. C'est une question difficile de savoir quelles transgressions mineures de la symétrie contribuent à l'effet artistique.

2

Les étapes de la conceptualisation

Se servir personnellement des choses c'est une façon de les identifier qui précède leur identification objective.

H. Wallon

Ce qui ne tombe pas sous le sens, contemple-le fermement comme présent par devant ta raison.

Parménide

Quoique centré encore sur la géométrie, ce chapitre, traitant de la maturation des concepts, contient beaucoup de considérations applicables bien au delà des frontières de la géométrie.

Reprenons le fil du chapitre 1. Nous y avons montré comment nous organisons mentalement, en un système structuré, nos perceptions d'un objet situé dans des positions diverses par rapport à nous. Cette connaissance de l'objet nous permet de le reconnaître en nous appuyant sur des perceptions particulières jouant le rôle d'indices.

Ces considérations concernaient notre relation d'être humain avec un objet à la fois, un objet singulier. Mais une telle relation a quelque chose d'exceptionnel, car dans l'immense majorité des cas, nous reconnaissons l'objet comme appartenant à une catégorie d'objets. Comme l'écrit L.S. Vygotski [1978], « Un caractère particulier de la perception humaine – et qui apparaît à un âge très jeune – est la *perception des objets réels*[1]. Il n'y a pas d'analogie à cela dans la perception animale. J'entends par là que je ne vois pas le monde simplement comme des couleurs et des formes, mais également comme un monde de sens. Je ne vois pas seulement une chose ronde et noire avec deux tiges ; je vois une horloge et je peux distinguer une aiguille de l'autre. Certains patients atteints de lésion cérébrale disent, quand ils voient une horloge, qu'ils voient quelque chose de rond et de blanc avec deux étroites bandes d'acier, mais ils ne savent pas que c'est une horloge ; de telles personnes ont perdu leur relation réelle avec les objets. Ces observations suggèrent que toute perception humaine consiste en perceptions catégorisées et non isolées. »

[1] Vygotski souligne.

Que veut dire dans cette citation *reconnaître une horloge* ? C'est savoir qu'il existe d'autres objets semblables à celui-là par leur forme ronde et par la présence de deux aiguilles, savoir la fonction de ces objets et la fonction particulière de chaque aiguille, savoir – peut-être – qu'on les appelle *horloges.* C'est donc regrouper dans sa conscience une catégorie de choses possédant des caractères en commun, une fonction, une structure communes, éventuellement une désignation commune.

Il est clair par ailleurs que les concepts sont susceptibles d'être acquis jusqu'à des niveaux divers de sophistication. C'est de ceux-ci dont nous allons nous occuper maintenant. Et quitte à schématiser très fort, nous en distinguerons trois :

1) les *préconcepts*, qui se situent essentiellement au niveau de l'action et de l'intelligence des situations[2] ;

2) les *objets mentaux* qui, pour le dire rapidement, sont les concepts sur lesquels on s'appuie dans la vie quotidienne ou dans une pratique scientifique élémentaire ;

3) les *concepts formels*, en prenant ici l'adjectif *formel* au sens d'*inscrit dans une théorie axiomatique ample.*

Nous expliquons en détail ces différents niveaux aux sections 1, 2 et 3.

En ce qui concerne les concepts géométriques les plus simples (ceux par exemple de rectangle, triangle, perpendiculaire, etc.), on ne peut pas le plus souvent en observer le premier niveau à l'état isolé[3] dans la pensée adulte, car la plupart des adultes sont au deuxième niveau, celui des objets mentaux, et certains assez rares ont atteint le niveau des concepts formels. Ou alors, il faudrait observer des adultes analphabètes.

Il serait intéressant d'étudier les stades d'acquisition, par des adultes, de classes d'objets simples quoique peu familiers[4]. À défaut d'avoir pu faire cela, nous utilisons ci-après l'exemple du rectangle[5]. Il est entendu alors que le premier niveau que nous décrivons doit être attibué à de jeunes enfants ou à des personnes qui, quoique d'âge adulte, n'ont pas atteint le développement mental ou culturel normal d'un adulte.

---

[2] Voir ci-dessous une explication de cette forme d'intelligence.

[3] Le premier niveau est toujours présent chez les adultes, mais il forme un tout avec le ou les deux niveaux suivants. Voir section 4.

[4] On imagine sans peine de telles classes. En voici un exemple. On considère un cube en tiges, et on en enlève des arêtes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une chaîne fermée de tiges. On peut faire cela de plusieurs façons. Les objets ainsi obtenus sont à la fois simples et insolites.

[5] Nous nous en tenons à ce seul exemple, mais le lecteur n'aura pas de difficulté à évoquer comme illustrations toutes sortes d'autres notions géométriques.

1 Les préconcepts

À un premier niveau[6], le rectangle est une forme *plate* que l'on rencontre souvent de face (une porte, une fenêtre,...) ou que l'on peut disposer devant soi *bien droite* (avec deux côtés verticaux). On reconnaît les rectangles à travers une perception globale : chaque rectangle en position privilégiée donne la sensation d'occuper l'espace de la même façon, la sensation que ses deux côtés verticaux exercent, comme dit Merleau-Ponty, la même influence sur la personne ; que le regard en s'élevant et s'abaissant passe sans heurt d'un côté horizontal à l'autre, etc. Il y a donc récurrence d'un type de perception.

Mais en outre le rectangle est utilisé dans des actions, dont certaines le déforment[7]. En voici quelques exemples :

> plier le rectangle en deux de sorte qu'une moitié recouvre exactement l'autre ; faire cela de deux façons ;
>
> le plier en quatre ;
>
> le plier en trois de manière approximative, comme on plie une lettre pour la glisser dans une enveloppe allongée ;
>
> le plier suivant une diagonale en remarquant que les deux moitiés ne se recouvrent pas, mais que le rectangle plié constitue une forme symétrique ;
>
> paver le plan avec des copies d'un même rectangle ;
>
> assembler des rectangles pour faire une boîte parallélipipédique ;
>
> déformer un rectangle constitué de tiges articulées de manière à obtenir divers parallélogrammes.

Bien entendu il ne s'agit là que d'exemples, et de plus l'expérience du rectangle varie d'une personne à l'autre.

Quelqu'un qui se trouve à ce stade de développement mental manie donc familièrement le rectangle, et éventuellement le nomme. Mais il n'est guère capable d'en parler, d'expliquer certains de ses caractères ou des phénomènes dont il est le siège. Si, à propos d'un objet rectangulaire particulier, on lui demande « c'est quoi ? », il répond volontiers : « c'est pour ... ». Si on lui demande « c'est comment ? », souvent il mime le rectangle avec les mains ou dessine un rectangle. Il y a là un décalage – surprenant pour un observateur non averti –, entre une connaissance élémentaire certes, mais pertinente au niveau de l'action, une connaissance *qui fonctionne*, et une grande incapacité ou maladresse dans l'expression.

Nous retenons pour désigner une notion qui fonctionne de cette manière, la dénomination de *préconcept*[8].

---

[6] Nous n'envisageons pas ici les concepts primitifs dont parle par exemple L. Vygotski [1997]. Observés surtout chez les petits enfants, ils regroupent des objets ayant entre eux des liens parfois fortuits, et qui en tout cas ne se réduisent pas à un ensemble de caractères communs.

[7] Nous dépassons donc ici la catégorie des objets rigides, à laquelle nous nous étions limités au chapitre 1.

[8] L.S. Vygotski [1997] appelle *concepts potentiels* ces concepts dont la connaissance se manifeste dans l'action, mais non dans l'analyse, les explications.

On le voit, les préconcepts fonctionnent dans le cadre d'une intelligence essentiellement pratique, appelée aussi *intelligence des situations*. H. Wallon [1970] parle de « cette intelligence qui fait ses preuves sans se formuler autrement qu'en trouvant la solution appropriée à chaque situation ... » Il suggère que cela aurait du sens de l'appeler *intelligence spatiale*, ce qui tend à montrer son importance dans l'acquisition de la géométrie. Mais en définitive, il l'appelle *intelligence des situations.* Il ajoute qu'elle s'observe dans « des actes qui impliquent une intuition variable et appropriée des circonstances, à laquelle il serait difficile de contester le titre d'intellectuelle[9]. Se rencontrant [...] chez l'enfant et, d'ailleurs, chez les hommes de tout âge, il y a en eux quelque chose d'immédiat, qui les rend irréductibles à la connaissance et aux formules du raisonnement. »

On nous objectera peut-être que l'intelligence des situations porte avant tout sur des objets d'usage quotidien tels qu'une feuille de papier, un fiche, une planche, une fenêtre, plutôt que sur un type d'objets déjà plus abstrait comme le rectangle. En parlant du rectangle, nous avons voulu désigner des réalisations de cette forme qui, tout en étant des objets d'usage, se prêtent à des manipulations comparables.

2 Les objets mentaux

À un deuxième niveau, le rectangle s'installe davantage dans la *conscience* et le *langage*, également dans la *volonté de connaître.* Il est non seulement utilisé et nommé, mais encore on peut *parler* des côtés horizontaux et verticaux, de l'égalité des côtés, des angles droits, du fait qu'on peut plier le rectangle en deux de sorte qu'une moitié recouvre exactement l'autre, et d'autres propriétés analogues. La capacité de parler des propriétés du rectangle et des phénomènes dont il est le siège implique la maîtrise d'un langage approprié, pas nécessairement le langage mathématique consacré[10], évoquant et mettant en relation des parties ou des éléments de la figure : des moitiés superposables, des diagonales égales et se coupant en leur milieu, des médianes perpendiculaires, etc.

Ce niveau de connaissance du concept peut être plus ou moins développé, selon l'expérience de la personne, et en particulier selon son parcours scolaire. Les connaissances en question ont leur source dans les expériences sensori-motrices présentes au niveau précédent. Mais elles manifestent un degré d'organisation mentale plus complexe. Celui-ci caractérise ce que Wallon appelle l'*intelligence discursive,* celle qui « dans l'action, s'exprime par

[9] Vygotski [1997] affirme que « la forme primaire de l'activité intellectuelle est la pensée active, pratique, dirigée vers la réalité et représentant l'une des formes fondamentales d'adaptation aux conditions nouvelles, aux situations changeantes du milieu extérieur. »

[10] Toutefois, par raison de simplicité, nous nous exprimons ci-après dans ce langage : nous parlons des *diagonales*, des *médianes*, etc.

des consignes ; dans la perception, par des énumérations, des remarques, des associations ; qui a pour référence constante des mots ; dont le langage, exprimé ou intime, est le substrat indispensable ; où chaque notion correspondante est stabilisée ; où la diversité des effets tient à la diversité des combinaisons entre éléments qui doivent rester constants ; où chaque espèce de relations tend vers une formule explicite. »

L'intelligence discursive se manifeste communément dans la pensée quotidienne des adultes ainsi que dans la pratique scientifique débutante, que ce soit en mathématiques ou ailleurs. En suivant Freudenthal [1983], nous appelons *objets mentaux* les concepts mobilisés à ce niveau de l'activité intellectuelle.

Comparés aux concepts formels[11], les objets mentaux ne sont pas appropriés à la construction d'une théorie de longue haleine. Ils sont d'une généralité et d'une efficacité modérées. Néanmoins, ils sont déjà des instruments efficaces d'organisation de l'environnement et de certains champs de phénomènes qu'on y observe communément. Ils sont utilisables dans des inférences. Leur manque éventuel d'univocité logique nuit peu à l'exercice de la pensée, dans la mesure où celle-ci ne produit pas de raisonnements longs et où elle compense les ambiguïtés par des recours au contexte et par tous les correctifs qu'apporte l'expression orale et gestuelle.

