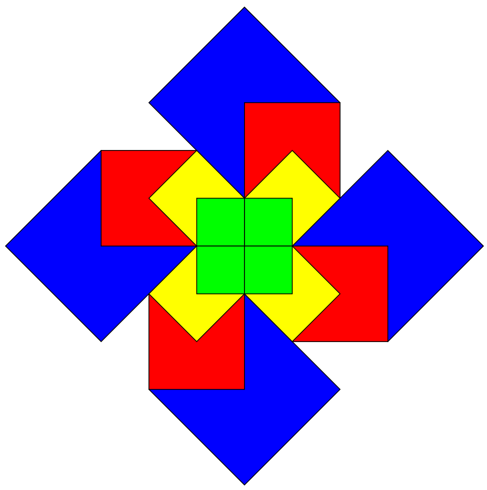
Apprenti Géomètre

Impact du logiciel « Apprenti Géomètre » sur certains apprentissages

Tome 2



Ministère de la Communauté française

CREM

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

2007

Deuxième partie

La mesure des aires

Chapitre 4

Aperçu de l'histoire de la mesure

Le présent chapitre n'est pas un cours de mathématique. On y trouvera donc à l'occasion sans démonstration des résultats non triviaux. Ce n'est pas non plus un cours d'histoire des mathématiques. Nous ne proposons donc pas au lecteur un exposé systématique et exhaustif de l'évolution du concept de mesure. Nous avons plutôt voulu, à travers quelques points particuliers, montrer l'influence réciproque des concepts de mesure et de nombre. Compte tenu de ce que les mathématiques arabes ont trop longtemps été méconnues, nous avons également saisi cette occasion pour attirer l'attention des lecteurs sur leur importance historique, en leur accordant une place assez importante. Pour plus de détails, le lecteur intéressé se rapportera à la bibliographie.

4.1 Grandeurs et nombres

Dans l'esprit des élèves, le nombre est prépondérant, au point de parfois faire oublier le contexte dans lequel il apparaît. Il est donc essentiel de se rappeler que *le nombre* est du domaine de l'abstraction, et n'existe que dans notre esprit. Personne n'a jamais vu « 7 » passer dans la rue... L'étude des nombres relève de l'arithmétique, de l'algèbre, de l'analyse.

Par contre, la « réalité concrète » est caractérisée par des *grandeurs* (longueur, aire, volume, intensité d'un son, d'une lumière, d'un courant électrique, ...).

Il est essentiel que l'élève qui calcule l'aire d'un triangle en multipliant « sa » base par « sa » hauteur, et trouve 15 cm^2, ait bien présent à l'esprit la signification de ce résultat : *le triangle donné a la même aire que 15 carrés de 1 cm de côté.*

De plus, c'est précisément cette association entre le nombre et la réalité concrète qui a créé et fait évoluer le concept même de nombre (en tout cas jusqu'aux rationnels et certains irrationnels comme par exemple le nombre π ou les radicaux). On ne s'étonnera donc pas que dans le présent chapitre, les développements des concepts de nombre et de mesure soient intimement mêlés.

La théorisation de la géométrie — c'est-à-dire le courant d'idées menant des résultats strictement empiriques à une théorie raisonnée — résulte du désir de modéliser numériquement les grandeurs physiques particulières que sont la longueur, l'aire, le volume. Décrire l'évolution du concept de mesure, c'est donc aussi décrire — fût-ce sommairement — l'évolution de la géométrie, comme c'est décrire celle du concept de nombre.

4.2 À l'origine

Si l'on accepte la définition étymologique du mot *géométrie* (la mesure de la terre, des terrains), l'histoire de la géométrie commence très tard. Selon l'historien grec HÉRODOTE (env. 484 – 420 av. J.-C.), c'est en Égypte que la géométrie a été inventée :

> *Les prêtres me dirent encore que ce même roi* ([1]) *fit le partage des terres, assignant à chaque Égyptien une portion égale de terre, et carrée, qu'on tirait au sort ; à la charge néanmoins de lui payer tous les ans une certaine redevance, qui composait son revenu. Si le fleuve enlevait à quelqu'un une partie de sa portion, il allait trouver le roi, et lui exposait ce qui était arrivé. Ce prince envoyait sur les lieux des arpenteurs pour voir de combien l'héritage était diminué, afin de ne faire payer la redevance qu'à proportion du fonds qui restait. Voilà, je crois, l'origine de la géométrie, qui a passé de ce pays en Grèce. Car pour l'usage du polos, du gnomon et de la division du jour en douze parties, c'est des Babyloniens que les Grecs les apprirent.([45], livre* II, *§ 109).*

Ce texte est susceptible de plusieurs lectures. La plus fréquente se limite à l'intervention des arpenteurs en vue de redélimiter les parcelles de terrain après chaque crue du Nil. Michel SERRES, [68], fait remarquer que ces crues ne sont évoquées nulle part par HERODOTE. Pour lui, le mot important est le mot *proportion*, qui marque l'apparition d'un *raisonnement*. L'origine de la géométrie ne résiderait pas tant dans un besoin de *mesurer* que dans un besoin d'établir des *proportionnalités* : entre les biens des paysans et leurs impôts d'une part, entre les mêmes biens et ce que nous appellerions des plans cadastraux d'autre part. Ces deux aspects ne sont pas nécessairement liés aux crues du Nil.

Pour G. BARTHÉLEMY, [9], ce sont ces crues qui ont fait naître le besoin de représenter l'emplacement des champs par des dessins géométriques. Les géomètres égyptiens utilisaient un quadrillage régulier pour retrouver le bien de chaque propriétaire après l'inondation annuelle du Nil. Le quadrillage s'appuyait sur les berges du fleuve. Des piquets étaient placés sur les rives, et permettaient de retracer les parallèles aux mêmes endroits, de crue en crue.

Les géomètres égyptiens ne connaissaient pas le théorème de PYTHAGORE sous sa forme générale, mais utilisaient ce qu'on appelle des triplets pythagoriciens. Le triplet 3, 4, 5, par exemple, leur permettait de construire, de manière empirique, un angle droit.

En Mésopotamie, en Inde, tout comme en Égypte, on utilisait des cordes à nœuds pour obtenir des angles droits.

([1]) *Il s'agit de* SESOSTRIS, *pharaon de la douzième dynastie, 1800 ans avant Jésus-Christ.*

Par exemple, une corde à 13 nœuds régulièrement espacés (et donc comptant 12 intervalles égaux) permet de tracer un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 (*Fig.4.1*). On retrouve un triplet qui est en fait, un cas particulier du théorème de Pythagore.
Cet outil permet également de tracer des triangles isocèles (*Fig.4.2*), sans utiliser d'unités de mesure algébriques.

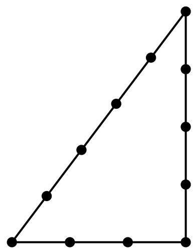


Fig. 4.1

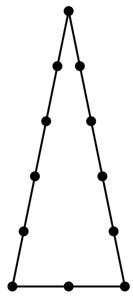


Fig. 4.2

Cependant, d'après les vestiges aujourd'hui en notre possession, nous savons que, tant les Égyptiens que les Babyloniens, utilisaient ces résultats, mais nous ne sommes pas en mesure d'affirmer qu'ils en avaient établi des démonstrations, [25]. Jean-Pierre Friedelmeyer, [37], estime qu'il serait parfaitement arbitraire d'accepter le savoir-faire des Indiens, Babyloniens ou des Égyptiens, comme un commencement : la mesure au sens le plus simple associe un nombre à un segment de droite, une surface ou un volume, et présuppose donc les concepts nullement spontanés de segment de droite, d'angle droit et surtout de figures standard qui servent d'unités. L'association faite par la mesure n'est pas une simple correspondance immédiate : il faut, en règle générale, changer la forme de l'objet à mesurer pour la ramener à un segment de droite, à des carrés ou à des cubes, et donc la manipulation des formes (compositions et décompositions) précède dans l'histoire la mesure des grandeurs et en est un élément fondamental. À ces manipulations succèdent et s'associent ensuite des comparaisons numériques et des calculs divers.

On peut aussi penser que les concepts de segment, d'angle... sont apparus et se sont développés en concomitance avec les premières mesures et que la géométrie n'a pas eu un commencement, mais plusieurs !

De nombreux historiens s'accordent à penser que Thalès de Milet (env. 625–547 av. J.-C.) est le premier *mathématicien* connu. En effet, il semble être le premier à avoir énoncé ou démontré des propriétés générales vraies pour tous les éléments d'une même classe. Une anecdote — incontrôlable — rapporte que, confronté au sommet inaccessible de la pyramide de Kheops, Thalès aurait dit : *Puisque ma main ne peut effectuer la mesure, ma pensée le fera.* C'est ce pari extraordinairement fou qui l'aurait conduit au fameux « Théorème de Thalès (2) », connu de tous.

Plutarque (40–120), qui vivait 600 ans après Thalès, relate la mesure de la pyramide par celui-ci, [60] :

> *Ainsi, vous,* Thalès, *[...] vous avez mesuré la pyramide sans le moindre embarras et sans avoir eu besoin d'aucun instrument. Après avoir dressé votre bâton à l'extrémité de l'ombre que projetait la pyramide, vous construisîtes deux triangles par la tangence d'un rayon, et vous démontrâtes qu'il y avait la même proportion entre la hauteur du bâton et la hauteur de la pyramide qu'entre la longueur des deux ombres.*

(2) La dénomination « théorème de Thalès » désigne dans les pays anglo-saxons le fait qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit. Dans les pays francophones, elle désigne la propriété de proportionnalité dont il est question ici, mais n'est pas attestée avant la fin du XIXe siècle.

Comment mesurer la hauteur d'une pyramide à l'aide d'un bâton ?
Le rapport entre la hauteur réelle de la pyramide et son ombre, est le même que le rapport entre la hauteur de n'importe quel objet et son ombre. En particulier, il est égal au rapport entre la taille du bâton et son ombre (*Fig. 4.3*).

