

Deuxième partie

# Construire et représenter

Un aspect de la géométrie

de 10 à 15 ans

## Remerciements

Les activités présentées dans les trois premières sections du chapitre 6 et dans la première section du chapitre 7 ont été expérimentées par Thaïs Sander à l'école « Les Tournesols » à Anderlecht. Nous remercions Frédéric Gérard, instituteur en 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> primaire, qui nous a accueillis pour cette expérimentation.

Les autres activités du chapitre 7 ont été expérimentées par Françoise Van Dieren à l'Institut Saint-Dominique à Schaerbeek dans les classes de Paul Vandeleene, en 2<sup>e</sup> c et, pour l'activité *Quel milieu ?*, dans la classe de Chantal Marchand, en 3<sup>e</sup> d. Nous remercions ces enseignants pour leurs avis et remarques ainsi que les élèves pour leur collaboration dynamique.

Les activités des sections 2 à 4 du chapitre 7 ont été expérimentées par Marie-Françoise Van Troeye dans sa classe de 1<sup>ère</sup> a3 à l'Institut d'enseignement technique secondaire de l'Université du travail Paul Pastur à Charleroi.

## AUTOUR DES PROJECTIONS ORTHOGONALES

### 1 Des solides vus de tous les côtés

*De quoi s'agit-il ?*

Reconnaître des projections orthogonales d'un assemblage d'objets. Dessiner des assemblages de cubes de plusieurs points de vue.

*Enjeux*

Se familiariser avec plusieurs vues d'un même objet ou ensemble d'objets. Apprendre à lire de tels dessins et à les faire correspondre à un objet ou ensemble d'objets déterminés, dans des positions données. Exercer sa faculté d'orientation, prendre mentalement le point de vue d'une autre personne.

**Compétences.** – *Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer. Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments en vraie grandeur.*

*De quoi a-t-on besoin ?*

Des maquettes, par exemple d'une maison, une tour et un arbre, que l'on assemble comme sur la figure 1 à la page suivante pour former un petit paysage. Les fiches 1 et 2 (pages 201–202) fournissent des documents à photocopier sur du bristol et qui permettent de créer rapidement ces maquettes.

Des vues du paysage (projections orthogonales), prises aux quatre points cardinaux<sup>1</sup> (figures 2 à 5). L'enseignant devra préparer autant de jeux de quatre vues qu'il aura de groupes d'élèves.

Quelques cubes pleins, par exemple de 10 cm de côté.

De quoi dessiner à main levée sur du papier quadrillé.

**Prérequis.** – Les élèves qui ont pratiqué l'activité *Les dessins de parallépipèdes rectangles vus de face et du dessus*<sup>2</sup> auront moins de difficulté que les autres.

<sup>1</sup> Les points cardinaux sont utilisés ici pour repérer commodément les quatre côtés de la table. L'idée n'est pas de les faire correspondre aux points cardinaux géographiques.

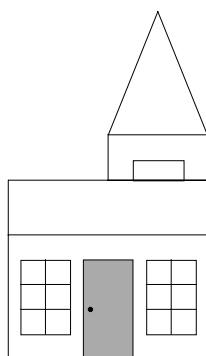
<sup>2</sup> *Construire et représenter. Un aspect de la géométrie de 2 ans et demi à 10 ans*, CREM, 1999.

*Comment s'y prendre ?*

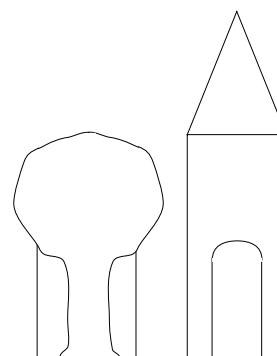
**Du paysage aux projections, aller et retour.** – Dans un premier temps, le paysage avec la maison, la tour et l'arbre, est disposé sur une table. On veille à disposer les murs de la maison et de la tour parallèlement aux bords de la table. On donne les quatre vues aux élèves, et on leur demande de déterminer de quel côté de la table chacune d'elles a été prise. Ils peuvent tourner autour de la table, ou encore, avec un peu d'habitude, répondre à la question sans se déplacer.



