

VERS LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

1 Ombres à la lampe et projection centrale

De quoi s'agit-il ?

En étudiant les ombres à la lampe, établir le lien avec les projections centrales et la perspective à points de fuite.

Enjeux

Montrer que toute représentation d'un objet de l'espace en perspective centrale est une projection centrale de cet objet sur un plan. Ceci permet d'expliquer les règles de la perspective à points de fuite établies par les peintres du Quattrocento.

Matières couvertes. – Propriétés des projections centrales.

Représentations d'objets de l'espace en perspective à points de fuite.

Conservation du birapport par une projection centrale.

Compétences. – *Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste : quelques règles concernant la perspective centrale sont rencontrées et commentées en situant leur découverte dans le temps, ainsi que leur intérêt sur les plans artistique et scientifique.*

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Les plaques transparentes rigides et leurs supports qui ont été décrits dans l'activité 1.

Des photocopies sur transparent de la figure 1 agrandie. Des photocopies des documents correspondant aux figures 4 et 5 (voir annexe aux pages 397 à 399).

Des feuilles de papier blanc de format A3.

Une lampe de poche ou une lampe halogène et un transformateur. Il est important que la source lumineuse soit aussi ponctuelle que possible et qu'elle puisse facilement être placée et fixée en différents points de l'espace.

Prérequis. – Les activités 1 et 2 du chapitre 8.

Local. – Il est souhaitable de disposer d'un local que l'on peut au moins partiellement occulter.

1.1 Ombres à la lampe

Comment s'y prendre ?

Au cours de l'activité 1, nous avons rapidement comparé les ombres au soleil et à la lampe du bâton gradué. Ceci nous a permis de constater que les ombres à la lampe n'ont pas les mêmes propriétés que les ombres au soleil, les rayons issus d'une lampe n'étant pas parallèles mais concourants. Cependant, l'examen de l'ombre du bâton ne nous fournit guère d'information, en dehors du fait que l'ombre à la lampe ne conserve pas les rapports des longueurs de segments. Nous suggérons donc d'enrichir le modèle à observer pour en dégager plus d'informations et d'examiner l'ombre à la lampe, non plus d'un bâton, mais d'un damier dont les carrés sont alternativement transparents et opaques comme le montre le modèle de la figure 1. Cette figure présente l'avantage d'être simple, tout en comportant des droites parallèles dans des directions différentes et des segments dont les longueurs sont facilement repérables (une, deux, trois, ... largeurs de carreau).

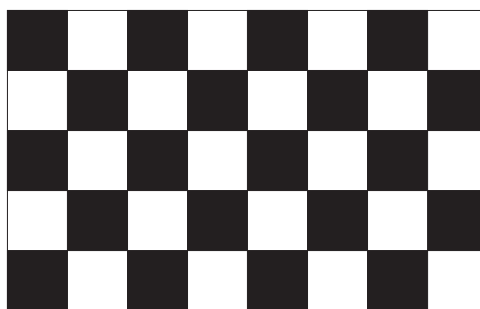


Fig. 1: Modèle à photocopier sur transparent fourni en vraie grandeur en annexe

Les élèves collent le transparent réalisé à partir du damier sur la vitre placée verticalement, de telle manière que les droites qui forment le damier soient horizontales ou verticales.

Une première phase du travail peut être consacrée à l'observation rapide de l'ombre au soleil de ce damier et au rappel des propriétés de la projection parallèle (figure 2).

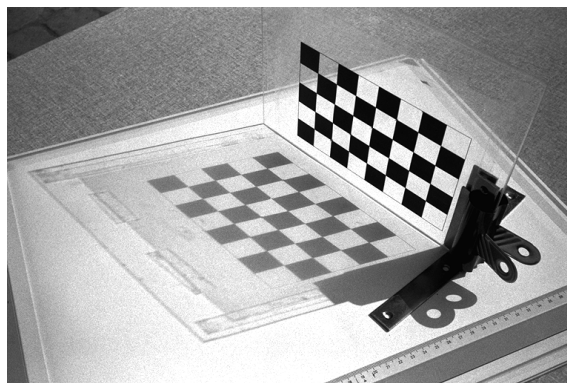


Fig. 2

Ensuite, la lampe est placée derrière la vitre, à 7 cm de distance et 20 cm de hauteur environ, orientée vers le damier, dans le plan vertical perpendiculaire à la vitre et qui coupe le damier en deux parties égales. Toutes ces dispositions sont prises pour produire une ombre qui évoque autant que possible une photographie de carrelage, mais d'autres positions de la lampe pourront être exploitées par la suite. Après avoir observé l'ombre ainsi produite et marqué sur une feuille de papier A3 les ombres des sommets de tous les carrés, les élèves tracent le dessin complet de l'ombre. Le résultat obtenu suscitera très vraisemblablement la comparaison avec la photographie d'un carrelage, ou avec la représentation d'un carrelage dans une peinture.

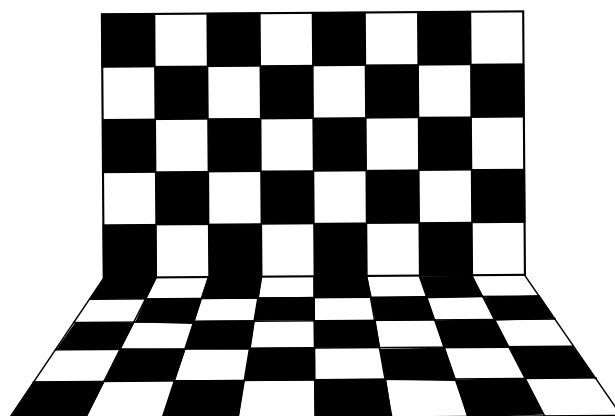


Fig. 3: Ombre à la lampe du damier

Deux autres documents sont alors présentés à la classe : une photographie d'un carrelage et une reproduction de peinture comportant également une portion de carrelage, ainsi que d'autres éléments d'architecture comme des murs, portes, fenêtres, poutres, ... Nous proposons de tels documents (figures 4 et 5) à titre d'exemples, mais bien entendu les élèves ou le professeur peuvent en apporter d'autres. Des photocopies de ces documents sont distribuées aux élèves de telle manière que chacun puisse tracer sur son exemplaire toutes les constructions géométriques qu'il juge nécessaires à l'étude des propriétés.



Fig. 4: Photographie de carrelage

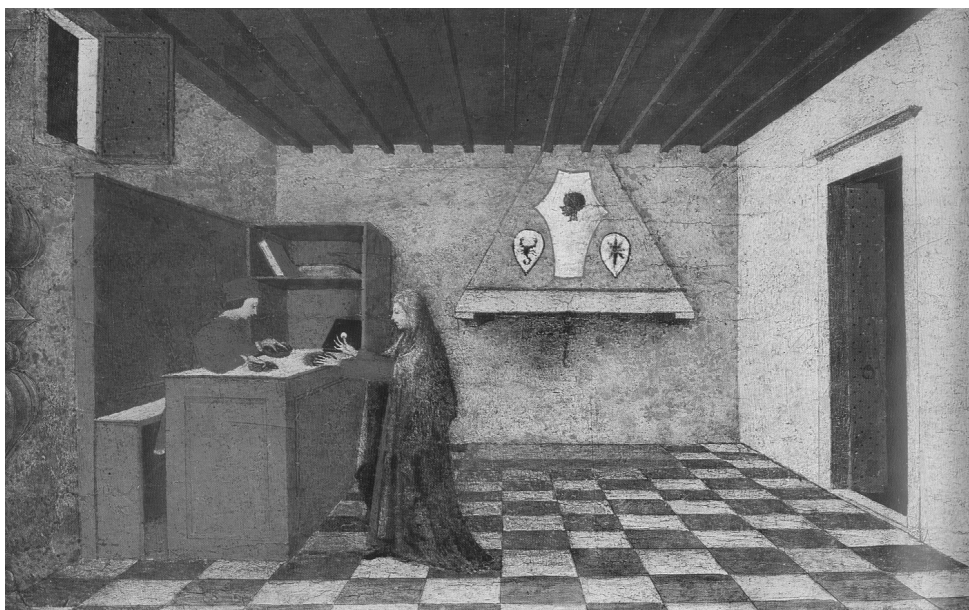


Fig. 5: Le miracle de l'hostie profanée-Uccello-1469

De toute évidence, les trois documents observés (ombre du damier, photographie du carrelage, peinture) ne sont pas des représentations en perspective cavalière. Ils nous fournissent une image plus proche de celle que nous percevons par la vision. Ils présentent des ressemblances évidentes, qui laissent supposer qu'un phénomène commun est à l'origine de ces trois représentations. De quoi s'agit-il ?

Comment se forme une ombre à la lampe ?

Que se passe-t-il dans un appareil photographique ?

Comment les peintres de la Renaissance italienne ont-ils établi les règles de la perspective ?

Toutes ces questions, provoquées par la comparaison des trois documents, vont nous amener progressivement à l'étude de la projection centrale et de la perspective à points de fuite.

Pour y voir plus clair, commençons par analyser les trois documents du point de vue de leurs propriétés géométriques.

Sur ces documents,

- comment apparaît l'ombre ou la représentation
 - d'une droite ?
 - de deux droites sécantes ?
 - de deux droites parallèles (examiner plusieurs directions) ?
- les longueurs des segments sont-elles conservées ?
- les rapports des longueurs sont-ils conservés ? (En particulier, examiner la position du milieu d'un segment sur sa représentation.)

Des observations effectuées sur l'ombre du damier, il ressort que

- L'ombre d'une droite est une droite :
 - des droites sécantes ont pour ombres des droites sécantes ;
 - des droites parallèles ont pour ombres des droites concourantes, sauf les droites horizontales du damier qui sont parallèles à leurs ombres ; celles-ci sont donc parallèles.
- Les longueurs des segments ne sont pas conservées.
- Les rapports des longueurs des segments ne sont pas conservés, sauf sur les horizontales du damier. Par exemple le milieu d'un segment formé de deux côtés consécutifs et alignés du damier n'apparaît pas au milieu de l'ombre de ce segment, sauf sur l'ombre d'un segment horizontal.

Des constatations similaires peuvent être faites à partir de l'examen du document photographique et de la reproduction de peinture, ce qui nous confirme l'existence d'un phénomène commun. C'est l'ombre à la lampe qui nous paraît la plus facile à étudier, car nous pouvons maîtriser les conditions d'expérience : tout d'abord nous disposons du modèle original, ce qui permet d'établir des comparaisons entre le damier d'origine et son ombre, mais aussi nous pouvons modifier l'emplacement de la lampe, observer les ombres d'autres figures en élaborant d'autres transparents. . .

L'ombre à la lampe nous donne une approche intuitive de la projection centrale et l'ombre du damier sur la feuille est une représentation de celui-ci en perspective centrale.