3 Les concepts formels

Toujours en schématisant, passons maintenant à un troisième niveau, celui des mathématiques constituées. Là le rectangle n'est plus, comme les rectangles de notre environnement familier, un objet que l'on peut aborder, dont on peut se servir et auquel on peut réfléchir *sans préalable*. Il apparaît à sa place dans le déroulement d'une théorie, place variable selon les axiomes que l'on se donne. Par exemple, dans une axiomatique de géométrie synthétique comme celle de Hilbert, on n'arrive au rectangle qu'après avoir construit une théorie des points, droites et plans, des relations d'incidence et de congruence, des angles, de l'orthogonalité, etc. Le rectangle conceptualisé dans ce cadre nouveau répond à une définition très technique. Les connotations techniques de la définition ont moins pour objet de dire ce qu'est précisément le rectangle que de permettre son usage dans des démonstrations qui ont, elles aussi, leur part de technique. À ce stade, le rectangle ne peut plus être manié que selon des règles strictes, aucun énoncé de propriété n'étant légitime sans preuve, toute preuve devant s'appuyer seulement sur des propriétés déjà démontrées. Le rectangle apparaît comme un épisode d'une entreprise intellectuelle exigeante et de longue haleine.

Dans le cadre de cette étude, nous avons décidé d'utiliser,

[11] Voir section 3 pour le sens que nous attribuons à cette locution.

pour désigner ce type de concepts, la locution de *concepts formels*[12].

Les objets mentaux sont différents des concepts formels. Il existe entre les uns et les autres des seuils qui tiennent à divers facteurs. L'un d'entre eux est évidemment leur technicité, que l'on ne trouve pas, ou pas à ce degré, dans les objets mentaux. Mais un autre facteur est que pour prendre leur place dans la théorie, les concepts qui ont des racines dans le quotidien voient leur sens biaisé, renvoient à des objets transformés, des objets dont la nature même est parfois différente. C'est le cas par exemple lorsque pour répondre à des nécessités des démonstrations, on passe de certains objets à des classes d'équivalence de ces objets.

L'apprentissage des mathématiques consiste en un certain sens à passer, parce que cela s'avère nécessaire pour répondre aux questions que l'on se pose, des préconcepts aux objets mentaux, puis éventuellement aux concepts formels[13].

4 La plénitude des concepts

Nous venons de décrire schématiquement trois niveaux dans la formation des concepts. Mais il ne faudrait pas croire que dans le parcours d'apprentissage de la géométrie – ou plus généralement des mathématiques – chaque niveau à partir du second remplace les précédents. Au contraire, chaque niveau intègre les niveaux antérieurs en une totalité de sens. Il n'y a pas par exemple d'objet mental qui ne doive une bonne partie de sa substance aux expériences sensori-motrices relevant de l'intelligence des situations ; il n'y a pas davantage de concept formel de rectangle qui n'ait ses racines dans le préconcept de rectangle et dans l'objet mental rectangle. Les trois niveaux des concepts sont sollicités dans la pensée mathématique créative. Les deux premiers sont surtout sources d'images et d'intuitions, le dernier fournit des instruments de la rigueur.

En prenant l'exemple de la *droite*, F. Gonseth [1936] a clairement exprimé cette intégration des niveaux conceptuels. Il écrit[14] :

« Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une for-

[12] Il est parfois difficile de choisir un terme qui satisfasse tous les lecteurs. Nous espérons que personne ne nous prêtera l'opinion que les concepts mathématiques auraient pour principal – voire pour seul – caractère, d'être formels. Cette opinion tendrait à faire croire qu'en mathématiques la forme prime le fond, ce qui est heureusement le contraire de la vérité.

[13] On trouvera dans R. Bkouche *et al.* [1991] une analyse plus fouillée de ces seuils qui séparent les objets mentaux des concepts formels. La distinction entre ces deux catégories de concepts est d'une grande importance pratique et sociale. H. Freudenthal [1983] remarque que la plupart des élèves auxquels on essaie d'inculquer les concepts formels sans passer d'abord par les objets mentaux, n'en comprennent ni le sens ni la portée et qu'ils quittent l'école plutôt déformés que formés. Par contre, ceux qui ont travaillé au niveau des objets mentaux quittent l'école avec un bagage significatif, même s'ils n'ont pas eu l'occasion de pousser leur apprentissage jusqu'aux concepts formels.

[14] Les trois niveaux identifiés par Gonseth ne coïncident pas exactement avec les nôtres. En particulier à son deuxième niveau, la droite de la géométrie grecque, représentée essentiellement par Euclide, est déjà une droite dont les propriétés sont postulées axiomatiquememt au départ d'une théorie de grande ampleur.

me donnée une fois pour toutes et un contenu *ne varietur*. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés : une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions « droit devant soi » ou « sans incliner ni à droite ni à gauche ». Le second avatar peut-être placé sous le signe de la géométrie grecque, tandis que le troisième est celui de la relation logique. Il n'est pas vrai que le dernier remplace les précédents et les détruise. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance. »

« Au contraire, même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept de droite continue à vivre parallèlement de ses existences antérieures. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes. »

S'il est vrai que cette intégration des niveaux conceptuels est nécessaire au plein exercice de la pensée mathématique, à la collaboration harmonieuse et efficace de l'imagination et de la logique, alors il est évident sur le plan pédagogique que les trois niveaux doivent être exercés, ce que certaines formes d'enseignement négligent.

D'autre part, la connaissance des trois niveaux est particulièrement utile aux enseignants lorsqu'elle leur permet d'identifier chez un élève un déficit de l'un des niveaux et de comprendre par là des difficultés que celui-ci rencontre.

5 Les objets mentaux de base

La pensée discursive, celle qui s'exprime en termes d'objets mentaux, organise des champs de phénomènes – selon l'expression de Freudenthal –, décrit, explique, analyse. Or il n'est pas d'analyse qui ne s'appuie sur des éléments ultimes, ceux qui sont au principe des explications.

Par exemple, l'analyse du rectangle et les explications qui le concernent s'appuient sur ces *objets mentaux de base* que sont les côtés (des segments), les sommets (des points), les angles, les diagonales (des segments), les médianes (des segments), le parallélisme des côtés (une relation), l'orthogonalité des angles (une relation, qui possède elle-même une relation avec le parallélisme).

Les points, les segments, les angles, les parallèles, les perpendiculaires,... sont les éléments les plus simples auxquels aboutissent forcément toutes les analyses du rectangle. Dans le mouvement régressif qui s'efforce de ramener le complexe au plus simple, il faut bien s'arrêter quelque part. Comme le souligne Vygotski, il importe de s'arrêter à des éléments qui font encore sens dans l'ordre des questions que l'on se pose. Or les points, segments, angles, parallèles et perpendiculaires sont bien les figures et relations élémentaires grâce auxquelles on recompose le rectangle de façon visible et intelligible. Par comparaison, il serait inapproprié de vouloir, au moins à un niveau élémentaire, reconstruire les figures ordinaires comme des ensembles de points. Avec son crayon et sa règle, on ne dessine pas des ensembles de points. Et on sait qu'il a fallu plus de deux millénaires à l'humanité pour construire de manière intelligible, quoique bien compliquée, un bout de droite continu avec des points[15].

Les éléments auxquels on ramène l'explication des figures géométriques simples, et en particulier des rectangles, tirent leur sens d'expériences sensorielles et psychomotrices fondamentales.

Par exemple, le *segment de droite* renvoie dans le quotidien à un certain type de figure bornée que l'on parcourt en marchant droit devant soi ou qui est représenté par une ficelle tendue, un pli sur une feuille, le bord d'une table, un rayon de soleil, une baguette qui vue de bout apparaît comme un point.

Par exemple encore, un angle dans le quotidien renvoie à une figure plus ou moins pointue qui apparaît au coin d'une table ou d'une rue, au coin d'une pièce d'habitation, à la rencontre de deux plis d'une feuille de papier, à la bifurcation d'une branche d'arbre, à un brusque changement de direction dans un parcours, etc.

Ces éléments simples sont ceux à partir desquels il est possible de construire une géométrie naturelle, ce que nous tenterons dans la deuxième partie de cette étude.

Par comparaison, les composants ultimes des géométries constituées axiomatiquement de manière globale sont le plus souvent parents de ces objets mentaux de base, mais comparés à eux, ils ont acquis une forme clairement idéalisée (la droite comparée au segment, l'angle formé de deux demi-droites (infinies) issues d'un point, etc.).

6 En extension et compréhension

Examinons maintenant une autre modalité de la formation des concepts. Un concept renvoie à un ensemble d'objets – le terme *objet* étant pris au sens le plus large – possédant des caractères communs. Il s'avère essentiel pour la suite de ce travail de se demander sous quelle forme un tel ensemble est saisi par l'esprit.

Pour voir clair dans cette question, commençons par un rappel. On sait qu'il y a, sur le plan mathématique, deux façons de définir un ensemble. La première est d'en énumérer les éléments.

[15] Vygotski donne pour exemple de réduction d'un ensemble de phénomènes à des éléments sensés, l'explication des propriétés de l'eau à partir de ses molécules (dont chacune est « un petit peu d'eau »), et non à partir de ses atomes, qui ne nous donnent que deux gaz incomparables à l'eau. C'est de la même manière qu'on explique des textes à partir des mots et non des lettres, ou la structure phonologique d'une langue à partir des phonèmes (émissions sonores élémentaires qui contribuent au sens des mots), et non des sons purs. Cette remarque et ces exemples sont caractéristiques de la forme de pensée appelée *structuralisme*

La seconde est d'énoncer les propriétés caractéristiques de ces éléments, c'est-à-dire les propriétés qu'ils possèdent tous et sont les seuls à posséder. Dans le premier cas, on dit qu'on définit l'ensemble *en extension*. Par exemple, on parlera de l'ensemble

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Dans le second cas, on dit qu'on définit l'ensemble *en compréhension*. Par exemple, l'ensemble ci-dessus est aussi défini par

$$\{\text{les nombres pairs inférieurs ou égaux à } 10\}.$$

La définition en extension devient malaisée dès que le nombre des éléments de l'ensemble est grand. Elle est impossible lorsque ce nombre est infini. Or la plupart des ensembles auxquels on a affaire en mathématiques sont infinis. Il y a une infinité de points, de droites, de triangles, de carrés, de polyèdres, de nombres, de fonctions, etc. C'est à ce point vrai que les mathématiques ont été parfois définies comme la science de l'infini. Donc, dans l'immense majorité des cas, seule une définition en compréhension est possible.

Voilà pour les définitions. Mais revenons aux façons de se saisir mentalement d'un concept. Le plus souvent, quelques objets sont rencontrés d'abord et l'on réalise, de manière imprécise et peu consciente, qu'ils se ressemblent par la fonction, la forme, ... Il y a donc d'emblée une saisie en extension partielle : des objets sont là, présents chacun, au moins dans la mémoire. Mais une première conscience se forme des propriétés qui les apparentent, et c'est là un embryon de saisie en compréhension. Au fur et à mesure que d'autres objets du même type entrent dans le champ de l'expérience, on perçoit de plus en plus l'extension du concept, mais en même temps celui-ci s'installe petit à petit dans le langage, ses propriétés se précisent et donc il progresse en compréhension. Lorsque les choses se passent ainsi, les deux modes d'appréhension progressent en parallèle et se renforcent l'un l'autre. L'apparition de nouveaux éléments de l'ensemble provoque l'observation et la formulation de propriétés, et en sens inverse la prise de conscience des propriétés provoque la recherche et l'imagination de nouveaux éléments de l'ensemble.

Mais l'élaboration mentale d'un concept ne se passe pas nécessairement de cette façon bien balancée entre l'extension et la compréhension. Lorsqu'un élève – ou un mathématicien, ou n'importe qui – rencontre la définition d'un concept nouveau pour lui, il en est momentanément réduit à le saisir en compréhension. Et il en éprouve un malaise salutaire. Il s'efforce de construire ou d'imaginer des objets, des éléments de l'ensemble. Il entame un parcours en extension, qui demeurera incomplet si l'ensemble est trop grand ou infini, mais qui apportera des intuitions utiles[16]. Une aventure possible est de découvrir que l'ensemble est vide !