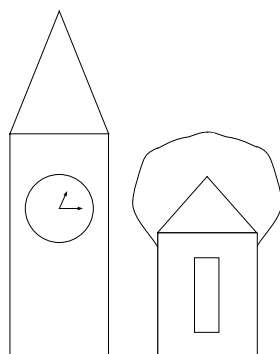
*Fig. 1*



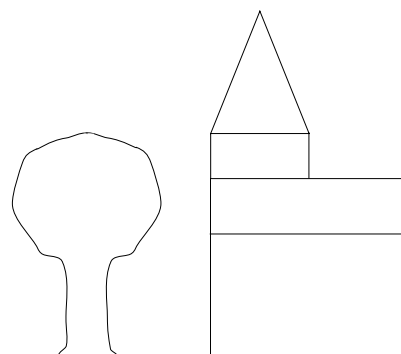
*Fig. 2*



*Fig. 3*



*Fig. 4*



*Fig. 5*

Dans un deuxième temps, la table est d'abord nue. On donne quatre vues aux élèves (pas nécessairement les mêmes que les précédentes). Ces vues sont marquées par les points cardinaux. On demande aux élèves de reconstituer le paysage.

**Dessiner des assemblages de cubes.** – On rassemble quelques cubes au milieu d'une table, de sorte que leurs arêtes horizontales soient parallèles aux bords de la table. On les dispose par exemple comme le montre la figure 6, et en tout cas de sorte qu'on en ait une vue différente selon le côté de la table d'où on les regarde. On demande à chaque élève de dessiner l'assemblage à main levée, tel qu'il le voit des quatre côtés de la table, puis du dessus. On explique que pour réaliser ce genre de dessin, on se met bien en face de la construction, de sorte que chaque cube soit représenté par un carré. Ou alors on ne voit pas un cube parce qu'il est caché par un autre.

Il est commode de désigner les côtés de la table par les points cardinaux *N*, *E*, *S* et *O*. Le résultat du dessin est constitué de bandes de cinq dessins comme celle que montre la figure 7. Les points cardinaux sont indiqués sur chaque bande.