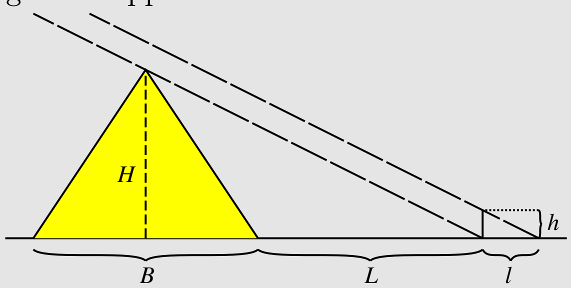


Fig. 4.3 : La pyramide de Thalès.

On en déduit la proportion, que nous écrivons en notations modernes

$$\frac{H}{\frac{1}{2}B+L}=\frac{h}{l}$$

On obtient ainsi la hauteur H de la pyramide.

Dépouillé de tout contexte historique, le théorème « de THALÈS » devient :

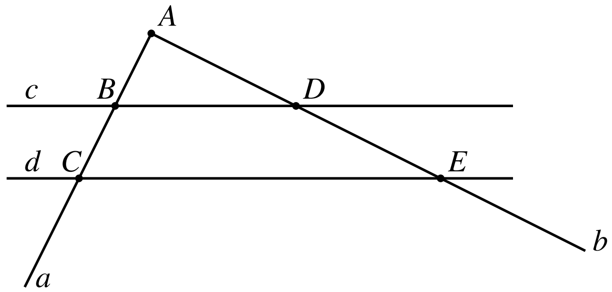


Fig. 4.4

Si deux droites sécantes a et b sont coupées par deux parallèles c et d, les segments déterminés sur a sont dans le même rapport que ceux déterminés sur b :

$$\frac{|AD|}{|DE|}=\frac{|AB|}{|BC|}$$

Ce résultat, qu'il soit ou non dû à THALÈS, remonte certainement aux débuts de la géométrie et n'est qu'une manifestation du concept de proportionnalité dont nous avons vu l'importance que lui accorde M. SERRES. Ainsi, quelle que soit la chronologie précise des débuts de cette science, il n'y a aucun doute que la proportionnalité en est un élément fondateur.

4.3 Des entiers aux réels

4.3.1 Les nombres entiers chez les Pythagoriciens

Pour les Pythagoriciens (env. 500 av. J.-C.), les nombres permettent de *dénombrer*. Ce sont donc des entiers positifs qu'on appellera plus tard *nombres naturels*. Leur ensemble est le prototype des ensembles dénombrables. Il est aussi *discret* ([3]).

Par ailleurs, les Pythagoriciens considèrent qu'un segment de droite est une juxtaposition

([3]) L'ensemble des rationnels n'est pas discret : entre deux rationnels, on peut toujours en trouver un autre.

de *monades* (4) (5). La mesure du segment est alors donnée par le nombre de monades qui le composent. Cette mesure est donc toujours un nombre naturel.

On peut ainsi établir un premier lien entre la géométrie et l'arithmétique :

Considérons une demi-droite d'origine O. À chaque entier n, associons un segment d'origine 0 et de mesure n, c'est-à-dire comportant n monades :

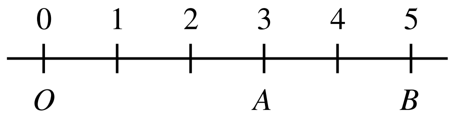


Fig. 4.5

Cela nous permet de comparer les longueurs de deux segments différents.

Les Pythagoriciens disaient, [37] : « *OA est à OB comme* 3 *est à* 5 » , ce que nous pouvons écrire aujourd'hui $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{3}{5}$.

Les rapports en cause sont donc homogènes : à gauche, des longueurs et à droite, des nombres. Il est important de noter qu'on peut ainsi remplacer des rapports de grandeurs dont *nous* savons qu'elles sont *continues*, par des rapports de nombres entiers qui, rappelons-le, constituent un ensemble *discret*.

4.3.2 La théorie des Proportions d'Eudoxe

Eudoxe de Cnide (408–355 av. J.-C.) s'est penché sur les propriétés des égalités de deux rapports, c'est-à-dire les propriétés des proportions. Un des traits essentiels de sa théorie est qu'elle s'applique à tout rapport de grandeurs indépendamment d'une quelconque mesure de celles-ci. Il définit l'égalité de deux rapports de la façon suivante (6), d'après [3] :

> *Si a, b, c, d sont des quantités arbitraires où a et b sont de même nature, et de même, c et d sont de même nature, alors le rapport entre a et b, $\frac{a}{b}$ est égal au rapport entre c et d, $\frac{c}{d}$ si et seulement si, quels que soient les entiers positifs m et n, nous avons :*
>
> - *$m.a > n.b$ si et seulement si $m.c > n.d$,*
> - *$m.a = n.b$ si et seulement si $m.c = n.d$,*
> - *$m.a < n.b$ si et seulement si $m.c < n.d$.*

Comme on le constate, si cette définition ne nécessite pas de *mesurer* les grandeurs a, b, c, d, elle nécessite néanmoins de pouvoir multiplier une grandeur par un naturel. Il s'agit donc bien d'une extension de la mesure par des nombres entiers.

(4) La monade est l'élément ultime, c'est une unité indivisible qui est le véritable élément de la composition de toutes choses, la monade présente une unité organique enveloppant tous ses états passés et futurs, [67]. De la même manière, les Grecs considéraient que l'atome (du grec « a-tomos », « in-divisible ») est l'élément ultime, indivisible, de la matière. Les Grecs ne concevaient pas notre point sans dimension.

(5) Selon la définition du *Dictionnaire de l'Académie française (8e édition de 1932–1935)*, dans le système pythagoricien, la monade est une unité parfaite qui est le principe générateur de tous les composés.

(6) Aucun ouvrage d'Eudoxe ne nous étant parvenu, c'est dans les *Éléments* d'Euclide (livre V) que l'on peut retrouver cette définition.

Via le théorème de Thalès, une proportion telle que $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$, permet de construire un segment sans recourir à des mesures : pour obtenir un segment OD dont la longueur est à celle de OC comme celle de OB est à celle de OA, il suffit de tracer la figure ci-contre.

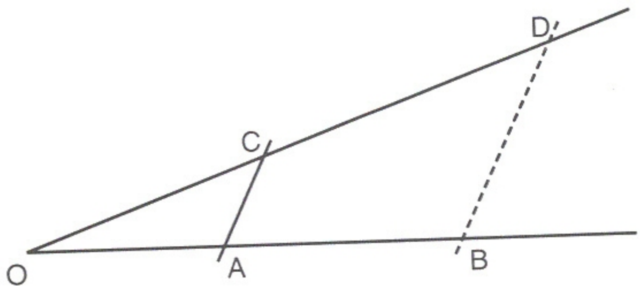


Fig. 4.6

4.3.3 Extension de la notion de nombre

Dans son livre X, [35], EUCLIDE D'ALEXANDRIE (IIIe siècle av. J.-C.) traite le type de relation, déjà rencontrée chez les Pythagoriciens, qui remplace un rapport entre grandeurs par un rapport entre nombres entiers. Il appelle *commensurables* les grandeurs concernées. En effet, l'établissement d'une telle égalité de rapport sous-entend l'existence d'une unité commune de mesure.

Deux grandeurs a et b sont *commensurables* s'il existe une unité u et deux entiers m et n tels que

$$\begin{aligned} a &= n.u \\ b &= m.u \end{aligned}$$

En d'autres termes, a et b sont commensurables s'il existe deux entiers m et n tels que $m.a = n.b$, ou si leur rapport $\frac{a}{b}$ est égal au rapport d'entiers $\frac{n}{m}$.

S'il n'est pas possible de trouver ces entiers m et n, les grandeurs a et b sont dites *incommensurables* ou irrationnelles (7). Nous trouvons en particulier dans le livre X d'EUCLIDE la proposition 5 :

> *Les grandeurs commensurables ont comme* rapport *(« raison ») l'une relativement à l'autre celui d'un nombre relativement à un nombre.*

Les raisonnements exposés ci-dessus relatifs aux nombres naturels peuvent sans peine être étendus aux fractions d'entiers, c'est-à-dire les nombres que nous appelons aujourd'hui rationnels. Tout comme les naturels, les rationnels forment un ensemble dénombrable.

Le gros problème lié à cette vision des choses est qu'il existe effectivement des grandeurs *incommensurables* ! Par exemple, il n'existe aucune unité commune de mesure entre le côté d'un carré et sa diagonale (dont le rapport est, on le sait, $\sqrt{2}$). Cela implique que, si on connaît exactement la mesure de l'un (c'est-à-dire si la mesure est un nombre entier), on ne peut pas connaître exactement la mesure de l'autre.

Dans le même livre X, EUCLIDE présente une classification rigoureuse de 13 espèces de lignes droites incommensurables avec une ligne droite de référence, [35].

L'idée révolutionnaire suivant laquelle il existe, d'une part des grandeurs commensurables, et d'autre part des grandeurs exclues de cet ensemble, induit une grande perplexité, voire un malaise, qui se traduit actuellement encore par le double sens qu'ont pris les mots

(7) Définition 3 du livre X des Éléments d'EUCLIDE

rationnel et *irrationnel*, [37]. Ces mots proviennent tous deux du mot latin *ratio*, lui-même équivalent au mot grec *logos*.

Logos est un mot « diamant » aux facettes multiples, désignant notamment la parole, le discours, la raison (c'est-à-dire l'ensemble des facultés intellectuelles) mais aussi pour certains philosophes, la Rationalité suprême gouvernant le monde, ainsi que le Verbe éternel dans l'Évangile de Saint Jean... *Logos* nous a donné le mot *logique* qui désigne aussi bien la science du raisonnement en lui-même (dont le développement a permis la formalisation des mathématiques) qu'une manière de raisonner juste, méthodique, dotée de cohérence interne.

La version latine, *ratio*, nous a quant à elle apporté notamment les mots *raison* et *rationnel*. Le mot raison désigne aussi bien la faculté propre à l'homme grâce à laquelle il peut penser, que le rapport existant entre deux quantités. Quant au mot rationnel, dit le *Larousse*, il qualifie ce qui manifeste de la raison, de la logique, du bon sens.