Toute l'intuition acquise au cours de cette première partie est indispensable pour aborder dans de bonnes conditions les démonstrations mathématiques qui vont suivre.

1.2 Projections centrales

Comment s'y prendre ?

Nous avons acquis, grâce aux ombres à la lampe, une perception intuitive de la projection centrale, qui envoie les points de l'espace sur un plan par des droites issues d'un point, appelées projetantes. L'ombre d'un objet sur le plan de la feuille est l'image de celui-ci par une projection centrale dont le centre est le point lumineux. Les projetantes sont les rayons lumineux issus de la lampe.

Étendons ce type de projection à l'espace tout entier de la manière suivante.

L'image d'un point de l'espace par une projection centrale sur un plan est le point de percée dans ce plan de la droite issue du centre et passant par ce point.

L'image d'un objet de l'espace par cette même projection centrale est l'ensemble des images des différents points de cet objet.

Il faut remarquer que les points du plan parallèle au plan de projection et passant par le centre n'ont pas d'image par cette projection.

Les *projetantes* sont les droites joignant les points de l'espace à leur image ; elles se rencontrent en un même point, le centre de la projection.

L'ombre à la lampe ne nous donne donc qu'une approche incomplète de la projection centrale. En effet, seuls les objets situés entre la lampe et le plan de projection ont une ombre, tandis que tous les points de l'espace ont une image par une projection centrale, sauf ceux du plan parallèle au plan de projection et passant par le centre.

Les élèves sont invités à reformuler les observations effectuées sur l'ombre du damier, de manière à obtenir les énoncés de quelques propriétés des projections centrales. Les démonstrations de ces propriétés ne présentent guère de difficulté, elles s'appuient sur les propriétés d'incidence et de parallélisme dans l'espace. Comme dans l'activité 1 à la page 263, nous n'aborderons pas ici tous les cas particuliers, mais il convient de ne pas les éluder si les élèves les abordent spontanément.

Dans les démonstrations qui suivent, nous noterons O le centre de projection, Π le plan de projection et Π_o le plan parallèle à Π et passant par O . Il faudra rester attentif au fait que les points de ce plan Π_o n'ont pas d'image par la projection centrale de centre O .

Image d'une droite

1. *L'image d'une droite par une projection centrale est une droite (ou un point).*

En voici la preuve, dans le cas général où la droite d ne passe pas par O .

Les droites passant par O et un point de la droite d sont entièrement contenues dans le plan Δ déterminé par la droite d et le point O , toutes ces projetantes des points de d percent le plan de projection Π en des points communs à ces deux plans. L'image de la droite d par la projection centrale de centre O est donc la droite d'intersection du plan Δ et du plan Π .

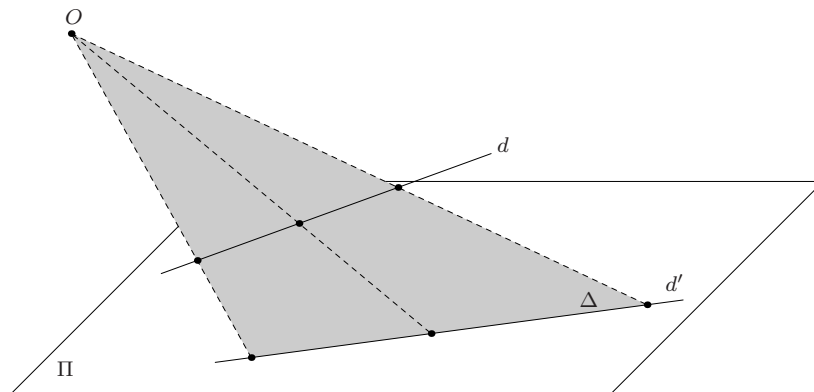


Fig. 6

Cette droite existe toujours, sauf si les plans Π et Δ sont parallèles, ce qui ne peut se produire que si la droite d se trouve dans le plan Π_o , mais nous avons déjà remarqué que les points de ce plan n'ont pas d'image par la projection centrale.

Images de deux droites. — Les questions suivantes sont destinées à guider les élèves dans leur réflexion.

- Les images de deux droites sécantes par une projection centrale peuvent-elles être
 - deux droites sécantes ?
 - deux droites parallèles ?
- Les images de deux droites parallèles par une projection centrale peuvent-elles être
 - deux droites sécantes ?
 - deux droites parallèles ?

Tout en apportant des réponses à ces questions, les élèves s'attacheront à les rendre aussi complètes que possible en précisant dans quelles positions doivent se trouver les deux droites d'origine dans chacun des cas.

La deuxième observation effectuée sur l'ombre des droites du damier incite à conjecturer que deux droites sécantes ont pour image deux droites sécantes. Cependant, rien ne permet de supposer que les droites du damier nous fournissent tous les cas de figure. Une expérience supplémentaire pourrait faire apparaître d'autres situations : les élèves réalisent un nouveau transparent sur lequel ils tracent deux droites sécantes et collent celui-ci sur la vitre. En plaçant la lampe dans différentes positions, il est possible d'observer que les ombres de deux droites sécantes peuvent être des droites parallèles, et de constater dans quelle position relative des droites et de la lampe cela se produit.

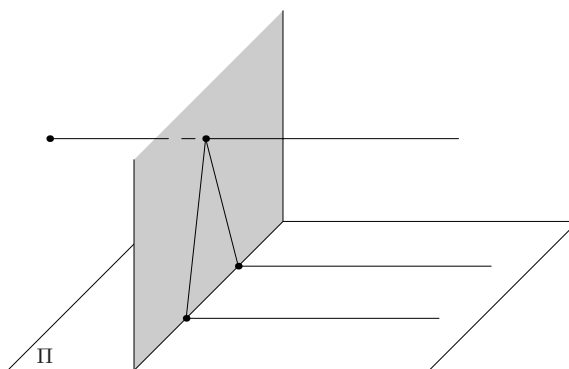


Fig. 7

En reformulant ces dernières observations en termes de projection centrale, les élèves énoncent la propriété sous la forme suivante :

2. *Les images de deux droites sécantes par une projection centrale sont des droites sécantes, sauf si leur point d'intersection est dans le plan parallèle au plan de projection passant par le centre. Dans ce cas, leurs images sont des droites parallèles.*

Les élèves qui n'auraient pas observé le cas particulier lors de la dernière expérience devraient le découvrir par le raisonnement en établissant la démonstration du cas général.

Notons c et d deux droites sécantes en un point I . Leurs images par la projection centrale de centre O sont les droites c' et d' , intersections du plan Π avec les plans Γ et Δ où
 Γ est le plan déterminé par O et c ,
 Δ est le plan déterminé par O et d .

Ces deux plans ont en commun les points O et I , ils sont donc sécants et leur droite d'intersection notée i est déterminée par les points O et I .

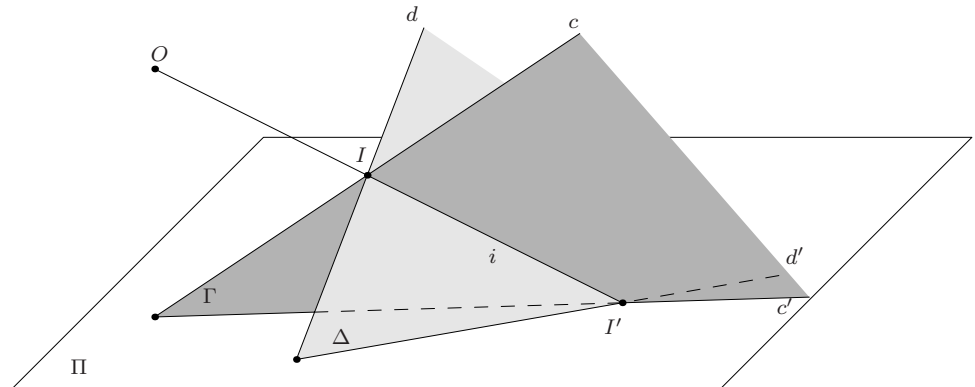


Fig. 8

Si la droite i perce le plan Π en I' ,
le point I' appartient aux plans Π et Γ , donc à la droite c' ,
le point I' appartient aux plans Π et Δ , donc à la droite d' ,
les deux droites images de c et de d se coupent donc en I' et elles sont sécantes.

Mais si la droite i est parallèle au plan Π , les droites c' et d' images de c et d n'auront pas de point commun, elles sont coplanaires disjointes, donc parallèles. Cette situation peut se produire lorsque la droite OI est parallèle au plan Π , c'est-à-dire lorsque le point I est dans le plan Π_o .

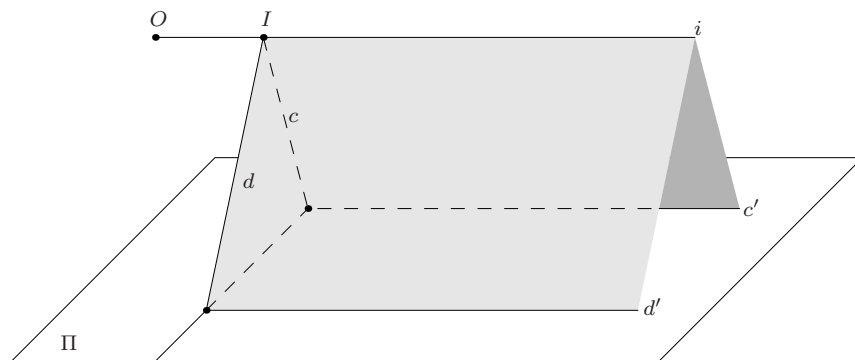


Fig. 9

Les élèves qui n'auraient pas observé cette dernière situation lors de l'expérience préalable pourront l'illustrer a posteriori en plaçant la lampe dans la position appropriée.

L'observation de l'ombre du damier nous a montré que les droites horizontales ont des ombres parallèles, tandis que les verticales ont des ombres

concourantes. Si on trace des diagonales, ou si on colle le damier en position oblique sur la vitre, on constate que d'autres directions de droites parallèles ont des ombres concourantes. Il faudra donc préciser.

- Quelles sont les directions de droites parallèles dont les images par une projection centrale sont des droites parallèles ?
- Quelles sont les directions de droites parallèles dont les images par une projection centrale sont des droites concourantes ?

Une expérience complémentaire sera effectuée en plaçant sur la vitre, dans différentes positions, un transparent sur lequel des droites parallèles ont été tracées. La répétition de l'expérience pour différentes positions de la lampe nous confirme que les seules droites parallèles dont les ombres sont parallèles sont les droites horizontales, c'est-à-dire celles qui sont parallèles au plan de projection. De plus, ces droites ont des ombres qui leur sont parallèles.

Ces observations nous conduisent aux énoncés suivants.

