Quatrième partie

Représenter les objets

Introduction

Nous étudions dans cette partie les principales représentations d'objets géométriques. Il pourra s'agir de représentations planes d'objets plans, comme par exemple le plan d'un terrain de sport ou la carte d'une région de plaine, de représentations spatiales d'objets de l'espace, comme par exemple les maquettes de bâtiments ou les modèles de molécules en stéréochimie, ou encore des représentations planes d'objets de l'espace telles que les diverses formes de vues en perspective. Nous verrons que toutes ces représentations ont pour effet de rendre le monde plus intelligible, et nous essayerons de dégager leur rapport à la géométrie.

1 Pourquoi représenter certains objets ?

1.1 Objets trop grands ou trop petits

Comme nous l'avons vu dans la première partie, certains objets sont trop grands ou trop petits pour que nous puissions les voir convenablement. Nous pouvons alors les appréhender de deux façons : la première en nous appuyant sur des mesures et des raisonnements, et nous retrouvons ici l'idée de Mach que l'intellect permet de dépasser les limitations des sens ; la seconde en en construisant l'une ou l'autre représentation accessible à notre vue distincte, mais une telle construction s'appuie aussi sur des mesures et des raisonnements.

Si l'on accepte l'histoire qui fait remonter l'origine du terme *géométrie* à la mesure des terrains après chaque inondation dans la vallée du Nil, on peut même dire que la géométrie elle-même serait née de cette nécessité de saisir avec précision des objets qui échappent à la vue claire. Un plan cadastral donne de la forme et des dimensions d'un champ une idée bien plus précise que la vue qu'on peut en avoir du bord du chemin ou même en en faisant le tour. Et ce n'est certainement pas un hasard si Clairaut [1741] a choisi la mesure des terrains comme fil conducteur de ses *Éléments de géométrie.*

L'arpentage, la topographie et la géodésie[1] sont trois techniques géométriques développées par l'homme pour saisir des portions de plus en plus vastes de son environnement. Les cartes géographiques à courbes de niveau communiquent la forme d'une région. Le promeneur saisit la région par petits morceaux, la

[1] Science qui étudie la forme et les dimensions de la terre.

carte amène la région entière dans le champ de sa vision distincte.

La terre peut être prise comme emblème de ces choses tellement grandes qu'on a toutes les peines du monde – c'est le cas de le dire – à savoir quelle forme elles ont. Il a fallu des siècles d'efforts, d'observations, de débats y compris philosophiques et théologiques, avant que l'homme n'acquière la conviction que la terre est une boule.

Les objets trop grands pour être vus clairement sont amenés dans le champ d'une perception plus claire soit par des représentations planes, soit par des modèles réduits comme les globes terrestres, mais aussi toutes les maquettes de bâtiments, de meubles ou d'objets techniques. Un modèle peut être manié, tourné et retourné sous le regard, on peut faire le tour d'une maquette, la regarder de côté, du dessus, etc.

À l'opposé, certains objets sont trop petits pour être vus clairement, ou même pour être vus tout court. C'est le cas par exemple des grosses molécules de la stéréochimie ou des mailles des cristaux. On amène ces objets dans la zone de vision commode en les reproduisant à trois ou à deux dimensions. On construit ces modèles en coordonnant diverses mesures géométriques nécessairement très détournées et très techniques, très éloignées de la vue.

1.2 Objets mal ou incomplètement perçus

Nous le savons, la taille des objets – trop grande ou trop petite – n'est pas le seule difficulté que nous rencontrons pour les percevoir. En effet, comme nous l'avons vu dans la première partie, l'être humain perçoit assez clairement les objets plans en situation privilégiée. Par contre il ne perçoit jamais complètement ni fidèlement les objets à trois dimensions, ne serait-ce que parce que ceux-ci ont des faces mal disposées ou cachées. D'où la pratique universelle qui consiste à représenter à deux dimensions les objets qui en ont trois. L'avantage est que le dessin est regardé, lui, en position privilégiée, et est donc vu clairement. Le désavantage est que le passage de l'espace à la représentation plane entraîne de graves pertes d'information. C'est ce qui explique, et nous y reviendrons, l'existence de plusieurs types de représentations planes, chacun préservant et transmettant à l'observateur certaines informations au détriment des autres.

Il est utile de rappeler ici à nouveau le point de vue de Mach : au delà du domaine des perceptions claires, l'intellect prend le relais. Mais l'intellect ne s'appuie pas seulement sur des idées. Il provoque, par le biais de représentations, l'apparition dans le champ des perceptions claires d'éléments de connaissance qui ne s'y trouvent pas d'emblée, ce qui a pour effet de rendre possible ou de faciliter ses interventions. Bien entendu, ces transpositions de l'espace au plan sont toujours suivies de retours à l'espace, car sinon à quoi serviraient-elles ? Elles n'ont de sens que dans un va-et-vient entre l'espace et le plan.

1.3 Garder le souvenir des choses

Au contraire des autres représentations planes, la perspective à point de fuite et la photographie n'ont pas pour fonction d'amener dans le champ de la perception claire des objets qui ne s'y trouvent pas. Au contraire, elles ont pour fonction première, quoique bien entendu pas unique, d'imiter, de fixer le plus fidèlement possible la perception visuelle et ainsi d'en permettre la conservation.

L'écoulement du temps intervient ici comme obstacle à la connaissance. Certains objets disparaissent du champ de la perception, soit parce qu'ils changent, soit parce qu'on s'en éloigne. Les représentations, que l'on veut le plus fidèles possible, permettent dans une certaine mesure le retour à volonté à la perception. Et donc à la pensée que la perception sous-tend.

1.4 La normalisation, instrument de connaissance

Rassemblons nos idées. Qu'il s'agisse d'objets trop grands ou trop petits, d'objets vus de façon déformée ou partielle, ou d'objets fugitifs, les représentations servent à en amener ou à en conserver des éléments significatifs dans le champ de la perception claire. Selon le terme proposé par H. Freudenthal, il s'agit dans chaque cas d'une forme de *normalisation*. Nous le savons, la norme de perception commode pour l'être humain, ce sont les objets si possible plans, situés à portée de toucher, dans le cône de vision nette, orientés frontalement, avec leurs éléments de symétrie accordés à ceux des organes de perception. Les représentations amènent des images plus ou moins fidèles des objets dans cette zone normale.

En parlant de normalisation à propos des représentations, nous étendons en fait le sens donné à ce mot par Freudenthal. Celui-ci en effet l'utilise pour désigner des transformations de mesures ou de rapports qui amènent ceux-ci dans le champ de l'intuition immédiate. Par exemple, lorsqu'il y a dans une ville 34 718 chômeurs sur 273 480 personnes en âge de travailler, on dit qu'il y a 12,7 % de chômeurs. Ou encore lorsqu'en Belgique on transforme en francs belges le prix d'un objet payé dans une devise étrangère, on amène le prix sur une échelle familière à l'usager.

Dans cette acception élargie, le terme de *normalisation* désigne donc les manœuvres qui consistent à approprier des données de toutes sortes, et dans notre cas géométriques, à l'appréhension par l'homme. On peut voir dans la normalisation une extension consciente de ces manœuvres qu'exécutent automatiquement nos organes des sens pour amener les perceptions dans une zone distincte. Par exemple tourner le regard vers l'objet, ajuster la courbure du cristallin pour régler la profondeur de champ et le diamètre de la pupille pour régler l'éclairement. Toutes ces manœuvres inconscientes se prolongent donc par des manœuvres intelligentes.

Par ailleurs, les types de représentation sont multiples et chacun répond à des difficultés particulières de saisir l'environnement ou d'exprimer un projet de construction. Nous tentons plus loin dans ce chapitre de décrire la portée des principaux d'entre eux. Tous ensemble, ils constituent une panoplie d'instruments donnant accès à la réalité des formes et des grandeurs spatiales.

Étant donné la fonction irremplaçable des représentations comme outils de connaissance, ce n'est pas un hasard si elles se multiplient et si on les améliore sans cesse dans la civilisation d'aujourd'hui.

1.5 Des instruments de communication

On peut aussi voir les représentations autrement dans cette civilisation. Car du fait qu'elles sont des instruments de connaissance et que de plus elles s'inscrivent sur des supports aisément transportables tels que le papier ou les ondes électromagnétiques, elles sont aussi un moyen de communication, sorte de langue géométrique comportant divers dialectes. On les trouve dans les médias, dans la pratique et l'enseignement des sciences, dans le dessin technique. On les trouve aussi dans la peinture et dans son histoire, sous la forme de la perspective à point de fuite en Occident et de la perspective cavalière dans les estampes chinoises et japonaises. Les représentations ont avec l'art un lien essentiel, quoique de nature controversée.

2 Comment représenter les objets ?

2.1 Une panoplie de représentations

Un bref inventaire des types de représentation comporte les maquettes et les modèles, les trois types de projection (les projections orthogonales avec la variante des projections cotées, les projections parallèles et les projections centrales), puis les développements des surfaces développables et enfin les projections cartographiques.

Comment s'enchaînent ces différents sujets ? D'abord les maquettes et modèles reproduisent les originaux par similitude, ils conservent les trois dimensions et ne présentent pas d'ambiguïtés. Il existe une correspondance en principe parfaite, point par point, entre l'original et le modèle.