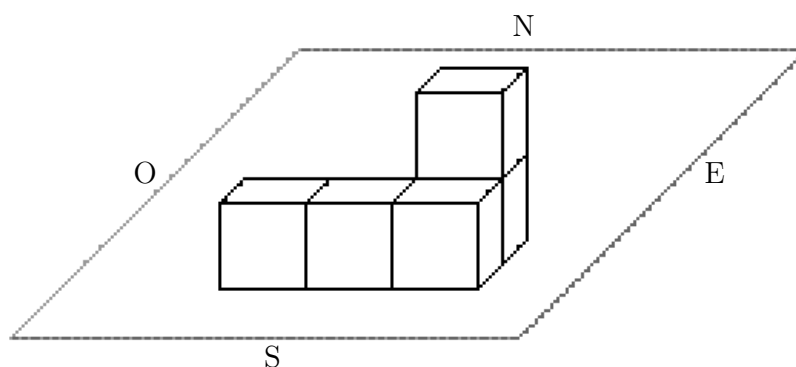


Fig. 6

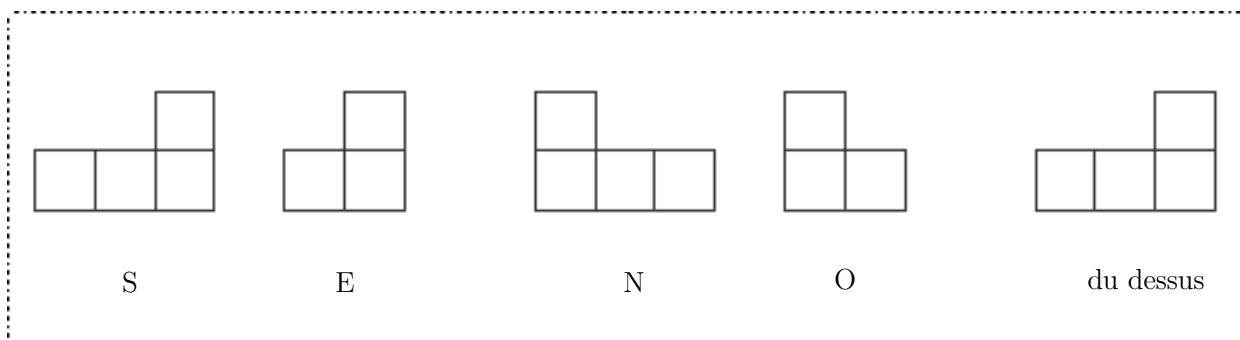


Fig. 7

Ceci fait, on échange les bandes entre élèves, et on leur demande de reconstituer sur une table l'assemblage correspondant.

*Prolongements possibles*

On peut augmenter le nombre de cubes, varier les assemblages de cubes ou les maquettes, assembler d'autres objets tels que des boîtes d'allumettes, des boîtes à conserve cylindriques, etc. On peut disposer les objets plus symétriquement, de sorte que l'assemblage soit vu de la même façon de divers points cardinaux.

### Commentaires

Les représentations du paysage sont des projections orthogonales. Elles sont pourtant présentées aux élèves comme des « vues ». Nous proposons donc de ne pas faire ici la distinction. Si des élèves observent que ce qui est dessiné n'est pas toujours exactement ce qu'ils voient, même en se plaçant soigneusement face au paysage, on pourra commencer à leur expliquer les principes du dessin en projection orthogonale. On peut pour cela montrer avec des tiges ou des aiguilles à tricoter comment chaque point est projeté sur le plan du dessin.

De même, en ce qui concerne les dessins d'assemblages de cubes, on insiste sur le fait que chaque cube vu de face ou du dessus est représenté par un carré. Le dessin est alors une projection orthogonale, mais on l'a obtenue sans recourir explicitement aux règles qui définissent ces projections. Le choix d'assemblages de cubes comme objets à représenter aboutit donc à une première familiarisation, avant tout intuitive, avec les projections orthogonales.

## 2 Lire des projections orthogonales

*De quoi s'agit-il ?*

Observer des projections orthogonales de trois hélicoptères. Obtenir des renseignements, y compris des mesures, à partir de quatre projections orthogonales d'une auto.

*Enjeux*

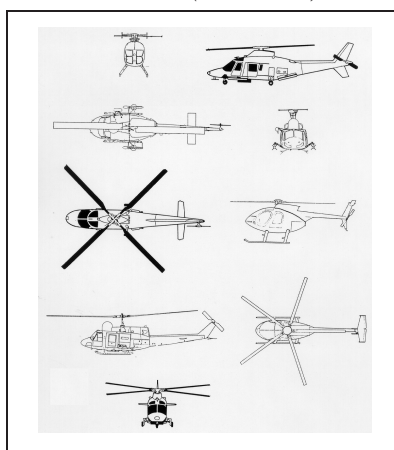
Apprendre à faire le lien entre les projections orthogonales coordonnées d'un même objet en s'appuyant sur des indices. Décrire un objet d'après des projections. Se familiariser avec la notion d'échelle.