3. *Si une droite parallèle au plan de projection a une image par une projection centrale, cette image est une droite qui lui est parallèle.*

4. *Les images par une projection centrale de droites parallèles au plan de projection sont des droites parallèles (si elles existent).*

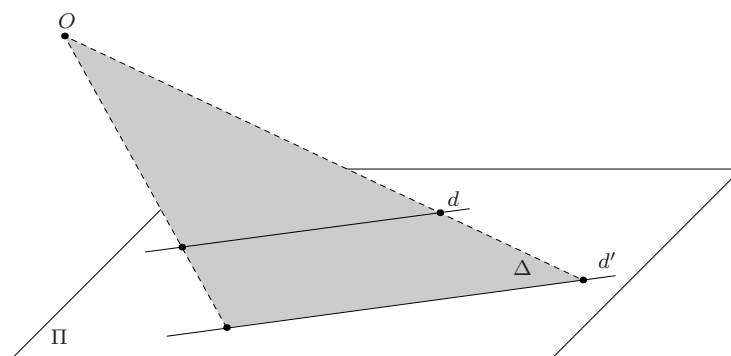


Fig. 10

Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété 1 à la page 293 : *Si une droite est parallèle à un plan, tout plan contenant la droite et sécant avec le premier plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

Considérons à présent des droites parallèles, non parallèles au plan de projection. L'analyse de l'ombre du damier nous montre que :

- les verticales ont pour ombres des droites concourantes, leur point de rencontre semble se trouver sur une verticale passant par le point lumineux (voir figure 12 à la page suivante);
- les diagonales dans une direction ont des ombres concourantes;
- les diagonales de l'autre direction ont également des ombres concourantes.

De plus, les points de rencontre des ombres des droites des trois directions examinées semblent alignés.

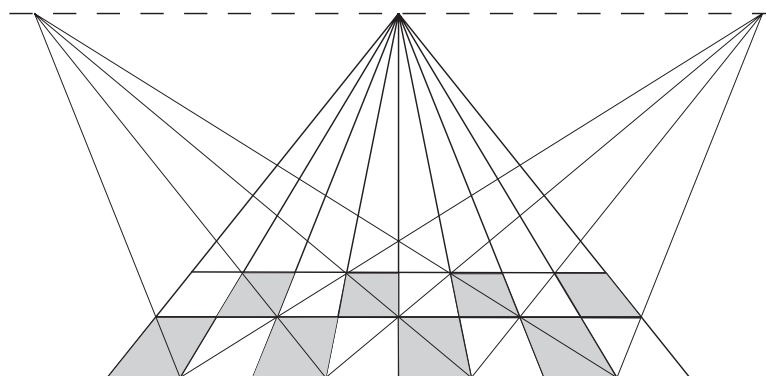


Fig. 11

L'examen de l'ombre du damier placé en oblique nous montre que les droites des autres directions non parallèles au plan de projection ont des ombres concourantes.

Démontrons la propriété suivante.

5. *Les images par une projection centrale de droites parallèles, non parallèles au plan de projection, sont des droites concourantes.*

Pour cela, gardons à l'esprit la question suivante.

Où se trouve le point de rencontre des projections des droites parallèles d'une direction donnée ?

Pour clarifier la situation, examinons tout d'abord les droites verticales de la vitre. Leurs projections sont les droites d'intersection du plan Π avec les plans verticaux déterminés par le centre O et chacune de ces verticales. Tous ces plans verticaux contiennent la verticale passant par O , et celle-ci perce le plan Π en un point S . Ce point S est commun au plan Π , à tous les plans verticaux et donc à toutes les projections des droites verticales du plan de la vitre. Celles-ci sont donc concourantes et leur point de rencontre est le point S .

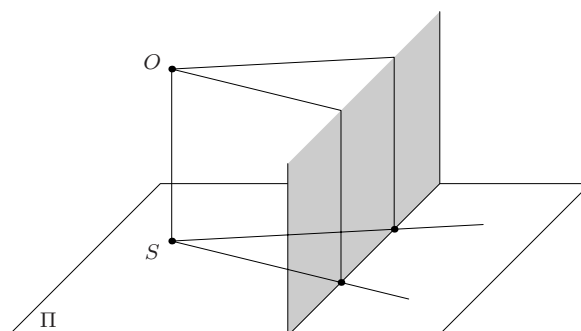


Fig. 12

La projection d'une droite verticale, non contenue dans le plan de la vitre, passe-t-elle aussi par le point S ? Oui, car le même raisonnement s'applique à ces droites.

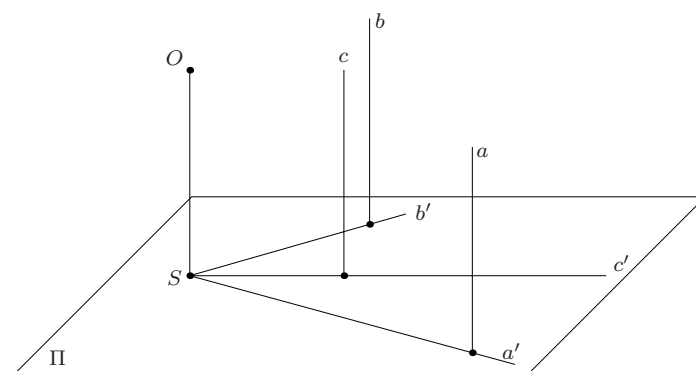


Fig. 13

Nous pouvons conclure provisoirement : les projections de toutes les droites de l'espace perpendiculaires au plan de projection sont concourantes en un point qui est la projection orthogonale du centre O sur le plan Π .

Nous avons privilégié d'abord la direction verticale, perpendiculaire au plan de projection, pour fixer les idées. Mais le même raisonnement peut être tenu pour des droites parallèles de toute autre direction, par exemple celle de la droite a .

En effet, tous les plans contenant O et une droite de la direction considérée, dont les intersections avec Π déterminent les projections des droites parallèles à a , contiennent la parallèle à a passant par O , et donc la projection du centre O sur le plan Π parallèlement à a . Ainsi, les images des parallèles à a convergent en S .

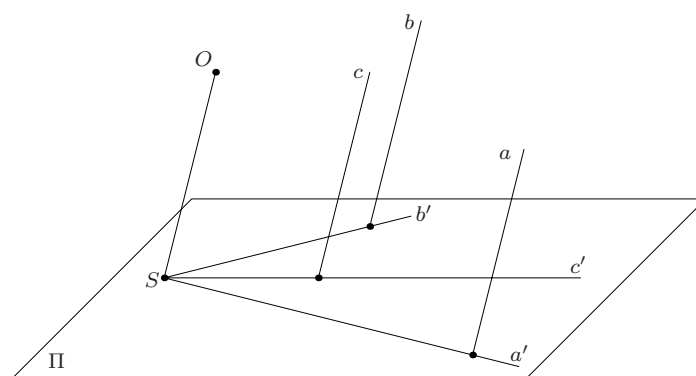


Fig. 14

Revenons au problème de l'alignement des points de rencontre des ombres des droites des trois directions examinées (figure 11 à la page précédente).

Les images de droites parallèles à une droite du plan de la vitre (sauf les horizontales) sont donc des droites concourantes, dont le point de rencontre est la projection du point O parallèlement à cette direction. Ces points de

rencontre se trouvent donc sur la droite d'intersection du plan de projection avec le plan parallèle au plan de la vitre passant par le centre. Cette droite est le lieu des points d'intersection de ces faisceaux de droites concourantes. Ceci explique que ces points de rencontre sont effectivement alignés.

Prolongements possibles

Nous n'avons abordé ici que quelques propriétés des projections centrales, en particulier celles qui vont nous permettre de justifier les règles principales de la représentation en perspective. La conservation du rapport des longueurs sur les droites parallèles au plan de projection pourrait être abordée sans difficulté (Thalès).

Dans l'activité suivante, nous proposons une démonstration du théorème de Desargues à partir de l'ombre à la lampe d'un prisme à base triangulaire.

1.3 La perspective du peintre

Un tableau en perspective est l'image par une projection centrale, dont le centre est l'œil du peintre, sur le plan du tableau, de l'espace situé derrière le tableau. L'œil du peintre (un seul) occupe donc une position unique et immuable pendant toute l'élaboration de la peinture. Idéalement, le spectateur devrait placer son œil exactement au même endroit pour admirer le tableau selon le point de vue choisi par le peintre.

Voici ce que Leonardo da Vinci écrit à ce sujet dans ses carnets de notes : « La perspective n'est rien d'autre que la vision d'un objet derrière un verre lisse et transparent, à la surface duquel pourront être marquées toutes les choses qui se trouvent derrière le verre ; ces choses approchent le point de l'œil sous forme de diverses pyramides que le verre coupe. » E. Maccurdy [1942]

Les illustrations suivantes montrent différents dispositifs de perspective imaginés par le peintre Dürer. Ces instruments, encombrants et peu maniables, ont le mérite de mettre en évidence les grands principes de la perspective centrale.