Les trois projections orthogonale, parallèle et centrale présentent elles des ambiguïtés, du fait même du passage de trois à deux dimensions. Voyons cela d'un peu plus près. Ces trois projections conservent les propriétés d'incidence : si un point est sur une droite dans la réalité, son image est sur l'image de la droite dans la représentation, et si deux droites se coupent dans la réalité, leurs images se coupent aussi. Les ambiguïtés des représentations tiennent au fait que les réciproques de ces propositions sont fausses. Autrement dit, si un point est sur une droite dans la représentation, il n'y est pas forcément dans la réalité, et si deux droites se coupent dans la représentation, elles ne se coupent pas nécessairement dans la réalité[2]. Qui plus est, certaines droites se projettent sur des points, et certains plans sur des droites.

Chacun des trois types de projection classiques a ses avantages et ses inconvénients, montre ou conserve plus ou moins bien certaines propriétés au détriment des autres. Nous en ferons le bilan.

Les développements n'ont pas pour fonction de ressembler aux objets originaux, mais bien d'en permettre la reconstitution par pliage ou enroulement. Ils ne s'appliquent qu'aux surfaces qui, telles les polyèdres, cônes et cylindres, s'appellent développables parce qu'elles sont applicables sur un plan, fût-ce après certaines incisions.

Certaines surfaces ne sont pas développables. La sphère en est le premier et le plus important exemple. On ne peut pas « dérouler », aplatir, une sphère sur un plan. Par contre on peut projeter une sphère, ou plus généralement un morceau de sphère sur un plan : il s'agit là des projections cartographiques. Il en existe de plusieurs sortes et chacune transfère de la sphère à sa représentation certaines propriétés, par exemple les mesures d'angles ou les rapports d'aires, au détriment d'autres propriétés.

2.2 Des représentations fidèles : la linéarité

Délaissant pour un moment les développements et les projections cartographiques, concentrons-nous sur les maquettes et projections classiques. Qui dit *représentation* implique recherche de la *fidélité* dans les représentations. Or il est remarquable que les modèles réduits ou agrandis sont le plus souvent des modèles semblables aux originaux. *Semblable* est pris ici au sens mathématique et la similitude est une transformation linéaire. De même les projections orthogonales ou simplement parallèles sont des fonctions linéaires. Autre exemple, les coupes de terrain utilisent souvent deux réductions proportionnelles, une pour les longueurs et une autre pour les altitudes. Au total, les représentations sont le plus souvent[3] obtenues par des transformations linéaires. Or celles-ci conservent les rapports de longueurs, et en

[2] Ces propriétés peuvent être resituées comme suit dans un cadre plus général : toute projection de l'espace sur un plan est une fonction et donc chaque point de l'espace possède une seule image. Mais cette fonction n'est pas injective : tout point image possède plusieurs originaux. Il possède même une droite entière de points originaux.

[3] La perspective centrale fait exception.

ce sens elles donnent des représentations fidèles. Les sens et l'esprit de l'homme perçoivent particulièrement bien les rapports. Quand les rapports sont conservés, on s'y retrouve bien[4].

Ce n'est d'ailleurs pas un hasard si dans les deux exemples de normalisation numérique évoqués ci-dessus – la réduction d'un rapport à un pourcentage et la transformation d'une monnaie en une autre – la transposition utilisée est linéaire et respecte donc les rapports. Qu'on imagine le désarroi d'un voyageur qui devrait appliquer une conversion non linéaire de monnaies !

Ainsi la linéarité est l'instrument le plus fréquent de la fidélité des représentations, ce qui montre un lien fort entre cette partie de notre étude et la suivante, consacrée à la linéarité.

2.3 Les représentations et la constitution de la géométrie

Les objets de l'espace soumis à représentation ont des propriétés géométriques dont beaucoup doivent être prises en compte dans les opérations de représentation. Ces opérations elles-mêmes, qu'elles soient des développements ou plus souvent des projections, ont des propriétés géométriques qu'il faut connaître pour les exécuter. Ainsi, pour réaliser, et ensuite pour interpréter, les représentations planes des objets de l'espace, faut-il disposer d'un capital de connaissances géométriques. Mais c'est là un paradoxe. Car comme nous l'avons dit, les représentations permettent à l'homme d'avancer dans la connaissance des choses de l'espace, c'est-à-dire d'apprendre la géométrie. Or voilà qu'il faut de sérieuses connaissances de géométrie pour accéder à ces moyens ... d'apprendre la géométrie ! Cette difficulté est d'ordre pratique plutôt que logique. Elle conduit dans l'apprentissage, plutôt qu'à un discours d'emblée linéaire et univoque, à saisir par approximations successives les objets et leurs représentations, en un va-et-vient constant entre l'espace et le plan.

2.4 Des perceptions à la géométrie

Attardons-nous sur ce renversement de point de vue : les représentations, et en particulier les projections, *sont de la géométrie.* À ce titre, et par delà leurs réalisations matérielles, elles ont vocation de devenir des objets idéalisés, des matières à raisonner. Or cette mutation se heurte à une difficulté spécifique. En effet, et pour le dire en peu de mots, *les projections ressemblent à des perceptions visuelles,* et il n'est pas facile de les détacher mentalement de ce lien fort avec l'univers physique et physiologique. Regardons cela d'un peu plus près.

Les représentations planes sont des images plus ou moins fidèles du monde réel. La vue nous donne aussi des images de ce

[4] On se souviendra de notre observation de la section 1 du chapitre 3, selon laquelle les choses sont, en un certain sens, perçues à similitude près.

monde. Elle passe par la projection du paysage sur le support à deux dimensions, sphérique, que constitue la rétine. Les images visuelles se distinguent à beaucoup d'égards des représentations planes. D'abord, on vient de le voir, parce que la rétine n'est pas plane, ensuite parce que nous avons deux yeux et un mécanisme compliqué de coordination des deux sensations oculaires, mais également parce que les images rétiniennes sont soumises dans le cerveau à une réinterprétation conduisant de la sensation brute à la perception[5]. Cette réinterprétation fait intervenir de tout autres facteurs que les seules impressions rétiniennes, par exemple des données de la mémoire.

Mais en dépit de ces différences, les représentations planes ressemblent à des perceptions visuelles, et même elles ont pour principe à des degrés divers de les imiter. Ce n'est pas sans raison que l'on parle de *vue* en plan, de *vue* de profil, etc. Mais elles les imitent en les idéalisant, chacune à sa façon.

Souvent il n'est pas facile de passer d'une perception visuelle à une représentation plane qui lui correspond peu ou prou. Un exemple typique est celui d'un enfant qui, observant du dessus un carton carré dont une diagonale était verticale, le dessinait sous forme de deux segments faisant entre eux un angle obtus. Il paraît inopportun, dans un cas comme celui-là, d'expliquer à l'enfant qu'il ne voit pas bien, car il voit comme il voit. Par contre, on peut utiliser un fil à plomb pour objectiver la projection orthogonale du carton sur la table.

2.5 Des modèles réels pour les projections

Notons enfin que les représentations par projection possèdent des modèles dans la réalité. L'ombre au soleil est une projection parallèle, l'ombre à la lampe et la photographie sont des projections centrales. Mais ces modèles sont bien plus que des modèles : ce sont des phénomènes intéressants par eux-mêmes. Il serait impossible de les étudier sans étudier en même temps la projection correspondante. On prendra garde toutefois, et nous y reviendrons dans chaque cas ci-après, que ces phénomènes physiques ne sont qu'approximativement des projections : le soleil n'est ni ponctuel, ni situé à l'infini, il n'existe pas d'ampoules ponctuelles, ni d'appareil photographique sans aberrations.

3 Des questions pour apprendre

Comme les autres parties de notre étude, celle-ci n'est pas applicable immédiatement dans une classe. Nous avons seulement voulu brosser un tableau des représentations les plus communes et faire voir ce qui caractérise chacune, quel intérêt elle présente d'une part en elle-même, mais aussi pour ce qu'elle apporte à

[5] À ce sujet, voir par exemple P. Guillaume [1979].

la maîtrise de l'espace et à la connaissance de la géométrie. En poursuivant ces objectifs, nous avons peu évoqué les contextes problématiques qui permettent d'animer une classe, et qui sont, s'agissant des représentations, particulièrement nombreux.

C'est pour combler un peu cette lacune que nous donnons ici, à la fin de cette introduction, quelques suggestions d'activités susceptibles de jalonner cet apprentissage d'un bout à l'autre.

Les dessins des tout petits enfants sont des points de passage obligés et intéressants. En particulier ce que l'on appelle « le réalisme intellectuel » est un mode de représentation efficace des objets de l'espace. On appelle ainsi la manière de dessiner une maison avec ses pignons rabattus dans le plan de sa façade, ou une chaise avec dans un même plan ses pieds, la partie horizontale de la chaise et son dossier : on montre ainsi ce que l'on sait beaucoup plus que ce que l'on voit.