**Compétences.** – Voir compétences à la page 113. En outre : *Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures. Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.*

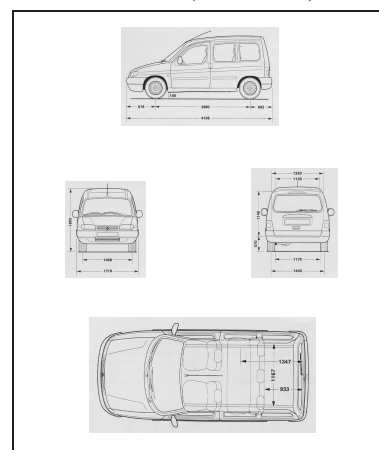
*De quoi a-t-on besoin ?*

Les fiches 8 et 9.

Fiche 8 (page 208)



Fiche 9 (page 209)



La fiche 8 représente trois hélicoptères, avec trois vues pour chacun, mais toutes ces vues sont présentées en désordre<sup>3</sup>. La fiche 9 présente quatre projections orthogonales d'une auto.

*Comment s'y prendre ?*

**Trier des vues d'hélicoptères.** – On donne la fiche 8 aux élèves, en leur expliquant qu'il s'agit de trois hélicoptères qui ont été représentés chacun par trois vues. Le problème consiste à rassembler chaque fois trois vues correspondant à un même hélicoptère.

Les figures 8 à 10 présentent la solution du problème. Évidemment, on repère sans trop de peine que l'un des hélicoptères a été dessiné en traits plus épais que les deux autres, avec les pales de l'hélice noircies, de même que les vitres. Ce sont là des indices extérieurs qui permettent de rassembler ces trois vues (figure 8).

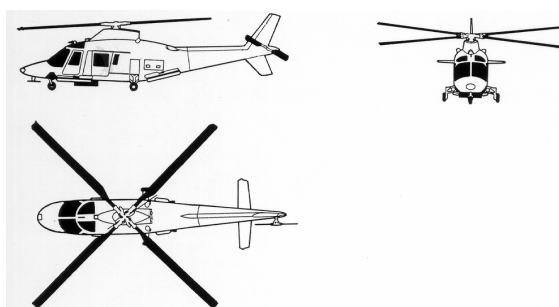


Fig. 8

<sup>3</sup> On prendra garde qu'une des vues d'hélicoptère est incomplète. Il s'agit de celui qui possède une hélice à cinq pales : cette hélice n'est représentée que partiellement sur la vue de face.

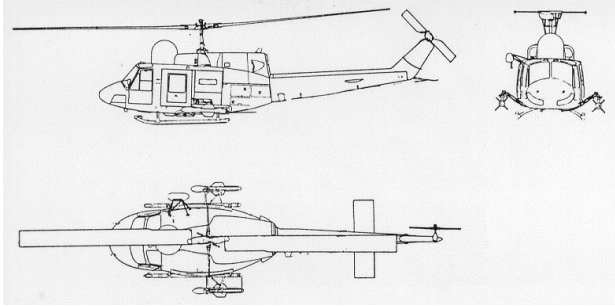


Fig. 9

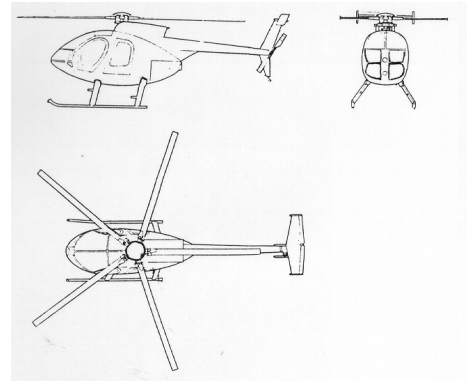


Fig. 10

En ce qui concerne les deux autres hélicoptères, on remarque par exemple qu'un des deux a une carlingue plus longue que l'autre, ce qui permet déjà d'apparier les vues de profil et du dessus de la figure 9 (carlingue allongée), de même que les vues de profil et du dessus de la figure 10 (carlingue courte).

Il reste alors à attribuer les deux vues de face. On observera par exemple que la carlingue de l'hélicoptère à deux pales est plus large que celle de l'hélicoptère à cinq pales. Ceci permet de joindre la vue de face ayant la carlingue la plus large à la figure 9, et celle ayant la carlingue étroite à la figure 10.