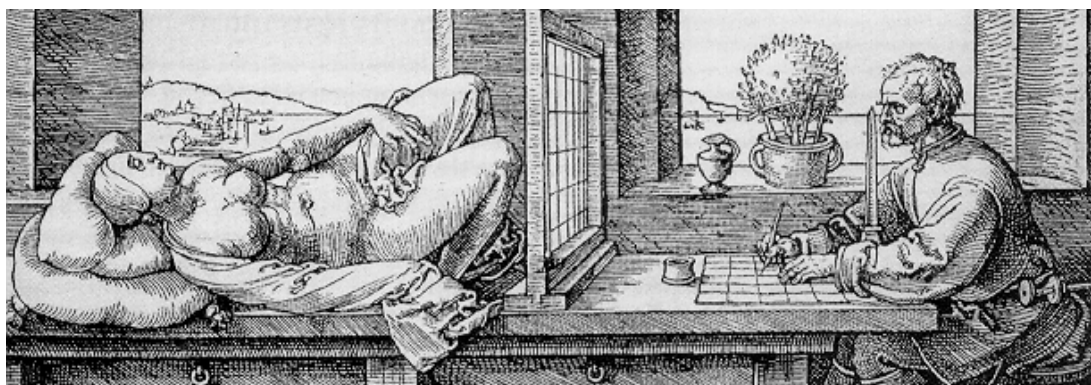


Fig. 15



Fig. 16

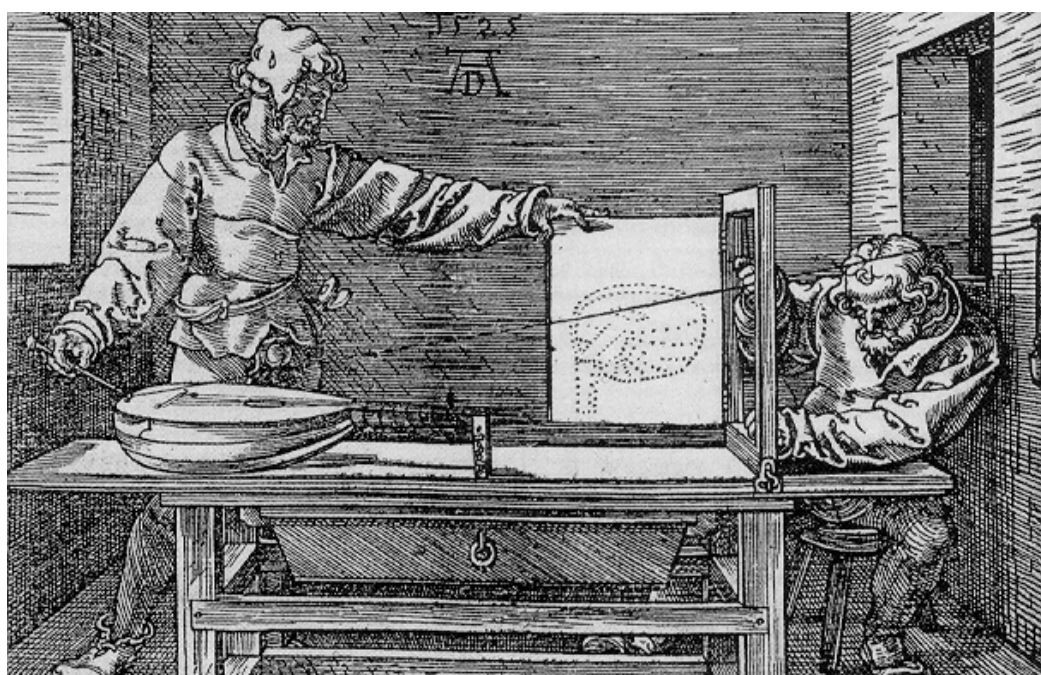


Fig. 17

Le travail effectué sur l'ombre à la lampe nous a montré une situation similaire, mais où la position des plans est inversée : en effet, le damier original se trouvait sur la vitre placée verticalement, et son ombre apparaissait sur un plan de projection horizontal ; tandis que le peintre représente sur un tableau vertical un carrelage horizontal. Il faudra donc transposer comme il convient les résultats obtenus précédemment, pour obtenir les règles du dessin en perspective. Un peu de vocabulaire spécifique va nous permettre de les énoncer plus facilement.

On appelle *point de fuite* le point de rencontre sur le tableau des représentations des droites parallèles dans une direction non parallèle au plan du tableau.

Le *point de fuite principal* est celui qui correspond à la direction des droites de bout par rapport à l'observateur. Les élèves déterminent sa position sur le tableau (au pied de la perpendiculaire menée de l'œil de l'observateur sur

le plan du tableau) et justifient leur réponse. C'est la situation transposée de celle qui apparaît dans la figure 13 où Π serait le plan du tableau.

Le plan horizontal (parallèle au sol) au niveau de l'œil du peintre est appelé *plan de l'horizon*. L'intersection de ce plan avec le plan du tableau est appelée *ligne d'horizon*. Les élèves déterminent le rôle de cette droite, qui contient le point de fuite principal. Ils établissent qu'elle est le lieu des points de fuite des directions horizontales non parallèles au tableau.

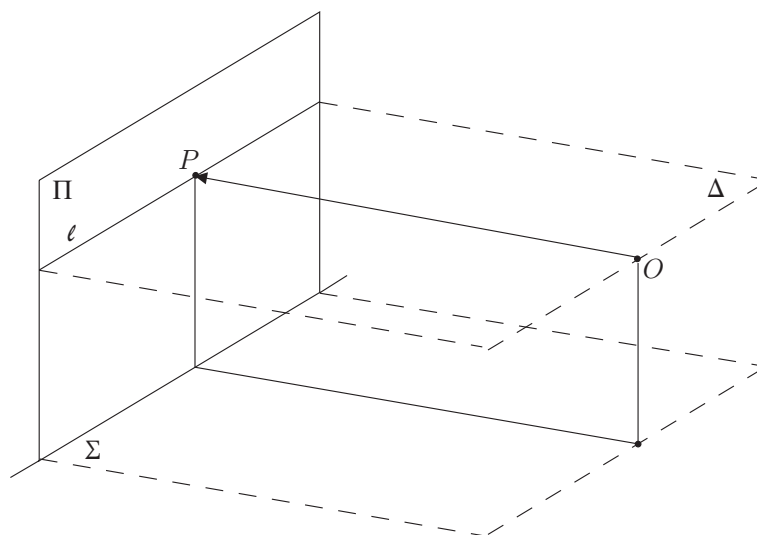


Fig. 18

Dans cette figure,

- Π représente le plan du tableau,
- Σ est le plan du sol,
- O est l'œil de l'observateur,
- Δ est le plan de l'horizon,
- ℓ est la ligne d'horizon,
- P est le point de fuite principal.

Les élèves sont à présent en mesure de faire la synthèse des règles principales du dessin en perspective. Le résultat obtenu pourrait ressembler à ce qui suit.

- Les droites parallèles au plan du tableau se représentent parallèlement à elles-mêmes. Des droites parallèles dans ces directions ont des images parallèles.
- Les droites horizontales parallèles, non parallèles au plan du tableau, sont représentées par des droites concourantes (appelées *fuyantes*) ; les différents points de fuite se trouvent sur la ligne d'horizon.
- Les rapports de longueurs sont conservés sur les droites parallèles au plan du tableau, mais pas sur les fuyantes.

La réduction des longueurs en fonction de l'éloignement n'est évidemment pas aléatoire. Comment la déterminer ? La question suivante est posée aux élèves.

Que penser de la représentation du carrelage dans cette peinture de Lorenzetti (agrandie en annexe à la page 400) ?

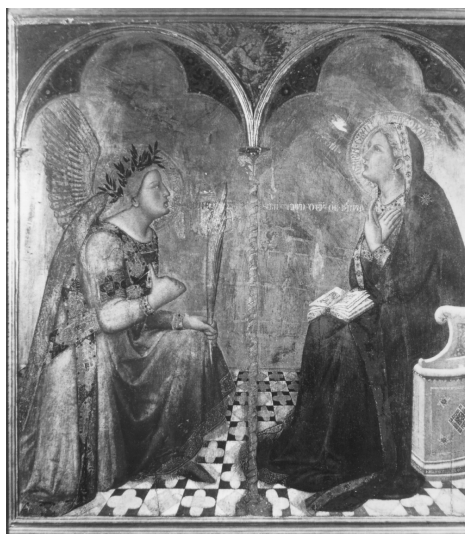


Fig. 19: L'annonciation de A. Lorenzetti, 1344.

Pourquoi ce carrelage n'est-il pas conforme aux règles de la perspective ?

La réflexion des élèves peut être guidée par l'indication suivante : la projection centrale conserve l'alignement des points et dans la représentation d'un carrelage, il est possible d'exploiter des alignements de sommets moins évidents que ceux situés sur les bords des rangées.

Lorsque les élèves auront découvert que l'alignement des points situés sur des diagonales successives n'est pas respecté dans ce tableau, ils seront en mesure d'aborder le problème suivant.

Voici la première rangée d'un carrelage.

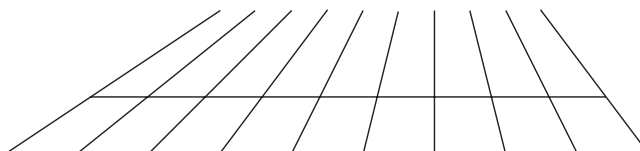


Fig. 20

Comment dessiner les rangées suivantes au moyen d'une construction géométrique simple (voir annexe à la page 401) ?

La solution découle des observations effectuées sur la peinture de Lorenzetti. La construction des diagonales ne sera suggérée qu'en dernier recours.

Ces règles ont été établies et démontrées par les peintres et mathématiciens de la Renaissance italienne. La figure suivante illustre la construction du dallage expliqué par Alberti dans son traité *De Pictura* (L. Alberti [1435]). Le point O représente l'œil du peintre, T le tableau et P le point de fuite principal.

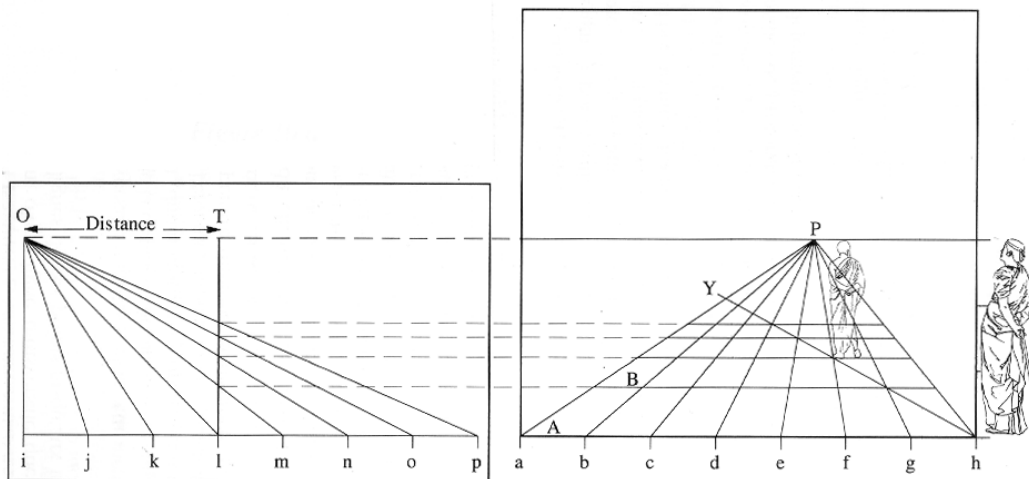


Fig. 21

Exercices

1. Représenter en perspective un cube dont une face est en position frontale. Placer le milieu sur chacune des arêtes de ce cube.
2. Représenter en perspective une pyramide droite à base carrée dont une arête de la base est parallèle au plan de représentation.
3. Compléter la représentation du couloir (figure 22, agrandie en annexe à la page 402) en terminant le dessin du carrelage, en plaçant deux portes de même largeur sur le mur de droite et une fenêtre de largeur double sur le mur de gauche.

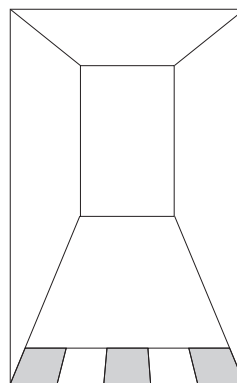


Fig. 22

Prolongements possibles

Il nous paraît intéressant de montrer aux élèves que l'ombre du damier obtenue en éloignant « indéfiniment » la lampe ressemble de plus en plus à l'ombre produite par le soleil. Quelques dessins, réalisés au moyen du logiciel Cabri-Géomètre et illustrant cette propriété sont présentés ci-dessous (figures 23 à 26).