Remarquons qu'il est impossible de définir ces mots sans les utiliser « l'un dans l'autre ». Remarquons également que la dernière définition donnée ci-dessus implique que ce qui n'est pas rationnel n'est pas logique, est hors du bon sens. C'est bien cette seconde signification qu'a pris le mot irrationnel pour les non-mathématiciens.

Les nombres rationnels, ainsi appelés parce qu'ils proviennent d'un rapport entre entiers, sont donc des nombres qui ne dérangent pas le « bon sens ». Ils illustrent parfaitement la double signification du mot raison. Les irrationnels, au contraire, sont dérangeants.

On retrouve cette idée dans « Le sens de la mesure » de Nicolas Rouche, [64], qui parle « du difficile mariage des grandeurs et des nombres ». J.-P. Friedelmeyer, [37], écrit que *la rationalité est une construction laborieuse toujours inachevée qui tente de mettre en adéquation la pensée rationnelle abstraite et une réalité concrète et phénoménale qui lui est a priori étrangère.*

C'est donc cette nécessité de rendre compte de la réalité physique liée aux longueurs qui a conduit les mathématiciens à revoir leur définition de ce qu'est un nombre en le liant à la mesure des grandeurs, c'est-à-dire au continu.

4.3.4 Ératosthène de Cyrène

Ératosthène (284–192 av. J.-C.) vivait à Alexandrie, [24]. Il fut le premier à mesurer le méridien terrestre. Son raisonnement est une nouvelle application de la proportionnalité :

L'angle x est à 360° comme la longueur de l'arc AB est à celle du méridien terrestre.

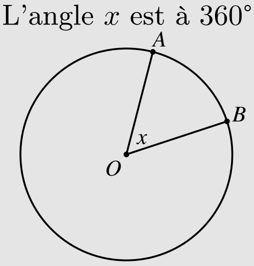


Fig. 4.7

En notations modernes, cela donnerait :

$$\frac{x}{360°} = \frac{|AB|}{\text{méridien}}$$

Les mesures respectives de l'angle x et de l'arc AB nous fournissent donc la longueur du méridien.

Si mesurer une longueur sur la terre ne présente pas de difficultés majeures, il n'en va pas de même pour mesurer un angle dont le sommet O est au centre de la terre.

L'histoire rapporte qu'ÉRATOSTHÈNE aurait utilisé le procédé suivant (*Fig. 4.8*).

Il avait observé qu'à midi, le jour du solstice d'été, les rayons du soleil atteignaient le fond d'un puits situé à Syène (Assouan), ce qui signifie qu'à ce moment, le soleil se trouve exactement à la verticale de Syène, dans la direction BE, [50] et [73].

Au même moment, à Alexandrie, il fut mesuré que l'angle DAF, formé par la direction DA des rayons du soleil et la verticale AF en cet endroit, était de $\frac{1}{50}$ de 360°, soit $7,2°$.
Or Syène et Alexandrie se trouvent sur le même méridien et sont distants d'environ 1000 km, ce qui était nécessaire pour que l'angle au centre obtenu soit suffisamment grand pour que les inévitables erreurs de mesure soient négligeables.

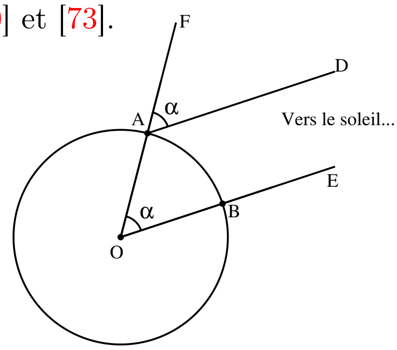


Fig. 4.8

Comme le soleil est tellement éloigné de la terre qu'on peut considérer qu'au même instant, les rayons qu'il nous envoie sont parallèles et donc que AD est parallèle à BE, l'angle AOB est égal à l'angle DAF et vaut également $7,2°$.

Cette mesure, effectuée plus de deux siècles avant notre ère attribue à la terre une circonférence de 250000 stades, soit de 39600 kilomètres, [24].

4.3.5 ARCHIMÈDE et la méthode d'exhaustion

ARCHIMÈDE, (*voir [24] ou [9]*) vivait à Syracuse (Sicile), au cours du IIe siècle avant J.-C. Il fut tué lors de la prise de sa ville par les Romains pendant la deuxième guerre punique, à l'issue d'un siège long de deux ans.

La résistance exceptionnelle de Syracuse qui mit à mal la flotte romaine était due essentiellement aux inventions guerrières d'ARCHIMÈDE. Citons simplement les diverses machines capables de lancer des projectiles extrêmement pesants tant à longue portée qu'au pied même des remparts de la ville, grâce à l'utilisation ingénieuse de leviers dont ARCHIMÈDE maîtrisait parfaitement les principes.

Pour mesurer l'aire de domaines limités par des courbes, ARCHIMÈDE utilisa la méthode dite « d'*exhaustion* », ainsi nommée par allusion à l'idée que l'on épuise progressivement le domaine à mesurer. Le principe est de construire une succession illimitée de polygones remplissant de mieux en mieux le domaine à mesurer. Cette méthode équivaut à un passage à la limite, sans invoquer la notion d'*infini* mal maîtrisée à cette époque.

Par cette méthode, ARCHIMÈDE réalise la « quadrature de la parabole » : en calculant successivement les aires des polygones AEB, $AA'EB'B\ldots$ il démontre que l'aire limitée par la parabole et l'horizontale AB (*Fig. 4.9*) ne peut être ni inférieure ni supérieure aux $\frac{2}{3}$ de l'aire du rectangle $ABCD$. L'aire hachurée est donc exactement égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire de ce rectangle.

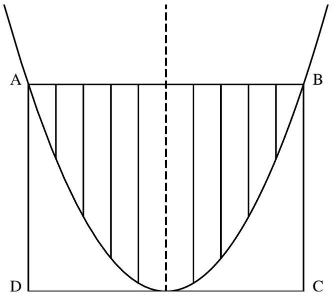


Fig. 4.9

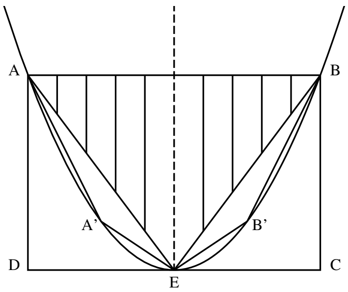


Fig. 4.10

Dans « *La mesure du cercle* », grâce à la méthode d'exhaustion, ARCHIMÈDE obtient l'approximation « classique », $\frac{22}{7}$, du nombre π, c'est-à-dire du rapport entre la circonférence C et le diamètre $|AB|$ du cercle.

Pour obtenir la circonférence ([8]), d'une part, il inscrit au cercle des polygones réguliers à un nombre croissant de côtés et calcule leurs périmètres, et d'autre part, il circonscrit au même cercle une autre suite de polygones et calcule également leurs périmètres.

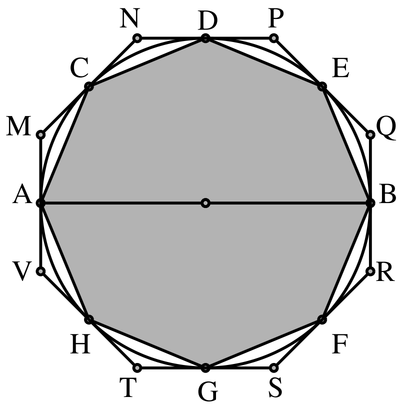


Fig. 4.11
$ACDEBFGH$ est un polygone inscrit au cercle.
$MNPQRSTV$ est un polygone circonscrit au cercle.

Quels que soient les polygones inscrit et circonscrit, on a :

$$\text{périmètre d'un polygone inscrit} < \text{circonférence} < \text{périmètre d'un polygone circonscrit}$$

Grâce à cela, ARCHIMÈDE obtient l'encadrement : $3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$. En écriture décimale, cela donne :

$$3,14084507\ldots < \pi < 3,142857143\ldots$$

4.3.6 Les Mathématiques chez les Arabes (VIII$^{\text{e}}$–XV$^{\text{e}}$ siècles), panorama

Unifiées par l'Islam dès le début du VIII$^{\text{e}}$ siècle, les tribus des territoires arabes partent à la conquête du monde et étendent leur domination de l'Espagne à la Chine, et de la Russie à l'Afrique Centrale, incluant l'Inde et les pays Méditerranéens. Conquérants, mais relativement tolérants, ils assimilent les cultures et les connaissances des peuples conquis.

On peut distinguer (*voir [78] et [26]*) trois grandes étapes dans les Mathématiques arabes.

1. La première est l'assimilation de l'héritage de la culture grecque (prédominante) et de la culture orientale. C'est sans doute grâce à leurs contacts avec l'Inde que les

([8]) Circonférence : pourtour d'un espace plan (*Larousse*).

Arabes s'intéressent à l'astronomie et mesurent les déplacements relatifs des étoiles, l'inclinaison de l'écliptique... et sont ainsi conduits à développer la trigonométrie en établissant des tables de mesures de sinus. Par ailleurs, ce sont les *Éléments* d'EUCLIDE qui ont joué le rôle le plus important dans la culture mathématique des pays islamiques.

2. Dès la fin du IX^e siècle, on voit se former une culture mathématique originale, au travers notamment de l'École de Bagdad. Les connaissances et méthodes des Grecs sont appliquées à la résolution de problèmes de calculs numériques.
3. Du XI^e au XV^e siècles, on note une intensification de cette tendance, notamment par l'utilisation d'approximations et de calculs trigonométriques. Par exemple, en utilisant les sections coniques, les Arabes ont créé une théorie géométrique très développée permettant de résoudre des équations du troisième degré. Ceci est peut-être dû à l'influence de la Chine. Cependant, grâce aux acquis de la culture grecque, les Arabes vont plus loin que les Chinois et les Indiens.