Des enfants de fin d'école maternelle arrivent à dessiner des cubes et des assemblages de cubes sur du papier pointé en triangle (papier muni d'un réseau régulier de points alignés suivant trois directions à soixante degrés les unes des autres). De tels dessins en perspective peuvent être exploités beaucoup plus tard dans l'enseignement, avec des questions plus difficiles : par exemple on dessine un ensemble de bâtiments dont chacun est un assemblage de cubes, et on demande si d'un point situé sur un bâtiment, on peut voir une deuxième point, situé sur un autre bâtiment. De telles questions peuvent conduire à la représentation de la situation par un plan coté. Sur ce même support de papier pointé, on peut aussi se poser des questions d'ombres propres et d'ombres portées. Voir ERMEL [1982] et A. Desmarets *et al.* [1997].

La construction d'objets dans l'espace avec du papier ou du carton, même si elle ne vise aucune forme géométrique précise, aboutit nécessairement, à cause des pliages et des enroulements, à diverses formes régulières telles que des faces planes, des angles dièdres, des cylindres et des cônes (voir C. Barnéda-Kaczka [1991] ; le même auteur [1993] propose d'intéressantes constructions dans l'espace avec des fils de fer ou d'autres matériaux filiformes.). Dans CREM [1995], on trouvera la mention de la construction par un groupe d'enfants de 5 à 8 ans d'une maquette d'un quartier de ville.

Les projections orthogonales peuvent être données à interpréter ou à élaborer (voir par exemple la lecture de plan proposée dans F. Van Dieren et al. [1993]. On peut en conjuguer l'étude avec celle de la perspective cavalière, en organisant des passages d'un type de représentation à l'autre, dans les deux sens. Elle est un instrument indispensable des cours de mécanique et construction (voir par exemple R. Adrait et D. Sommier [1991]). Les projections orthogonales sont aussi un moyen naturel d'engendrer l'ellipse comme projection d'un cercle, ou la sinusoïde comme projection d'une hélice circulaire (une projection orthogonale de la rampe d'un escalier en colimaçon est une sinusoïde).

La perspective cavalière, qui peut être étudiée comme un ensemble de règles de représentation ou comme une projection parallèle, se prête à des déterminations de sections de polyèdres ou de distances, et en particulier de plus courte distance entre deux droites. Vue comme projection parallèle, elle peut être abordée par des questions d'ombres portées par le soleil. Voir G. Audibert [1990], B. Parszyz [1989], M. Krysinska [1992] ainsi que D. Moinil et C. Goossens [1983]. Voir aussi le logiciel CDSMath-7 [1994].

La perspective à point de fuite de même que les ombres portées par une lampe ponctuelle offrent de nombreux sujets de situations problématiques. Voir Th. Gilbert [1987].

13

LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

1 Que sont les projections orthogonales ?

La figure 1 montre une table, et la figure 2 en donne trois projections orthogonales.

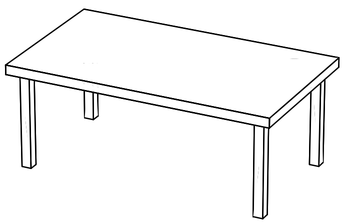

Fig. 1

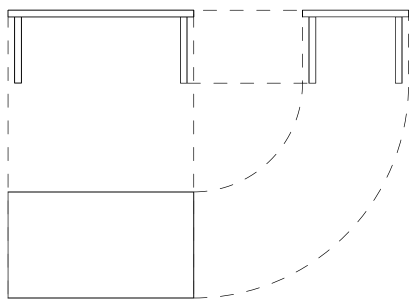

Fig. 2

Sur cette dernière, on voit respectivement une *vue du dessus* ou *en plan* (projection sur un plan horizontal), une *vue de face* ou *en élévation* (projection sur un plan frontal) et une *vue de côté* ou *de profil* (projection sur un plan vertical de bout). Bien qu'on utilise le terme *vue*, il ne s'agit pourtant pas de dessins de la table telle qu'on peut la voir, il s'agit de projections orthogonales sur chacun des trois plans en question. La table serait perçue autrement par le regard. Par exemple, si on l'aborde de face, on aperçoit – en tout ou en partie – chacun des quatre pieds, alors que dans la projection orthogonale les pieds de devant cachent ceux de derrière.

Une projection orthogonale d'un objet en donne souvent une vue pauvre, et même fréquemment méconnaissable. Comment par exemple reconnaître une table dans la vue en plan de la figure 2 ? Parfois même les trois vues d'un objet ne permettent pas de le reconnaître sans un grand effort d'imagination. À cet égard, une vue en perspective comme celle de la figure 1 est beaucoup plus parlante.

Par ailleurs, l'avantage d'une projection orthogonale est qu'elle reproduit en vraie grandeur tout ce qui se trouve dans des plans parallèles au plan de projection. Comme on réalise en général trois projections, cela fait beaucoup de parties vues en vraie grandeur. Cette remarque s'applique particulièrement aux objets qui, tels une chaise, une maison ou un cylindre, possèdent des arêtes, des faces, des axes ou plans de symétrie, orthogonaux entre eux, à condition toutefois que ces objets soient adéquatement orientés par rapport aux plans de projection.

Telles que nous venons de les présenter, les projections orthogonales se définissent par rapport aux directions physiques principales (la verticale et l'horizontale) et aux directions principales du corps humain (plan frontal, vue de côté, etc.) Ce n'est pas un hasard : nous retrouvons ici les *situations privilégiées* (voir première partie), l'idée que l'on voit ou imagine mieux certains objets lorsqu'ils sont bien placés par rapport aux organes de perception de l'être humain. Bien entendu, dans un cadre purement mathématique, projeter une figure orthogonalement sur un plan ne requiert aucune situation particulière ni de la figure ni du plan.

Les projections orthogonales d'un objet sur trois plans orthogonaux renvoient en géométrie analytique aux projections des points de l'espace sur trois axes et trois plans de coordonnées. Lorsqu'on s'est donné trois axes de coordonnées, on définit dans l'espace des surfaces et des courbes par des équations. La géométrie analytique étend l'efficacité des projections orthogonales à des objets de formes variées, qui n'ont plus besoin d'être triorthogonaux, comme une chaise ou une maison.

Il est toutefois intéressant de remarquer que lorsqu'on fait de la géométrie dans des axes orthogonaux, on représente et imagine presque toujours ceux-ci dans des positions privilégiées : deux d'entre eux horizontaux et le troisième vertical. Il serait beaucoup plus difficile de « voir ce qu'on fait » dans un système d'axes jeté n'importe comment dans l'espace. Cette observation montre à quel point la pensée mathématique s'appuie sur des images mentales liées à la constitution sensorielle et aux conditions d'existence de l'être humain.

Les projections cotées sont un type de projection orthogonale particulier, dont les cartes à courbes de niveau donnent un exemple. Au contraire des autres projections orthogonales, elles ne vont en général pas par trois. On produit une seule projection sur un plan donné, et on ajoute au dessin les cotes de certains points ou courbes privilégiés : les *cotes* sont des mesures de la distance de l'élément considéré au plan de projection. Ainsi, une projection cotée combine un dessin avec un codage numérique. Les ambiguïtés du dessin lui-même demeurent, mais elles sont en partie levées par les cotes. Avec un peu d'habitude, on arrive à se représenter assez fidèlement un paysage donné par ses courbes de niveau. Les courbes de niveau servent aussi en mathématiques, où on les utilise couramment pour représenter les surfaces définies par une fonction de deux variables. Le logiciel *Mathematica* suffit pour s'en convaincre.

2 Les projections orthogonales dans la civilisation

Les bâtisseurs et architectes utilisent les projections orthogonales depuis des temps immémoriaux. Or les monuments qu'ils représentent comportent souvent des plans et des axes de symétrie repérables sur les projections. Les figures 3(a) et 3(b) en témoignent. La première représente en coupe et en plan l'église Sainte Sophie à Constantinople (achevée en 537) et la seconde en plan l'église San Vitale (achevée en 547) à Ravenne.

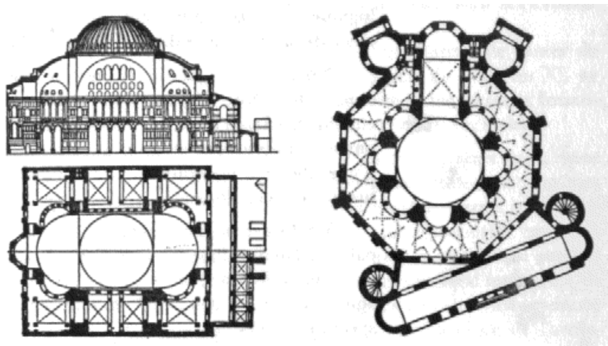

Fig. 3 (a,b)

Dans la civilisation technique qui est la nôtre, le système des trois projections orthogonales sert à représenter les objets à fabriquer, meubles, pièces de machines, etc. On ne peut imaginer comment l'industrie pourrait se passer du dessin technique comme moyen de communication.

La pratique de ce dessin a récemment subi une mutation. En effet, depuis quelques années, le dessin assisté par ordinateur a remplacé dans la plupart des cas le dessin aux instruments. Le dessinateur ne s'appuie donc plus sur son habileté à manier les instruments classiques. Ou bien il coordonne la vue à l'écran avec les mouvements de sa main pilotant la souris, ou bien il émet des commandes codées, via le clavier ou les menus.

