Constructions

1 Combien de terre pour modeler un cube?

De quoi s'agit-il?

Déterminer le poids d'un cube d'un centimètre cube. Déterminer ensuite la quantité de terre nécessaire pour modeler un cube dont le volume est donné.

Enjeux

Faire le lien entre le volume d'un objet et son poids :

- deux objets de même volume faits d'un même matériau ont le même poids;
- la proportionnalité des grandeurs volume et poids pour un même matériau permet d'utiliser le poids pour mesurer un volume.

Travailler la notion d'unité de volume.

Compétences. – Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Faire des estimations en utilisant des étalons familiers et conventionnels. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.

De quoi a-t-on besoin?

De la terre à modeler (argile, terre glaise,...). Des couteaux pour couper la terre (des couteaux ordinaires suffisent).

Des règles graduées.

Des balances de précision, par exemple des pèse-lettres.

Comment s'y prendre?

Qu'évoque l'expression « centimètre cube » dans la tête de chacun ? Quelles sont les images familières qui s'y rapportent ? Après un moment d'échange à ce sujet, l'enseignant pose la question suivante :

Que pèse un cube en terre dont le côté mesure un centimètre?

Les élèves réalisent un cube en terre d'un centimètre de côté. Ils essaient de deviner son poids en le soupesant. Ils le pèsent ensuite afin de vérifier leur estimation.

Un pèse-lettres ordinaire donne un résultat à un ou deux grammes près, ce qui est une précision insuffisante. On s'en aperçoit en voyant la balance donner des poids identiques pour des cubes sensiblement différents. Il faut donc trouver un autre moyen pour mesurer le poids du cube de manière précise.

Une manière de faire est de modeler un cube plus grand et de diviser ensuite son poids par le nombre de cubes d'un centimètre de côté qu'il contient. Chaque élève modèle avec le plus de précision possible un cube de 3 ou 4 cm de côté. Chacun pèse son cube et note le résultat. Ceux qui ont terminé plus vite modèlent un deuxième cube, dont le côté mesure 4 cm (il en faut deux, que l'on met de côté pour la suite de l'activité).

Il reste alors à trouver le nombre de cubes d'un centimètre de côté contenus dans chacun des cubes. Pour cela, les élèves découpent les cubes en cubes d'un centimètre de côté. Par exemple, ceux dont le cube a un côté de trois centimètres le découpent en trois tranches, chaque tranche en trois prismes à base carrée, chaque prisme en trois cubes. Les élèves comptent alors le nombre de petits cubes. Ils font la division pour trouver le poids d'un cube d'un centimètre de côté. On compare les résultats. Ceux-ci devraient être égaux à 0,2 grammes près (ce qui correspond environ à une différence de 2 mm sur chaque côté du grand cube).

L'enseignant revient à la notion de volume :

Si l'on aplatit le cube ou si l'on modifie tout à fait sa forme, a-t-on toujours le même volume ? Pourquoi ? Comment le vérifier ?

Certains enfants ne sont pas encore au clair avec l'invariance du volume relativement aux déformations de l'objet.

La manipulation de la terre permet d'expérimenter cette invariance et sert de support au raisonnement. Pour vérifier expérimentalement que, quand on déforme un cube, il conserve le même volume, on peut procéder comme suit. On prend les deux cubes de 4 cm de côté que l'on avait mis de côté. On remplit deux verres identiques avec de l'eau, de sorte que les niveaux d'eau soient les mêmes. On déforme un des deux cubes. On plonge les deux modelages dans l'eau et l'on constate que les niveaux ont changé de la même façon. Le volume des deux objets est donc le même.

Cette invariance du volume vis-à-vis des déformations est-elle vraie pour tout les matériaux ? Les élèves trouveront eux-mêmes des matériaux qui peuvent se « dégonfler » lorsqu'on les manipule : la barbe à papa en est un exemple, ou encore la pâte à pain qui a levé sous l'effet de la levure ou du levain. Lorsqu'on la pétrit, elle diminue de volume. Pour que le volume reste le même lorsqu'on le déforme, il faut que le matériau soit incompressible, ce qui est le cas de la terre à modeler (si on ne lui laisse pas le temps de sécher).

On peut maintenant aborder la dernière partie de cette activité :

Modeler un cube de volume déterminé.

Comment modeler un cube – ou n'importe quel objet en terre – dont le volume est par exemple de 20 cm³ ? Une manière de le faire est de passer

par le poids. Puisqu'on connaît assez précisément le poids d'un cube de 1 cm³, on connaît celui d'un cube de 20 cm³ : il suffit de multiplier ce poids par 20. En utilisant la balance, on détermine la quantité de terre dont c'est le poids. On peut alors en faire un cube ou un autre objet : son volume restera le même.

Échos des classes

Voici quelques constatations générales :

- les estimations de poids ou de grandeur donnent des résultats assez éloignés de la réalité, ce qui montre qu'il est utile d'en faire;
- il n'est pas évident pour tous les enfants que pour passer du poids de n cubes au poids d'un cube, il suffit de diviser le poids total par n;
- beaucoup d'élèves hésitent encore sur l'invariance du poids après déformation; certains repèsent leur objet après transformation.