La projection parallèle pourrait donc être considérée comme une projection centrale dont le centre est rejeté à l'infini ; et les droites parallèles, comme des droites qui se coupent en un *point à l'infini*. Il y aurait un *point à l'infini* dans chaque direction. Dans une représentation en perspective centrale, les points de fuite sont les représentations sur le tableau de ces points à l'infini, et ces représentations sont à distance finie.

Si dans un plan, on ne fait plus la distinction entre les points à l'infini et les autres points, il ne sera plus possible de distinguer les droites parallèles des droites concourantes ; la notion de parallélisme n'aura plus de sens. Si de plus, on admet que les points à l'infini forment une *droite de l'infini*, on obtient un plan homogène en ses points et en ses droites. Cela signifie que, dans ce plan,

- deux points déterminent une et une seule droite ;
- deux droites déterminent un et un seul point d'intersection.

Le plan ainsi défini est le *plan projectif* et cette géométrie est appelée *géométrie projective*.

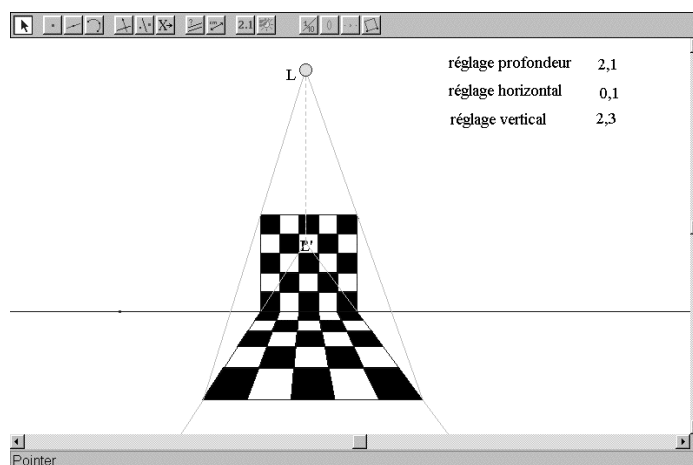


Fig. 23

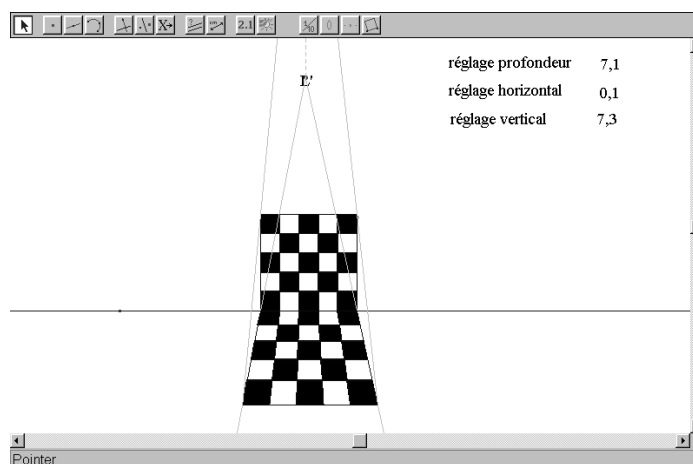


Fig. 24

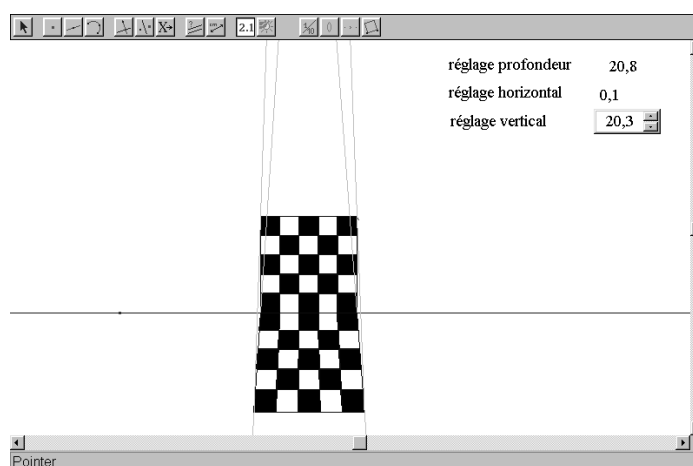


Fig. 25

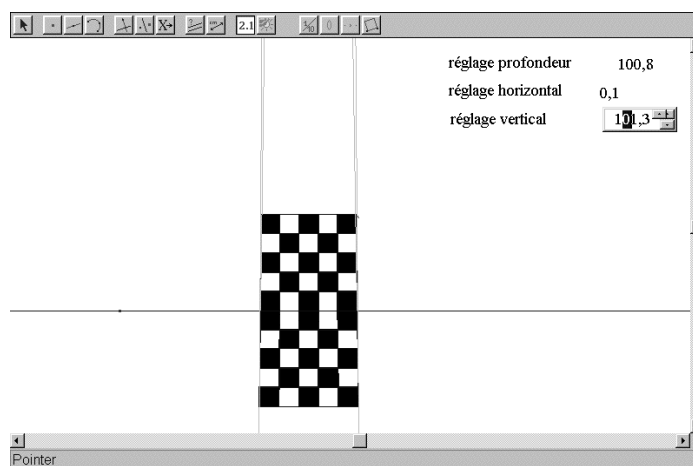


Fig. 26

1.4 Le birapport, invariant de la projection centrale

Les élèves ont déjà observé à plusieurs reprises que les projections centrales ne conservent ni les longueurs, ni les rapports de longueurs. Les observations sur l'ombre à la lampe d'un damier et les exercices de construction en perspective centrale proposés dans cette activité leur ont fait constater que la représentation du point situé au milieu d'un segment ne se trouvait pas au milieu de la représentation de ce segment (sauf pour un segment parallèle au plan de la représentation). Cependant, la position de l'image de ce point milieu dans la représentation n'est pas arbitraire, elle répond à des règles de construction précises. Il est permis de penser que, si ce point peut être construit de manière univoque, sa position pourrait également être déterminée par calcul.

Plus généralement, le point C qui partage le segment $[AB]$ dans un rapport donné sera représenté en un point bien précis de la représentation $[A'B']$ du segment $[AB]$ sur la toile. Nous proposons aux élèves de calculer dans quel rapport le point C' , image de C , partage le segment $[A'B']$.

Plaçons-nous dans le contexte de la perspective du peintre et considérons un segment $[AB]$ perpendiculaire au plan du tableau, tel que son extrémité A soit sur la toile. Le point A coïncide avec son image et la représentation du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$. Considérons le point C du segment $[AB]$ tel que $|AC| = k|AB|$.

Le rapport

$$r = \frac{|AC|}{|CB|}$$

vaut

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{k|AB|}{|AB| - |AC|} = \frac{k|AB|}{(1 - k)|AB|} = \frac{k}{1 - k}.$$

La question est donc de calculer la valeur du rapport $r' = \frac{|AC'|}{|C'B'|}$.

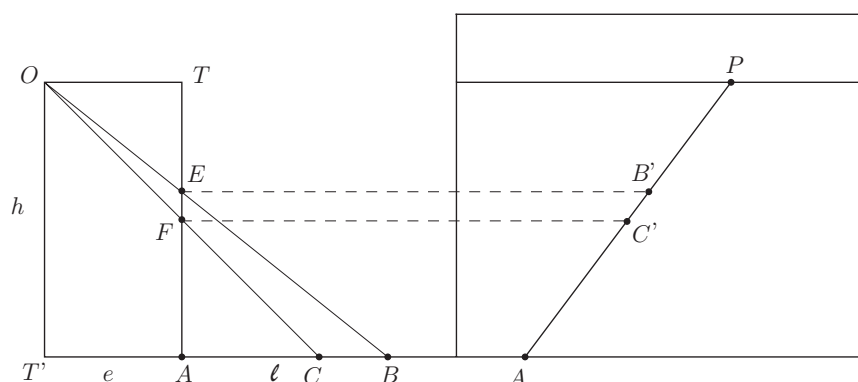


Fig. 27

Dans cette figure,

- O représente l'œil de l'observateur ;

- AT est une vue de profil du tableau ;
- P est le point de fuite principal.

Remarquons tout d'abord que le rapport r' est égal au rapport $\frac{|AF|}{|FE|}$ (Thalès). Pour simplifier l'écriture des calculs, notons :

- $e = |OT|$ l'éloignement de l'observateur par rapport à la toile ;
- $h = |OT'|$ la hauteur de l'observateur ;
- $\ell = |AB|$ la longueur du segment $[AB]$.

Calculons $|AF|$ en utilisant la similitude des triangles ACF et $T'CO$:

$$\frac{|AF|}{|T'O|} = \frac{|AC|}{|T'C|},$$

$$|AF| = \frac{|AC| \cdot |T'O|}{|T'C|} = \frac{k\ell \cdot h}{k\ell + e}.$$

Observons que $|FE| = |AE| - |AF|$ et calculons $|AE|$ en utilisant la similitude des triangles EBA et $OB'T'$:

$$\frac{|AE|}{|T'O|} = \frac{|AB|}{|T'B|},$$

$$|AE| = \frac{|AB| \cdot |T'O|}{|T'B|} = \frac{\ell \cdot h}{\ell + e}.$$

Nous calculons ensuite

$$|FE| = |AE| - |AF| = \frac{\ell h}{\ell + e} - \frac{k\ell h}{k\ell + e}.$$

Après réduction au même dénominateur et simplification, nous obtenons

$$|FE| = \frac{e\ell h(1-k)}{(k\ell + e)(\ell + e)}.$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer le rapport

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{\frac{k\ell h}{k\ell + e}}{\frac{e\ell h(1-k)}{(k\ell + e)(\ell + e)}} = \frac{k}{1-k} \cdot \frac{\ell + e}{e},$$

et donc

$$\frac{|AC'|}{|C'B'|} = r \cdot \frac{\ell + e}{e}.$$

Ceci signifie que le rapport initial

$$\frac{|AC|}{|CB|} = r$$

est devenu

$$\frac{|AC'|}{|C'B'|} = r \cdot \frac{\ell + e}{e}$$

dans la représentation.

Ce rapport r a donc été multiplié par un facteur qui ne dépend que de la longueur ℓ du segment $[AB]$ et de l'éloignement e de l'observateur par rapport au plan du tableau. Les élèves peuvent interpréter ce qui se passe si l'observateur s'éloigne indéfiniment du tableau. Dans ce cas, e tend vers l'infini, le facteur multiplicatif $\frac{\ell+e}{e}$ tend vers 1 et on peut en déduire que le rapport des longueurs est conservé. Une propriété bien connue des projections parallèles est ainsi retrouvée comme cas particulier de la propriété correspondante des projections centrales, dans le cas où le centre de projection est « à l'infini ».