Dans l'histoire des mathématiques, on a recouru habituellement aux projections orthogonales à partir du moment où la géométrie analytique est véritablement entrée dans la pratique, c'est-à-dire vers la fin du dix-septième siècle. Par ailleurs, dans le cadre de la géométrie synthétique, un système de deux projections orthogonales coordonnées a été conçu par G. Monge vers la fin du dix-huitième siècle. Il s'appelait la *géométrie descriptive*. Monge y voyait un instrument de la géométrie raisonnée. La géométrie descriptive est encore parfois enseignée aujourd'hui, surtout aux techniciens, mais seulement comme un moyen de représentation.

3 Les projections orthogonales dans la réalité

L'ombre au soleil étant le résultat d'une projection parallèle, on peut provoquer une projection orthogonale en tenant l'objet à représenter entre le soleil et un plan disposé perpendiculairement aux rayons.

De manière analogue, on peut obtenir une approximation raisonnable d'une projection orthogonale en tenant l'objet *tout près* d'un écran de projection éclairé par un projecteur de diapositives ou un rétroprojecteur. Il faut bien entendu pour cela que l'objet ne soit pas trop grand, de sorte que les rayons qui le touchent soient quasi parallèles. Par ailleurs, pour expliquer en quoi une projection orthogonale diffère d'une perception visuelle, on peut montrer que chaque point de la « vue » horizontale est obtenu en projetant le point correspondant de l'objet selon la ligne donnée par un fil à plomb. C'est une manière d'objectiver la projection, de la détacher de la personne.

4 Les projections orthogonales dans l'enseignement

Étant donné la variété de leurs usages comme moyens de représentation et de communication, les projections orthogonales doivent être enseignées pour elles-mêmes.

D'une part leur principe est assez facile à saisir, car il renvoie aux situations privilégiées par rapport à l'observateur humain : plans de projection horizontal, vertical ou de profil, directions de projection verticale ou de bout. D'autre part on les applique le plus souvent à des objets qui s'y prêtent, du fait qu'ils possèdent trois directions orthogonales privilégiées, ce qui facilite aussi les choses.

Par ailleurs, les trois projections orthogonales d'un objet sont souvent difficiles à lire : pour passer de ces trois projections à une image mentale – ou à un croquis en perspective cavalière – qui en donne une vue intégrée, il faut un effort de coordination souvent considérable. Mais cet effort est aussi extrêmement fructueux, au sens où il oblige à imaginer l'objet d'un point de vue où on ne se trouve pas. Cet effort de décentration de l'observateur est caractéristique de la capacité tellement utile qu'on appelle *voir dans l'espace*. Il est significatif à cet égard que le test *des trois montagnes* de Piaget [1947] ait tellement attiré l'attention et qu'il ait inspiré, dans des manuels de grande qualité, des activités géométriques pour l'école fondamentale. Le test des trois montagnes consiste à placer un enfant d'un côté d'une table carrée sur laquelle se trouvent les maquettes de trois montagnes de hauteurs et de couleurs différentes, marquées chacune par des signes particuliers tels qu'une route, un torrent, etc. L'enfant doit soit choisir parmi des vues préparées à l'avance celle qui correspond à l'un ou l'autre point de vue différent du sien, soit dessiner ce que verrait une personne ayant un autre point de vue qu'on lui désigne. Une des activités proposées dans le manuel de E.C. Wittmann [1997] est analogue, mais elle porte sur des buildings parallélipipédiques.

Regardons maintenant du côté de l'enseignement de matières mathématiques précises. Tout d'abord, en étudiant les projections orthogonales, on étudie en même temps la plupart des propriétés d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité qui forment la base de la géométrie de l'espace. Ces propriétés une fois acquises seront rencontrées à nouveau si l'on étudie les autres formes de projection.

Ensuite, une façon intéressante d'étudier les symétries des polyèdres est d'exhiber certaines d'entre elles en projetant le polyèdre orthogonalement selon une direction qui s'accorde avec la symétrie en question.

Rapporter l'espace à trois axes de coordonnées orthogonaux est un passage obligé de la géométrie analytique et de la mécanique, pour étudier les objets et mouvements à trois dimensions. Par ailleurs, l'espace rapporté à de tels axes constitue un contexte significatif pour étudier certains objets plans. Il est intéressant par exemple de construire effectivement des ellipses comme projections orthogonales de sections planes de cylindres circulaires, de construire les trois sections coniques comme projections orthogonales de sections planes d'un cône, ou encore de construire une sinusoïde par projection orthogonale d'une hélice circulaire.

La géographie et la géométrie des surfaces, nous l'avons dit, conduisent aux courbes de niveau. Il est essentiel et assez facile d'arriver à reconnaître la configuration des courbes de niveau autour d'un sommet, d'un fond, d'un col, ou aux environs d'une crête ou d'une vallée. Cette façon d'aborder les fonctions de deux variables est une source d'intuitions utiles.

Deux observations pour terminer. Le fait que le dessin technique se fasse dorénavant à l'ordinateur ne doit pas amener à oublier que l'apprentissage des instruments classiques demeure essentiel, car il provoque une indispensable maturation, au niveau sensori-moteur, de propriétés géométriques fondamentales. Par comparaison, le registre sensori-moteur est totalement différent dans le maniement de la souris, et dans celui du clavier, il est déconnecté de la géométrie.

Enfin, nous venons de voir que les projections orthogonales sont intéressantes pour tous les élèves. De les pratiquer dans toutes les orientations scolaires provoquerait un rapprochement entre les élèves de l'enseignement général et ceux du technique et du professionnel. Pour beaucoup de ceux-ci, ces projections sont un passage obligé.

14

Les perspectives parallèles

1 Diverses sortes de perspectives parallèles

Considérons d'abord ce que l'on appelle la *perspective cavalière*. Observons la représentation d'un cube des figures 1 et 2. Sur cette dernière, les arêtes cachées sont dessinées en trait interrompu. Les lignes du quadrillage aident à réaliser une telle représentation. Elles permettent aussi d'en dégager les caractéristiques principales. Les faces avant et arrière, qui sont carrées dans la réalité, le restent sur la représentation. Les arêtes parallèles restent parallèles sur la représentation. Par contre, alors que les arêtes sont toutes égales dans la réalité, elles ne le sont pas nécessairement sur la représentation. Toutefois certaines restent égales entre elles, à savoir celles qui sont parallèles dans la réalité.

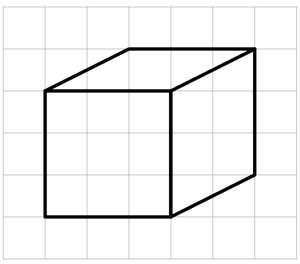

Fig. 1

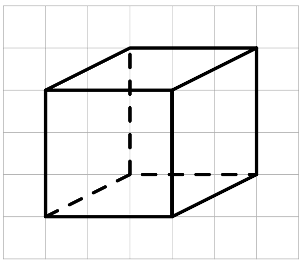

Fig. 2

Les représentations possédant les propriétés ci-dessus sont celles que les artistes et techniciens appellent *perspectives cavalières*. Il en existe divers types. L'un des plus communs présente les arêtes *fuyantes* à 45 degrés avec l'horizontale, et leur donne une longueur moitié moindre que celle des arêtes frontales (figure 3 à la page suivante). Un autre montre les arêtes fuyantes à 30 degrés avec l'horizontale (figure 4). Celle de la figure 3 a pour désavantage important qu'un des côtés, une des diagonales du cube et la diagonale de la face avant tombent sur une même droite, ce qui est source de confusion.

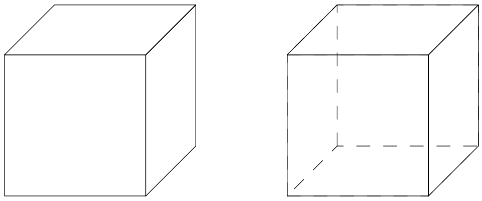

Fig. 3

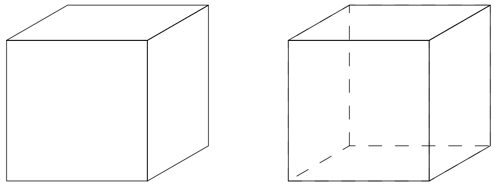

Fig. 4

La représentation de la figure 5, sur du papier pointé, est aussi une représentation en perspective d'un cube. Les architectes et techniciens l'appellent perspective *isométrique*, du fait que toutes les arêtes du cube y sont représentées avec la même longueur[1]. Parfois aussi on l'appelle perspective *axonométrique.* Ici, aucune des faces n'apparaît sous la forme d'un carré. Toutefois, nous retrouvons certaines des propriétés relevées ci-dessus.

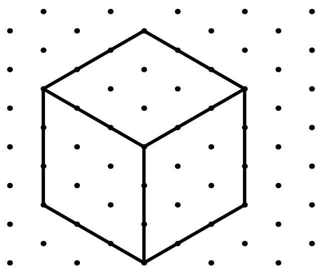

Fig. 5

De manière générale, les représentations que nous venons d'examiner ont, toutes, les propriétés suivantes :

– les segments parallèles entre eux sont représentés par des segments parallèles (ou alignés) ;

– les segments parallèles (ou alignés) égaux sont représentés par des segments parallèles (ou alignés) égaux.