   Il définissent également une nouvelle approche de la notion de « nombre ». Dans quasiment tous les ouvrages d'auteurs arabes, on trouve un procédé d'extraction des racines carrées. Il est vrai que l'établissement de tables astronomiques de plus en plus précises, le développement des calculs trigonométriques et de mesures planes, ont placé les mathématiciens de l'Islam dans l'obligation de calculer constamment avec des nombres irrationnels.

   Les nombres irrationnels sont ainsi utilisés aussi bien que les rationnels comme coefficients ou solutions d'équations.

4.3.7 La notion de nombre dans les Mathématiques Arabes

Parmi les nombreux mathématiciens arabes dont l'influence fut considérable, épinglons les noms suivants :

1 AL-HUWARIZMI (780 – 850) réunit ce qu'il y avait de plus important à son époque pour les hommes de sciences et les praticiens et est ainsi un peu « l'Euclide » arabe. On lui doit le premier traité connu sur l'usage du système décimal et du zéro. Dans ce traité, il expose en fait la méthode indienne, [26].
Notons également que le mot *algorithme* qui désigne aujourd'hui un schéma donnant la suite des opérations à effectuer pour résoudre un problème, est une déformation du nom d'AL-HUWARIZMI.

De plus, le titre de son traité *Al-jabr wal muqabalah* est à l'origine de notre mot « Algèbre ».

L'œuvre d'AL-HUWARIZMI contient trois parties, [78] :

- une partie algébrique où figurent également des études de contrats commerciaux,
- une partie géométrique sur les mesures et l'utilisation de l'algèbre,
- une partie consacrée à des questions testamentaires.

AL-HUWARIZMI explique comment résoudre des équations du premier et du deuxième degré dont les coefficients sont positifs. Il distingue trois sortes de termes, [26] :

- Le *dirham* : c'est le nombre simple.

- Le *gizr* : il signifie « racine », ou encore « fondement », « ce qui est caché ». En fait, il désigne notre inconnue actuelle. AL-HUWARIZMI l'appelle aussi *say*, c'est-à-dire « la chose ».
- Le *mãl* : c'est ce que les mathématiciens arabes recherchaient comme étant l'inconnue et c'est le carré de notre inconnue actuelle.

Ces termes viennent peut-être du sanscrit.

AL-HUWARIZMI donne les démonstrations des procédés applicables aux différents cas. Elles sont basées sur la géométrie et consistent à compléter des carrés par des rectangles ou d'autres carrés.

Afin d'illustrer sa méthode, montrons comment il s'y prenait pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$. [26], [13]

- Construisons un carré d'aire x^2 (*Fig. 4.12*).
- Sur ses côtés, plaçons des rectangles de largeur $\frac{10}{4}$.
  L'aire totale obtenue a pour mesure

$$x^2 + 4 \times \left(\frac{10}{4} \times x\right) = x^2 + 10x.$$

  D'après notre énoncé, cette mesure doit faire 39.
- Complétons la figure par les quatre petits carrés de côté $\frac{10}{4}$.
  Le grand carré ainsi obtenu a donc une aire de mesure

$$39 + 4 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + 25 = 64$$

- Puisque la mesure de l'aire du grand carré est 64, la mesure du côté est 8.
- Le côté du petit carré central a donc pour mesure $x = 8 - 2 \times \frac{10}{4} = 3$.

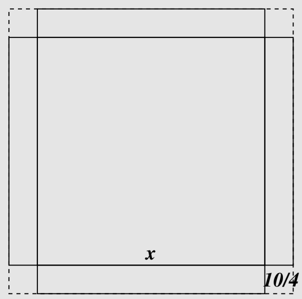


Fig. 4.12
$x^2 + 10x = 39$

Insistons sur le fait que le raisonnement d'AL-HUWARIZMI est basé sur la notion d'AIRE et non sur celle de LONGUEUR.

Il semble, [48], que AL HUWARIZMI ait trouvé l'idée de ces résolutions dans un ouvrage plus ancien, intitulé « *Algèbre d'arpentage* ». On ne les retrouve ni dans les mathématiques indiennes antérieures, ni dans les éléments d'EUCLIDE.

Toutefois, une lecture « arithmétique » des propositions établies dans le livre II des *Éléments* conduit à des raisonnements semblables à ceux décrits par AL HUWARIZMI.

Notons que dans ses exemples, AL-HUWARIZMI ne considère que les solutions positives qu'il interprète comme étant la mesure du côté d'un carré.

Il est sans aucun doute intéressant de constater que les *nombres* obtenus comme solutions des équations, dont la résolution est basée sur des procédés du type décrit ci-dessus, sont des racines carrées positives de nombres naturels. En mettant la notion d'aire au cœur du raisonnement (contrairement aux Grecs, qui privilégiaient celle de longueur), AL-HUWARIZMI évite le malaise engendré par la considération de nombres irrationnels en donnant d'emblée à ceux-ci un sens concret.

Ailleurs, AL-HUWARIZMI utilise lui aussi les longueurs des segments afin d'illustrer les opérations d'addition et de soustraction. Il souligne alors qu'il faut respecter l'homogénéité des dimensions.

La partie géométrique de son œuvre réunit les règles servant à calculer les aires et les éléments de figures géométriques, et les applications les plus simples de l'algèbre aux problèmes concernant les triangles, les quadrilatères et les cercles. Sa géométrie est assez proche d'un ancien traité hébreu, *la théorie de la mesure*, rédigé probablement dans la première moitié du IIe siècle. Ce traité est lui-même proche des écrits de HÉRON D'ALEXANDRIE. Avant AL-HUWARIZMI, les arpenteurs ne disposaient que de formules relativement grossières, et parfois même fausses, donnant donc une marge d'erreur non négligeable. Malgré sa brièveté, le chapitre d'AL-HUWARIZMI consacré aux mesures a apporté aux praticiens un matériau extrêmement important, exposé sous une forme très compréhensible et suffisamment correcte.

2 ABU KAMIL, Égypte (env. 850 – env. 930), va plus loin que AL-HUWARIZMI (voir [78]). Pour lui, des segments ou des surfaces peuvent représenter aussi bien des nombres que la première ou deuxième puissance de l'inconnue. On trouve par exemple le problème suivant :

> *Quelle est la hauteur x d'un triangle équilatéral dont la somme de l'aire et de la hauteur est 10 ?*

Il ne suit donc plus l'exigence classique du respect de l'homogénéité des dimensions dans les démonstrations géométriques. Mais les mathématiciens du Proche et Moyen-Orient n'ont pas persévéré dans cette voie (il faudra attendre DESCARTES).

Malgré l'utilisation de démonstrations géométriques, l'algèbre d'ABU KAMIL est caractérisée par une tendance à l'arithmétisation. Il se base très souvent sur la théorie des proportions, et ne fait aucune différence entre les grandeurs commensurables et incommensurables.

3 ABU SAHL AL-QUHI (né entre 908 et 922, mort à la fin du Xe siècle), s'il est originaire de la montagne du Tabaristan, au bord de la mer Caspienne (Iran), a surtout travaillé à Bagdad.

Grâce à une connaissance approfondie du traité d'APOLLONIUS sur les coniques, AL-QUHI participe à la généralisation de méthodes de résolution de problèmes par construction géométrique. La multiplication des résolutions de problèmes par l'intersection de coniques, caractéristique de l'activité géométrique de son époque, amène AL-QUHI à concevoir un instrument (le compas parfait) permettant de tracer toute conique de manière continue.

Il utilise donc l'héritage hellénistique, mais va bien plus loin et inaugure même un nouveau chapitre, celui de la géométrie projective. Dans son traité « *Sur l'art de l'astrolabe* », on trouve en effet le premier énoncé général d'une théorie de la projection de la sphère. Cette innovation a été rendue possible par l'application des coniques à la tradition des études sur l'astrolabe, qui se limitaient auparavant à la projection stéréographique.

L'œuvre d'AL-QUHI a marqué le Xe siècle et elle contribue à l'invalidation de la doctrine selon laquelle la géométrie a stagné entre le Ve et le XVe siècle. Selon WOEPCKE, [77], cette œuvre se distingue par une élégance remarquable. Cependant, celle-ci ne le met pas à l'abri d'erreurs fondamentales, comme le montre l'exemple suivant.

Les mathématiciens arabes de cette époque vouaient une admiration particulière à ARCHIMÈDE, dont pourtant fort peu d'œuvres leur étaient parvenues. Bon nombre d'entre-eux ont donc repris les travaux d'ARCHIMÈDE, afin de les complèter, ou de tenter de retrouver les méthodes qu'il avait utilisées. Il en va ainsi des études relatives à la quadrature de la parabole, aux mesures des volumes de révolution engendrés par des coniques, à la recherche des centres de gravité d'objets plans ou de solides.

AL-QUHI s'est ainsi intéressé à la statique pour laquelle il a rédigé un ouvrage « *Sur les centres de gravité* », qui est malheureusement perdu, mais dont nous connaissons l'existence par la correspondance qu'AL-QUHI entretenait avec un de ses amis, préoccupé lui-aussi par la géométrie, ABU ISHAQ AL-SABI. Dans cette correspondance, nous trouvons la proposition suivante :

Étant donné un demi-cercle de diamètre AC et de centre D, considérons le triangle ABC et la parabole de sommet B, d'axe BD et passant par les points A et C. Si on fait tourner les trois figures autour de l'axe BD, elles engendrent une demi-sphère, un cône et un paraboloïde.

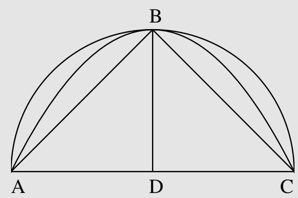


Fig. 4.13

Alors :

- *Si on considère les solides, le centre de gravité du cône est le point G_c tel que $DG_c = \frac{1}{4}DB$, celui du paraboloïde est G_p tel que $DG_p = \frac{2}{6}DB$, celui de la demi-sphère est G_s tel que $DG_s = \frac{3}{8}DB$.*
- *Si l'on considère les figures planes, le centre de gravité du triangle est G_t tel que $DG_t = \frac{1}{3}DB$, celui de la parabole est G_{pr} tel que $DG_{pr} = \frac{2}{5}DB$, et celui du demi-cercle est G_{cr} tel que $DG_{cr} = \frac{3}{7}DB$.*

Ainsi, AL-QUHI obtient deux suites tout à fait particulières. Les rapports sont $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{8}$ pour les solides, et $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ pour les figures planes.