Prolongements possibles

Recommencer l'activité avec un matériau ayant un poids spécifique différent. Aborder la notion de poids spécifique en comparant les deux tableaux de proportionnalité obtenus pour les deux matériaux.

Établir le cube d'un centimètre de côté comme unité de volume. Découvrir la formule du volume des cubes, des parallélépipèdes rectangles.

- Peut-on prévoir le nombre de cubes d'un centimètre de côté que l'on obtiendrait en construisant et en découpant un cube de 5 cm de côté, de 6 cm, . . . ?
- Combien de cubes d'un centimètre de côté sont-ils contenus dans un parallélipipède dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm? On peut modeler le parallélépipède et le découper comme on l'a fait pour les cubes.
- Comment prévoir le nombre de cubes pour un parallélipipède rectangle quelconque ?
- Passer ensuite à des dimensions qui ne sont plus entières (2,5 cm sur 3,2 cm sur 3 cm...).

Commentaires

Nous avons choisi d'utiliser l'expression « poids » plutôt que « masse ». Le concept de « masse » est beaucoup plus abstrait que celui de « poids » et la distinction entre les deux n'est pas facile. On peut la négliger sans dommage dans une première approche des grandeurs.

2 Modeler des cylindres et des prismes à base carrée

De quoi s'agit-il?

Modeler trois cylindres de même volume dont la hauteur est chaque fois multipliée par deux. Modeler de la même manière trois prismes à base carrée.

Enjeux

Faire le lien entre le volume d'un objet et son poids :

- deux objets de même volume faits d'un même matériau ont le même poids;
- la proportionnalité des grandeurs volume et poids pour un même matériau permet d'utiliser le poids pour mesurer un volume.

Expérimenter la relation non linéaire entre le côté de la base carrée d'un prisme – ou le rayon de la base d'un cylindre – et leur volume (pour garder le même volume lorsqu'on double la hauteur, ce n'est pas par deux qu'il faut diviser le côté de la base ou le rayon).

Compétences. – Voir compétences à la page 124. En outre : Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin?

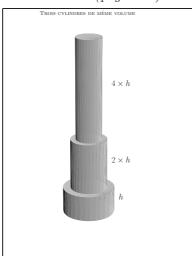
De la terre à modeler (argile, terre glaise,...), des balances, des fiches de travail (fiches 12 et 13, pages 212–213).

Prérequis. - L'activité précédente.

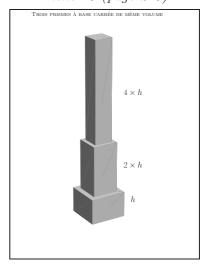
Comment s'y prendre?

L'enseignant présente le travail à réaliser à partir d'une représentation en perspective (fiche 12).

Fiche 12 (page 212)



Fiche 13 (page 213)



Les enfants doivent analyser les données et énoncer le problème. L'enseignant synthétise ensuite les consignes. Il s'agit de modeler avec toute la terre reçue trois beaux cylindres de même volume qui puissent tenir en équilibre l'un sur l'autre. Les solides serviront dans l'activité suivante et il importe que leur faces et dimensions soient les plus exactes possible. Le premier cylindre est celui du dessous. Le deuxième doit avoir une hauteur double du premier, et le troisième une hauteur quadruple du premier.

Les élèves travaillent par équipe de trois. L'enseignant donne à peu près la même quantité de terre aux différentes équipes, car cela permettra de faire des comparaisons. Les élèves partagent avec précision toute la terre reçue en trois parties de même volume. Des balances sont à leur disposition, mais l'enseignant ne précise pas qu'il faut les utiliser.

Les enfants analysent ensuite la deuxième situation (fiche 13). Si nécessaire, l'enseignant attire l'attention sur la forme carrée de la base et la disposition des parallélépipèdes les uns par rapport aux autres. Comme pour les cylindres, les enfants réalisent les modelages par équipes de trois, avec toute la terre donnée. L'enseignant demande le plus de précision possible dans le modelage : des faces lisses, les plus planes possibles (la table est un support pour y arriver), des plans parallèles et perpendiculaires au juger.

La classe observe les modelages et constate leur variété. Comme il n'y a pas de consigne précise quant aux dimensions du solide du dessous, ceux-ci sont différents d'un groupe à l'autre. Les différences sont d'autant plus manifestes que les hauteurs doublent à chaque étage.

Échos des classes

L'activité de modelage des cubes a bien préparé les élèves à la réalisation des cylindres et des prismes de même volume. Ils ont évoqué l'invariance qu'ils avaient constatée quant au poids et au volume.

L'analyse du dessin en perspective (situation de départ) n'a pas posé de problème particulier. Les élèves ont compris tout de suite ce qu'ils devaient faire.

Plusieurs stratégies ont été utilisées pour partager la terre. Certains l'ont partagée de manière approximative. L'enseignant a dû intervenir en leur demandant comment ils pouvaient être sûrs que les trois parts avaient le même volume. Ils ont alors pensé aux balances et ont pesé chaque morceau. Ils ont retranché l'excédent de manière à arriver à un poids identique pour chaque part.