De plus, dans les calculs qui précèdent, le choix du point C sur le segment $[AB]$ détermine la valeur du rapport r , mais n'influence en rien la suite du raisonnement. Si on considère un autre point D sur $[AB]$, la valeur du rapport $s = \frac{|AD|}{|DB|}$ dans lequel le point D divise le segment $[AB]$ sera elle aussi multipliée par le même facteur $\frac{\ell+e}{e}$. Donc, si on considère le quotient de deux rapports de ce type $\frac{r}{s}$, sa valeur sera conservée pour les points correspondants de la représentation, puisque le facteur $\frac{\ell+e}{e}$ peut être simplifié dans le quotient :

$$\frac{\frac{|AC|}{|CB|}}{\frac{|AD|}{|DB|}} = \frac{r}{s} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{|AC'|}{|C'B'|}}{\frac{|AD'|}{|D'B'|}} = \frac{r \cdot \frac{\ell+e}{e}}{s \cdot \frac{\ell+e}{e}} = \frac{r}{s}.$$

Ce quotient de rapports de longueurs est appelé *birapport*¹ et il s'introduit naturellement, grâce à ce qui précède, comme un invariant de la projection centrale.

On appelle birapport de quatre points d'une même droite le quotient des rapports suivant lesquels les deux derniers divisent le segment des deux premiers. On le note :

$$(ABCD) = \frac{\frac{|AC|}{|CB|}}{\frac{|AD|}{|DB|}}.$$

Des démonstrations classiques de la conservation du birapport par les projections centrales existent dans le cas général. Il s'agit de démontrer que

6. *Si les points A', B', C', D' sont les images des points alignés A, B, C, D par une projection centrale, les birapports $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$ sont égaux.*

Le principe de la démonstration est de déterminer deux segments dont le rapport soit égal à $(ABCD)$. Notons O le centre de projection. Par B ,

¹ Dans cette première approche du birapport, nous n'envisageons que des birapports positifs

menons une droite parallèle à OA , cette droite coupe OC en P et OD en Q . Montrons que

$$(ABCD) = \frac{|BQ|}{|BP|}.$$

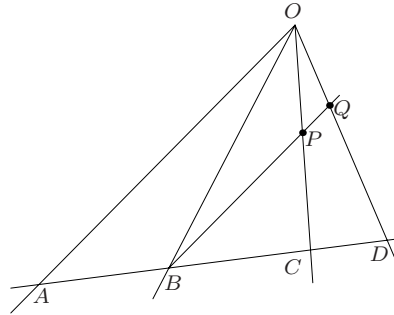


Fig. 28

La similitude des triangles CAO et CBP nous donne

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AO|}{|BP|},$$

et celle des triangles DAO et DBQ nous donne

$$\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|AO|}{|BQ|}.$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\frac{\frac{|CA|}{|CB|}}{\frac{|DA|}{|DB|}} = \frac{|BQ|}{|BP|},$$

et donc $(ABCD) = \frac{|BQ|}{|BP|}$.

Pour montrer l'égalité des deux birapports, déterminons pour chacun d'eux deux segments dont les rapports valent respectivement

$(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$.

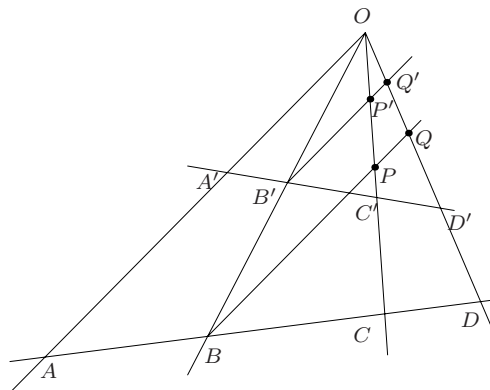


Fig. 29

Nous obtenons

$$(ABCD) = \frac{|BQ|}{|BP|} \quad \text{et} \quad (A'B'C'D') = \frac{|B'Q'|}{|B'P'|}.$$

Comme les sécantes OB , OC et OD déterminent sur les droites parallèles BQ et $B'Q'$ des segments proportionnels, nous avons :

$$\frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{|B'Q'|}{|B'P'|},$$

ce qui implique l'égalité des birapports $(ABCD)$ et $(A'B'C'D')$.

2 Théorème de Desargues

De quoi s'agit-il ?

À partir de l'ombre à la lampe d'un prisme tronqué à base triangulaire, illustrer et démontrer le théorème de Desargues.

Enjeux

Matières couvertes. – Le théorème de Desargues dans l'espace et le plan. La démonstration fournira l'occasion de *traiter un problème concernant l'incidence et l'alignement* en se fondant sur les propriétés de la projection centrale.

Compétences. – Dégager une nouvelle propriété géométrique et la *démontrer en exploitant des modes de raisonnement déjà exercés*.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Un prisme droit en plexiglas d'environ 15 cm de hauteur, dont la base est un triangle, ou un prisme tronqué en tiges.

Des feuilles de papier blanc de format A3.

Des marqueurs sur transparents.

Prérequis. – Les propriétés d'incidence des droites et plans de l'espace (activité 2 à la page 274).

Les propriétés de la projection centrale (activité 1 à la page 344). Les prolongements de cette dernière activité sont indispensables pour aborder les cas particuliers.

2.1 Ombre à la lampe d'un prisme

Comment s'y prendre ?

Dans l'activité 2 à la page 274, l'observation de l'ombre au soleil du prisme tronqué nous a permis de conjecturer et ensuite de démontrer le théorème de Desargues dans le cas où les sommets des deux triangles sont deux à deux sur des droites parallèles. Rappelons cet énoncé.

7. *Si deux triangles sont tels que leurs sommets sont deux à deux sur des droites parallèles et que leurs côtés correspondants se coupent, alors les points d'intersection sont des points alignés.*

Quelle est l'ombre à la lampe du prisme tronqué ?

Les élèves tendent sur une table la feuille de papier blanc de format A3 et y déposent le prisme pour en observer l'ombre. Ils utilisent soit un prisme tronqué en tiges, soit un prisme en plexiglas sur lequel un triangle GHJ a été tracé au marqueur sur les faces, comme le montre la figure 30.

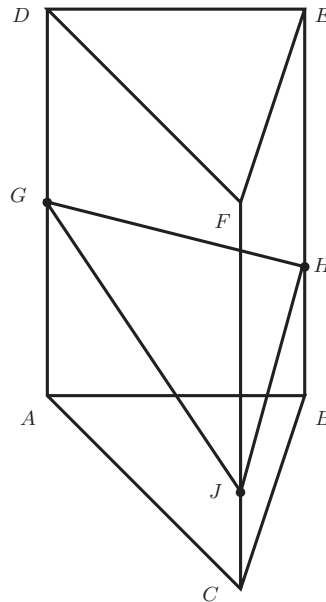


Fig. 30: Prisme tronqué

La lampe est fixée de telle manière que la feuille puisse contenir entièrement l'ombre du prisme tronqué $ABCDGEHJ$. Après avoir tracé la base ABC du prisme, les élèves marquent également la position des ombres des points G , H , J et les notent respectivement G' , H' et J' . Les arêtes parallèles AG , BH et CJ ont pour ombres les segments non parallèles AG' , BH' et CJ' . Le théorème 5 à la page 353, qui est exactement illustré par l'ombre du prisme, permet aux élèves de justifier rapidement que ces segments appartiennent à des droites concourantes dont le point de rencontre, noté L' , est la projection orthogonale du point lumineux sur le plan de la feuille (ou, plus généralement, sa projection parallèlement à la direction AG si le prisme est oblique). Les sommets des triangles ABC et $G'H'J'$ sont donc deux à deux sur des droites concourantes.

Le théorème 7 reste-t-il vrai si les sommets des triangles sont deux à deux sur des droites concourantes ?

Les côtés des triangles ABC et $G'H'J'$ sont prolongés, les droites AB et $G'H'$, BC et $H'G'$, AC et $G'J'$ se coupent respectivement en trois points M , N et P qui semblent alignés. Les différents groupes d'élèves constateront que, aux erreurs expérimentales près, cet alignement se reproduit sur chacun des dessins et qu'il n'est donc pas le fruit du hasard (figure 31).

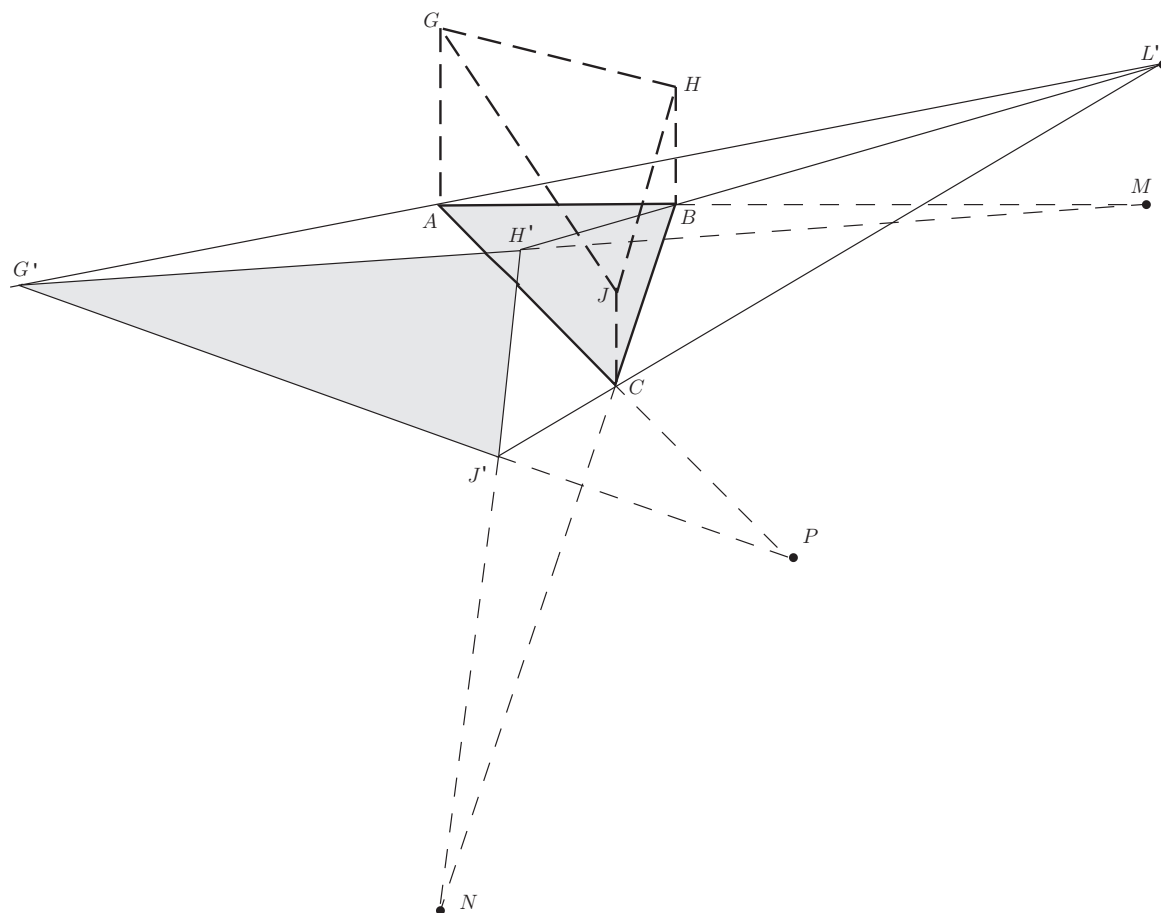


Fig. 31

Les élèves sont invités à formuler une conjecture à propos de la propriété d'alignement observée dans le plan de projection et à la démontrer.