Dans la correspondance qui nous est parvenue, AL-QUHI ne donne ni démonstrations, ni explications relatives à la méthode qu'il a utilisée. Mais il précise qu'il a déterminé les cinq premiers rapports par une démonstration géométrique (et ils sont effectivement exacts), tandis qu'il n'y est pas parvenu pour le sixième. Il écrit, [1] :

> *Cependant, il est très probable et vraisemblable qu'il fasse partie de cet agencement, plutôt qu'il en soit exclu, au nom de l'ordre et du principe naturel.*

Pour des raisons d'esthétique dans les suites obtenues, AL-QUHI considère donc le dernier rapport comme exact (ce qui n'est pas le cas !) et utilise celui-ci pour calculer le nombre π. À partir de ce rapport (faux !), il obtient pour π la valeur rationnelle $\frac{28}{9} = 3 + \frac{1}{9} \cong 3,11$.

Or, AL-QUHI connaissait les résultats d'ARCHIMÈDE qui, rappelons-le (section 4.3.5) avait démontré que π était compris entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$, c'est-à-dire entre $3,1408$ et $3,1428$.

Convaincu d'avoir démontré que π est égal à $\frac{28}{9}$ ($\cong 3,11$), et ne pouvant douter de l'infaillibilité d'ARCHIMÈDE, AL-QUHI en déduit que ces travaux relatifs à π sont faussement attribués à celui-ci !

Évoquons une dernière remarque intéressante à propos de la correspondance entre AL-QUHI et son ami AL-SABI. On y trouve le lemme suivant :

Le rapport du cylindre de base circulaire au cylindre de base carrée est égal au rapport de la base à la base, si les hauteurs sont égales.

Or, Al-Sabi conteste cela car les deux cylindres ne sont pas du même genre, selon lui, et donc ne sont pas comparables. Ainsi Al-Sabi ne maîtrisait certainement pas la notion d'aire elle-même ([9]).

4 Dans son *Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands*, Abu-l-Wafa (940–998) traite notamment des aires des figures planes, de la mesure des distances, des unités de mesure... Tout comme Euclide, il y définit le rapport de deux nombres comme étant « la mesure de l'un comparé à l'autre ». On retrouve ici le lien fondamental liant le nombre et la mesure.

Par ailleurs, toutes les règles pratiques pour scribes et marchands se ramènent à des procédés permettant de comparer une grandeur à une autre à l'aide de fractions sexagésimales. C'est probablement dû à l'héritage babylonien, augmenté de techniques originales liées aux influences arabes locales.

5 On doit à Al-Karagi (mort entre 1019 et 1029, originaire de Karag, en Iran), le *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique.*

Ce livre est destiné aux scribes et calculateurs, et s'appuie sur l'œuvre d'Abu-l-Wafa. Al-Karagi va jusqu'à résoudre des équations du 7e degré. Il utilise fréquemment la notion d'aire dans ses démonstrations, y compris dans des démonstrations de propriétés arithmétiques.

Démontrer l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Pour établir cette identité, Al-Karagi construit un carré de côté

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

L'aire de ce carré a donc pour mesure

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Il s'agit de montrer que l'aire vaut aussi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

([9]) Nous avons retrouvé cet argument chez des élèves à qui on demandait de comparer les aires de deux figures et qui répondaient : « Elles sont différentes, puisqu'elles n'ont pas la même forme ».

Pour ce faire, Al-Karagi *partage le carré de façon à faire apparaître un petit carré de côté 1, puis le gnomon $ABCDE$ de base 2, et ainsi de suite jusqu'au gnomon $PQRST$ de base n.*
L'aire du dernier gnomon $PQRST$ a pour mesure

$$2 \times n \times (1 + 2 + 3 + \cdots n) - n^2 = n^3$$

De même, l'aire du gnomon précédent a pour mesure $(n-1)^3$. On montre de cette façon que la suite des aires des gnomons est la suite des cubes, de n^3 à 2^3.

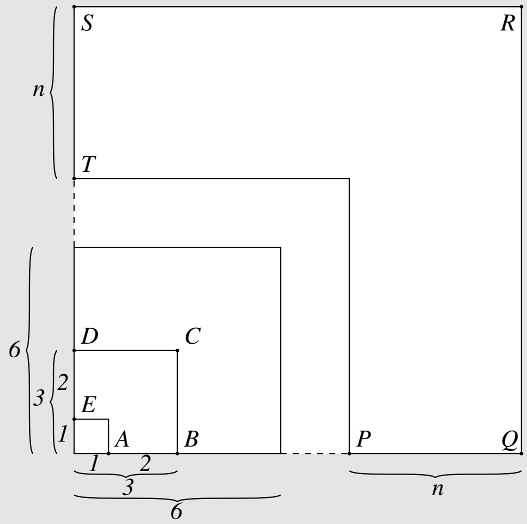


Fig. 4.14

L'aire du grand carré vaut donc bien : $n^3 + (n-1)^3 + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

6 Omar Khhayam ou Umar Al-Hayyam (1047–1122), poète et mathématicien de Nichapour (Khorassan), est célèbre notamment pour ses poèmes, les *Rubaiyats*, qui célèbrent la vie, le vin, l'amour (10)...

Omar Khhayam, comme tous les mathématiciens et philosophes de son temps, accordait une importance toute particulière aux *Éléments* d'Euclide. Ceci s'explique par l'importance qu'y joue l'analyse des concepts fondamentaux de la géométrie et de l'arithmétique, concepts qui tenaient déjà une place importante dans l'œuvre d'Aristote. Pour ce dernier, les concepts mathématiques sont tirés par abstraction des propriétés des choses réelles, [2].

Les mathématiciens des pays islamiques se sont constamment penchés sur les problèmes fondamentaux des *Éléments* à savoir la théorie des parallèles, la théorie des proportions et la théorie relative aux radicaux du second degré. Ils ne se contentèrent pas (comme les Indiens) d'utiliser les nombres irrationnels, mais en firent un objet d'études théoriques. Pour cela, ils utilisèrent la théorie des proportions des mathématiciens grecs, l'analysèrent, la critiquèrent et développèrent ensuite leur propre théorie en étendant la notion de nombre à l'ensemble des nombres réels positifs.

Dans ses *Commentaires des difficultés se trouvant dans les introductions du Livre d'*Euclide (1077), Omar Khhayam présente une théorie élaborée des proportions.

Pour lui, comme pour Euclide, le véritable sens d'un rapport consiste à mesurer une grandeur par une autre, c'est-à-dire en fait, à diviser un nombre par un autre. Dans le cas de grandeurs commensurables, et en particulier de nombres entiers, il est ainsi tout à fait en accord avec Euclide (11).

Omar Khhayam envisage également le rapport de grandeurs incommensurables. De plus,

(10) Certains auteurs considèrent qu'il n'est pas avéré que le poète Omar Khhayam et le mathématicien Omar Khhayam soient la même personne, mais rien non plus ne permet d'affirmer le contraire, [62].
(11) Euclide 10/12 Livre VII, Définition 21

il définit une proportion, c'est-à-dire rappelons-le, une égalité de rapports, en disant qu'une telle égalité est correcte si on peut exprimer ces deux rapports en deux fractions continues dont les quotients partiels sont égaux ([12]).

Ainsi donc, la proportion $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ est correcte si on a

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \cdots}}} \text{ et } \frac{C}{D} = \frac{1}{q_1' + \frac{1}{q_2' + \frac{1}{q_3' + \cdots}}}$$

avec $q_i = q_i'$ pour tout i.

Illustrons cette définition par un exemple. Pouvons-nous affirmer que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$?

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= \frac{3}{3 \times 2 + 2} \\ &= \frac{3}{3 \times q_1 + 2} \\ &= \frac{1}{q_1 + \frac{2}{3}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{1}{q_1 + \frac{2}{2 \times 1 + 1}} \\ &= \frac{1}{q_1 + \frac{2}{2 \times q_2 + 1}} \\ &= \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{2}}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{1 \times 2 + 0}}} \\ &= \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}} \end{aligned}$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} \frac{6}{16} &= \frac{6}{6 \times 2 + 4} \\ &= \frac{6}{6 \times q_1' + 4} \\ &= \frac{1}{q_1' + \frac{4}{6}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{1}{q_1' + \frac{4}{4 \times 1 + 2}} \\ &= \frac{1}{q_1' + \frac{4}{4 \times q_2' + 2}} \\ &= \frac{1}{q_1' + \frac{1}{q_2' + \frac{2}{4}}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{1}{q_1' + \frac{1}{q_2' + \frac{2}{2 \times 2 + 0}}} \\ &= \frac{1}{q_1' + \frac{1}{q_2' + \frac{1}{q_3'}}} \end{aligned}$$

Nous constatons que $q_1 = q_1' = 2$, $q_2 = q_2' = 1$ et $q_3 = q_3' = 2$.
Par conséquent, nous pouvons affirmer que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$.

Remarquons que si, dans chaque rapport, les grandeurs en présence sont commensurables, la suite des quotients partiels q_i est finie.

En raisonnant de façon similaire, Omar Khhayam élargit la définition euclidienne de la relation « est plus grand que » figurant dans l'inégalité $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, en envisageant des rapports de grandeurs incommensurables, ainsi que le cas où un seul des rapports fait intervenir des grandeurs incommensurables. Ce faisant, il donne un critère permettant de comparer un nombre irrationnel et un nombre rationnel.