Il va de soi que ceci n'est qu'une des façons de résoudre la question. On peut s'attendre à ce que les élèves découvrent d'autres indices. Et aussi à ce qu'ils fassent au passage pas mal d'observations sur les hélicoptères.

***Se renseigner sur une auto.*** – On donne la fiche 9 aux élèves.

Ils identifient sans peine les diverses vues. On peut alors leur demander quels types de renseignements on peut obtenir à partir de ces projections. Des questions possibles sont :



1. Quelles sont les dimensions hors tout de la voiture ?
2. En quelles unités sont données les mesures ?
3. Quelles sont parmi les quatre vues, celles qui sont à la même échelle ?
4. Quelles sont les échelles de ces diverses représentations ?
5. Sur quelles vues peut-on déterminer le diamètre des roues ? La hauteur de la voiture ?
6. Déterminer approximativement le volume de l'habitacle.
7. Combien de personnes peuvent-elles prendre place dans cette voiture ? Comment détermine-t-on ce nombre ?
8. Quel est le volume approximatif du coffre ? Et quel est le volume du coffre lorsqu'on a dégagé le siège arrière ?
9. Comparez les écartements des roues avant et arrière.
10. Évaluer la surface vitrée totale de la voiture.

### 3 Construire un solide donné par ses projections

*De quoi s'agit-il ?*

Construire un solide simple, avec ses dimensions exactes, tel qu'il est donné par trois projections orthogonales.

*Enjeux*

Reconnaître un objet donné par trois projections orthogonales, comprendre ce que représente chacune des projections, utiliser les projections pour obtenir des renseignements sur l'objet, y compris ses mesures, construire l'objet.

On ne pousse pas encore ici l'apprentissage des projections orthogonales coordonnées jusqu'à permettre aux élèves d'en construire eux-mêmes. Cela sera fait à l'activité suivante. Néanmoins on s'explique à leur sujet, on commence à les discerner des simples perceptions visuelles.

**Compétences.** – *Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié. Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement. Dans une représentation plane d'un objet de l'espace, repérer les éléments en vraie grandeur. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels. Fractionner des objets en vue de les comparer.*

*De quoi a-t-on besoin ?*

Un jeu de solides comprenant un cube, un prisme à base carrée, un parallépipède rectangle à trois arêtes inégales, un prisme à base triangulaire, une pyramide à base triangulaire, une pyramide à base carrée, un cylindre droit et un cône droit.

La fiche 10.

Les représentations de ces divers solides, chacun par trois projections coordonnées (fiche 11).

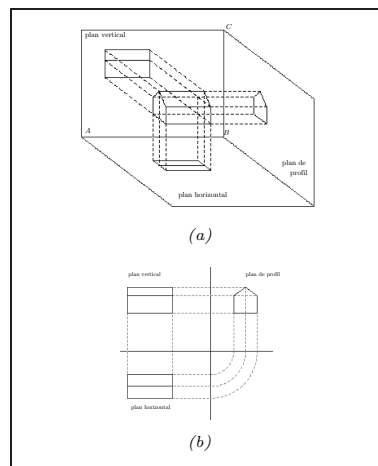
Du bristol, des ciseaux et du ruban adhésif.

**Prérequis.** – Avoir une certaine idée des projections orthogonales, par exemple en ayant travaillé l'activité *Des parallélépipèdes rectangles dessinés de face et du dessus* à la page 60 ainsi que les activités 1 et 2 de ce chapitre. Pour la construction du cône, qui est le dernier solide envisagé ci-après, savoir que dans un cercle, les arcs interceptés par deux angles au centre sont entre eux comme ces angles. Cette dernière partie de l'activité est adaptée aux élèves de troisième année du secondaire.