D'autres ont pesé la terre reçue et ont divisé la mesure en trois. Pour se faciliter la tâche, certains sont trouvé l'astuce suivante : ils ont prélevé une partie de la terre pour obtenir un poids qu'ils étaient capables de partager facilement en trois, par exemple 600 grammes. L'enseignant s'en est rendu compte et leur a demandé d'utiliser toute la terre reçue.







Fig. 2

Le modelage des cylindres a donné de bons résultats (voir figure 1 à la page précédente). Les élèves se sont servis de la table pour rouler la pâte et aplatir les bases. Ils ont utilisé leur règle graduée pour mesurer les hauteurs. Certaines équipes ont organisé leur travail en fixant au départ les trois hauteurs et chacun a modelé sa part. D'autres ont modelé les cylindres l'un à la suite de l'autre en faisant des rectifications en fonction du premier modelage terminé. Ces modifications ont parfois déformé les cylindres. En effet, les bases avaient tendance à se creuser lorsqu'ils allongeaient le cylindre et à s'évaser lorsqu'ils tapaient la base trop fort sur la table. Par ailleurs si le cylindre du dessous était trop haut, les suivants devenaient si fins qu'ils ne restaient pas rigides. Dans ce cas, pour ne pas devoir tout recommencer, les élèves ont remodelé complètement le cylindre le plus haut (celui du dessus) pour pouvoir le mettre en dessous.

On peut faire les mêmes observations pour le modelage des prismes, à l'exception d'une difficulté pour obtenir des bases carrées. Il n'était plus possible de rouler la terre pour allonger le prisme, il fallait taper successivement chaque face latérale sur la table, sans en oublier au risque d'obtenir des bases rectangulaires. Néanmoins, les élèves semblaient déjà familiarisés avec le maniement de la terre et les modelages ont été terminés plus rapidement. Le parallélisme des faces était bien rendu et l'assemblage souvent stable (voir figure 2 à la page précédente).

3 Dessiner les vues du dessus et de face des prismes

De quoi s'agit-il?

Dessiner les projections orthogonales des tours construites avec les prismes lors de l'activité précédente.

Enjeux

Exercer les représentations à partir d'une situation vécue.

Explorer de manière plus précise les rapports de grandeur entre les trois prismes, entre les bases et les hauteurs.

Compétences. – Tracer des figures simples. Connaître et énoncer les propriétés des diagonales d'un quadrilatère. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments en vraie grandeur. Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.

 $\begin{array}{ccc} De \ quoi \ a\text{-}t\text{-}on \\ besoin \ ? \end{array}$

Une règle, une équerre, un crayon et une gomme.

Prérequis. – L'activité précédente. L'activité Des solides vus de tous les côtés (page 113), où l'on se met d'accord sur les termes vue du dessus et vue de face.

Comment s'y prendre?

Voici la consigne :

Dessiner les vues du dessus et de face de la tour construite avec des prismes modelés.

La solution la plus élémentaire consiste à prendre sur la tour toutes les mesures nécessaires au dessin des deux vues. Mais cette méthode est très imprécise et aurait pour résultat un vague croquis au lieu du dessin attendu. L'idée est plutôt de prendre les mesures nécessaires au dessin d'un des prismes et de retrouver, à partir de celles-ci, les dimensions des autres prismes.

Supposons avoir pris les dimensions du prisme du dessous. On sait que le prisme du milieu est deux fois plus haut. Comment déterminer la largeur de sa base? On peut imaginer transformer le prisme du dessous pour obtenir le prisme du milieu. En effet, ils ont le même volume et sont constitué de la même quantité de terre. Pour avoir un prisme dont la hauteur est deux fois plus grande, il suffirait de découper le prisme du dessous en deux parties identiques et d'ensuite les superposer. Imaginer cela permet de répondre à la question : si la hauteur est doublée, qu'advient-il de la base puisqu'on veut garder le même volume : la base doit être partagée en deux parties égales. Mais alors comment la dessiner en conservant sa forme carrée?

Cette question est un problème en tant que tel et a peut-être déjà été traitée auparavant¹. Sinon c'est l'occasion de le faire. On peut laisser les enfants chercher concrètement une solution à ce problème par découpage et recomposition du carré. Les figures 3 et 4 montrent deux solutions à la question.





Fig. 3









Fig. 4

Ces deux solutions ne sont pas les seules. De plus le chemin pour y parvenir peut être différent d'un enfant à l'autre. Une possibilité est de découper le carré de départ en deux et de vouloir transformer cette moitié en un carré. Les deux solutions montrées ci-dessus découlent alors de partages en deux selon une diagonale dans le premier cas (figure 5 à la page suivante) et selon une médiane dans le deuxième (figure 6).

 $^{^1}$ Voir par exemple les activités proposées dans $\it Couper$ en deux, c'est bête comme chou ! Voire (C. De Block-Docq et N. Rouche [1996]).

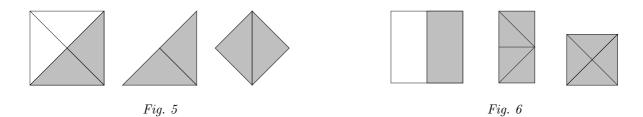
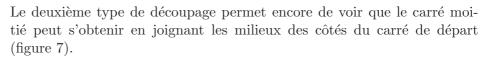




Fig. 7



Pour trouver le côté de la base du prisme du dessus, on peut recommencer le même découpage, ou bien l'on peut penser de suite au fait que, puisque ce prisme est quatre fois plus haut que celui du dessous, sa base sera quatre fois plus petite. Partager un carré en quatre carrés ne pose aucun problème : il suffit de diviser son côté par deux.