De plus, Omar Khhayam veille à établir l'équivalence entre sa théorie et celle défendue par Euclide et Eudoxe. Il démontre que des rapports égaux ou inégaux au sens d'Euclide, le sont aussi dans son sens à lui, et inversement. Il peut alors sans problème utiliser les propriétés des proportions présentées dans les *Éléments.*

Omar Khhayam soulève la question essentielle du lien existant entre les notions de rapport (de grandeurs) et de nombre. Ce problème est, selon lui, de nature philosophique : un rapport de grandeurs est-il lié à un nombre, ou est-il un nombre ? Laissant à d'autres

([12]) Vers 1950, les fractions continues faisaient partie des programmes de l'enseignement secondaire.

le soin d'en débattre, il estime quant à lui nécessaire d'appeler « nombre » tout rapport de grandeurs, commensurables ou non. Les opérations relatives à ces nombres sont alors interprétées comme la composition des rapports de grandeurs correspondants.

7 AL-TUSI (150 ans après OMAR KHHAYAM), dans son *Recueil d'arithmétique à l'aide d'une planche et de la poussière* (1265), décrit un procédé général d'extraction des racines carrées ainsi que la formule générale du développement de $(a+b)^n$, reprise plus tard par AL-KASHI, et que nous connaissons sous le nom de « binôme de Newton ». Il s'est vraisemblablement inspiré des travaux d'OMAR KHHAYAM, mais peut-être également a-t-il obtenu ces résultats de savants chinois rencontrés à cette époque. Dans son *Exposé d'*EUCLIDE et son *Traité du quadrilatère complet*, il reprend et développe les théories d'OMAR KHHAYAM sur les proportions (et donc les nombres). Il exprime avec encore plus de précision l'idée que *tout rapport peut être appelé nombre, mesuré par l'unité, de même que le premier terme d'un rapport est mesuré par le second.*

En d'autres mots, que les grandeurs A et B soient commensurables ou non, le rapport $\frac{A}{B}$ est égal à un rapport $\frac{D}{1}$ où D est un nombre.

Ceci définit, en fait, *les nombres réels positifs*. Cette conquête théorique remarquable fut connue en Europe à la fin du XVI^{e} siècle seulement, grâce à une édition, à Rome, de l'exposé d'EUCLIDE rédigé par AL-TUSI.

8 AL-KASHI (fin XIV^{e} siècle – mort en 1429 à Samarcande) est surnommé *Gyat ad-din*, ce qui signifie approximativement « Auxiliaire de la foi ».

Il nous fournit *La clé de l'arithmétique*, excellent guide de mathématiques élémentaires, qui tient une place unique dans la littérature du Moyen Âge. C'est une véritable encyclopédie mathématique qui entendait répondre à tous les besoins : ceux des calculateurs, des astronomes, des architectes, des fonctionnaires ou des marchands. Ce sera l'ouvrage de référence pour les siècles suivants, [24]. Il écrit : *l'arithmétique est le moyen de déterminer des grandeurs numériques inconnues à partir de grandeurs connues.* Notons qu'AL-KARAGI avait dit la même chose de l'algèbre.

En ce qui concerne la technique et l'exactitude des calculs, AL-KASHI a dépassé de loin ses prédécesseurs. Il résout de nombreux problèmes en n'utilisant que l'algèbre et quelques formules de trigonométrie. Pour les aires des polygones réguliers à n-côtés ($n = 5, 6, \ldots, 16$), il dresse des tables dont l'exactitude va jusqu'à 60^{-5} pour des fractions sexagésimales, et 10^{-6} pour des fractions décimales. Il établit des tables astronomiques d'une extraordinaire précision, les « Zig Ulugh Bek », qui comportent les sinus et les tangentes pour des arcs variant de minute en minute.

De plus, il expose non seulement l'arithmétique sexagésimale, mais pour la première fois aussi méthodiquement la théorie des fractions décimales en vue d'établir que les opérations peuvent s'effectuer de la même façon que pour les entiers.

Dans le « *Traité de la circonférence* », il donne une détermination de π avec 16 décimales exactes. Il calcule par approximation, en se servant, comme ARCHIMÈDE, de la méthode d'exhaustion. Mais son utilisation des approximations se distingue par la simplicité et l'élégance, et dépasse de très loin toutes les tentatives antérieures.

Au XIX^{e} siècle, HANKEL écrit que « sa méthode ne le cédait ni en finesse ni en élégance à toutes les méthodes d'approximation découvertes en Occident depuis VIÈTE. Il affirme en outre que c'est la première méthode par approximations numériques successives rencontrée en histoire des mathématiques, [24].

Al-Kashi calcule les volumes de solides élémentaires, mais aussi les volumes du cylindre oblique, du cône oblique, et de solides partiellement creux.

Une table particulière donne les caractéristiques numériques des cinq solides réguliers ainsi que celles de deux des 13 polyèdres semi-réguliers découverts par Archimède et qu'Abu-l-wafa avaient déjà construits. Il s'agit du cuboctaèdre (polyèdre à 14 faces, 8 triangles et 6 carrés), et de l'icosidodécaèdre (polyèdre à 32 faces, 20 triangles et 12 pentagones).

Notons que beaucoup plus tard Stevin et Kepler s'intéressèrent à nouveau aux polyèdres semi-réguliers.

Al-Kashi a également réalisé des calculs et des constructions complexes d'ogives, de voûtes, de coupoles, et de divers éléments caractéristiques de l'architecture arabe appelés « stalactites ». Ce mot désigne plusieurs rangées de prismes suspendus les uns au-dessus des autres, limités par plusieurs surfaces planes ou courbes et qui servent d'ornements sur les corniches, les encorbellements, les portails...

Grâce notamment à Al-Kachi, et à son protecteur, le sultan Ulugh Bek, les mathématiques arabes d'Orient ont atteint leur apogée dans les ouvrages de l'école de Sarmacande, qui était devenue le centre scientifique le plus important de l'Est. Mais, après le meurtre d'Ulugh Bek en 1449, celle-ci tomba en décadence et la recherche mathématique périclita, [24].

4.3.8 Le nombre chez Stevin

Il serait intéressant de savoir s'il existe des liens directs entre les Mathématiques Arabes et la théorie des proportions développée en Europe au XVI^{e} siècle. En effet, à cette époque, afin d'éliminer la dichotomie « discret-continu », Simon Stevin (Bruges, 1548 – 1620.) redéfinit le nombre de la manière suivante, [70] :

> *Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chaque chose.*

Il en résulte que

> *Nombre n'est point quantité discrète.*

Ainsi, toute grandeur peut être associée à un nombre et inversement, [76]. Nous retrouvons donc l'idée défendue par Al-Tusi et Al-Khhayam. Par analogie avec les grandeurs de la géométrie, il définit nombres commensurables et incommensurables, et introduit donc l'ensemble des nombres que nous appelons aujourd'hui *les nombres réels*. Il devient ainsi possible de raisonner sur les nombres définis de la sorte sans passer par le support des grandeurs. Notons que pour Stevin, le nombre est *continu* au sens d'Aristote, c'est-à-dire qu'il est indéfiniment divisible. De plus, cette évolution s'accompagne de la suppression du principe d'homogénéité dans les proportions.

On attribue à Stevin, [21], [9], l'invention des décimales. Dans son livre « De Thiende » (La Disme) publié en 1585, à Leyden par Plantijn, il montre comment procéder aux opérations sur ce que nous appelons aujourd'hui les nombres décimaux. Il préconise également l'usage du degré décimal, à la place du degré sexagésimal inventé par les Mésopotamiens.

De plus, il reprend et allège considérablement la méthode d'exhaustion d'ARCHIMÈDE pour déterminer notamment, les centres de gravité de figures curvilignes planes, [24].

4.3.9 DESCARTES

Nous venons de le voir, l'élargissement du concept de nombre proposé par STEVIN s'est vu accompagné de la suppression du principe d'homogénéité. DESCARTES (1596-1650) applique cet acquis en définissant la vitesse comme le rapport d'une distance à un temps.

Par ailleurs, puisque toute grandeur peut être représentée par un nombre et réciproquement, tout nombre (réel) peut être représenté par un segment de droite, et l'ensemble des nombres a pour image la droite graduée, que nous appelons aujourd'hui *la droite réelle*.

DESCARTES développe également la notion d'équation de courbe, qui permet de caractériser les coordonnées de ses points. La courbe se retrouve dès lors entre la physique et les mathématiques comme étant un objet physique qui peut s'étudier au moyen de l'algèbre tout en intégrant l'idée de variabilité lorsqu'on la considère comme une trajectoire, [37].

L'introduction de la variabilité et de l'algébrisation va permettre d'établir le *théorème fondamental de l'analyse* : les opérations de *dérivation* (qui permet de déterminer la tangente à une courbe) et d'*intégration* (qui permet de déterminer l'aire limitée par une courbe) sont des opérations réciproques l'une de l'autre.

Étant donné une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$ ($[0, 2]$ sur la figure ci-dessous), la fonction F définie sur le même intervalle par la condition

> *$F(x_0)$ est l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les verticales d'abscisses a et x_0*

est dérivable, et sa dérivée est f.

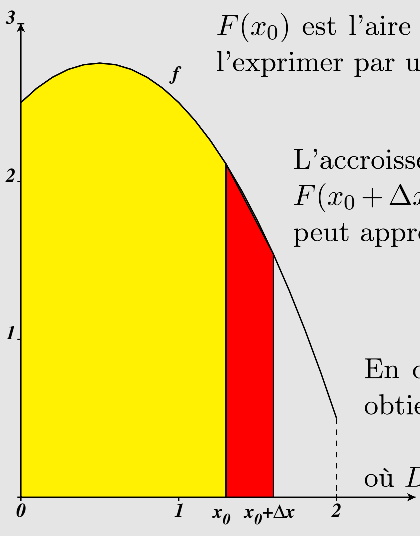


Fig. 4.15

$F(x_0)$ est l'aire de la zone coloriée en jaune de la figure ci-contre. On peut l'exprimer par une intégrale :

$$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx$$

L'accroissement de F lorsque la variable x passe de x_0 à $x_0 + \Delta x$ est $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. C'est l'aire de la plage coloriée en rouge, que l'on peut approcher par l'aire d'un trapèze :

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \approx \Delta x \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)$$

En divisant par Δx et en faisant tendre ensuite Δx vers 0, on obtient le théorème fondamental de l'analyse :

$$DF(x_0) = f(x_0)$$

où DF désigne la dérivée de F.