*Comment s'y prendre ?*

On donne la fiche 10 aux élèves, pour leur expliquer le principe des trois projections orthogonales coordonnées. Il est utile à ce stade de matérialiser les trois plans de projection, par exemple par des plaques de polystyrène (frigolite), et d'expliquer les directions de projection en les montrant avec un fil à plomb, ou des tiges, ou des aiguilles à tricoter. On explique alors comment on passe à une figure plane (passage de la figure (a) à la figure (b) de la fiche 10) en rabattant le plan horizontal sur le plan vertical par une rotation d'un quart de tour autour de  $AB$ , et en rabattant le plan de profil sur le plan vertical par une rotation d'un quart de tour autour de  $BC$ . Les lignes de rappel en quart de cercle (figure (b) de la fiche 10) sont une manière de montrer cette dernière rotation.

Fiche 10 (page 210)



Ces explications permettent entre autres de reconnaître que sur la projection verticale de la maison, le toit est représenté par un rectangle et non par un trapèze (comme sur la figure 11 à la page suivante). Cela conduit aussi à accepter, un peu plus tard au cours de l'activité, que la vue verticale du cône (fiche 11h) se présente comme un triangle, et non comme sur la figure 12.

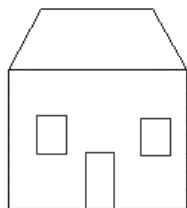


Fig. 11

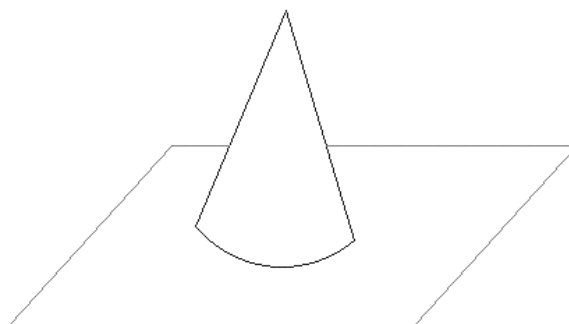
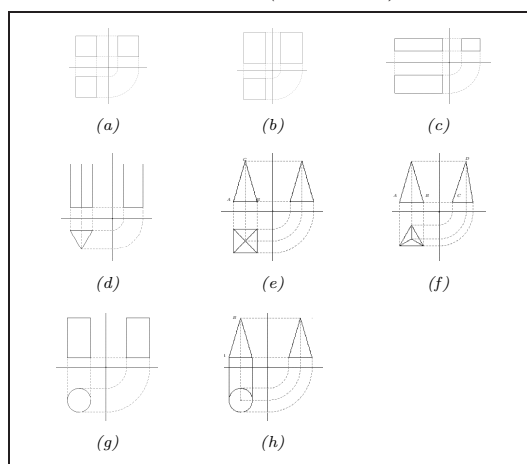


Fig. 12

On demande ensuite aux élèves d'apparier les solides à leurs représentations sur la fiche 11. Cela permet d'approfondir un peu leur notion des projections orthogonales.

Fiche 11 (page 211)



Ils construisent alors, en bristol, les solides les plus simples, à savoir le cube, le parallélépipède, les prismes et le cylindre. Ce sont ceux dont les dimensions sont faciles à relever en vraie grandeur sur les projections (voir fiche 11 à la page 211.) Il va de soi que les projections doivent constituer à ce stade du travail la seule source de renseignement. En particulier les solides eux-mêmes ne sont pas à ce moment disponibles aux élèves.

On poursuit par les autres solides. Voici une façon de construire ceux qui posent le plus de problèmes aux élèves.

**La pyramide à base carrée.** – Sa base apparaît en vraie grandeur sur la vue du dessus (parfois appelée aussi vue en plan). Sa surface latérale est constituée de quatre triangles isocèles identiques. Leur base se lit en  $AB$  sur la fiche 11e. Pour trouver leur hauteur commune, imaginons la hauteur  $AC$  de la face de gauche. Cette hauteur est parallèle au plan vertical. Donc elle se projette sur celui-ci en vraie grandeur.