Tout ceci permet de comprendre pourquoi les prismes peuvent être disposés comme à la figure 8 : on tourne les prismes d'un huitième de tour chaque fois. (Ce type de disposition se trouve également sur la photo de la figure 2 à la page 128.)

Tout est maintenant en place pour dessiner les vues du dessus et de face. Commençons par la vue du dessus et, parce que c'est plus facile, faisons celle de la tour où les prismes sont disposés comme à la figure 8. Il suffit de dessiner le premier carré (figure 9), de joindre les milieux des côtés une première fois (figure 10) et de recommencer avec le nouveau carré (figure 11).

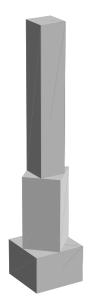


Fig. 8

Fig. 9



Fig. 10



Fig. 11

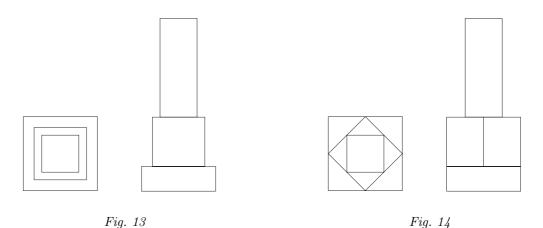
Si on souhaite avoir la vue du dessus lorsque les prismes sont disposés comme sur la fiche de départ, il faut encore faire tourner le carré du milieu d'un huitième de tour. Une manière de le faire est d'utiliser les diagonales et de se servir d'un compas comme à la figure 12.





Fig. 12

La vue de face ne devrait pas poser trop de problème si ce n'est de centrer les faces des prismes successifs. Les vues de haut et de face sont représentées à la figure 13. La figure 14 reprend les vues de haut et de face lorsque les prismes sont posés en les tournant à chaque étage d'un huitième de tour.

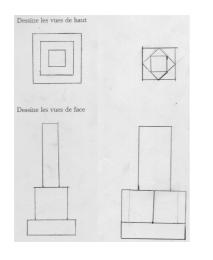


Échos des classes

Dans la classe témoin, l'utilisation des instruments n'a pas été spontanée, ce qui a engendré beaucoup d'imprécision dans les dessins.

Le premier exemple (figure 15) est celui d'un élève qui s'en est bien sorti, comme quelques-uns des 25 enfants de la classe (certes pas une grande proportion!). Il nous a semblé que sa démarche de résolution était bien pensée et qu'il maîtrisait plus ou moins bien ses dessins.

Neyla (figure 16) a été trop vite dans les dessins des assemblages vus de haut et de face où, comme la majorité des élèves, elle n'a pas respecté les rapports entre les surfaces.





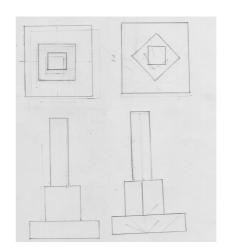
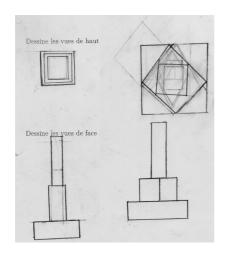


Fig. 16

De la même manière, Thierry (figure 17 à la page suivante) n'a pas fait preuve de beaucoup de soin et de précision dans ses tracés.

Enfin, Eda (figure 18) n'a manifestement pas regardé l'assemblage réel de face et de haut. On remarque des disproportions flagrantes entre les prismes.



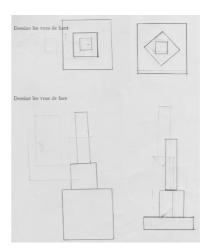


Fig. 17

Fig. 18

4 Développements

De quoi s'agit-il?

Trouver et construire des développements de pyramides, de prismes et de parallélépipèdes.

Enjeux

Développer l'imagination spatiale par l'aller-retour entre le développement et le solide.

Exercer l'habileté manuelle.

Manipuler les instruments de dessin, notamment utiliser le compas pour reporter des longueurs.

Construire aux instruments des carrés et des triangles isocèles.

Compétences. – Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Tracer des figures simples. Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.

De quoi a-t-on besoin?

Des solides en bois (un par banc). Des instruments de dessin. Du papier et du carton. Du papier collant.

Prérequis. – Pouvoir tracer des angles droits avec une équerre et des cercles avec un compas.

Activité Une approche des développements à la page 52 de Construire et représenter. Un aspect de la géométrie de 2 ans et demi à 10 ans.

Comment s'y prendre?

Pyramides à base carrée. – Le premier solide que les enfants ont à construire est une pyramide droite à base carrée, solide relativement simple qui possède deux types de faces bien distinctes : une base, carrée, et quatre faces latérales, triangles isocèles tous identiques.