Cette deuxième propriété peut aussi s'énoncer :

– le rapport entre des segments parallèles (ou alignés) est identique au rapport entre les segments représentés.

En fait, un point commun essentiel de toutes ces représentations est que chacune peut être obtenue par une projection parallèle appropriée du cube sur un plan. Nous ne montrerons pas cela en détail ici. Mais c'est la raison pour laquelle les ouvrages théoriques regroupent toutes ces perspectives sous le nom de *perspectives parallèles*[2].

[1] Cette dénomination de perspective *isométrique* s'avère trompeuse, car ce respect de l'égalité des longueurs ne concerne que les segments parallèles à l'une des arêtes. Par exemple, une des diagonales du cube est représentée par un point.

[2] Pour une vue d'ensemble sur les perspectives parallèles les plus communément utilisées, voir G. Audibert [1990] et R. Adrait et D. Sommier [1991].

Par ailleurs, les rayons du soleil étant à peu de chose près parallèles, ces représentations peuvent aussi être obtenues comme ombres portées par le soleil sur un plan (par exemple un plaque de polystyrène (frigolite)). Pour y voir clair, il est utile de prendre un cube construit uniquement avec des tiges. Nous avons représenté une telle situation à la figure 6.

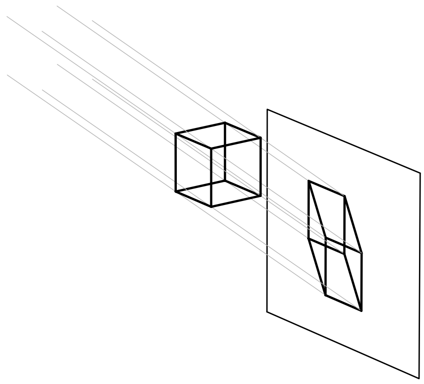

Fig. 6

Bien entendu, il arrive que l'ombre d'un cube au soleil soit extrêmement allongée : que l'on songe à un cube posé sur un sol horizontal et exposé au soleil couchant ! Les perspectives parallèles utilisées pratiquement sont celles qui donnent du cube ou d'autres objets une vue raisonnable, c'est-à-dire ni trop allongée, ni trop courte. Un cas particulier des projections parallèles est la projection orthogonale lorsque les rayons de projection sont perpendiculaires au plan de projection (voir le chapitre 13).

Les segments qui sont représentés en vraie grandeur dans une perspective parallèle sont ceux qui sont parallèles au plan de projection. Il n'est pas toujours facile de voir s'il y a des segments représentés en vraie grandeur. Par exemple, la figure 5 à la page précédente représente un cube dont on pourrait croire que les arêtes ressenties comme verticales sont représentées en vraie grandeur. Or il n'en est rien, comme nous allons le montrer. Cette figure est obtenue de la manière suivante. On dispose le cube devant le plan de projection de manière qu'une de ses diagonales soit perpendiculaire à ce plan. Ensuite on projette le cube parallèlement à la diagonale en question. Il s'agit donc d'une projection orthogonale. Aucune des arêtes du cube n'est parallèle au plan de projection. Aucune n'apparaît donc en vraie grandeur sur la représentation.

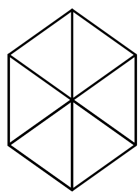

Fig. 7

Examinons par comparaison une autre représentation du cube, analogue mais non identique à la précédente (voir figure 7). Voici comment nous la construisons. Nous tenons le cube devant un plan vertical, avec deux de ses faces horizontales et avec un de ses plans diagonaux perpendiculaire au plan vertical. Projetons alors le cube sur le plan vertical parallèlement à une de ses diagonales, comme le montrent la figure 8(a) (qui est une vue de profil) et la figure 8(b) qui est une vue du dessus.

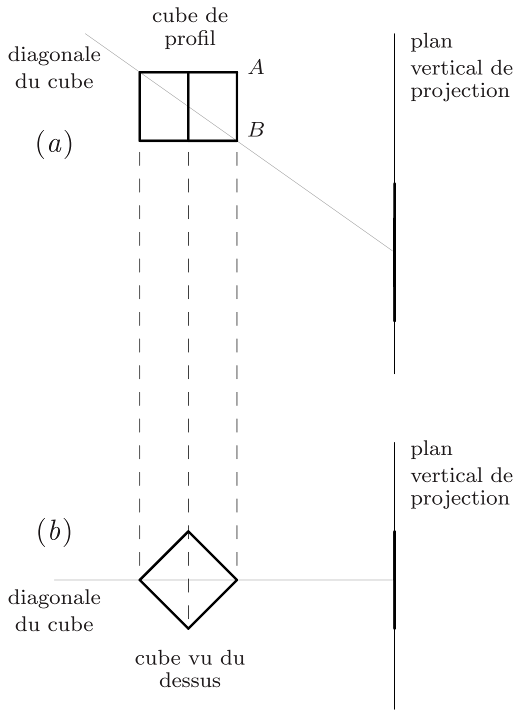

Fig. 8

On réalise qu'une arête verticale telle que $[AB]$ est projetée en vraie grandeur. Il en va de même des trois autres arêtes qui lui sont parallèles.

Les projections parallèles peuvent être regardées comme un cas limite des projections centrales (projections à partir d'un point, voir le chapitre 15), lorsque le centre s'éloigne vers l'infini (mais que le plan de projection reste lui à distance finie). La figure 9 montre comment une projection centrale se rapproche petit à petit d'une projection parallèle lorsque le centre de projection s'éloigne de plus en plus de l'objet (le centre de

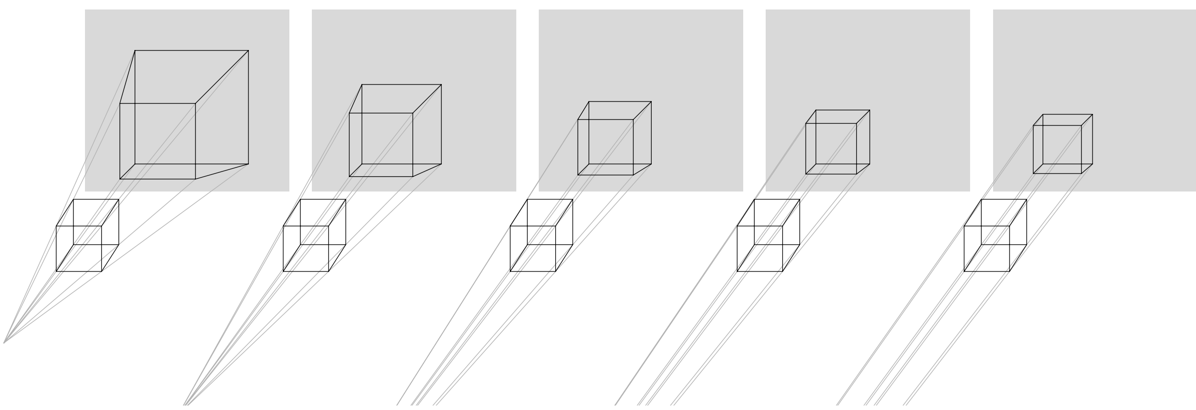

Fig. 9

la projection la plus à droite se trouve 16 fois plus loin du cube que celle de la projection la plus à gauche).

Remarquons pour finir qu'un cube en perspective parallèle comme celui de la figure 10 peut être perçu comme si sa face du dessus était visible et sa face du dessous invisible, ou l'inverse.

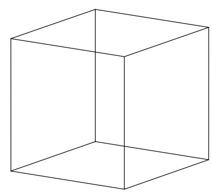

Fig. 10

Bien d'autres figures conduisent de même à deux (voire plus de deux) perceptions, avec mutation brusque et souvent involontaire de l'une à l'autre. On réduit l'ambiguïté des représentations en dessinant les arêtes cachées en trait interrompu comme nous l'avons d'ailleurs fait à la figure 2 à la page 221.

2 La perspective cavalière dans la civilisation

Des perspectives parallèles ont été pratiquées depuis l'antiquité. Elles sont traditionnellement utilisées par les Chinois et les Japonais pour représenter des meubles ou des bâtiments. Mais souvcent, ces objets font partie d'un environnement – un paysage par exemple – représenté selon d'autres conventions. En Occident la codification de ce mode de représentation est postérieure à celle de la perspective centrale. Elle aurait été utilisée particulièrement par les militaires pour dessiner des projets de fortifications ou de terrassements, d'où le nom qu'elle a également porté : perspective militaire.

L'intérêt de cette représentation, tant d'un point de vue stratégique qu'en architecture, est la conservation des parallèles et des rapports entre segments parallèles, quel que soit l'éloignement des objets représentés. Ce n'est toutefois qu'au début du XX^{e} siècle que la perspective parallèle prend sa place dans la peinture et l'architecture en Occident, notamment sous l'influence du peintre Lissitzky, de l'architecte Choisy, de l'école du Bauhaus en Allemagne ou du groupe de Stijl en Hollande (voir à ce sujet P. Comar[1996]).

Aujourd'hui, la perspective cavalière est un mode de représentation courant dans les ouvrages techniques ou scientifiques, notamment mathématiques.