La conjecture peut s'énoncer de la manière suivante :

8. *Si deux triangles sont tels que leurs sommets sont deux à deux sur des droites concourantes, et que leurs côtés correspondants se coupent, alors les points d'intersection sont des points alignés.*

La démarche proposée peut être adaptée à des élèves qui n'auraient pas rencontré le théorème de Desargues lors de l'activité 2 à la page 274. Dans ce cas, ils retrouveront comme cas particulier, en éloignant indéfiniment la lampe, la configuration dans laquelle les sommets sont deux à deux sur des droites parallèles. En effet, nous avons observé que la projection parallèle peut être considérée comme une projection centrale dont le centre se trouve à l'infini.

2.2 Démonstration du théorème

L'idée est d'utiliser les propriétés d'incidence des droites de l'espace et les propriétés de la projection centrale pour établir le théorème de Desargues dans le plan. Les triangles ABC et $G'H'J'$ sont respectivement les images

des triangles ABC et GHI par une projection centrale dont le centre est le point lumineux et le plan de projection est le plan ABC (figure 32). Ces deux triangles ABC et GHI appartiennent à des plans sécants dont la droite d'intersection peut être déterminée par les élèves.

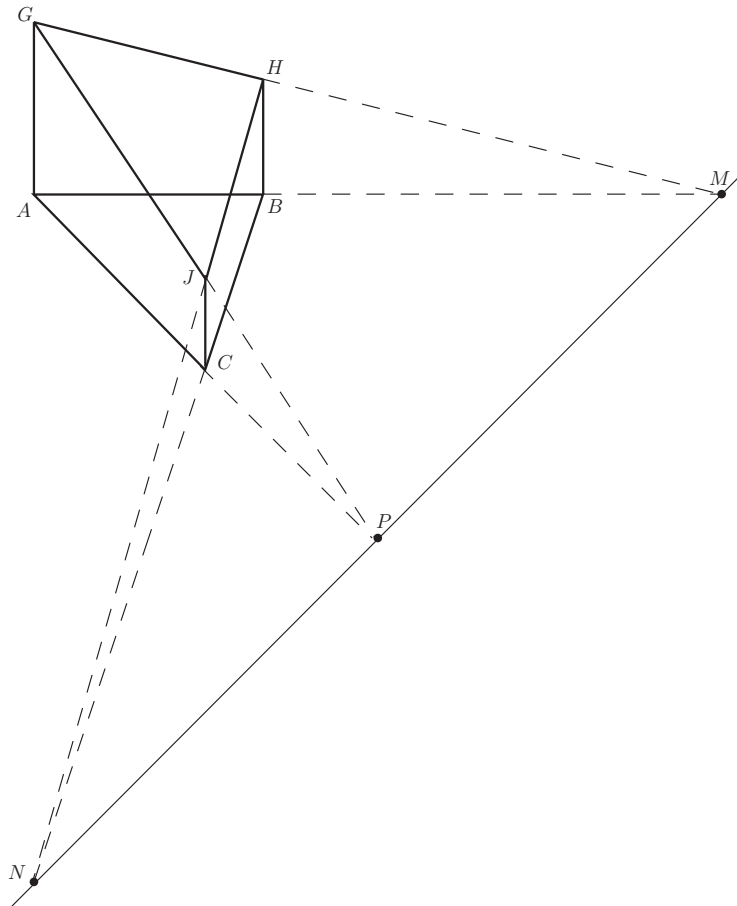


Fig. 32

Les deux droites coplanaires AB et GH se coupent en un point noté M qui appartient aux deux plans ABC et GHI et donc à leur droite d'intersection. Par un raisonnement similaire, le point N , point d'intersection des droites BC et HI , et le point P d'intersection des droites AC et GI , sont également des points de la droite d'intersection des deux plans. Ces trois points M , N et P sont donc alignés.

Les élèves reviennent alors à la figure dans le plan ABC par la projection du prisme tronqué $ABCGHI$ (figure 33).

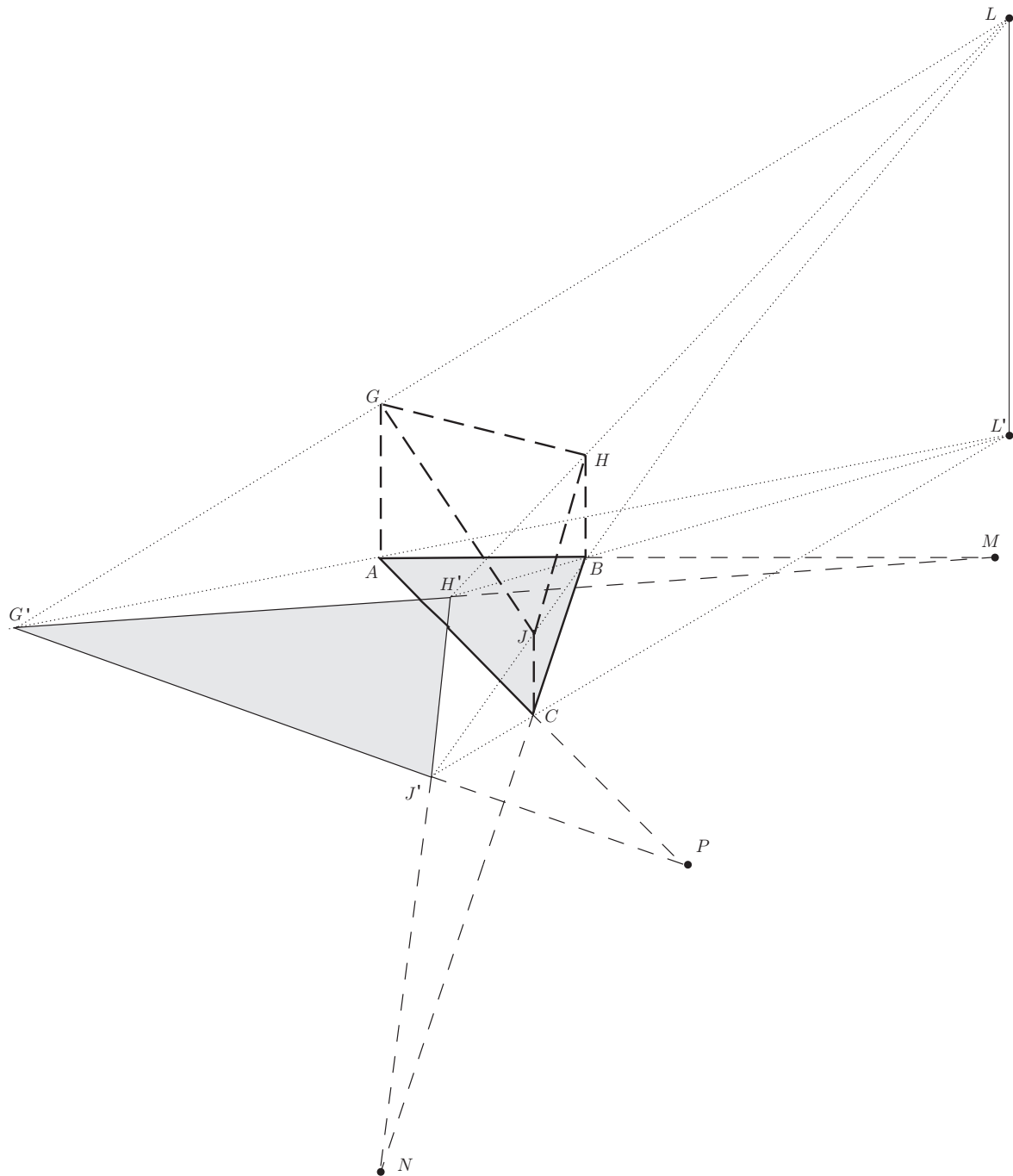


Fig. 33

Comme le plan ABC est le plan de projection de la projection centrale considérée, celle-ci envoie chacun des trois points M , N et P sur lui-même. Le point M , point d'intersection des droites AB et GH , est donc aussi le point d'intersection des droites AB et $G'H'$ dans le plan ABC . Le théorème de Desargues est ainsi établi, puisque ce raisonnement peut être répété pour les points N et P .

Il reste à montrer que toute configuration de Desargues dans le plan peut

être obtenue comme l'image par une projection centrale d'un prisme tronqué. Le problème posé aux élèves est de reconstituer le prisme tronqué à partir des triangles ABC et $G'H'J'$ dont les sommets sont deux à deux sur des droites concourantes.

Indications : le point L est placé arbitrairement, par exemple sur une verticale tracée en L' . La direction LL' permet de construire les arêtes du prisme qui lui sont parallèles. Dans le plan $G'AL$, la droite $G'L$ coupe l'arête issue de A en G . En procédant de la même manière, les points H et J sont retrouvés et le prisme $ABCG'H'J'$ est reconstitué.

Quelques figures, réalisées avec le logiciel Cabri-Géomètre et présentées ci-dessous, nous le montrent dans différents cas, même lorsque certains sommets du triangle $G'H'J'$ ne sont pas situés du même côté de L' que les points ABC . Bien entendu, la projection centrale qui apparaît dans ces figures ne peut plus être interprétée comme une ombre.