[16] Il arrive qu'après avoir acquis une certaine connaissance de l'extension d'un concept, on fixe son esprit sur un

Un caractère important des concepts – nous y reviendrons longuement dans la suite – est la plus ou moins grande facilité ou difficulté avec laquelle l'imagination parcourt les éléments de l'ensemble auquel le concept renvoie. Par exemple, on se représente assez bien « tous » les rectangles , mais très malaisément et incomplètement « tous » les polyèdres à faces triangulaires. Nous le verrons, l'apprentissage de la géométrie, mais c'est aussi vrai des mathématiques en général, *démarre* au niveau des concepts qui offrent peu d'obstacles à l'imagination. Ce sont les obstacles opposés à celle-ci par les objets complexes qui obligent la pensée à s'appuyer, plutôt que sur des intuitions, sur des propriétés et des déductions.

7 Un type idéal

Pour terminer ce chapitre, revenons, pour en préciser la portée, sur ce qui en constitue l'essentiel : la distinction des trois niveaux conceptuels. Celle-ci relève d'une schématisation forte. En particulier, il existe à coup sûr des niveaux intermédiaires. Nous avons emprunté l'essentiel de notre vocabulaire à des auteurs connus, dont chacun dans son domaine est plus explicite et plus nuancé que nous. Nous nous sommes efforcés par ailleurs de respecter autant que possible le sens originel de mots tels que *intelligence des situations, intelligence discursive, objet mental,* etc.

Quoiqu'il en soit, notre schéma ne correspond fidèlement à aucune situation mentale réelle. Il est une stylisation de la réalité. Celle-ci, dans tous les cas d'espèce, est plus touffue et moins claire. Mais la distinction des trois niveaux devrait permettre d'interroger la réalité, de se poser des questions pertinentes face aux modalités concrètes de saisie des situations géométriques. En somme, notre distinction des trois niveaux est un *type idéal*[17], et en ce sens elle est moins une description de la réalité qu'un instrument d'analyse de celle-ci.

Nous pensons qu'un tel instrument est indispensable. En effet, à défaut d'avoir présent à l'esprit l'existence de niveaux de conceptualisation, ainsi que la nature de ceux-ci – fut-elle décrite sommairement – et en particulier l'existence de niveaux élémentaires de la pensée, on risque de croire que les seuls concepts, ou les seuls concepts vrais et légitimes, sont ceux des mathématiques constituées, ceux que la science authentifie. Et alors on ne comprend plus grand chose ni aux étapes de l'apprentissage, ni à la richesse de sens que dissimule la sécheresse des définitions.

élément représentatif de celui-ci, plutôt que sur une collection d'éléments diversifiés. Par exemple, pour se représenter le concept de triangle, on imagine ou dessine toujours le même triangle. Ce blocage de l'imagination peut avoir un effet négatif sur la capacité de résoudre des problèmes.

[17] Au sens du sociologue allemand Max Weber [1992].

3

Les objets géométriques : du simple au complexe

Dans le chapitre précédent, nous avons distingué trois niveaux de la conceptualisation : les préconcepts, les objets mentaux et les concepts formels. En fixant maintenant notre attention sur le niveau des objets mentaux, nous allons tenter de classer les figures géométriques selon leur richesse en symétries et leur plus ou moins grande complexité, de discerner d'une part celles qui, par leur clarté intuitive, sont le plus susceptibles de fournir les premiers objets et les premiers instruments de la pensée géométrique, et d'autre part celles qui nécessiteront des explications plus longues et des démonstrations.

1 Les objets appréhendés à similitude près

Ce qui permet d'abord d'identifier une catégorie d'objets, c'est une parenté de structure ou de symétrie *perçue.* Les régularités *perçues* jouent le premier rôle, elles font démarrer la pensée géométrique. Notre objectif est de voir par quelles étapes elles conduisent à terme aux régularités *conçues,* celles que saisit l'intellect même en l'absence de perceptions qui en témoignent directement.

Certaines catégories, comme celle des cercles ou celle des carrés (cf. la section 3 de ce chapitre) sont formées d'objets tous *semblables,* ce qui veut dire qu'ils sont de même forme et ne diffèrent entre eux que par leur grandeur. Les autres catégories au contraire sont constituées d'objets plus variés, qui peuvent différer tant par la forme que par la grandeur. Mais nous considérerons ces catégories *à similitude près.* Voyons ce que cela veut dire et pourquoi la forme apparaît souvent comme plus intéressante que la grandeur.

Lorsqu'on tient un objet plan devant ses yeux et qu'on l'écarte ou le rapproche, l'image qui s'en forme sur la rétine diminue ou grandit. Et pourtant, les mécanismes de la perception font que, si la variation des distances à l'œil n'est pas trop considérable, nous n'avons pas conscience d'une variation de grandeur[1].

[1] Voir à cet égard par exemple J. Ninio [1989], chap. XIII.

Par contre, nous sommes très sensibles à la constance de la forme. Par exemple, lorsqu'un enseignant dessine une figure au tableau et que chaque élève la reproduit dans son cahier, on a affaire à des figures distinctes, mais qui jusqu'à un certain point sont considérées comme l'objet – au singulier –, sur lequel la classe travaille. Dans le langage scolaire traditionnel, on parle d'ailleurs de *formes* (triangles, carrés, rectangles, cercles, etc.), ce qui indique que la grandeur n'est pas envisagée[2].

C'est le point de vue que nous prendrons ci-après. Sauf exception, dans notre identification d'objets mentaux, la taille n'interviendra pas, *seule la forme sera prise en compte*[3]. Voyons maintenant quelles sont ces premières formes dont la parenté est perçue.

2 Formes libres à symétrie simple

Repartons de la tache arbitraire de Mach. Nous avons remarqué que, sa forme étant totalement libre, elle ne renvoie à aucune catégorie d'objets géométriques. Mais il suffit de plier un papier sur une goutte d'encre fraîche[4] pour obtenir une tache de forme tout aussi arbitraire, à ceci près qu'elle possède un axe de symétrie orthogonale à l'endroit du pli (figure 1).

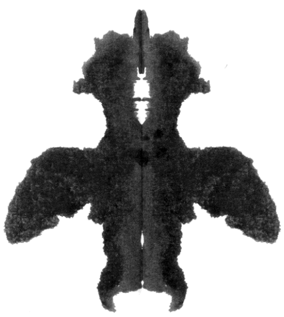


Fig. 1

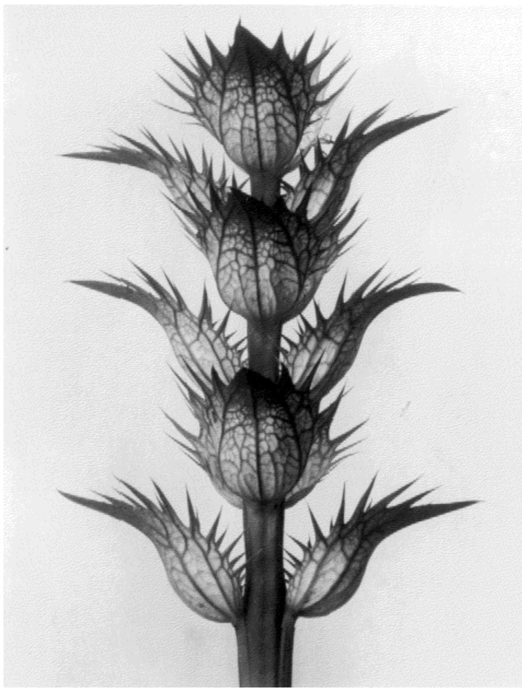


Fig. 2 : Acanthus Mollis, photographie de Karl Blossfeldt

[2] Comme l'écrit É. Borel : « Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur. » (Cité par R. Bkouche [1995])

[3] Curieusement, la similitude qui va de soi dans la perception spontanée, devient un sujet d'étude important et nullement évident dans la géométrie constituée.

[4] Comme on le fait en psychologie dans le test de Rorschach.

L'univers quotidien offre à notre perception une foule d'objets ou d'assemblages d'objets de forme libre – des formes non géométriques au sens ordinaire de ce terme – et qui pourtant manifestent une de ces symétries simples dont parle Mach : translation, symétrie orthogonale ou centrale.

On trouve des translations de motifs libres dans de nombreuses plantes, comme la figure 2 à la page précédente en donne un exemple. On en trouve dans les squelettes des vertébrés : que l'on songe à la répétition des vertèbres et des côtes des serpents. On en trouve encore dans les frises et les papiers peints, ou dans des mots tels que FROUFROU, CHICHI ou PAPA.

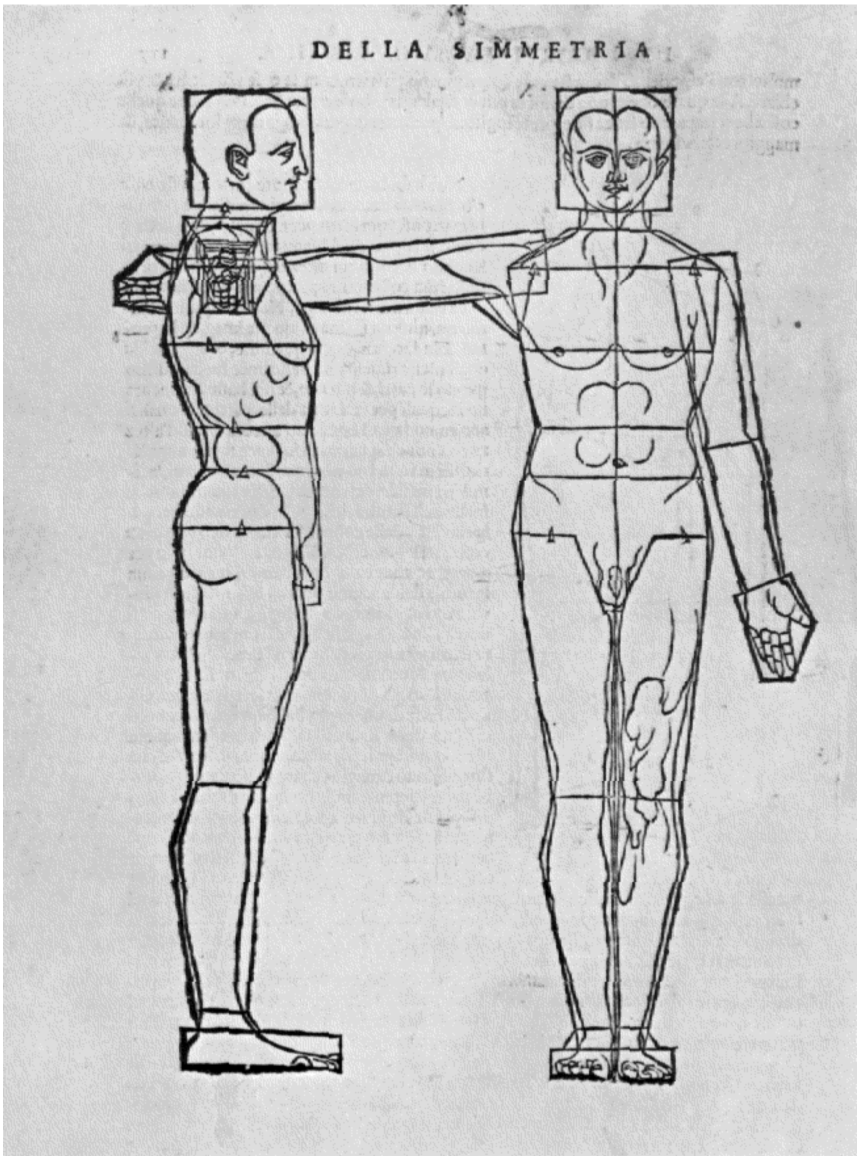


Fig. 3 : Dessin d'Albert Dürer, 1591

La figure 2 fait voir non seulement des translations, mais encore une symétrie orthogonale. Le corps humain possède, à peu de choses près, un plan de symétrie (figure 3 à la page précédente). Il en va de même de presque tous les animaux qui se meuvent : ce plan est déterminé par la verticale et la direction habituelle d'avancement. L'homme a transmis sa symétrie à une multitude d'objets tels que les brouettes, les chaises et fauteuils, les vélos, les autos, les vêtements, les paires de chaussures et de gants, etc. Les miroirs produisent des symétries orthogonales.