Notons que certaines représentations usuelles de solides ne sont pas des projections parallèles, bien qu'elles y ressemblent. Tel est le cas de la sphère représentée à la figure 11 avec ses deux pôles et son équateur. En effet, pour qu'on voie son équateur sous forme d'une ellipse, il faut que la direction de projection ne soit pas parallèle au plan équatorial. Mais si tel est le cas, un des pôles est vu et tombe à l'intérieur du cercle, et l'autre pôle n'est pas vu. Bien que n'étant donc pas une projection parallèle, une telle représentation de la sphère est plus commode que celle qui résulterait d'une telle projection. Dessiner un pôle à l'intérieur du cercle rend difficile d'imaginer où il est dans la réalité.

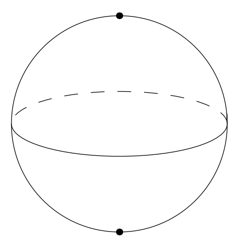

Fig. 11

Par ailleurs, comme l'a montré B. Parszyz [1989], certains traités de géométrie de l'espace contiennent des figures dont on penserait qu'elles sont des perspectives cavalières, et qui pourtant, si on les considère comme telles, sont fautives.

3 La perspective cavalière dans la réalité

Nous l'avons vu, un modèle naturel des projections parallèles est donné par les ombres au soleil. Elles soulèvent toutefois deux questions intéressantes, du fait qu'elles ne sont des projections parallèles qu'approximativement.

D'abord le soleil n'est pas situé à l'infini. Il est toutefois tellement loin de nous et des objets dont nous observons les ombres, que l'effet d'éloignement illustré par la figure 9 à la page 224 joue ici à plein. Certains soirs d'orage, on voit les rayons partir du soleil comme d'un point, et dans ces conditions ils n'ont pas l'air parallèles du tout. Mais il s'agit là d'un effet de perspective analogue à celui qui nous montre les bords d'une route converger vers un point de l'horizon. Ce n'est pas parce qu'on observe cette convergence qu'on va prétendre que les bords de la route ne sont pas parallèles !

L'autre question est que le soleil n'est pas un point, mais une énorme boule. Celle-ci est située si loin que nous l'apercevons sous un angle assez petit, mais non négligeable : un demi-degré. L'ombre projetée par le soleil ne vient donc pas d'un point, et c'est pourquoi elle a des contours pas tout-à-fait nets. On passe de l'ombre à la zone éclairée qui l'entoure en traversant une zone de pénombre d'autant plus large que l'objet est éloigné du plan où se trouve l'ombre. C'est là un fait que l'on peut vérifier simplement par une expérience.

On peut obtenir des rayons lumineux approximativement rectilignes en utilisant un projecteur de diapositive ou un rétroprojecteur. Dans les deux cas, les rayons forment un cône de lumière ; plus la source lumineuse est éloignée de l'écran, plus on s'approche de la projection parallèle (cf. la figure 9). L'ombre d'un objet pas trop grand placé près de l'écran de projection donne alors une bonne approximation d'une représentation en perspective parallèle. Il faut remarquer que si l'écran est placé perpendiculairement à l'axe du cône lumineux, ce qui est la situation habituelle, la projection est orthogonale. Pour obtenir d'autres projections, il faut varier les positions relatives du projecteur et de l'écran.

4 La perspective cavalière dans l'enseignement

Le papier quadrillé ou pointé permet de commencer à pratiquer la perspective cavalière sans en connaître explicitement les règles, ni a fortiori sans faire de lien avec une projection quelconque. L'aller-retour entre le plan et l'espace est guidé ici par le support sur lequel on dessine et par l'effort d'imagination pour retrouver dans ce que l'on dessine l'objet que l'on voit. C'est là une étape intéressante pour acquérir la faculté que l'on appelle la vision dans l'espace.

La pratique de la perspective cavalière permet d'en dégager les règles, dont la connaissance est nécessaire afin qu'elle devienne un moyen efficace de représentation.

L'apprentissage et l'utilisation de la perspective cavalière offrent des occasions naturelles de pratiquer la géométrie du plan et de l'espace, notamment les propriétés d'incidence et de parallélisme.

Parce qu'elle conserve le parallélisme et certains rapports, la perspective parallèle est un moyen commode pour faire certaines constructions de géométrie de l'espace, en tablant simultanément sur les propriétés des objets eux-mêmes et sur celles de la projection. On le fait couramment lorsqu'on cherche des sections de cubes ou d'autres polyèdres sur leurs représentations en perspective cavalière.

Une autre problématique intéressante est celle de la représentation en perspective d'objets, de polyèdres par exemple, dont les symétries ne s'accordent pas facilement avec la perspective cavalière. Il n'est pas si facile de représenter un dodécaèdre régulier en perspective... Inversement, on peut vouloir réaliser la maquette d'un objet dont on possède une ou plusieurs représentations[3]. La perspective parallèle offre aussi un moyen agréable de découvrir les ellipses comme projections parallèles d'un cercle ou comme sections de cylindres circulaires, et les ombres au soleil d'une sphère (cf. figure 12).

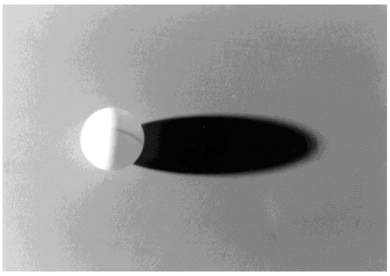

Fig. 12

Comme la perspective parallèle est un moyen particulièrement adapté à la représentation des cubes, elle est aussi un moyen efficace de représenter des objets que l'on peut « cadrer » dans un réseau de cubes. En ce sens, elle est directement en prise avec la géométrie analytique euclidienne, car au fond un repère orthonormé est équivalent à un réseau cubique que l'on peut affiner

[3] L'étude de la géométrie des cristaux offre par exemple la possibilité d'un aller retour entre de telles représentations et la construction de maquettes (voir par exemple F. Michel [1985]).

autant qu'on le souhaite. Ainsi, il paraît utile d'allier la géométrie analytique et les débuts de l'algèbre linéaire avec les représentations en perspective cavalière. Sur les réseaux cubiques, voir G. Noël[1997].

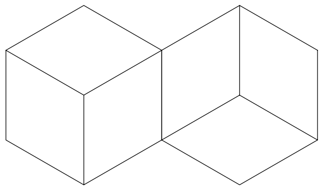

Fig. 13

Parmi les diverses problématiques qui peuvent jalonner un enseignement où la perspective cavalière trouve sa place, signalons encore les *solides impossibles*. Ce sont des dessins d'allure polyédrale qui conduisent à des contradictions. Si on accepte qu'on a voulu les représenter en perspective cavalière, on s'aperçoit qu'ils violent des théorèmes de géométrie sur l'incidence ou le parallélisme. On obtient facilement de telles figures. Par exemple, la figure 13 ne peut pas représenter deux cubes se touchant le long d'une arête. Escher a exploité dans ses gravures ce thème des figures impossibles.

Discerner ce qui fait qu'un solide est impossible – de même que déterminer ce qui fait qu'une représentation en perspective est fautive – amène à argumenter en géométrie de l'espace.

15

La perspective centrale

1 Qu'est ce que la perspective centrale ?

Comment reproduire sur un tableau ce que l'on aperçoit du paysage au travers d'une fenêtre ? On place une feuille transparente sur la fenêtre et on y dessine ce que l'on voit. Deux problèmes apparaissent tout de suite. D'abord, dès que l'on bouge un peu la tête, le paysage se déplace sur la fenêtre. Pour contourner cette difficulté, on peut choisir un repère fixe à partir duquel on regarde. Ensuite, pour pouvoir dessiner sur le papier collé à la fenêtre, il faut se placer assez près d'elle. Lorsqu'on regarde le paysage en direction de la pointe du crayon, on voit en réalité deux pointes de crayon, correspondant à deux endroits différents du paysage. Le réflexe vient tout seul : on ferme un œil. On peut alors dessiner sur la fenêtre les lignes du paysage.

La perspective centrale consiste à reproduire sur un tableau ce qu'un œil (immobile et ponctuel) verrait au travers d'une « fenêtre ». L'idée est que le tableau pourrait prendre la place de la fenêtre, l'œil n'y verrait que du feu… Ce type de représentation a les caractéristiques suivantes :

- on suppose que l'œil est un point ;
- chaque point de l'objet à représenter est relié à cet œil par un rayon visuel rectiligne ;
- chaque point de la représentation est l'intersection de ce rayon visuel avec le tableau (figure 1).

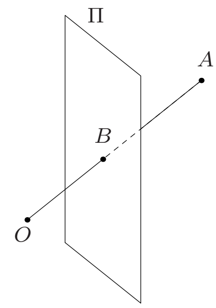

Fig. 1

Lorsqu'on dessine sur la fenêtre, on observe que certaines droites parallèles dans la réalité restent parallèles sur la représentation, et d'autres non. Dans le cas par exemple d'un carrelage à dalles carrées, on obtient souvent une représentation comme celle de la figure 2. D'une manière générale, les droites parallèles qui sont parallèles au plan de projection restent parallèles entre elles sur la représentation, et tel n'est pas le cas des autres.