Le professeur distribue une pyramide par banc et donne la consigne :

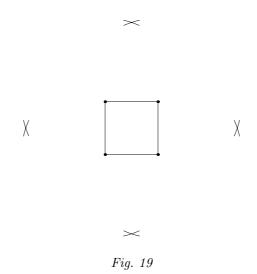
Il s'agit pour chaque élève de reproduire en carton la pyramide qu'il a reçue. Il doit le faire d'une seule pièce.

On pose comme défi supplémentaire de ne pas contourner les faces.

Les élèves essaient de prévoir comment disposer les différentes faces les unes par rapport aux autres sur une feuille de papier pour avoir un développement de la pyramide. Un moyen de le découvrir consiste à découper la pyramide, en imagination, et à faire pivoter les faces latérales. La pyramide réelle est là pour soutenir l'imagination. Ils dessinent, à main levée, un premier projet. L'important ici est la forme globale du développement, la disposition des différentes faces et non la précision du dessin.

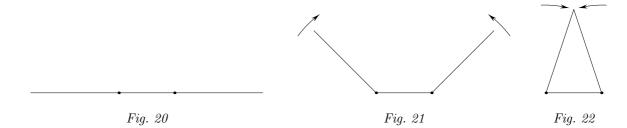
Une fois le premier projet réalisé, les élèves dessinent le développement qu'ils ont trouvé de manière précise aux instruments. Voici une manière de le faire :

- On relève sur la pyramide la dimension d'un côté de la base. On dessine deux angles droits aux extrémités de ce côté avec l'équerre, et l'on reporte avec le compas la même longueur sur les deux perpendiculaires obtenues.
- Construire les triangles isocèles peut se faire de manière très économique. On relève la dimension des côtés égaux de n'importe quelle face triangulaire de la pyramide. On fixe l'ouverture du compas à cette dimension, ce qui permet de terminer le développement en traçant huit petits arcs de cercle (figure 19).



Voici une manière d'aider les élèves à comprendre la construction du triangle isocèle. On dispose trois bâtonnets dont deux ont la même longueur, comme à la figure 20 à la page suivante, et on les « referme »

comme à la figure 21 pour arriver au triangle isocèle (figure 22). Ce que l'on fait avec le compas, c'est reproduire ce mouvement.



Les élèves font d'abord le développement sur une feuille de papier, ce qui leur permet de vérifier qu'il convient. Ensuite, ils le réalisent sur du carton². Le développement ressemblera sans doute à celui de la figure 23.

Autres solides. — On peut poursuivre en proposant aux élèves de construire un prisme à base triangulaire. Le choix de ce solide est motivé par la différence de forme entre les bases et les faces latérales, ce qui facilite la perception du développement. De plus, il est important, pour développer l'imagination spatiale des élèves, de ne pas se contenter de développer des cubes et des parallélépipèdes. La même méthodologie peut être appliquée que pour la pyramide.

On peut terminer par la réalisation de cubes, de parallélépipèdes, tétra-èdres, . . .

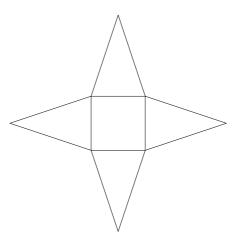


Fig. 23

Contexte de cette activité. – La réalisation de belles boîtes est un objectif suffisant en soi. Toutefois, elle a évidemment tout à fait sa place à l'intérieur d'un projet plus vaste, par exemple la construction d'une maquette d'un quartier ou de l'école, de boîtes pour contenir un cadeau...

² Si on souhaite construire la pyramide sans devoir mettre de papier collant à l'extérieur, il faut ajouter des languettes pour pouvoir coller les différentes faces les unes aux autres. Il vaut mieux alors ne pas utiliser de carton : l'expérience montre que la colle à papier ne prend pas suffisamment vite pour que les languettes adhèrent et maintiennent la forme de la boîte à construire.

Prolongement possible

L'enseignant peut poser le défi suivant aux élèves qui auraient terminé leur travail plus rapidement que les autres.

On donne un carré et quatre triangles isocèles identiques, avec une base de même longueur que le côté du carré. Est-il toujours possible de construire avec ces cinq formes une pyramide à base carrée ?

Commentaires

Pourquoi laisser les enfants chercher eux-mêmes le développement ? Une autre possibilité serait de partir d'un solide, réalisé par exemple avec des polygones articulés, de l'ouvrir et de découvrir ainsi un ou des (éventuellement tous les) développements des solides choisis.

L'objectif principal du travail avec les développements n'est pas leur étude pour ellemême, mais l'exercice de l'imagination spatiale. Essayer de prévoir, à partir du solide, comment ajuster les faces, contribue à cette imagination.

Faire dessiner à main levée un projet de développement a pour but de permettre aux élèves de se concentrer sur cette imagination, sans avoir à se confronter, en même temps, aux difficultés techniques d'un dessin précis. On essaie ainsi d'éviter le conflit entre vision globale et exigence de précision.

L'utilisation des instruments pour dessiner le développement avant de construire un solide n'est pas gratuite. Pour que les différentes parties du solide s'ajustent bien, il faut être précis. Pour que le résultat soit esthétique, il est vraiment préférable d'utiliser du papier ou du carton sans quadrillage.