Les objets possédant une symétrie centrale sont plus rares. On en trouve dans ces motifs ornementaux en vogue à la Renaissance et que l'on appelle rinceaux. La figure 4 en donne un exemple.

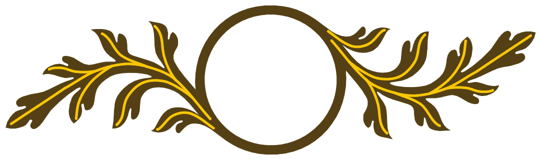


Fig. 4

À propos de tous ces objets, renversons maintenant le point de vue de Mach. Celui-ci disait : si deux formes sont transformées l'une de l'autre par une de ces symétries simples, et si en outre elles se présentent à l'observateur en situation privilégiée, alors on reconnaît sans peine leur congruence ou leur similitude. Or ce qui se passe aussi, c'est que dans les situations décrites, non seulement la congruence des figures est reconnue, mais encore le type de symétrie dont elles sont le siège est identifié lui aussi.

Une translation est reconnue comme telle, c'est-à-dire comme correspondant à un glissement d'une forme vers l'autre sans changement de direction. Les objets ou figures se présentant sous forme de parties translatées les unes des autres forment une catégorie, un objet mental, le lien entre eux étant précisément ces glissements sans changement de direction, un type de mouvement qui se retrouve dans tous.

Un objet présentant une symétrie orthogonale est reconnu aussi, en position privilégiée, moins par l'évocation du retournement (ou du mouvement de pliage) qui envoie un côté de l'axe sur l'autre et réciproquement, que par la correspondance immédiatement perçue entre ses parties gauche et droite. Les objets symétriques forment eux aussi une catégorie, un objet mental, correspondant à ce type de perception.

La parenté des objets présentant une symétrie centrale est sans doute reconnue par l'évocation mentale, pour chacun d'eux, du demi-tour qui applique l'objet sur lui-même.

Insistons, car c'est important, sur le fait que ces reconnaissance d'objets mentaux ne portent que sur les symétries simples, celles identifiées par Mach, et qu'elles exigent en outre la présentation en situation privilégiée. Les lois mathématiques plus compliquées de correspondance entre formes ne sont pas perçues, et donc ne sauraient être considérées au stade naissant de la géométrie.

Bien entendu, les symétries relevées sont toutes approximatives. C'est une observation importante sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 4.

3 Formes simples à forte symétrie

Nous venons d'examiner les objets de forme libre, souvent compliquée, mais qui possèdent une symétrie simple. Examinons maintenant les objets de forme très simple et qui possèdent une très grande symétrie (ou si on veut beaucoup de symétries, au sens mathématique du terme).

Parmi les formes planes, la plus symétrique de toutes est le rond (ou le disque, ou le cercle). On en trouve partout. Les pièces de monnaie, les assiettes, certains couvercles de boîtes, les disques de musique, les cadrans d'horloge, les roues sont ronds. Un disque roule régulièrement sur un sol plan et son point le plus haut demeure toujours à la même hauteur. Les rayons d'une roue de vélo ont tous la même longueur. On obtient des cercles en tournant une corde tendue attachée en un point, en se servant d'un compas, en coupant un saucisson, un tuyau ou un tronc d'arbre, en jetant une pierre dans l'eau, en photographiant une balle, une bulle de savon, la pleine lune, ou la terre depuis un satellite. Les enfants font des rondes, se mettent en rond pour jouer au mouchoir. On reconnaît un disque tournant autour d'un axe fixe passant par son centre au fait qu'à tout instant il occupe le même espace.

Après les disques, venons-en aux carrés. On en trouve davantage dans les objets fabriqués que dans la nature. Un grand nombre de carrelages sont faits de dalles carrées. Les élèves écrivent sur du papier quadrillé. Les cubes et les dés ont des faces carrées. Les tables à jouer et les guéridons de café ont souvent un plateau carré. De nombreuses tours ont un plan carré. Seize hommes en rangs par quatre se disposent en carré. Un carré est sans doute le parcours fermé le plus simple à commander en Logo : *avance de tant et fais un angle droit (toujours dans le même sens) quatre fois.* La position privilégiée principale d'un carré dans un plan frontal est celle où il a deux côtés horizontaux et deux côtés verticaux.

À quoi reconnaît-on le carré ? En position privilégiée, on reconnaît, en les portant mentalement l'un sur l'autre, la congruence des deux côtés verticaux, et aussi celle des deux côtés horizontaux. Mais comment reconnaître que le carré n'est pas un rectangle presque carré ? Dans les rotations d'un quart de tour que l'on tente mentalement pour vérifier la congruence de tous les côtés, la longueur de ceux-ci ne peut être tenue en mémoire pendant le transport. Le pouvoir de discrimination de ce genre de mouvement est limité.

Toutefois dans beaucoup de circonstances quotidiennes, nous identifions des formes comme carrées parce que nous sommes sûrs ou presque qu'on les a voulues telles : les carreaux d'un pavement, les cases d'un échiquier, un carton pour verre de bière, les faces d'un dé, etc.

Les paraboles constituent une classe de formes d'allure simple et qui sont toutes semblables. Toutefois, cette similitude est rarement perceptible. En effet, les paraboles étant des courbes infinies, on n'en dessine jamais qu'une partie. Les conditions pour que deux *dessins partiels* de parabole soient semblables sont rarement rencontrées.

4 Formes simples à symétrie modérée

Venons-en maintenant à des classes d'objets qui ne sont plus tous semblables entre eux. Et considérons d'abord les rectangles. La forme rectangulaire est sans doute la plus répandue dans l'environnement, au point qu'il est inutile d'en donner des exemples.

Si on partitionne l'ensemble des rectangles en classes de similitude, ce qui revient à considérer que deux rectangles sont *les mêmes* s'ils ont même proportion, alors un rectangle est déterminé par le rapport de grandeur de ses côtés. Ainsi, la classe des rectangles considérés *à similitude près* est *une classe à un paramètre*. Cette propriété est importante : elle se traduit par le fait que l'on peut représenter l'ensemble des rectangles par une vue ordonnée de certains d'entre eux, en les disposant en une seule rangée. C'est ce que montre la figure 5.

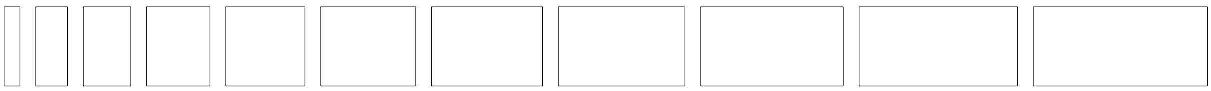


Fig. 5

Comme tout autre objet mental, la catégorie des rectangles se constitue en objet mental de deux façons : en *extension* et en *compréhension* .

Saisir la catégorie des rectangles en *extension,* c'est-à-dire en évoquant tous les rectangles (fut-ce à similitude près) est impossible, puisqu'ils sont en nombre infini. Néanmoins l'imagination s'engage sans obstacle dans un parcours de la figure 5 vers la gauche ou la droite. Elle peut la prolonger mentalement des deux côtés et la compléter par des rectangles intermédiaires. Il est vrai aussi que lorsqu'on évoque spontanément un rectangle, on n'en imagine quasiment jamais un exemplaire extrême. Comme le remarque A. Berté [1993], dès qu'un rectangle est un tant soit peu allongé, on l'appelle plus volontiers *bande* que rectangle. Et c'est d'ailleurs en réfléchissant au rectangle en compréhension que l'on peut avoir son attention attirée vers les rectangles extrêmes (ou vers le carré. . .).

Saisir les rectangles en *compréhension*, revient à les saisir à travers des propriétés caractéristiques. Mais les propriétés du rectangle sont nombreuses. Seules les plus prégnantes, celles qui s'imposent le plus facilement à l'observateur, vont jouer. Mais encore chaque observateur a-t-il sans doute sa manière de reconnaître un rectangle. Par exemple, le rectangle en position privilégiée peut être saisi par le fait qu'il a deux côtés verticaux et deux horizontaux. Ou encore parce qu'il a deux paires de côtés égaux et quatre angles droits.

Les triangles isocèles sont moins répandus que les rectangles dans l'univers familier, mais on en trouve tout de même aux pignons des maisons, aux frontons des édifices, dans la configuration que font avec le sol une échelle à deux montants égaux, ou encore les deux jambes écartées d'une personne.

Les triangles isocèles sont caractérisés, à similitude près, par le rapport de leur base à leur hauteur. Ils forment donc une classe à un paramètre. La figure 6, aisée à parcourir d'un bout à l'autre, donne une idée raisonnable de tous les triangles isocèles possibles. Une autre idée de ces triangles s'obtient à partir de l'un d'eux, dont on maintient la base constante, en faisant tendre sa hauteur successivement vers zéro et vers l'infini. Ou encore on considère une échelle à deux montants égaux : on part de la position où les montants sont joints, puis on les écarte jusqu'à ce qu'ils viennent dans le prolongement l'un de l'autre. Ce sont là trois manières de saisir le triangle isocèle en extension.

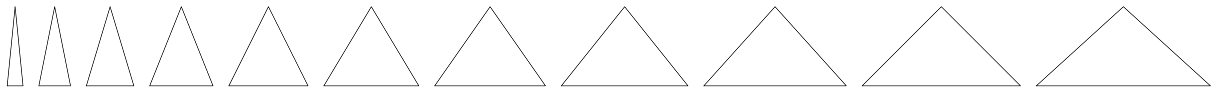


Fig. 6

Mais on les saisit aussi en *compréhension,* c'est-à-dire en en évoquant l'une ou l'autre propriété caractéristique prégnante : par exemple, en position privilégiée, l'égale inclinaison de deux d'entre eux sur la base horizontale, la propriété de symétrie orthogonale.

Considérée de même à similitude près, la classe des parallélogrammes est une *classe à deux paramètres*. Pour déterminer un parallélogramme, on doit se donner le rapport de grandeur de ses côtés adjacents, et l'angle qu'ils font entre eux. Du fait qu'il dépend de deux paramètres, le parallélogramme est une figure plus compliquée que le rectangle ou le triangle isocèle. La figure 7 à la page suivante se présente sous forme d'un tableau à double entrée. Celui-ci ne se prête pas à un parcours linéaire, comme c'était le cas pour les rectangles et les triangles isocèles. Néanmoins, il n'est pas trop malaisé à percevoir ni à imaginer. Il n'est donc pas trop difficile de saisir le parallélogramme en extension.

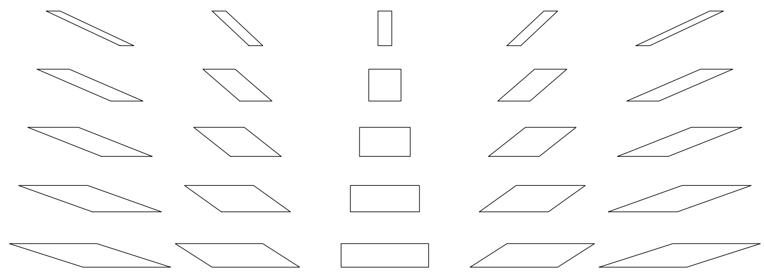


Fig. 7

Pour le saisir en *compréhension*, on évoque, par exemple, en position privilégiée, l'horizontalité et la congruence de deux côtés, l'égale inclinaison et la congruence des deux autres.

5 Objets géométriques complexes

Il est raisonnable de penser que la première géométrie raisonnée va se constituer à partir de figures simples telles que le rectangle ou le triangle isocèle, ou relativement simples comme le parallélogramme.