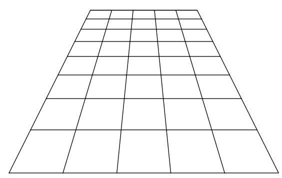

Fig. 2

Sur cette même figure, on observe également que des segments égaux ne sont pas toujours représentés par des segments égaux. Sur une même ligne horizontale, les côtés de tous les carrés sont égaux. Sur les lignes obliques qui représentent les droites perpendiculaires au plan de projection, les côtés des carrés sont

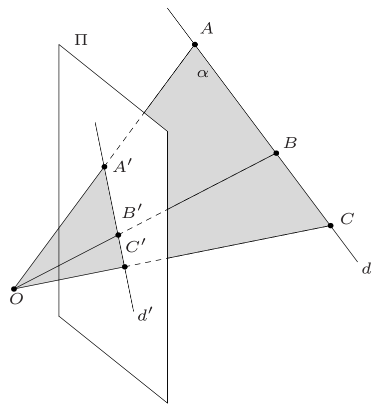

Fig. 3

tous différents. De plus, d'une ligne horizontale à l'autre, les côtés des carrés ne sont pas non plus égaux.

Ces deux propriétés – non conservation du parallélisme de certaines droites, et non conservation des égalités de longueurs, et donc des rapports, dans une même direction – distinguent ce type de représentation de la perspective cavalière.

Par contre la perspective centrale conserve l'alignement. Si des points sont en ligne droite dans l'espace, ils le restent sur la représentation. En effet, n'importe quelle droite[1] d détermine avec le centre O un plan α. La représentation de d est alors l'intersection d' de α avec le plan Π, et c'est donc une droite (figure 3). Ceci donne une manière de repérer de fausses perspectives centrales. Nous avons affirmé que la figure 2 à la page précédente est la représentation en perspective centrale d'un carrelage à base carrée. Si cela est vrai, les diagonales du carrelage qui sont alignées en réalité doivent encore l'être sur la représentation. Le lecteur peut donc vérifier notre affirmation.

Considérons un ensemble de droites parallèles qui ne restent pas parallèles sur la représentation. Si on prolonge suffisamment ces droites sur la représentation, on s'aperçoit qu'elles se coupent toutes en un même point. On peut en faire l'expérience en prolongeant côtés et diagonales des carreaux de la figure 2. Chaque point d'intersection ainsi obtenu est appelé *point de fuite*. Un tel point est l'intersection du plan Π avec la parallèle aux droites considérées, passant par le point O.

Un point de fuite est particulièrement important : c'est le *point de fuite principal*, qui correspond à la direction perpendiculaire au plan de projection. Il se trouve au pied de la perpendiculaire à ce plan menée à partir du centre O. C'est vers lui que convergent les obliques de la figure 2.

Jusqu'à présent nous avons parlé du dessin que l'on fait sur une fenêtre. Pour étudier de manière plus générale les propriétés de ce genre de projection, il est commode de remplacer la fenêtre par un plan, et de considérer les projections sur ce plan de tous les points de l'espace, à l'exception bien entendu du point O lui-même et des points du plan qui passe par O et est parallèle au plan de projection. On ne parle plus alors de perspective, mais bien de *projection centrale*. Et de fait, en généralisant ainsi la situation, on s'écarte beaucoup de ce que voit le peintre. Il n'y d'ailleurs plus de raison dans ces conditions de considérer que le plan est vertical et que le centre O est à distance de toucher du plan de projection. Néanmoins, lorsqu'on réfléchit aux projections centrales en général, autant continuer à imaginer le plan de projection vertical, car ainsi on y voit plus clair. C'est d'ailleurs ce que l'on fait spontanément.

Le passage d'un petit morceau de paysage à l'espace entier

[1] Sauf si cette droite contient le point O. Dans ce cas, les projections de tous les point de la droite se trouvent en un même point du tableau.

fait apparaître des phénomènes tout nouveaux. Regardons par exemple le parallélisme et la concourance[2], ainsi que les rapports. Le parallélisme n'est pas conservé par perspective centrale. Il ne l'est donc pas par projection centrale. Nous savons qu'un ensemble de droites parallèles – lorsqu'il n'est pas envoyé sur un ensemble de droites parallèles – est envoyé sur un ensemble de droites concourantes (c'est-à-dire qui se coupent toutes en un même point). À l'inverse, peut-on avoir un ensemble de droites concourantes de l'espace projeté sur un ensemble de droites parallèles ? Mais oui – et il faut sans doute un effort pour le voir – c'est le cas si le point de concourance des droites se trouve dans le plan contenant le point O et parallèle au plan de projection.

Ainsi, le parallélisme n'est pas conservé, mais la concourance ne l'est pas davantage. Par contre, la relation « être un ensemble de droites parallèles ou concourantes » est conservée. Pour exprimer simplement cette propriété, on décide « d'ajouter un point » à chaque droite, de telle manière que toutes les droites d'une direction aient un et un seul point en commun. Ces points sont appelés *points à l'infini*.

De la même façon, un ensemble de plans parallèles a une *droite à l'infini* en commun. Les points à l'infini d'un plan appartiennent à cette droite. La nouvelle relation d'incidence[3] ainsi définie est conservée par les projections centrales : si un ensemble de droites se coupent en un seul point (que ce soit un point « usuel » ou un point à l'infini), alors leurs projections se coupent aussi en un seul point (que ce soit un point « usuel » ou un point à l'infini).

Si les rapports ne sont en général pas conservés par les projections centrales, les *birapports* le sont. Soit quatre points alignés A, B, C et D. Choisissons un sens positif sur la droite qui les porte. Notons AB la longueur du segment $[AB]$ munie du signe $+$ si le sens de A vers B coïncide avec le sens positif sur la droite, et le signe $-$ au cas contraire.

Le birapport de ces quatre points est le quotient des rapports $\frac{DB}{DA}$ et $\frac{CB}{CA}$, ce que l'on peut écrire

$$\frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA}.$$

Si on projette ces quatre points sur un plan Π (figure 4), le birapport des quatre points A', B', C' et D' obtenus est le même :

$$\frac{D'B'}{D'A'} : \frac{C'B'}{C'A'} = \frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA}.$$

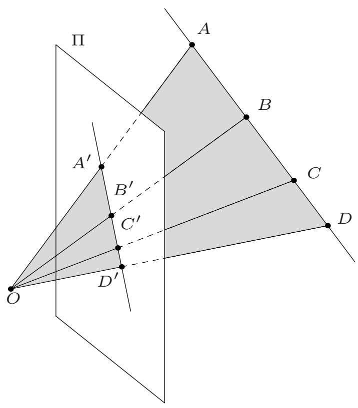

Fig. 4

[2] C'est-à-dire le fait pour des droites de passer par un même point.
[3] La relation d'incidence est celle qui détermine les positions relatives des points, droites et plans.

2 La perspective centrale dans la civilisation

Parallèlement au développement des sciences de la nature, aux efforts pour comprendre le monde et son « fonctionnement », l'approche géométrique de la perspective apparaît durant la Renaissance comme une réponse à la recherche de réalisme dans l'art de la peinture : « [...] et sache, dit Albert Dürer, que plus exactement tu approches de la nature par la voie de l'imitation, plus belle et plus artistique deviendra l'œuvre.[4] » Pour la première fois, les artistes peintres feront donc intervenir des règles techniques dans leur art. Écoutons encore Albrecht Dürer nous dire en 1525 : « [...] rien n'est plus désagréable à un esprit éclairé que la fausseté dans le tableau, même peint avec la plus grande application. Que ces peintres se complaisent dans l'erreur est l'unique raison qui les a empêchés d'apprendre l'art de la mesure, sans lequel il n'y a et il n'y aura pas de véritable artisan ». Attachés à la naissance de la perspective géométrique en peinture, on trouve entre autres les noms de Viator, Filippo Brunelleschi, Leo Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci et Albrecht Dürer.

Ainsi la perspective est née chez les peintres. Mais à partir du XVII^{e} siècle, elle est reprise par des mathématiciens comme Desargues et Pascal, et elle engendre alors par étapes en *géométrie projective*. Un nouveau chapitre de la géométrie, tout à fait différent de la géométrie d'Euclide, est ainsi ouvert. Le fait que l'initiative et les premières réalisations en soient venue des peintres et non des mathématiciens est un fait important pour qui s'intéresse à la relation entre les mathématiques et la réalité. Au XIX^{e} siècle Brianchon, Poncelet, Gergonne, Chasles, Möbius, Plücker, Steiner et von Staudt développent pleinement la géométrie projective et contribuent au mouvement de pensée qui aboutit au classement des géométries par Félix Klein (Le *programme d'Erlangen* de F. Klein [1872]).

Pendant des siècles, la perspective centrale était l'apanage des dessinateurs et des peintres. Grâce à la photographie, elles est aujourd'hui monnaie courante. Une photographie est en effet le résultat d'une double projection centrale. La première a lieu dans l'appareil photographique lui-même (lorsque l'angle de vue de l'objectif n'est pas trop grand), la deuxième dans le laboratoire où l'image sur la pellicule est agrandie pour donner l'image finale. Le cinéma est également un lieu privilégié de la perspective centrale. C'est d'ailleurs le cinéma qui a habitué l'œil contemporain aux points de vue les plus divers et aux plans de projection non verticaux (plongées, contre-plongées...).