Si une certaine familiarisation avec les instruments a été mise en prérequis, c'est pour ne pas alourdir cette activité-ci. Si les élèves devaient se consacrer en même temps à cet apprentissage, il est à craindre qu'ils se découragent avant d'arriver à un résultat satisfaisant. Le dessin de figures géométriques est un contexte suffisamment riche en lui-même pour exercer la manipulation des instruments (voir par exemple C. Hameau [1996]).

5 Des pyramides aux cônes

De quoi s'agit-il

À partir de développements de pyramides droites, découvrir le développement d'un cône droit, et le construire. (La figure 24 en montre quelques exemples.)

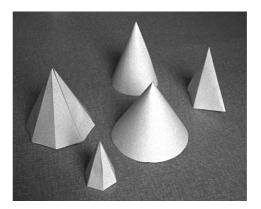


Fig. 24

Enjeux

Le développement du cône droit. La proportionnalité entre la circonférence et le rayon d'un cercle.

La construction de polygones régulier. L'utilisation du rapporteur et des instruments de dessin.

Compétences. – Voir compétences à la page ??. En outre : Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations. Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.

De quoi a-t-on besoin?

Des pyramides droites et des cônes en bois. Des instruments de dessin. Un rapporteur. Les fiches 14 à 20 (pages 214–220).

Prérequis. – Avoir déjà réalisé le développement d'une pyramide droite à base carrée (voir l'activité ?? à la page ??). Manipuler le compas. Tracer des parallèles. Connaître la relation entre la circonférence et le rayon d'un cercle.

Comment s'y prendre?

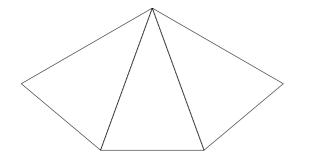
La question au centre de cette activité est :

Comment développer un cône ?

Compléter des développements. – L'enseignant donne aux élèves les parties « latérales » de développements de pyramides. Les élèves doivent en construire les bases, qui sont des polygones réguliers. L'important est ici de trouver les bases et non de réaliser des développements en un seul tenant. La construction peut donc se faire sur une autre feuille de papier. Cela permet de travailler sur des figures relativement grandes, ce qui est plus facile.

Les développements à compléter sont tous inscrits dans un arc de cercle dont l'angle au centre vaut 120° et le rayon 15 cm. Les raisons de ce choix – qui n'est pas gratuit – apparaîtront clairement à la fin de l'activité. Il est inutile d'attirer ici l'attention des élèves sur ce fait.

L'enseignant commence par donner les développements latéraux d'une pyramide à base triangulaire et d'une pyramide à base carrée (figure 25 à la page suivante).



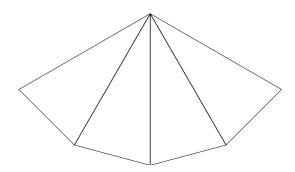
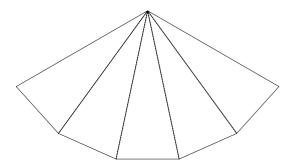


Fig. 25

La question revient à construire un triangle équilatéral et un carré dont on connaît le côté. Pour le triangle équilatéral, deux traits de compas suffisent. L'équerre et le compas permettent de construire le carré. Le compas est utilisé ici comme un instrument permettant de reporter des longueurs sans avoir à mesurer.

Les deux pyramides suivantes ont cinq et six faces latérales (figure 26).



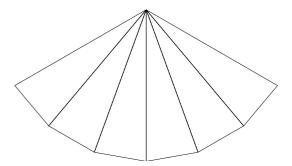


Fig. 26

La construction de la base hexagonale ne devrait pas poser de difficulté. Si les élèves ne la connaissent pas, c'est l'occasion de l'apprendre. Pour construire un pentagone régulier dont le côté est donné, l'enseignant peut proposer la méthode suivante.

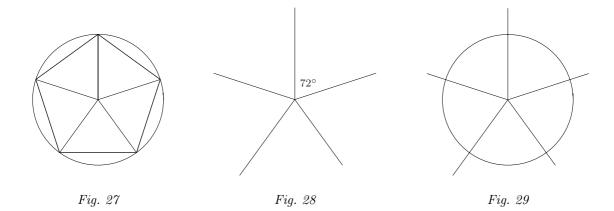
Construire un polygone régulier de côté donné. – Commençons par un problème plus simple, en ne nous préoccupant pas de la longueur du côté :

Comment construire un pentagone régulier ?

Regardons un pentagone déjà construit dans un cercle (figure 27 à la page suivante). Les rayons qui rejoignent les sommets du pentagone ont été tracés. On observe que les angles entre ces rayons sont tous égaux. Puisqu'il y en a cinq, leur mesure vaut $\frac{360^{\circ}}{5}$, c'est-à-dire 72°.

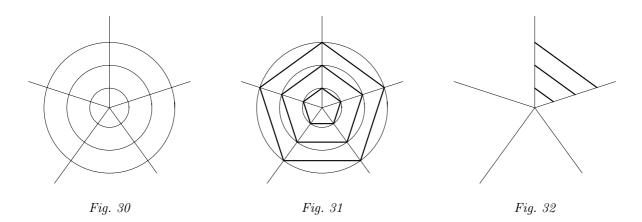
Pour construire un pentagone, on peut commencer par tracer les rayons qui partent du centre, en s'aidant d'un rapporteur (figure 28). Il suffit alors

de tracer un cercle pour avoir les sommets d'un pentagone régulier (figure 29).