Mais qu'est-ce qu'une figure simple ? C'est une figure aisément accessible en extension et en compréhension, une figure dont les variétés se parcourent sans peine en imagination et dont certaines propriétés caractéristiques sont saisies facilement.

Pour montrer par contraste ce qu'est une figure simple, montrons deux sortes de figures compliquées.

D'abord on ne reconnaît pas à vue un heptagone (ou un octogone), même s'il est régulier. Il faut pour l'identifier une intervention de l'intelligence, que ce soit par comptage du nombre des côtés ou par analyse détaillée des symétries. Il en va de même pour toutes les classes de polygones réguliers comportant beaucoup de côtés.

Considérons ensuite la classe des quadrilatères. Montrons qu'elle est une famille à 4 paramètres. Soit par exemple, à la figure 8 à la page suivante, un quadrilatère quelconque $ABCD$, et soit à construire un quadrilatère semblable à celui-là. On peut se donner un côté $[A'B']$ quelconque pour correspondre à $[AB]$. Ensuite on reproduit l'angle α. On construit $[B'C']$ avec un rapport à $[A'B']$ égal au rapport de $[BC]$ à $[AB]$. On reproduit ensuite l'angle β, puis on construit le côté $[D'C']$ avec un rapport à $[B'C']$ égal au rapport de $[DC]$ à $[BC]$. Comme nous avons choisi quatre dimensions de manière arbitraire, la famille a bien quatre paramètres.

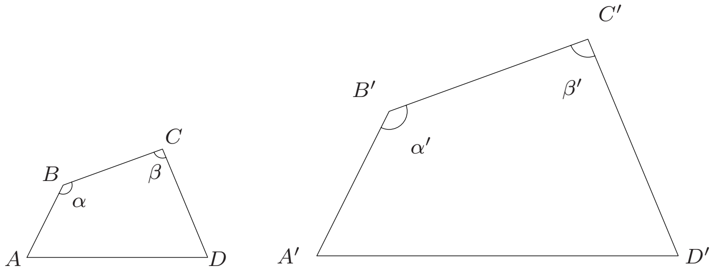


Fig. 8

À cause du nombre de degrés de liberté, des phénomènes nouveaux apparaissent, que l'on n'avait pas rencontrés dans le rectangle, le triangle isocèle ou le parallélogramme, à savoir la non-convexité et les points doubles (lorsque deux côtés se croisent).

La variété des quadrilatères défie l'imagination. La figure 9 n'en donne qu'une faible idée. On ne peut pas représenter cette famille par une figure analogue à celle que nous avons proposée pour les parallélogrammes : il faudrait ici construire un réseau de figures à quatre dimensions.

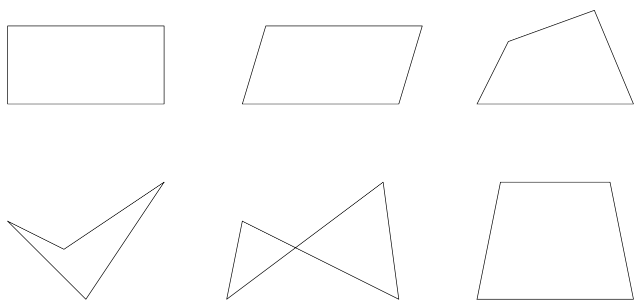


Fig. 9

Ainsi la famille des quadrilatères, aisée à saisir en compréhension (quatre côtés rectilignes enchaînés) est extrêmement difficile, sinon impossible à saisir en extension[5].

6 Le sens large

Saisir une catégorie de figures en compréhension, c'est – nous l'avons dit – en évoquer quelques propriétés caractéristiques. Mais faire cela, ce n'est pas nécessairement rattacher la figure à une définition explicitement énoncée.

À condition qu'ils nous soient présentés en position privilégiée, nous *reconnaissons* de tels objets à des indices que nous percevons et d'une façon de prime abord non intellectuelle. Nous reconnaissons un triangle isocèle à l'équilibre de sa présentation symétrique, à l'horizontalité de sa base, à l'égale inclinaison de ses

[5] La familles des paraboles, bien qu'elle ait zéro degré de liberté, est à l'opposé de celle des quadrilatères. On la saisit facilement en extension, mais non en compréhension : en effet, elle n'a pas de propriétés caractéristiques qui sautent aux yeux ; pour la caractériser on recourt à des propriétés difficiles à voir (section conique) ou théoriques (équation).

côtés égaux, sans que ces caractères aient à être formulés, fut-ce mentalement. De même nous reconnaissons un parallélogramme dont deux côtés sont horizontaux à la sensation d'égal déséquilibre que nous donnent ses deux côtés penchés et cela à nouveau sans avoir à expliciter cette sensation. En d'autres termes, pour rattacher un triangle isocèle – ou un parallélogramme – à sa catégorie, pour le reconnaître parent de tous ses congénères, nous n'avons pas besoin d'en vérifier la conformité à une définition, nous le reconnaissons à « son air de famille ».

Mais d'autre part, dès que nous réfléchissons à un tel objet, nous pouvons faire état de toute l'expérience que nous en avons et d'une foule de propriétés qu'il possède. Celles-ci s'expriment en termes de perceptions, de relations à la verticale et à l'horizontale, aux symétries de notre corps, et à toutes sortes d'expériences que nous avons de la figure en question, y compris des déformations continues. Nous avons déjà évoqué des exemples de telles expériences à propos du rectangle, en parlant de pliages, de pavages du plan, de constructions de parallélipipèdes rectangles et d'assemblages de rectangles en tiges articulées. Ce lot d'expériences s'enrichit de toutes celles où nous avons dessiné ou découpé un rectangle à l'aide d'instruments divers. Il se complète aussi de toutes les constructions que nous avons ajoutées à un rectangle et qui ont fait apparaître une figure enrichie avec des configurations et des symétries perceptibles. Par exemple :

– chaque médiane d'un rectangle le divise en deux rectangles congruents (figure 10) ;
– les deux médianes d'un rectangle divisent celui-ci en quatre rectangles congruents (figure 11) ;
– les médianes d'un rectangle sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu ;
– le rectangle possède deux axes de symétrie orthogonale. Ces deux axes sont orthogonaux entre eux.

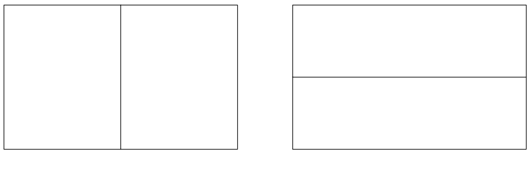


Fig. 10

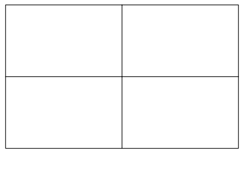


Fig. 11

Les diagonales font apparaître de nouvelles propriétés :

– chaque diagonale d'un rectangle décompose celui-ci en deux triangles rectangles congruents (figure 12 à la page suivante) ; l'un quelconque des deux est superposable à l'autre par un mouvement d'un demi-tour autour de la diagonale en question ;

– les deux diagonales décomposent le rectangle en deux couples de triangles isocèles congruents (figure 13) ; dans chaque couple, les deux triangles sont symétriques orthogonaux l'un de l'autre.

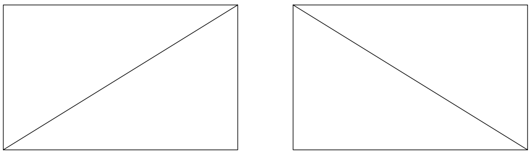


Fig. 12

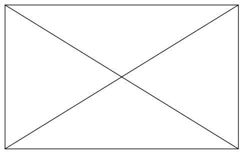


Fig. 13

Si on trace dans un rectangle les médianes et les diagonales, on obtient une nouvelle décomposition intéressante :

– les médianes et les diagonales d'un rectangle décomposent celui-ci en huit triangles rectangles congruents (figure 14).

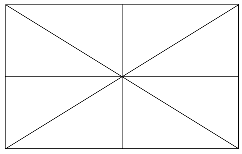


Fig. 14

Comme nous l'avons dit, toutes ces propriétés contribuent à la connaissance familière du rectangle. Cette connaissance varie et est plus ou moins riche d'une personne à l'autre. Les structurations plus complexes du rectangle n'en font habituellement pas partie. Par exemple, la plupart des gens ne pensent pas spontanément au losange que l'on obtient en joignant les milieux des côtés d'un rectangle (figure 15), et beaucoup moins encore au carré que forment les bissectrices d'un rectangle (figure 16). L'essentiel pour nous maintenant et pour ce qui va suivre, est que le rectangle possède pour chaque personne un visage familier fait d'un certain nombre de traits fondamentaux, un paquet de propriétés. Nous parlons à ce propos du *sens large* du rectangle, ou de tout autre objet mental[6].

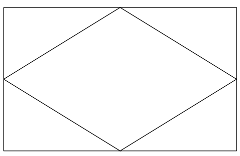


Fig. 15

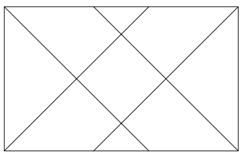


Fig. 16

Notons pour terminer que le rectangle ne se ramène pas dans l'esprit à une *juxtaposition passive* de quelques propriétés, car tout de suite on saisit des liens d'implication entre certaines de celles-ci. On sait par exemple que si on a dessiné une médiane d'un rectangle, lorsqu'on dessinera l'autre, on la trouvera perpendiculaire à la première. Et de même certaines propriétés expriment par elles-mêmes une implication, ou une causalité, ce qui est plus ou moins apparent selon leur formulation. Par exemple, *si* on coupe un rectangle suivant une diagonale, on obtient deux

[6] Sur la notion de *sens large*, voir aussi R. Bkouche et al. [1991], chapitre 8.

triangles et on peut superposer l'un à l'autre par un demi-tour autour du milieu de la diagonale. Ou encore, *si* on joint les milieux des côtés successifs d'un rectangle, on obtient un losange.

Ainsi la constitution des objets mentaux fournit immédiatement des amorces d'une pensée déductive. Nous consacrons le chapitre suivant au développement de cette pensée.

4

Des objets mentaux aux inférences

Un grand avantage de la géométrie, c'est précisément que les sens peuvent y venir au secours de l'intelligence, et aident à deviner la route à suivre.

H. Poincaré

Au chapitre 3, nous avons vu comment certaines figures, objets de la géométrie élémentaire, se constituent en objets mentaux, en catégories de figures rassemblées autour de certaines symétries ou régularités *aisément perçues*. La question qui se pose ensuite est de savoir comment se fait le passage des objets mentaux aux explications, aux raisonnements. Tel est l'objet de ce chapitre.

1 Quelques exemples d'inférences

Appuyons-nous à nouveau sur l'exemple du rectangle. Comme nous l'avons vu, nous connaissons cette figure par un lot de propriétés. Mais un rectangle est d'abord un quadrilatère : c'est là un constat minimal. Cherchons maintenant, dans le lot de ses autres propriétés, ce qui nous permettrait d'affirmer qu'un quadrilatère est une rectangle.