Le calcul différentiel et le calcul intégral sont nés.

4.4 De la décomposition infinie au calcul intégral

4.4.1 L'infini et l'indéfiniment divisible

C'est dans la démonstration de l'incommensurabilité des mesures d'un côté du carré et de sa diagonale que Maurice Caveing, [15], voit l'origine même de la géométrie grecque, une géométrie du raisonnement qui s'oppose à la géométrie des arpenteurs.

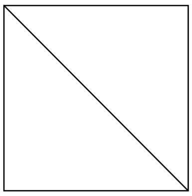


Fig. 4.16

En effet, si on dessine un carré et une de ses diagonales, celle-ci a la même réalité que le côté du carré. L'observation de la figure ne permet en rien d'augurer du fait que la diagonale et le côté sont incommensurables, c'est-à-dire, qu'il n'existe aucun nombre rationnel égal au rapport de leurs mesures. Il faut donc bien une démonstration pour pouvoir l'affirmer. Paradoxalement, cette démonstration qui se trouve à l'origine de bien d'autres, est une démonstration de non-existence.

> *C'est dans l'opération de mesure que s'est dévoilée la vraie nature de l'objet droite, son essence idéale, plus précisément dans le processus de mesure d'un segment incommensurable à l'unité de mesure : le caractère illimité du processus [...] révèle, au sein même de la finitude du segment, une infinité qui, même conçue comme potentielle, ne peut appartenir qu'à un objet idéal, qui se trouve défini en tant que tel par ce processus même. (Pour un objet empirique, on atteint le seuil de la perception en un nombre fini d'étapes).* [37]

Cette infinité, qui est la marque du caractère incommensurable de certaines grandeurs, met en évidence leur caractère *continu* au sens d'Aristote. Elles sont donc divisibles en parties toujours divisibles.

Notons cependant que la définition d'Aristote s'applique également à la droite rationnelle et qu'il faudra attendre le XIXe siècle pour que ces notions soient clarifiées par les mathématiciens. Nous dirions aujourd'hui que cette infinité montre que ces grandeurs sont indéfiniment divisibles.

Pour les Grecs, « être infini » signifie qu'il est toujours possible de faire un pas de plus, de telle sorte que « le terme postérieur se détermine d'après le terme antérieur ». Ainsi, en partant de 0, on peut atteindre des nombres naturels aussi grands qu'on le veut, simplement par des additions successives du nombre 1. Mais on n'atteint jamais de cette façon l'infini. En langage moderne, on dit qu'il s'agit d'un *infini potentiel*.

Par contre, lorsque nous affirmons que l'ensemble des nombres réels, est *infini*, nous considérons simultanément tous ces nombres. Cet infini est réalisé. On parle alors d'*infini actuel*. Ainsi donc, en tant qu'ensembles de points une droite et un segment de droite sont des infinis actuels.

Les Grecs distinguent le caractère indéfiniment divisible (la continuité au sens d'Aristote) des grandeurs, du mouvement et du temps, suivant l'enchaînement suivant, [37].

Nous savons que toute grandeur est continue. Or, en géométrie, une grandeur s'appréhende par son *étendue*. La modification de celle-ci traduit le mouvement, et à son tour, celui-ci définit le temps. La continuité de la grandeur induit ainsi la continuité du mouvement, qui induit celle du temps. La distinction de ces trois continuités permet de contourner certains problèmes liés à la continuité du mouvement et du temps (paradoxe de Zénon...) en n'étudiant les grandeurs que sous leur forme statique.

4.4.2 Physique et Mathématiques dans l'Antiquité grecque

Pour les Grecs, *la Physique* est la science de « ce qui se transforme ». Elle étudie donc les mouvements, les changements d'états, la modification des grandeurs... La Physique étudie « ce qui se passe sur Terre ».

Les *Mathématiques* constituent la science qui étudie les objets idéaux. Selon ARISTOTE, [2], ceux-ci sont séparables par la pensée, c'est-à-dire qu'ils peuvent être soumis à un processus d'abstraction qui n'affecte en rien l'exactitude de leur étude. Outre, par exemple, la droite, on peut aussi faire figurer parmi ces objets les corps célestes, parfaits, sphériques, soumis à des mouvements eux aussi parfaits, circulaires uniformes et donc immuables, évoluant dans un cosmos fini (« image mobile de l'éternité » selon PLATON). Les Mathématiques étudient « ce qui se passe au Ciel ». Elles sont réparties dans :

– l'arithmétique, pour les nombres,
– la géométrie, pour les grandeurs,
– l'astronomie,
– la musique.

Pour les Grecs, il y a donc une nette séparation entre ces deux sciences, et il n'est pas question, par exemple, d'imaginer l'existence d'une loi commune expliquant le mouvement des astres et la chute des corps.

Cependant, certains domaines établissent déjà « des passerelles » entre les deux sciences grâce au caractère statique des sujets traités. Citons ARCHIMÈDE, avec ses travaux sur *L'équilibre des plans ou des centres de gravité des plans*, son *Traité des corps flottants*, ou son *Traité de la Méthode*, dans lequel il montre comment, après avoir découvert *physiquement* la solution d'un problème géométrique, on peut l'établir *mathématiquement*. De même, la musique, l'optique géométrique, l'astronomie sont étudiées mathématiquement, mais dans un contexte de géométrie euclidienne, sans mettre en jeu le concept de mouvement.

4.4.3 La Physique mathématique

Ainsi donc, les mathématiques grecques n'ont traité des grandeurs, et en particulier mesuré celles-ci, que sous un aspect statique.

GALILÉE (1564–1642) est le premier à avoir eu l'idée audacieuse de tenter d'étudier *le mouvement* grâce aux Mathématiques, [37], [39].

> *La philosophie est écrite dans ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire : l'Univers), mais on ne peut le comprendre si l'on*

> *n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot.*

Or, l'étude du mouvement en termes mathématiques suppose de savoir traiter comme une grandeur quelque chose qui jusque là ne rentrait pas dans cette catégorie : la vitesse. Notons d'emblée que la vitesse, tout comme les grandeurs usuelles (longueur, aire, intensité lumineuse...) appelle la comparaison : un mobile ne va pas vite en soi. Il va *plus vite que... moins vite que...* ou *aussi vite que...* Pour faire de la vitesse une grandeur, et de plus, une grandeur mesurable, GALILÉE procède en deux étapes.

Dans un premier temps, il élabore la notion de vitesse constante. En six théorèmes, il lui donne un sens en précisant sa relation avec le temps et l'espace grâce à l'application de la théorie des proportions.

Proposition 1 *Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.*

Proposition 2 *Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.*

Proposition 3 *Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.*

Proposition 4 *Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.*

Proposition 5 *Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.*

Proposition 6 *Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.*

L'écriture formelle allège considérablement ces théorèmes (ainsi que leur démonstration !). Toutefois, ce type d'écriture n'était pas encore établi à l'époque de GALILÉE. La traduction de ces théorèmes nous donne :

Proposition 1 *Pour v donné* $\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2}$

Proposition 2 *Si $t_1 = t_2$, alors $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$ et réciproquement.*

Proposition 3 *Pour e fixé $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$.*

Proposition 4 $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$.

Proposition 5 $\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{v_2}{v_1}$.

Proposition 6 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{t_2}{t_1}$.

Le concept de vitesse constante étant ainsi clairement dominé, GALILÉE traite ensuite le problème plus général d'une vitesse variable.

Ces travaux conduisent à supprimer la cloison qui sépare les grandeurs statiques et celles liées au mouvement, et ouvrent la porte à la Physique mathématique. Par la suite, le développement historique vers le calcul symbolique et la construction de l'algèbre ont totalement modifié notre perception des choses en permettant notamment de supprimer la contrainte d'homogénéité des grandeurs intervenant dans les proportions. Ceci nous permet, par exemple, de résumer beaucoup plus simplement les six théorèmes de GALILÉE cités plus haut par la relation bien connue

$$e = v \times t$$

Notons cependant que cette simplicité n'est qu'apparente car elle suppose, en fait, pour chacune des mesures des grandeurs intervenant dans la relation, l'établissement d'une proportionnalité par rapport aux unités. En clair donc, le « décodage » d'une formule telle que $e = v \times t$ suppose l'existence et l'utilisation d'un système cohérent d'unités.

En effet, si je roule en voiture pendant 10 minutes à une vitesse de 120 km/h, j'ai parcouru non pas 120 km/h $\times$ 10 min mais bien 120 km/h $\times \frac{10}{60}$ h $= 20$ km.

4.4.4 Vers le calcul infinitésimal et le calcul intégral

Les concepts du continu, de l'infiniment divisible, et de l'infini, intimement liés comme nous l'avons vu par la notion de mesure, ont toujours été au cœur des raisonnements mathématiques, mais ont été traités au fil du temps de façons très différentes.

J.-P. FRIEDELMEYER expose cette évolution en montrant les diverses approches du problème posé par la mesure de l'aire de la lunule d'HIPPOCRATE DE CHIO, qu'il traite dans un cas particulier : il s'agit de démontrer que la lunule et le carré de la figure ci-contre ont la même aire.

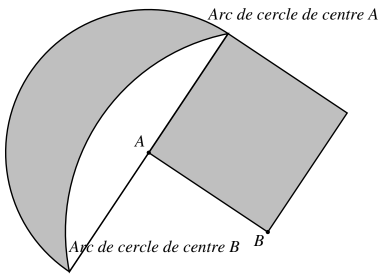


Fig. 4.17

Cette démonstration a un caractère emblématique en ce que c'est la plus vieille démonstration connue de l'histoire des Mathématiques dont on ait des références précises, [16].

1. La manière euclidienne.

   Chaque figure est faite de blocs délimités et finis, statiques. Ils sont ensuite traités globalement par des démonstrations logiques.