Comment construire un pentagone régulier dont le côté est donné ?

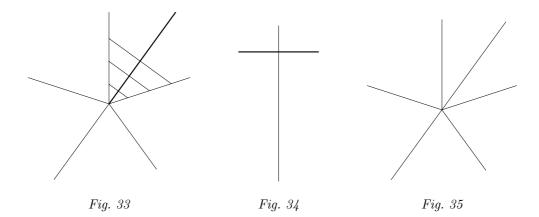
On observe que plus le rayon du cercle que l'on trace est grand, plus grand est le côté du pentagone obtenu (figures 30, 31 et 32).



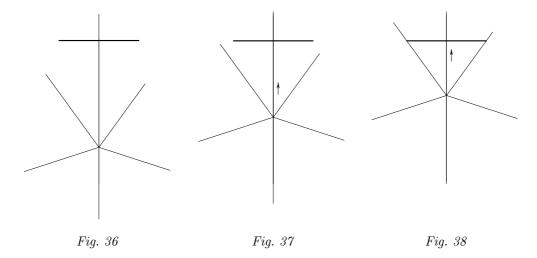
Reprenons la figure 32, qui est extraite de la figure 31, et traçons, par le centre, la perpendiculaire aux trois côtés de pentagone qui y sont dessinés (figure 33 à la page suivante). Cette droite possède les propriétés suivantes :

- elle est perpendiculaire à tous les côtés de pentagone que l'on pourrait tracer (aux côtés qui se trouvent dans cet angle bien sûr) ;
- elle passe par les milieux de ces côtés ;
- elle coupe l'angle entre les deux rayons en deux angles égaux ;
- elle se trouve dans le prolongement d'un autre rayon.

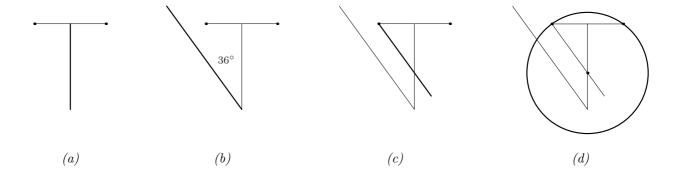
Voici une petite manipulation qui se base sur ces propriétés et qui permet de mieux comprendre la construction qui va être proposée. Dessinons sur une feuille de papier le côté du pentagone à construire et traçons par son milieu une perpendiculaire (figure 34). Sur une feuille transparente, dessinons cinq rayons ayant entre eux un angle de 72° et prolongeons l'un d'eux de l'autre côté du centre (figure 35).



Plaçons le transparent sur la feuille de papier en faisant coïncider le rayon prolongé avec la perpendiculaire au côté donné (figure 36). En déplaçant le transparent le long de la droite commune (figure 37), nous trouvons le bon endroit où le placer (figure 38).

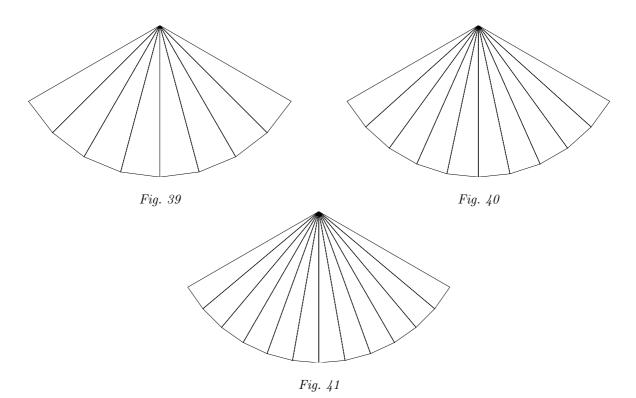


On reproduit cela aux instruments, en ne traçant que les traits absolument nécessaires :



- (a) On trace la médiatrice du côté.
- (b) Par un point de la médiatrice, on trace une droite qui forme la moitié de l'angle au centre du polygone régulier choisi (36° pour un pentagone).
- (c) Par une des extrémités du côté on trace la parallèle à cette droite.
- (d) Le point de rencontre entre cette parallèle et la médiatrice donne le centre du cercle dans lequel est inscrit le polygone.

Les élèves complètent encore le développement d'une pyramide dont la base possède plus de côtés (8, 10 ou 12 ; voir figures 39 à 41). L'enseignant répartit les trois développements entre les élèves.



Construction des pyramides. – Les élèves disposent maintenant des développements de pyramides dont la base possède 3, 4, 5, 6, 8, 10 et 12 côtés. Pour construire les pyramides, la classe se répartit le travail : chaque élève ne construit qu'une seule pyramide.

On expose les pyramides obtenues.

Construction d'un cône. – L'enseignant attire l'attention des élèves sur les caractéristiques communes de tous les développements réalisés :

- L'angle au sommet des parties latérales des développements de pyramide proposés est toujours le même : 120°.
- Les parties latérales de ces développements sont constituées de triangles isocèles. La longueur des deux côtés égaux est la même pour tous les développements : 15 cm.