1.1 Deux côtés congruents perpendiculaires à un troisième

Dans un plan frontal (un tableau noir par exemple), on fait le dessin suivant (figure 1) :

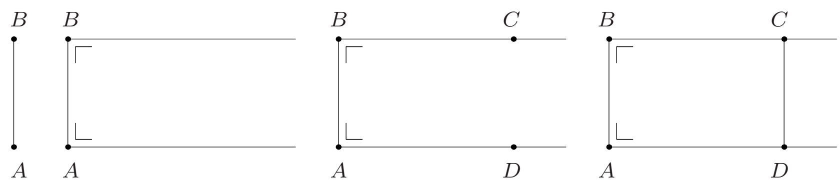


Fig. 1 (a,b,c,d)

(a) on trace un segment vertical $[AB]$;

(b) À partir de A et de B, et du même côté de $[AB]$, on dessine deux demi-droites horizontales ;

(c) on porte une même distance sur chacune de ces deux demi-droites, ce qui détermine deux points C et D ;

(d) on joint C et D ; le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Cette construction faite ou refaite – en réalité de nombreuses fois refaite en pensée – conduit à la propriété suivante :

1. *Si un quadrilatère possède deux côtés congruents perpendiculaires à un même troisième, il est rectangle.*

1.2 Trois angles droits

On réalise ensuite la construction suivante (figure 2) :

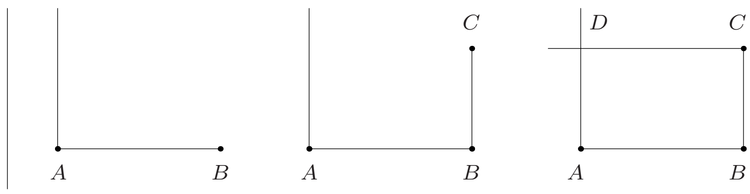


Fig. 2 (a,b,c,d)

(a) on dessine une droite verticale ;

(b) d'un point A de cette droite, on part horizontalement vers la droite et on s'arrête en un point B ;

(c) on monte verticalement jusqu'à un point C ;

(d) arrivé-là on repart horizontalement vers la gauche jusqu'à couper la droite de départ en un point D ; le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

D'où la propriété :

2. *Si un quadrilatère possède trois angles droits, il est rectangle.*

1.3 Diagonales congruentes se coupant en leur milieu

On articule en leur milieu deux tiges de longueurs égales. On dispose l'objet ainsi obtenu dans un plan frontal, de sorte que les deux tiges aient une pente égale, en deux sens opposés (figure 3a). Les extrémités A et B sont alors sur une horizontale, de même que les extrémités D et C. De même A et D sont sur une verticale, ainsi que B et C. Si on dessine le quadrilatère $ABCD$, on trouve un rectangle (figure 3b).

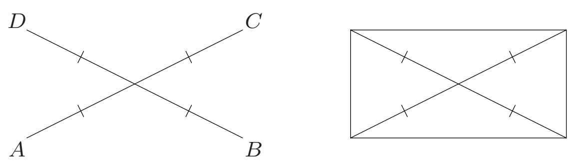


Fig. 3 (a,b)

On arrive ainsi à la propriété suivante :

3. *Si les diagonales d'un quadrilatère sont congruentes et se coupent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.*

1.4 Déformer un parallélogramme

Après avoir examiné ces trois constructions et réalisé comment chacune donne une idée de ce qui détermine un rectangle, voyons maintenant comment un mouvement continu peut aussi suggérer une détermination de la forme rectangulaire. On réalise un parallélogramme avec des tiges articulées, et on dispose devant soi de manière que deux de ses côtés soient horizontaux. Les deux autres ont un certaine inclinaison par rapport à la verticale. Mais ils sont parallèles, et qui plus est, ils le demeurent lorsque je déforme continûment l'objet. On redresse un de ces deux côtés en le faisant tendre vers la verticale. L'autre arrive à la verticale en même temps, et le quadrilatère obtenu ainsi est bien un rectangle. On arrive ainsi à la propriété suivante :

4. *Si un parallélogramme possède un angle droit, il est un rectangle.*

Ce que nous avons montré sur l'exemple du rectangle se transpose sans peine à d'autres figures simples. Voici par exemple des conditions qui déterminent triangle isocèle :

5. *Si un triangle a deux angles congruents, il est isocèle.*

6. *Si un triangle a deux côtés congruents, il est isocèle.*

7. *Si un sommet d'un triangle est sur la médiatrice du côté opposé, le triangle est isocèle.*

De même des conditions qui assurent qu'un quadrilatère est un parallélogramme sont par exemple qu'il ait deux côtés parallèles et égaux, ou encore deux paires de côtés parallèles.

Voilà quelques implications évidentes de formes telles que les rectangles, triangles isocèles et parallélogrammes. Nous nous sommes servis pour les établir des termes habituels : côté, sommet, médiane, diagonale, médiatrice, axe de symétrie, etc., tout un vocabulaire témoignant déjà de connaissances géométriques non négligeables.

Dans l'idée d'entamer une construction de la géométrie à partir des évidences les plus immédiates, exprimées dans le langage le plus sobre possible, montrons maintenant quelques exemples d'implications évidentes formulées sans recourir à d'autres termes que ceux désignant les *objets mentaux de base* tels que droite, segment, angle, perpendiculaire, parallèle, etc. (sur ces derniers, voir chapitre 2, section 5).

1.5 Une perpendiculaire et deux obliques

Considérons comme à la figure 4 une droite, un segment perpendiculaire à la droite et deux segments obliques congruents appuyés sur le segment perpendiculaire.

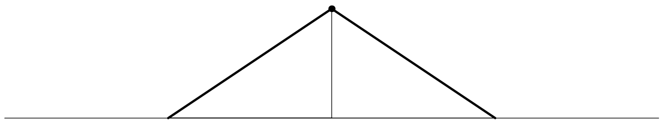


Fig. 4

Lorsque cette figure est présentée en position privilégiée, c'est-à-dire dans un plan frontal et avec la droite horizontale, on observe que les deux obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, qu'elles forment des angles égaux avec le segment vertical, et aussi avec la droite horizontale.

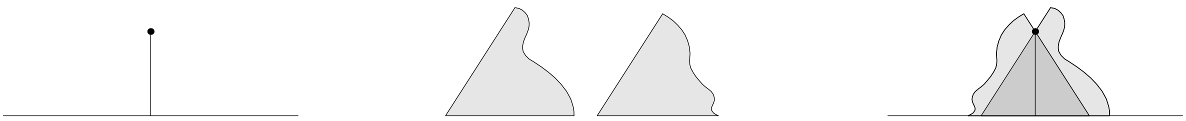


Fig. 5 (a,b,c)

Soit maintenant une figure comportant seulement la droite et le segment (figure 5(a)). Et soient, à côté de cette figure, deux angles aigus congruents découpés dans du papier (figure 5(b)). Si on dispose ces deux angles de part et d'autre du segment de sorte qu'ils aient un côté le long de la droite et que l'autre passe par l'extrémité supérieure du segment, on obtient la figure en question (figure 5(c)). Cette expérience conduit à la proposition suivante :

8. *Étant donné une droite et un segment perpendiculaire à celle-ci disposés comme sur la figure 5(a), si deux segments issus du point le plus haut du segment perpendiculaire font avec la droite deux angles aigus congruents, alors ces deux segments sont congruents, ils forment des angles égaux avec le segment vertical, et les points par lesquels ils touchent la droite sont également écartés du pied de la perpendiculaire.*

1.6 L'inégalité triangulaire

Considérons trois segments (ou trois tiges) dont l'un est plus grand que chacun des deux autres. Distinguons trois cas.

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment plus petit que le troisième. Dans ce cas, on n'arrive pas à les assembler en triangle (figure 6 à la page suivante).

Fig. 6

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment égal au troisième. Alors on n'arrive pas non plus à les assembler en triangle. En effet, lorsqu'on essaie, les deux plus petits ne se touchent que lorsqu'ils viennent s'aligner sur le grand (figure 7).

Fig. 7

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment plus grand que le troisième. Alors on peut les assembler en triangle. En effet, on peut disposer les deux plus petits (appelons-les AB et CD) de sorte qu'ils se coupent. Tournons ensuite le segment AB jusqu'à ce qu'il passe par D. Faisons ensuite glisser D sur AB jusqu'à ce que D vienne coïncider avec B. Nous avons obtenu un triangle (figure 8).

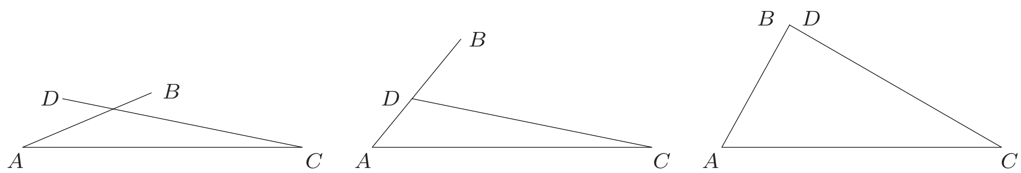


Fig. 8

Toutes ces manipulations conduisent à la proposition suivante :

9. *Si trois segments (inégaux) sont tels que le plus long est plus petit que la somme des deux autres, alors on peut les disposer en triangle. Sinon ce n'est pas possible.*

1.7 Des parallèles et une transversale

La figure 9 à la page suivante montre deux parallèles et une transversale. Le fait que les parallèles soient horizontales aide à percevoir que la transversale fait avec elles des angles a et b égaux. Ces angles correspondent tous deux à l'inclinaison de la transversale sur l'horizontale. Cette propriété – des angles égaux faits par une transversale avec des parallèles – est encore plus aisément perçue si la transversale traverse un réseau de parallèles comme à la figure 10 à la page suivante. La reproduction rythmée du phénomène le rend plus prégnant.

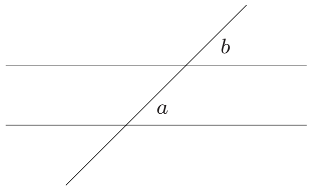


Fig. 9

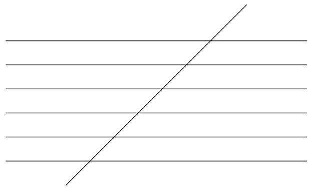


Fig. 10

2 Des conditions déterminantes évidentes

Après avoir parcouru ces quelques exemples d'inférences élémentaires, voyons maintenant ce qu'elles ont en commun. Dans chaque cas, on a sous les yeux – ou comme image mentale –, un objet, une situation : un rectangle que l'on cherche à dessiner, deux tiges que l'on assemble, un parallélogramme articulé, trois tiges que l'on cherche à assembler en triangle, etc. Il s'agit de situations simples, d'objets que l'on reconnaît sans analyse, dont on connaît par ailleurs diverses propriétés et que l'on sait manipuler. Dans chaque cas, on réalise réellement ou en pensée une expérience, une action, un dessin et on conclut de la même façon : quand on fait telle ou telle chose, on obtient tel ou tel résultat. En d'autres termes, telles ou telles propriétés que l'on mobilise entraînent que l'on obtient (ou que l'on ne peut obtenir) la figure souhaitée. On reconnaît celle-ci sans analyse, ou au moins de manière implicite, sans recourir à une définition. Par exemple, on n'a pas besoin de *formuler* que si deux côtés sont horizontaux et les deux autres verticaux, on a bien un rectangle. Ou encore on reconnaît un triangle à vue.

Nous appelons *conditions déterminantes* d'un type de figure ou de configuration géométrique, des conditions suffisantes obtenues ainsi par expérience réelle ou mentale.

Les conditions déterminantes ne portent bien entendu pas sur une seule figure, une seule situation. Lorsqu'il était ci-dessus question du rectangle, il s'agissait de tous les rectangles, et dans le quatrième expérience, il s'agissait de tous les triplets de tiges. En d'autres termes, l'inférence porte dans chaque cas sur une infinité de figures, même si l'objet sur lequel on expérimente en réalité ou en pensée est un objet singulier. Il représente tous les autres objets de son espèce. Il est *paradigmatique*.

A. Arnauld [1667] observait déjà au XVII^e^ siècle que les ensembles de figures dont traite la géométrie sont infinis : « On peut dire que toutes les propositions géométriques sont de même infinies en étendüe ; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une seule ligne, d'un seul angle, d'un seul cercle, d'un seul triangle, mais de toutes les lignes, de tous les angles, de tous les cercles, de tous les triangles ; et qu'ainsy l'esprit les renferme et les comprend tous en quelque sorte quelques infinis qu'ils soient. »

Mais qu'est-ce qui permet, dans le cas des expériences que nous avons décrites, d'étendre la conclusion d'une figure à toutes celles de la même espèce ? Deux circonstances rendent cette extension possible et naturelle : le première est que nous faisons l'expérience en position privilégiée, c'est-à-dire que nous nous mettons dans les conditions les meilleures pour voir ce qui se passe ; la seconde est que les figures ou situations sur lesquelles nous expérimentons sont simples. Elles sont définies, à similitude près, par un ou deux paramètres. L'imagination glisse facilement d'une figure à une autre de la même famille, et ceci d'autant plus que les paramètres définissant la famille peuvent varier continûment. L'imagination entame en douceur le parcours de tous les cas possibles.