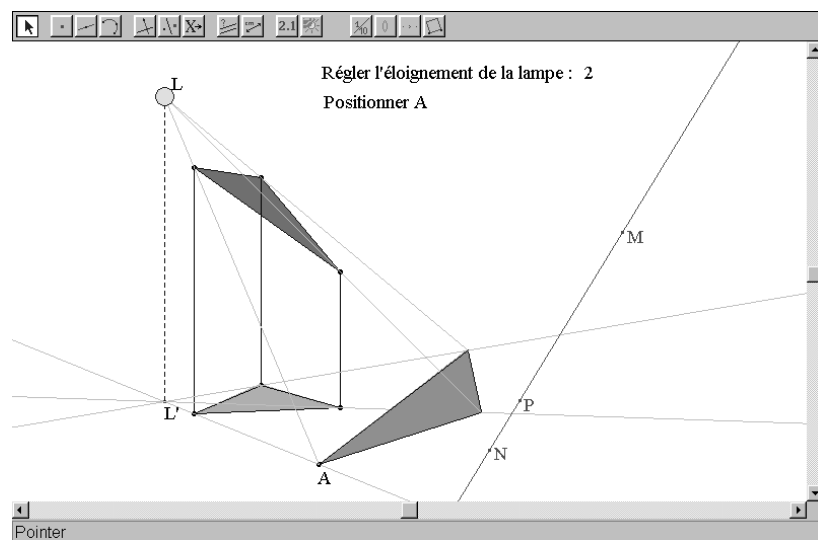


Fig. 34

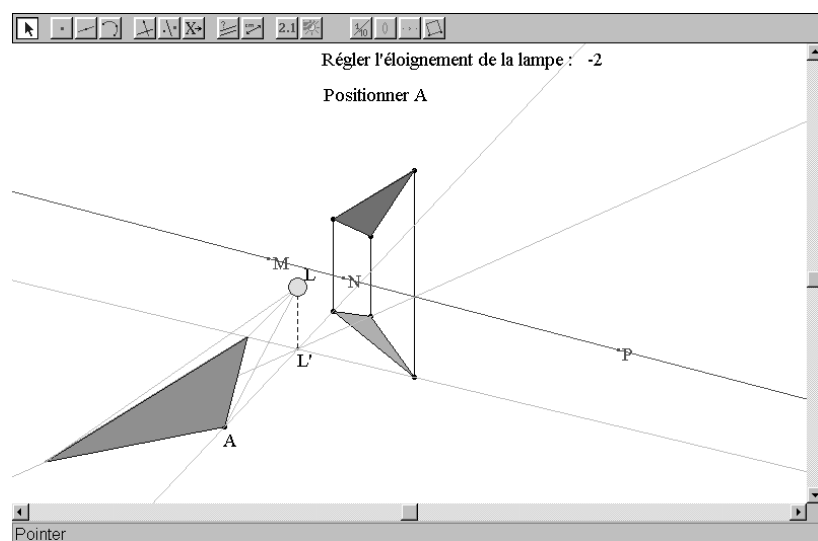


Fig. 35

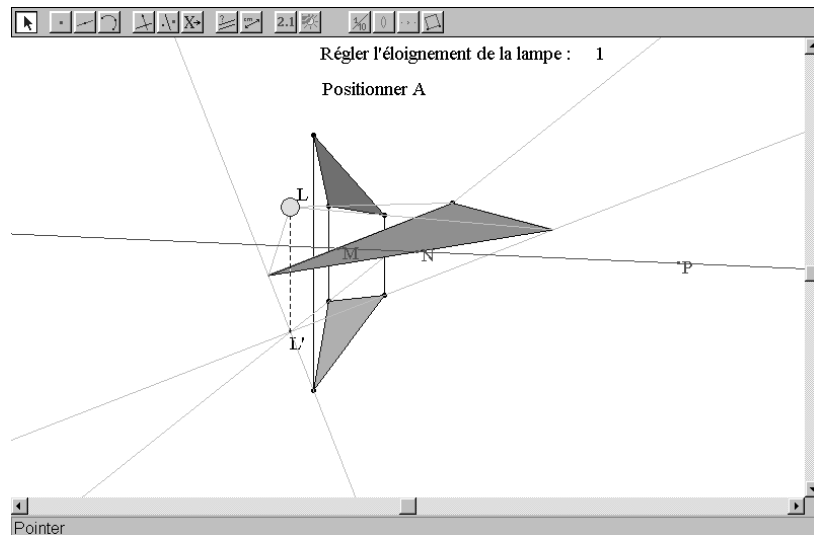


Fig. 36

2.3 Version spatiale

Dans le cas où les droites concourantes qui contiennent les sommets des triangles ne sont pas coplanaires, la démonstration du théorème de Desargues ne présente aucune difficulté. En effet, les droites AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$, coplanaires deux à deux, se coupent respectivement en M , N et P , ces trois points appartiennent aux deux plans ABC et $A'B'C'$ et donc à leur droite d'intersection. Ce qui prouve que M , N et P sont alignés.

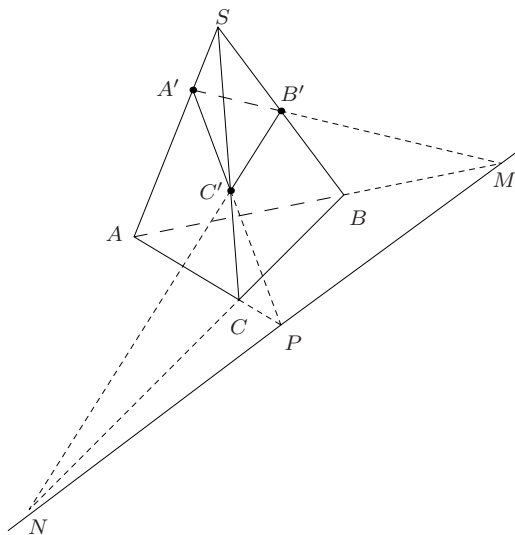


Fig. 37

Cas particuliers

Il peut arriver que l'un des couples de droites AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$ soit formé de droites parallèles :

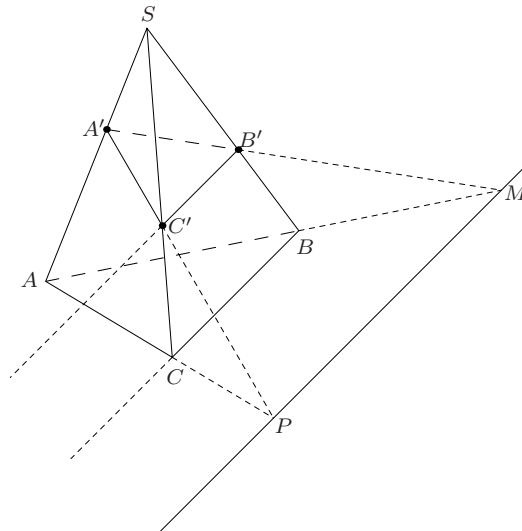


Fig. 38

Dans ce cas, le point N est le point à l'infini sur la droite MP .

Est-il possible que deux des trois couples de droites AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$ soient formés de droites parallèles? Dans ce cas, le troisième couple est, lui aussi, formé de droites parallèles. Les élèves peuvent découvrir et justifier cette propriété (au moyen du critère de parallélisme de deux plans). C'est la droite de l'infini qui joue alors le rôle de la droite MNP .

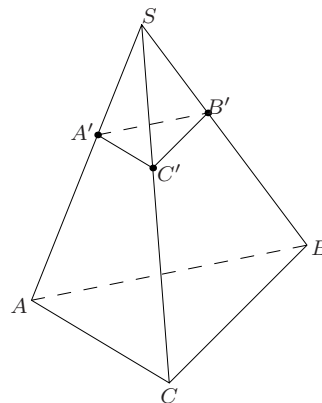


Fig. 39

Ces deux dernières figures peuvent être interprétées comme des tétraèdres tronqués dans l'espace, mais également comme des figures planes.

Remarques

1. Le théorème de Desargues dans le plan peut être obtenu de différentes manières :

- par projection centrale d'un prisme tronqué (c'est ce qui a été développé dans cette activité),
- par projection parallèle d'un tétraèdre tronqué,
- par projection centrale d'un tétraèdre tronqué.

Chacune de ces démonstrations fait appel au même type de raisonnement. Des dessins illustrant ces deux dernières méthodes ont été réalisés avec Cabri-Géomètre et sont présentés ci-dessous.

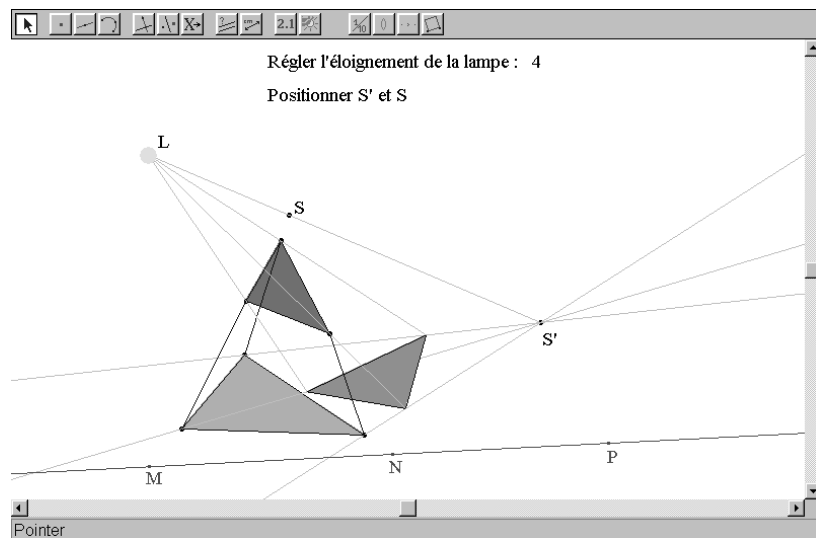


Fig. 40

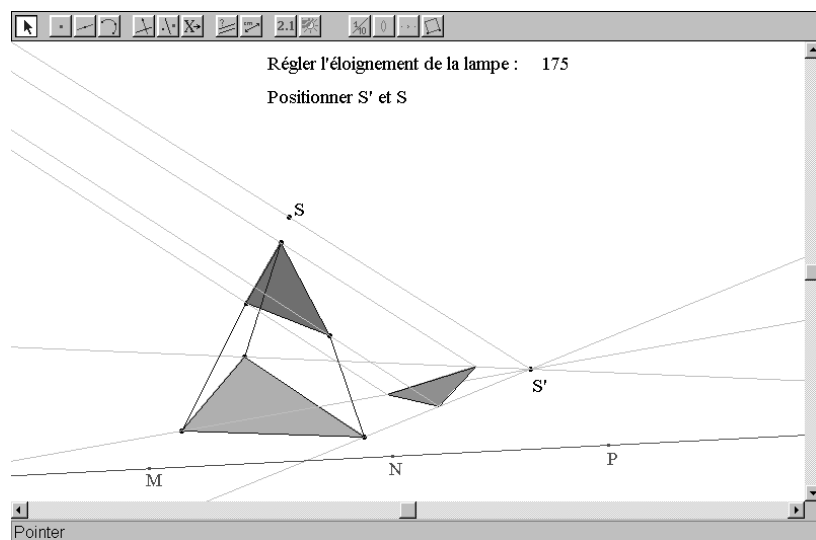


Fig. 41

2. Toute section plane triangulaire dans un tétraèdre fait apparaître une configuration de Desargues.