**La pyramide à base triangulaire.** – Sa base apparaît en vraie grandeur sur la vue du dessus. Sa surface latérale est constituée de trois triangles

isocèles identiques. Leur base se lit en  $AB$  sur la fiche 11f. Pour trouver leur hauteur commune, imaginons la hauteur  $DC$  de la face de devant. Elle est parallèle au plan de profil. Donc elle se projette en vraie grandeur sur ce plan.

**Le cône.** – Sa base apparaît en vraie grandeur sur la vue du dessus. Appelons  $r$  le rayon de la base. Sa surface latérale développée est constituée par un secteur de cercle comme le montre la figure 13. En effet, sur le cône, tous les points de la circonférence de base se trouvent à égale distance du sommet. Cette distance est donnée en vraie grandeur par  $AB$  sur la vue verticale. Appelons-la  $R$ . Reste à trouver l'angle du secteur de cercle. Il faut arriver à ce que la circonférence de base s'applique exactement sur la périphérie du secteur. Or la circonférence de base mesure  $2\pi r$ . La circonférence du cercle correspondant au secteur mesure elle,  $2\pi R$ . Or, dans un cercle, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils interceptent. Par conséquent, l'angle  $\alpha$  du secteur satisfait à l'équation

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}.$$

On tire de là que

$$\alpha = 360 \cdot \frac{r}{R}.$$

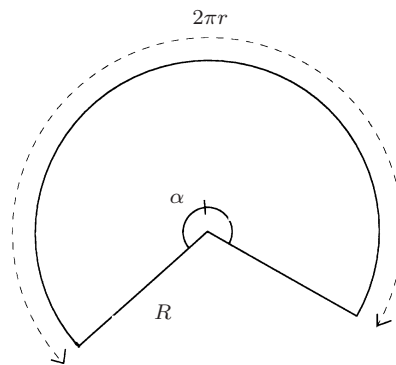


Fig. 13

*Prolongements possibles*

Varié les objets à construire : on peut songer par exemple au tétraèdre et à l'octaèdre réguliers, ou encore à certains polyèdres semi-réguliers, par exemple le cuboctaèdre.

## 4 Dessiner des projections orthogonales

- De quoi s'agit-il ?* Dessiner les trois projections coordonnées des solides les plus simples.
- Enjeux* Essentiellement, il s'agit d'apprendre à dessiner les trois vues d'un solide simple de façon classique, en respectant les mesures et en faisant apparaître les lignes de rappel.
- Compétences.** – *Tracer des figures simples. Associer un solide à sa représentation plane et réciproquement.*
- De quoi a-t-on besoin ?* Un jeu de solides de quelques centimètres de haut, à savoir : un cube, un prisme à base carrée, un parallépipède rectangle, un prisme à base triangulaire, une pyramide à base carrée, un cylindre droit, un cône droit, une sphère.
- De quoi dessiner.
- Comment s'y prendre ?* On donne la fiche 10 (voir page 120) aux élèves, ainsi que les solides prévus dans la rubrique *De quoi a-t-on besoin ?*, et on leur propose l'activité suivante.
- En vous servant du modèle de représentation de la fiche 10, dessinez trois projections pour chacun des solides.
- On insiste sur la précision du dessin. Soit les élèves utilisent d'eux-mêmes les lignes de rappel pour construire les trois figures, soit le professeur leur montre sur le tas comment s'y prendre à cet égard.
- Prolongements possibles* Cette activité prend tout son sens si elle introduit à d'autres constructions de représentations orthogonales, dans la suite du cours de mathématiques, ou dans des cours de technique. Par exemple il est instructif, pour les élèves de sixième, de construire les projections orthogonales de sections planes de cylindres et de cônes.