Mais il ne va pas de soi que tout le monde partage les mêmes évidences. Il est sans doute vrai que certains phénomènes très simples et très symétriques sont universellement admis comme évidents. Ce pourrait être le cas par exemple pour l'égale inclinaison des deux montants d'une échelle à montants égaux dressée sur un sol horizontal. Mais il existe des phénomènes évidents pour certains esprits, et non pour tous.

Ainsi les évidences ne sont pas nécessairement des données immédiates de la perception, elles s'appuient sur un vécu, sur une expérience. Il semble clair que certains phénomènes apparaissant comme non évidents à certaines personnes, deviennent évidents pour elles à la suite d'observations, de constructions, de manipulations appropriées. C'est ainsi que peut être installé, dans un groupe d'élèves hétérogène, un consensus minimal pour servir de base aux premiers éléments d'une géométrie raisonnée.

3 Des inférences inductives

Il semble assez clair que les conditions déterminantes trouvent leur fondement dans la causalité physique. Comme nous venons de le voir, le schéma est constant : on construit, on dessine, on dispose des objets de telle ou telle façon, puis on constate tel résultat. Et ensuite la propriété observée est étendue à l'ensemble des figures du même type. Il s'agit donc au départ d'inférences inductives.

Mais qu'est-ce que cela veut dire au juste ? « La méthode des sciences physiques, écrit Henri Poincaré [1927], repose sur l'induction qui nous fait attendre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance. » Cette définition énonce le principe même de l'induction. Mais il faut la compléter pour discerner la portée des inférences inductives.

Tout d'abord les circonstances de lieu d'un phénomène peuvent varier, en particulier sa situation par rapport à l'observateur : nous reviendrons sur ce point à la section 4. Mais, et ceci est important, la forme de l'objet en cause peut aussi varier.

Reprenons l'un de nos exemples. Nous observons une première fois qu'en dessinant deux segments congruents qui se croisent en leur milieu, nous obtenons les diagonales d'un rectangle. Quel serait l'intérêt de cette observation si nous n'en tirions que ceci : chaque fois que nous dessinons deux segments de même longueur que ceux de la première expérience et que nous les faisons se croiser en leur milieu, de sorte en outre qu'ils fassent entre eux le même angle que dans la première expérience, nous obtenons un rectangle (congruent à celui obtenu la première fois). Ce n'est pas cela qui nous intéresse. L'inférence utile et productive est ici celle qui nous dit : quelle que soit la longueur commune des deux segments, et quelle que soit l'angle qu'ils font entre eux, nous obtenons bien un rectangle. Ainsi, nous maintenons certaines circonstances de l'expérience, mais nous en libérons d'autres, ce qui nous permet d'étendre la propriété observée à la catégorie tout entière des rectangles, de nous dire que les choses se passeront *forcément toujours* comme cela.. Seul un tel type d'induction nous permettra d'enclencher des raisonnements géométriques intéressants. On qualifie de *paradigmatiques* les expériences de cette sorte, qui sont représentatives d'une infinité d'expériences analogues.

Montrons a contrario une expérience non paradigmatique, c'est-à-dire dont on ne voit pas avec évidence qu'elle donnera le même résultat dans tous les cas de figure possibles. Il n'est pas d'emblée évident que la somme des angles d'un triangle soit égale à deux droits. Constater cette propriété sur quelques triangles particuliers, par exemple en mesurant les angles et faisant la somme des mesures, n'aide en rien à se convaincre que les choses se passeront toujours de la même façon. Il faut aménager l'expérience de sorte qu'on voit l'*inéluctabilité* du résultat, sa *nécessité*. Il faut créer les conditions qui rendent la généralisation – autrement dit l'induction –, évidente.

4 Extension aux situations non privilégiées

On peut se demander à quoi servent les conditions déterminantes. Par exemple, à quoi bon considérer des conditions qui déterminent la forme rectangulaire, puisque nous reconnaissons habituellement les rectangles sans analyse ? Il est vrai que nous les reconnaissons sans analyse, mais à condition qu'ils soient en position privilégiée. Qui plus est, nous l'avons dit, c'est aussi et forcément en position privilégiée que nous reconnaissons l'évidence des conditions déterminantes. *Mais ces conditions sont exportables en position non privilégiée.* En d'autres termes, si nous savons par une raison quelconque – ou un raisonnement – qu'un quadrilatère situé n'importe comment répond à des conditions déterminantes de la forme rectangulaire, nous en concluons – sans aucun besoin de nous en convaincre par la vue – que ce quadrilatère est un rectangle. Ceci montre par quel mécanisme les conditions déterminantes augmentent notre capacité de saisir l'espace.

Un exemple concret suffira à illustrer cela. Supposons que nous doutions de la forme rectangulaire d'une vaste place publique bordée de maisons. Impossible d'amener cette place en position privilégiée : elle est trop grande et trop lourde ! Mais nous pouvons vérifier par des opérations de visée que ses bords sont rectilignes, et par des mesures exécutées localement, qu'elle a deux côtés égaux et perpendiculaires à un troisième. Nous saurons alors que la place est rectangulaire, sans pourtant avoir jamais pu la saisir d'un coup d'œil comme un rectangle.

Pour pouvoir exporter dans toutes les situations possibles une inférence constatée en situation privilégiée, il faut être assuré que les objets que nous éloignons de nous, que nous orientons arbitrairement, que nous ne percevons que partiellement, demeurent inchangés pendant qu'on les transporte ou qu'on les soumet à des observations particulières. Nos inférences seraient inopérantes dans un univers de terre glaise ou de caoutchouc. Il nous arrive d'ailleurs de nous laisser surprendre par des variations inattendues d'un objet. Autrement dit, notre géométrie débutante s'applique à des objets *qui se conservent*, à des objets, comme dit Freudenthal [1983], qui ne subissent que des *gentle transformations*, des transformations douces[1].

5 Du réel à l'idéal

Nous avons parlé jusqu'ici des objets et des figures géométriques comme de choses réelles obtenues en dessinant, en articulant des tiges, en découpant et pliant des papiers, etc. Or aucune de ces choses ne s'identifie à une figure idéale. Par exemple nous ne pouvons jamais dire si un rectangle réel est un rectangle, absolument parlant. Il y a des cas où nous sommes incapables de discerner si deux segments bout à bout sont à eux deux plus longs, égaux ou plus courts qu'un segment donné. Rappelons qu'il y a deux raisons à cela. La première est physiologique : nos sens ne nous communiquent que des images approximatives. La seconde est physique : les objets réels se résolvent en atomes et particules qui leur enlèvent, dans le monde microscopique, toute possibilité de correspondre exactement aux objets idéalisés de la géométrie.

[1] Cette affirmation provoque un paradoxe. En effet, comment pourrions-nous nous convaincre que les objets qui nous occupent se conservent, ou en d'autres termes ne subissent que des transformations douces, sans leur appliquer des mesures relevant de la géométrie que nous sommes précisément en train de construire ? Ce paradoxe se résout pratiquement au niveau du bon sens : nous verrons bien à l'usage quand notre géométrie ne fonctionnera plus. On le résout au niveau théorique en *postulant* l'existence des transformations douces.

Il est donc exclu que l'évidence de la première condition déterminante ci-dessus (cf. 1.1) se ramène à ceci : si je suis sûr, *absolument*, qu'une figure est un quadrilatère, et si j'ai vérifié, *sans marge d'erreur*, qu'elle a deux côtés égaux et perpendiculaires à un troisième, alors je sais *sans erreur possible* que le quadrilatère est un rectangle. L'évidence n'est pas de cet ordre-là.

L'évidence n'ayant pas un tel fondement absolu, elle s'appuie sur une *expérience* entourée d'une marge d'indétermination. À propos du rectangle par exemple, je pourrais dire ceci, ou quelque chose d'approchant : chaque fois que j'ai construit un quadrilatère avec trois angles dessinés soigneusement à l'équerre, j'ai pu vérifier que le quatrième angle correspondait, aussi précisément que je pouvais le voir, à l'angle de l'équerre. Dans tous les cas où, peut-être parce que j'étais fatigué ou distrait, j'ai obtenu un « rectangle » un peu bancal, j'ai recommencé la construction et j'ai obtenu un rectangle que j'estimais satisfaisant. Bien sûr je n'ai jamais, et pour cause, construit un rectangle d'un kilomètre de long et d'un millimètre de large. Qui plus est, j'ai même rarement pensé à un tel rectangle. Pourtant j'arrive un peu à l'imaginer.

Ainsi mon sentiment d'évidence est tempéré par ma conscience des imprécisions des objets réels et de mes sens, et par mon impuissance à saisir la famille infinie des quadrilatères, et celle des rectangles. Mon évidence au départ est d'ordre pratique et s'étend à des catégories d'objets à mon échelle[2].

Ainsi, nos premières implications ne sont jamais vérifiables qu'approximativement. Toutefois, elles s'énoncent avec des mots (des concepts) qui ne sont guère connotés par l'indétermination des choses. Quand nous pensons à un rectangle, un angle droit, une égalité de segments, nous ne nous embarrassons pas spontanément du fait qu'il n'existe ni rectangle, ni angle droit, ni égalité absolue. Les concepts sont univoques par nature. Et puisque nous savons d'expérience que les propriétés que nous évoquons, quoique vérifiées imparfaitement par les objets réels, sont néanmoins vérifiées par eux avec une marge d'erreur d'autant plus petite qu'ils ont été construits ou dessinés avec plus de précision, nous appliquons spontanément ces propriétés à des objets infiniment précis.

Ainsi, les choses et les phénomènes s'installent dans la pensée avec une netteté qu'ils n'ont pas dans la réalité. Ce qui prend la forme d'une idée devient par là même idéal. Il en résulte que les ensembles infinis d'objets auxquels renvoient les mots sont moins réels qu'imaginaires.

L'évolution de la physique au XX^{e} siècle nous a fait perdre par ailleurs l'illusion que cet idéal pourrait aussi être vu dans la

[2] De telles indéterminations laissent la porte ouverte à d'autres géométries. Si l'espace est doté d'une courbure imperceptible à mon échelle, il se pourrait bien que mon évidence sur les quadrilatères possédant deux côtés égaux perpendiculaires à un troisième soit mise en défaut. Mais ces phénomènes étranges se passeraient sous le seuil de mes perceptions claires.

nature « si nous disposions d'instruments infiniment précis ». En ce sens la géométrie est une construction de l'esprit[3].

6 Vers une théorie

Nous sommes passés de quelques expériences paradigmatiques à des évidences portant chaque fois sur une famille infinie de figures en situation privilégiée. Nous avons ensuite étendu les conditions déterminantes ainsi obtenues à toutes les figures en situation quelconque. Mais la vocation des conditions déterminantes est de servir de points de départ pour une géométrie qui prouve des propositions non évidentes, des propriétés de figures compliquées.

Les conditions déterminantes, basées sur des expériences, ont la forme d'implications entre propriétés, et donc elles se situent au niveau de la saisie des figures en compréhension. Toutefois, leur évidence est telle qu'on les voit assez clairement fonctionner en extension. On étend sans peine ces expériences en pensée à l'ensemble des cas de figure. Tel ne sera évidemment plus le cas pour les propriétés des figures compliquées, celles où l'imagination en est réduite à des parcours très partiels des cas de figure. La part de l'intuition se réduit ainsi par nécessité. Bien entendu, les intuitions appliquées à certains cas de figure demeurent essentielles sur le plan heuristique. Mais les cas de figure accessibles ne sont plus représentatifs de tous les cas possibles. Ainsi les intuitions se font hasardeuses et la pensée déductive s'impose comme unique alternative.