La perspective centrale est également utilisée en informatique, où de plus en plus de programmes créent des mondes vir-

[4] A. Dürer, cité par A. Flocon et R. Taton[1990].

tuels grâce à des images de synthèse. La perspective y permet de vivre une illusion d'espace.

Outre les ambiguïtés usuelles des représentations planes, la perspective centrale offre – de par son caractère très réaliste – de grandes possibilités d'illusions. Illusions innocentes comme dans le cas de la figure 5[5] (les deux personnages ont la même taille !), ou moins innocentes lorsqu'il s'agit de tromper des clients potentiels, par exemple par une vue en perspective d'une maison, la laissant croire plus grande qu'elle ne l'est. Connaissant les règles de la perspective, on peut aussi créer des trompe-l'œil, utiles par exemple pour la réalisation de décors de théâtre. On en trouve de spectaculaires dès la renaissance.

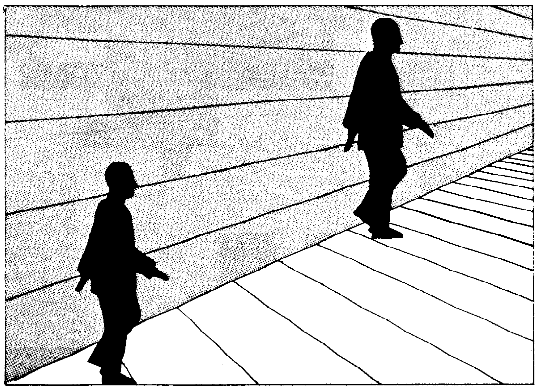

Fig. 5 : Lequel est le plus grand ?

3 La perspective centrale dans la réalité

La perspective centrale – même si c'est son objectif premier – ne reproduit pas tout à fait fidèlement la perception visuelle. Déjà la partie purement physique du processus de perception ne se base pas sur une projection centrale plane : la surface de la rétine est a peu près celle d'une calotte sphérique. De plus, les processus mentaux qui réinterprètent la sensation corrigent certains effets perspectivistes. Dans notre entourage immédiat, nous ne voyons pas la taille des objets ou des personnes se modifier lorsque nous nous en éloignons ou nous en rapprochons. Pourtant, d'un point de vue purement perspectif, les tailles perçues varient sensiblement. Cette correction n'a plus cours lorsque l'on regarde à une distance intermédiaire, ni trop proche ni trop lointaine. Il suffit de regarder une route en ligne droite pour constater que nous percevons les objets de plus en plus lointains, de plus en plus petits. Nous voyons les parallèles converger vers des points de fuite. Par contre, lorsque nous regardons dans le lointain, tout semble « s'écraser », et il ne semble plus y avoir là de perspective bien claire.

[5] Reprise de Th. Gilbert [1987].

On peut de diverses façons créer des modèles concrets de projection centrale. D'abord, nous l'avons vu, on peut dessiner sur une fenêtre. On peut aussi se passer d'une vitre en adaptant comme suit le portillon de Dürer : sur un cadre, on tend un quadrillage de fils. On regarde un objet a travers le cadre, à partir d'un œilleton. On reproduit ce que l'œil perçoit, sur un papier quadrillé.

Un autre modèle de la projection centrale est donné par l'ombre à la lampe d'un objet sur un plan. Les rayons lumineux étant rectilignes, il s'agirait bien d'une projection centrale si la lampe était ponctuelle. Mais aucune lampe ne l'est, ce qui occasionne des zones de pénombre autour des ombres. Un inconvénient de l'ombre à la lampe – mais c'était aussi le cas pour l'ombre au soleil – est que l'on n'obtient que les contours de l'objet. S'il s'agit d'un polyèdre, on peut faire disparaître l'inconvénient en choisissant le polyèdre réalisé uniquement avec des tiges.

Un dernier modèle de projection centrale est donné par la chambre noire, qui est à l'origine de la photographie. On dispose d'une boîte parallélépipédique. Au centre d'une de ses faces, on perce un petit trou, aussi appelé *sténopé*. On constitue la face opposée à l'aide d'un verre mat. On peint les autres faces intérieurement en noir mat. On voit alors se dessiner sur la face de verre une image inversée du paysage faisant face au trou. Ce modèle est toujours imparfait, car ou le trou est extrêmement petit, et il n'y pas assez de lumière, ou bien il est plus grand, mais alors la vue sur la vitre du fond se brouille. C'est pour remédier à ces deux inconvénients que les appareils photographiques sont munis d'une lentille appelée objectif. Les objectifs eux-mêmes sont d'ailleurs sources de déformations aussi. Ainsi certains objectifs dont l'angle de vue est trop grand ne donnent pas fidèlement une perspective centrale.

L'avantage de l'ombre et de la chambre noire est que, dans les deux cas, on regarde la « représentation » indépendamment de sa propre position, alors que si l'on dessine sur une vitre, seul l'œil derrière l'œilleton « voit ce qui se passe ».

4 La perspective centrale dans l'enseignement

Les ombres à la lampe et davantage encore la photographie sont des phénomènes assez importants pour que chacun en étudie au moins le principe. Il est instructif et amusant de faire pratiquer les ombres chinoises aux petits enfants. D'autre part, très jeunes ils regardent des photos, y reconnaissent les objets proches et lointains, s'habituent petit à petit, et sans bien entendu qu'il soit question d'une initiation systématique, à la convergence des parallèles et à l'existence d'une ligne d'horizon. La chambre noire est une expérience fascinante pour les enfants, et elle leur donne sans peine le premier principe de la photographie. De même, il est amusant et instructif de dessiner sur une vitre, en commençant par des objets très simples, et occupant des positions simples par rapport à l'observateur. Toutes ces expériences développent petit à petit une première base d'interprétation des images que les médias visuels apportent quotidiennement à chaque personne.

Ce n'est toutefois que durant le secondaire, et plus particulièrement dans sa deuxième partie, qu'il faut envisager d'aborder la technique de la perspective centrale de manière plus approfondie.

Un tel enseignement de la perspective centrale, et plus généralement des projections centrales, peut avoir plusieurs objectifs.

Comme pour le cas des projections orthogonales et parallèles, les projections centrales peuvent être l'occasion de pratiquer la géométrie dans l'espace et même d'en élaborer une première théorie axiomatique[6].

Même si ce type de démarche pour étudier la géométrie de l'espace est d'autant plus intéressant que les élèves pratiquent (dans des sections techniques ou artistiques) les représentations en perspective, l'étude de la perspective centrale n'est certainement pas à exclure des autres sections. Saisir l'espace, c'est aussi, nous l'avons dit, mieux comprendre les multiples représentations qui nous entourent quotidiennement. Dans un monde d'images, apprendre à les analyser – et le cas échéant à analyser des sources d'illusions – donne aux élèves une plus grande liberté de s'y mouvoir.

Saisir l'espace, c'est aussi pouvoir se poser et éventuellement répondre à des questions qui concernent directement notre perception de l'espace. En voici une, reprise de Th. Gilbert [1987] : peut-on déterminer à partir d'une photo ou d'une peinture si une place est bien rectangulaire, par exemple la place Saint-Marc à Venise ?

Les projections centrales offrent également des possibilités d'approche intuitive de phénomènes mathématiques qui peuvent paraître difficiles. Th. Gilbert [1987] pose par exemple la question de la vue en perspective d'une sinusoïde. Quelle est la représentation en perspective sur le plan Π d'une sinusoïde vue du point O (figure 6 à la page suivante) ? La réponse est visualisée à la figure 7. Il s'agit d'une courbe dont l'équation est $x = ay \sin \frac{b}{y}$ (a et b sont des paramètres qui dépendent des positions relatives de O et du plan de projection).

[6] Une telle démarche se retrouve dans la brochure de G. Cuisinier et al. [1995], à partir de l'étude des ombres à la lampe.

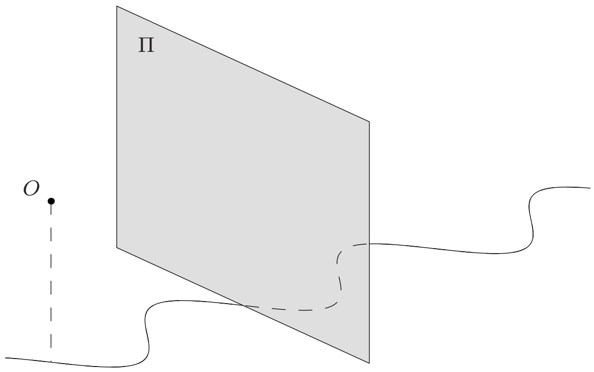

Fig. 6

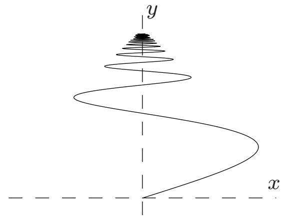

Fig. 7

Pour finir, l'étude de la perspective centrale ou des ombres à la lampe dans l'enseignement secondaire peut être – et c'est sans doute un passage quasiment obligé si l'on souhaite le faire – l'occasion d'aborder, ne fut-ce qu'un peu, la géométrie projective[7].

[7] On trouve par exemple une proposition pour une telle introduction chez I. Soleil [1991].