L'observation des pyramides et de leur développement devrait permettre aux élèves de faire, avec l'aide de l'enseignant, les constatations suivantes :

- Plus la base d'une pyramide à de côtés, plus son développement latéral et sa base sont « arrondis ».
- Pour avoir un cône, il faudrait que la partie latérale du développement soit tout à fait arrondie, et que la base soit un disque.
- Si on augmente le nombre de côtés de la base de la pyramide, la partie latérale se rapproche d'une partie de disque dont l'angle au centre vaut 120° et dont le rayon vaut 15 cm. Le développement latéral du cône sera donc une portion de disque. Pour le vérifier, il suffit d'en construire un et de constater que cela fonctionne, en collant l'un contre l'autre les deux bords de cette portion.

Il reste à construire le disque qui servira de base à ce cône. On peut essayer d'en mesurer le rayon, mais ce n'est pas facile d'être précis. Voici une autre manière de le trouver. Nous venons de voir que la partie latérale est une portion de disque dont l'angle au centre vaut 120° et le rayon 15 cm. L'arc de cercle correspondant vaut donc le tiers de la circonférence du cercle de rayon 15 cm. Sa longueur vaut

$$\frac{2 \times 3, 14 \times 15}{3}$$
 cm = 31, 4 cm.

La base est un disque dont la circonférence doit avoir la même longueur que l'arc de cercle qui délimite la partie latérale du développement. Si r est le rayon de cette base, on doit donc avoir

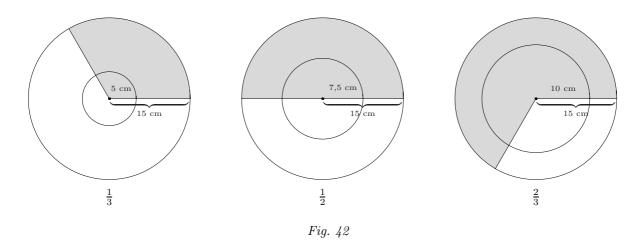
$$2 \times 3, 14 \times r \text{ cm} = 31, 4 \text{ cm}.$$

Ce n'est possible que si le rayon r vaut 5 cm.

Les élèves terminent alors le cône en collant la base à la partie latérale. L'enseignant leur propose de construire d'autres cônes. On peut regrouper dans un tableau les informations utiles pour réaliser plusieurs développements de cônes.

Angle du développement latéral	Fraction du disque	Circonférence de la base	Rayon de la base
60°	$\frac{1}{6}$	$\frac{94.2 \text{ cm}}{6} = 15.7 \text{ cm}$	$\frac{15 \text{ cm}}{6} = 2.5 \text{ cm}$
90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{94,2 \text{ cm}}{4} = 23,55 \text{ cm}$	$\frac{15 \text{ cm}}{4} = 3,75 \text{ cm}$
120°	$\frac{1}{3}$	$\frac{94.2 \text{ cm}}{3} = 31.4 \text{ cm}$	$\frac{15 \text{ cm}}{3} = 5 \text{ cm}$
180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{94.2 \text{ cm}}{2} = 47.1 \text{ cm}$	$\frac{15 \text{ cm}}{2} = 7.5 \text{ cm}$
240°	$\frac{2}{3}$	$\frac{2 \times 94,2 \text{ cm}}{3} = 62,8 \text{ cm}$	$\frac{2 \times 15 \text{ cm}}{3} = 10 \text{ cm}$
270°	$\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 94,2 \text{ cm}}{4} = 70,65 \text{ cm}$	$\frac{3 \times 15 \text{ cm}}{4} = 11,25 \text{ cm}$

À la figure 42, les bases de trois cônes sont superposées au disque dont le développement latéral est une partie On voit ainsi que le rapport entre le secteur angulaire et 360° est égal au rapport entre le rayon de la base et 15 cm. Sur la figure 42 ces rapports valent $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

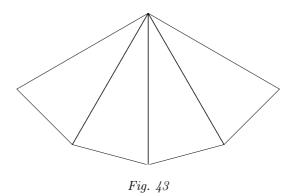


 $\begin{array}{c} Prolongement \\ possible \end{array}$

Mettre en évidence le fait que le tableau reprenant les divers développements ci-dessus est un tableau de proportionnalité.

Commentaires

On pourrait penser que lorsque l'on cherche la base d'une pyramide dont le développement latéral est celui de la figure 43, il pourrait y avoir plusieurs bases possibles : un carré et des losanges (le seul polygone à être déterminé par la longueur de ses côtés est le triangle).



On peut assez facilement se rendre compte que ce n'est pas le cas, par exemple en essayant de réaliser une telle pyramide dont la base serait un losange. On verra que la base n'est pas plane (un exemple est montré à la figure 24 à la page 136). On peut aussi tenir le raisonnement suivant. La base d'une telle pyramide est un polygone (plan) inscriptible à une sphère, puisque les sommets de la base sont tous à même distance du sommet de la pyramide. La base est donc inscriptible à un cercle, puisqu'un plan coupe une sphère suivant un cercle.

Il est peu probable que cette question soit soulevée dans les classes. On se contentera de construire des pyramides dont la base est un polygone régulier.