Montrons sur un exemple comment une propriété déterminante peut être appliquée à la preuve d'une propriété a priori non évidente. Quelques expériences montrent que, de quelques points d'un cercle, on voit un diamètre de celui-ci sous un angle droit. Mais deux questions se posent : est-ce qu'il en est toujours ainsi ? et si oui, à quoi est due cette propriété remarquable ? On dessine alors dans un cercle un angle inscrit interceptant un diamètre (figure 11). On ajoute à la figure le diamètre issu du sommet de l'angle. Les deux diamètres sont égaux et se coupent en leur milieu. Leurs extrémités sont donc les sommets d'un rectangle. L'angle inscrit de départ est donc bien un angle droit.

[3] Le phénomène constaté de manière imprécise dans la réalité se mue en évidence précise dans l'esprit. C'est ce dont témoigne d'Alembert lorsqu'il écrit, évoquant la congruence de deux figures : « Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaine parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures. Cette manière de démontrer a donc l'avantage non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux. » (Cité par R. Bkouche).

Le mode de preuve évoqué par d'Alembert n'a plus cours dans les mathématiques d'aujourd'hui. On peut penser toutefois qu'il demeure un palier incontournable dans l'apprentissage de la preuve en géométrie.

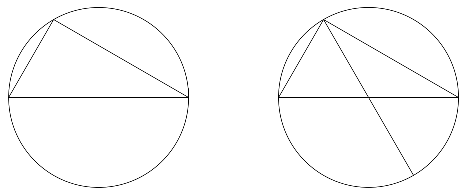


Fig. 11

Remarquons qu'un telle preuve consiste essentiellement à amener la propriété en cause à l'évidence. Elle ne consiste pas *d'abord* à montrer que la propriété découle d'autres propriétés connues. Dans les débuts de la géométrie, on s'intéresse à des phénomèrnes, à des propriétés. Il faudra toute une évolution de la pensée pour qu'on s'intéresse à la cohérence d'une théorie, et que corrélativement la portée, la visée – sinon la nature – des preuves change, pour que l'attention se déplace de l'évidence du phénomène vers l'évidence des implications[4].

7 L'univers de la géométrie commençante

Toute notre étude jusqu'à présent a été structurée en trois parties principales : percevoir (chapitre 1), concevoir (chapitres 2 et 3), inférer (chapitre 4). Cette division marque les étapes d'une analyse, plutôt que des moments clairement discernables et successifs de la pensée géométrique en formation. Il est rare en effet que nous percevions un objet sans le rattacher à l'une ou l'autre catégorie. Par exemple un triangle particulier est sans peine rattaché – fut-ce implicitement –, à la forme triangulaire en général. Qui plus est, les formes géométriques simples ne sont pas seulement des objets de contemplation. Comme nous l'avons vu, la connaisssance que nous en avons comporte des expériences de déplacements, de constructions, de déformations, et plus généralement de manipulations génératrices d'inférences spontanées : quand je fais ceci, j'obtiens tel résultat. En cela consiste l'expérience des choses, sur laquelle se bâtit, entre autres, une première connaissance géométrique. Ainsi, les trois plans que discerne l'analyse, – percevoir, concevoir et inférer –, s'intègrent dans un mode spontané d'activité qui est à la fois manuel, perceptif et intellectuel.

L'univers de cette activité, qui est aussi celui des premières acquisitions géométriques, n'est pas constitué d'un espace et de parties immobiles de cet espace, dont on étudierait les propriétés. Il est peuplé d'objets et de figures déplaçables soumises à des mouvements continus et comportant des symétries. Celles-ci sont mises en relation avec les symétries du corps humain et les directions physiques privilégiées – la verticale et l'horizontale. Mais ill y a un long chemin à parcourir pour passer de cette géométrie

[4] Cf. N. Rouche [1990].

commençante à la géométrie constituée. Nous nous contentons ici d'évoquer ce parcours, en soulignant que ses étapes dans l'enseignement méritent d'être soigneusement motivées.

8 Mais aussi chercher

Examinons pour terminer un quatrième registre de la pensée géométrique à ses débuts. Il est évidemment déjà intéressant et utile de posséder quelques vérités géométriques évidentes. Mais pour avancer, il faut arriver à en trouver et prouver de nouvelles. On trouve en se posant des questions, en expérimentant, en tâtonnant. On prouve en construisant des preuves. Et pour prouver, il faut des arguments. L'exemple ci-dessus de l'angle inscrit interceptant un diamètre montre que l'argument clé d'une preuve – en l'occurence « deux segments égaux se coupant en leur milieu déterminent un rectangle » – n'est pas révélé d'office à qui contemple passivement la situation. Il faut puiser dans ses souvenirs, faire fonctionner son imagination, mobiliser sa pensée dans un univers bien peuplé de choses et de propriétés diverses, avec entre elles le plus possible de relations significatives. Il ne suffit pas d'avoir la tête bien faite, il faut aussi qu'elle soit bien pleine, et encore pas de n'importe quoi.

On retrouve ici le sens large, mentionné à la section 1. La pensée en recherche s'appuie sur le sens large, sur toutes les choses que l'on est capable d'associer à chaque figure, à chaque phénomène, à chaque mot, à chaque symbole. Une condition déterminante est une condition suffisante pour obtenir telle ou telle configuration. Mais elle apporte avec elle et rend disponible pour la recherche toutes les propriétés connues de la figure ou de la configuration.

Notons enfin l'importance, du point de vue heuristique, de ce que nous avons appelé les figures simples à symétrie modérée, celles qui forment des familles à un ou deux paramètres. On comprend leur rôle particulier dans la recherche des preuves en géométrie élémentaire. En effet, d'une part – nous l'avons abondamment expliqué – leur simplicité fait que l'on parcourt de telles familles en extension sans trop de difficulté. Mais d'autres part, comme elles sont plus variées que les figures à zéro degrés de liberté, on les retrouve plus souvent comme sous-figures dans des figures compliquées qui posent problème. Elles jouent donc plus souvent le rôle de *figures clés*, génératrices de clarté. Une figure compliquée est comme une forteresse qui décourage les attaques. Une manière efficace d'en percer les secrets consiste à y chercher, et bien souvent à y introduire (comme un cheval de Troie), une figure clé qui l'éclaire.

Appendice : les débuts de la géométrie d'Euclide

Après avoir cherché les origines de la géométrie dans les phénomènes les plus familiers, il nous paraît intéressant de voir dans quelles évidences et manœuvres élémentaires s'enracinait la géométrie d'Euclide. Au début des Éléments, Euclide parle, dans ce qu'il appelle les notions communes, de la grandeur et de l'égalité des choses. Voici les notions communes[1] :

(A) *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*

(B) *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*

(C) *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*

(D) *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.*

(E) *Et le tout est plus grand que la partie.*

Euclide on le voit parle de choses considérées du point de vue d'une grandeur : elles sont *égales*, ou l'une est *plus grande* que l'autre. Elles sont égales lorsqu'elles s'ajustent les unes sur les autres, ce qu'il faut interpréter par : *lorsqu'elles peuvent être amenées en coïncidence.* Mais des choses que l'on peut amener à coïncider sont des choses transportables et qui conservent, au cours du transport, leur forme et leur grandeur ou, si on veut, leur identité géométrique.

Cette géométrie à son départ s'occupe donc d'objets déplaçables. Elle est, sur ce point important, parente proche de la pensée commune. Et elle se distingue de la plupart des exposés géométriques d'aujourd'hui, d'où l'idée d'un mouvement possible des objets ou des figures est absente.

Voyons sur un exemple clef comment Euclide prouve l'égalité de deux choses en les amenant à coïncider, ou si on veut en les superposant. Il s'agit du théorème 4 du Livre I, qui s'énonce comme suit :

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux

[1] Nous suivons la traduction de B. Vitrac (cf. Euclide [1990]).

angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.

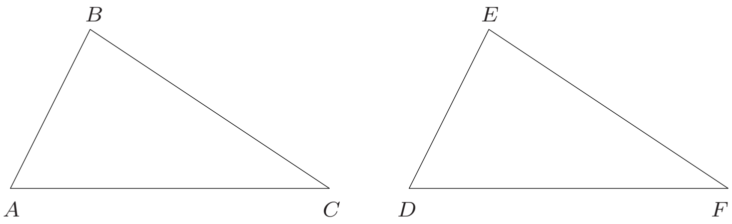


Fig. 1

La démonstration peut se résumer ainsi : Soient deux triangles ABC et DEF tels que AB soit superposable à DE, que AC soit superposable à DF et que l'angle BAC soit superposable à l'angle EDF (figure 1).

On transporte AB sur DE, ce qui est possible par hypothèse. L'égalité des deux angles[2] fait que AC prend la direction de DF, et donc que C vient en F. Ainsi BC est superposé à EF, car un segment est déterminé par ses deux extrémités. Les deux triangles sont donc superposés.

On voit clairement dans cette démonstration le triangle ABC voyager vers DEF. Il s'agit bien entendu d'un transport mental. Mais les points A, B et C ne sont pas des points immobiles du plan, ce sont les sommets d'un triangle mobile, qui est une chose au sens des notions communes. Ce concept de *chose* ne s'identifie pas à *partie du plan.*

Répétons-le, la notion de *superposabilité* de deux objets implique nécessairement d'imaginer le *transport* de l'un vers l'autre, ou le transport des deux vers un lieu commun. D'après la notion commune (D), la superposabilité définit ce qu'Euclide appelle l'*égalité* des choses, des objets. La démonstration que nous venons d'examiner s'appuie sur le transport d'un triangle. Celui-ci est un objet, sur lequel on discerne 3 sommets, 3 côtés, 3 angles. Le sens du théorème est que dorénavant, moyennant les hypothèses, on ne devra plus recourir à un tel transport. En effet, il suffira d'évoquer la superposabilité de trois parties simples de l'objet avec les parties correspondantes de l'autre. Ces parties simples sont deux côtés et un angle. Ainsi, on ramène la superposabilité d'objets complexes à la superposabilité d'objets plus simples.

Dans la plupart des théorèmes qui suivent, Euclide ne recourt plus au transport – fût-il mental – d'une figure vers une autre. Cela pourrait donner à croire qu'il s'appuie certes au départ sur le mouvement, mais qu'il s'en passe aussi tôt que possible. La vérité nous semble plus nuancée. Euclide se sert une fois ou l'autre au début des Éléments (à part le théorème 4 analysé ci-dessus, voir encore le théorème 8 du Livre I) du transport d'une figure

[2] Euclide n'envisage pas le cas de deux triangles qui seraient superposables par « retournement », mais cette lacune n'a pas d'importance pour notre propos.

complexe, pour arriver le plus vite possible à ne plus devoir le faire. Mais dans la mesure même où un grand nombre de théorèmes ultérieurs démontrent la superposabilité de deux objets en s'appuyant sur la superposabilité d'objets plus simples, les mouvements, quoique évacués du discours explicite des démonstrations, demeurent bien présents au niveau implicite, étant inhérents à l'idée même de superposabilité.

On peut se demander d'ailleurs si les objets de la géométrie à ses débuts dans l'histoire auraient pu être autres que des objets indéformables et déplaçables. Le matériau premier, et aussi le plus simple, le plus stable, que la vie quotidienne propose à la réflexion des hommes est bien celui-là. Les Chinois et les Indiens ont produit aussi une science géométrique, dont le procédé principal consiste à décomposer des objets en morceaux pour recomposer d'autres objets, des sortes de transformations d'un puzzle en un autre. Par opposition à Euclide, ils ont librement déplacé des objets variés, sans souci de ramener le transport de ceux-ci à celui d'objets plus simples.