2. La méthode de CAVALIERI (manière pré-infinitésimale, ou méthode des indivisibles)

   La lunule est découpée en un nombre infini d'éléments indivisibles infiniment petits.

   À ces indivisibles, on substitue des éléments équivalents dont la réunion donne une aire aisément mesurable. C'est encore une vision statique. Cette méthode a été proposée à LEIBNIZ par TCHIRNHAUS.

3. Utilisation d'un élément variable.

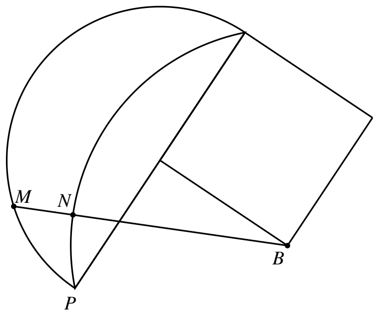


Fig. 4.18

On utilise une droite variable issue de B, coupant la lunule en M et N. On mesure ensuite l'aire variable du triangle curviligne PMN.
Cette méthode a été mise en œuvre par ARTUS DE LIONNE en 1610, dans un article intitulé *Amoenior curvilineorum contemplatio* et imprimé en 1654. LEIBNIZ en a eu connaissance lors de son séjour à Paris.

4. Le calcul différentiel et intégral.

   LEIBNIZ (1646–1716) mesure la variation infinitésimale de l'aire du triangle curviligne PMN. Celle-ci est infinitésimale. Le calcul intégral, en sommant ces variations, fournit la mesure de l'aire de la lunule.

   Ainsi, au 17e siècle, le continu (dans le sens que nous donnons actuellement à ce terme) est abordé par le biais d'une division à l'infini, suivie d'une recomposition. C'est donc un traitement local, suivi d'un traitement global.

4.4.5 La théorie de la mesure

Le concept de mesure au sens utilisé actuellement pour ce terme en mathématique consiste à affecter à certains sous-ensembles d'un ensemble E un nombre réel positif satisfaisant à certaines conditions (mesure d'un segment...) On peut aussi voir la théorie de la mesure comme une étude des formes linéaires sur certains espaces vectoriels de fonctions.

À l'origine de la théorie de la mesure, nous trouvons notamment Émile BOREL (1871–1956) et Camille JORDAN (1838–1922).

La théorie de l'intégration, développée par Bernhardt RIEMANN (1826–1866) sur base de la théorie de JORDAN fut par la suite profondément remaniée par Henri LEBESGUE (1875–1941). Celui-ci étendit la théorie de la mesure en vue d'agrandir l'ensemble des fonctions intégrables. La théorie subit encore de nombreux développements ultérieurs, permettant ainsi au calcul intégral de nous fournir un outil puissant.

4.5 Histoire rapide des étalons de mesure

4.5.1 Idée générale

Les premières unités de mesure dont on ait des traces sont dérivées des membres de l'homme. On retrouve ainsi cinq mesures-membres : la coudée, l'empan, le doigt, la palme et la brasse. Ces mesures étaient utilisées dans de nombreuses civilisations anciennes, bien qu'elles varient d'une région à l'autre.

Une variation de la coudée, le *double remen*, a été le standard de mesure égyptien. Le double remen est la longueur de la diagonale d'un carré d'une coudée de côté.

Les Romains ont été les premiers à utiliser le pied comme unité de mesure. Ils l'ont divisé en douze pouces.

L'évolution des diverses civilisations a conduit à l'élaboration de mesures-étalons dont l'utilisation était toutefois spécifique de l'époque et des régions concernées. Babylone, l'Égypte et les cités grecques utilisaient déjà des étalons de mesure pour comparer et valider les instruments de mesure commerciaux. Dès 3000 ans avant J.-C., les Égyptiens utilisaient une tige de bois étalonnée selon les unités de mesure en vigueur. Sur certaines fresques d'Égypte ancienne, on peut voir que des cordes à nœuds espacés l'un de l'autre d'une coudée, étaient utilisées.

Il est certain que *l'art de la mesure* est antérieur aux Grecs. Cependant, c'est à eux que nous devons *la science de la mesure*. Grâce à leur connaissance de la géométrie et leur expérimentation des poids et mesures, ils ont pu donner à leur système de mesures, des assises scientifiques.

Toutes les grandes civilisations ont mis au point des ensembles d'étalons fondés sur le monde physique, et au fur et à mesure de l'évolution de la science et des techniques, les étalons se sont complexifiés.

À la fin du XVIII^e siècle, peu après la révolution française, des scientifiques français ont élaboré le système d'unités que nous appelons *universel*, parce qu'il est utilisé aujourd'hui dans presque toutes les parties du monde (à l'exception notable de certains pays anglophones).

L'idée de base était de choisir un étalon inaltérable dans le temps. Par exemple, l'étalon de longueur choisi fut la $\frac{1}{10.000.000}^{\mathrm{e}}$ partie du quart du méridien terrestre, et fut appelé *le mètre*. Depuis la première Conférence générale des poids et mesures (Paris, 1889), et jusqu'en octobre 1960, il était représenté par la distance, à la température de $0\ ^\circ\mathrm{C}$, de deux traits parallèles tracés sur une barre en platine iridié déposée au pavillon de Breteuil, à Sèvres. Cependant, les scientifiques ayant démontré que le platine est lui aussi altérable au cours du temps, la définition du mètre a changé, et de 1960 à 1983, le mètre a été défini à partir d'une des radiations émises par une lampe à décharge contenant l'isotope 86 du krypton. Depuis, l'utilisation de lasers ayant permis une détermination très précise de la vitesse de la lumière, la nouvelle définition du mètre a été rattachée à la valeur de cette grandeur (13). Ainsi donc à l'heure actuelle, le mètre est égal à la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée de $\frac{1}{299.792.458}^{e}$ de seconde.

4.5.2 La complexité des unités d'aires (14)

La mesure des aires a toujours préoccupé les hommes en raison, notamment, de ses implications économiques. Cependant, comprendre la manière dont nos ancêtres s'y prenaient pour mesurer un bien, et surtout pour en calculer la superficie, reste un problème difficile, en raison tout d'abord, du flou que l'on retrouve dans les unités utilisées. Il n'est pas toujours aisé, par exemple, de distinguer les unités de mesure d'aire et les unités de longueur. De plus, les unités utilisées pour mesurer différentes grandeurs, n'étaient pas toujours cohérentes.

Parmi les documents retrouvés datant de la fin du Moyen Âge (14e–16e siècles), certains sont exclusivement consacrés aux mesures d'aires. Ce sont les *compoix*, qui sont en fait, les ancêtres de nos cadastres. D'autres mélangent des mesures de longueur et d'aire. Dans ceux-ci, lorsqu'il y a ambiguïté, il nous incombe d'évaluer ce qui provient d'une absence de règles mathématiques, et ce qui relève de conventions et d'usages locaux. Aussi, dès le 15e siècle et jusqu'après la Révolution, mathématiciens et théoriciens des techniques de mesurage se sont appliqués à exposer dans des traités, des méthodes simples pour effectuer des mesures, et en déduire des calculs.

Pour ce qui est de la mesure des longueurs, et particulièrement de *l'arpentage*, la situation semble claire, quoique variable suivant les régions. Dans le Languedoc, par exemple, on utilisait uniquement *la canne*, et son sous-multiple, *le pan* appelé aussi *la palm*.

$$1 \; canne = 8 \; pans$$

Remarquons qu'il est facile de diviser 8 par 2 ou par 4.

Ailleurs, dans les domaines royaux par exemple, on utilisait *la toise*. Celle-ci se subdivise de la sorte :

$$\begin{aligned} 1 \text{ toise} &= 6 \text{ pieds} \\ 1 \text{ pied} &= 12\text{pouces} \\ 1 \text{ pouce} &= 12 \text{ lignes} \\ 1 \text{ ligne} &= 12 \text{ points} \end{aligned}$$

Il y a ici, plus de possibilités de divisions : 12 se divise par 2, 4, 3, 6.

Les mesures obtenues reposent donc sur des rapports simples, concrets, et facilement manipulables dans les additions et les soustractions, à l'aide des doigts de la main, ou des phalanges.

On rencontre également *le destre*. C'est l'unité utilisée par les arpenteurs, tandis que les charpentiers utilisent, eux, la canne et le pan. On considère généralement que

$$\begin{aligned} 1 \; destre &= 2 \; cannes \\ &= 16 \; pans. \end{aligned}$$

(13) Résolution de la 17e Conférence internationale des poids et mesures, octobre 1983.

(14) ***Voir [61]***

Le « décodage » des mesures de longueur anciennes ne pose pas trop de problèmes. Les mesures d'aire, par contre, utilisent des unités et surtout des sous-unités, nommées et interprétées diversement.

- Certains documents, à usage local, fournissent des mesures sans aucune mise au point préalable. Elles sont le reflet des pratiques en usage à cette époque et cet endroit précis.
- Les *expertises* et les *cannages*, réalisés en vue du paiement des travaux effectués, comportent beaucoup plus de mentions. Toutefois, là encore, leur interprétation n'est pas toujours aisée.
  Ainsi, un mur de « 158 cannes et 7 pans » peut signifier un mur dont la longueur mesure 158 cannes et 7 pans. Mais cela peut signifier aussi un mur dont l'aire mesure (158 cannes et 7 pans) carrés. Ou encore un mur dont l'aire mesure (158 cannes) carrées et 7 sous-unités définies différemment...
  Au mieux, nous pouvons trouver sur le document étudié les types d'unités spécifiques à l'objet de l'ouvrage, souvent dans une formulation hermétique pour les non-initiés.
- Parmi les unités de mesures d'aire, on rencontre également :
  - la *céterée*, c'est la superficie d'un carré de 10 destres de côté ;
  - le *quarton*, il vaut 1/5 d'une céterée. En fait, il est équivalent à une bande de terrain rectangulaire de 2 destres de large et 10 destres de long.

  Le parallèle qui vient d'être établi entre une superficie et « une bande de terrain rectangulaire d'aire équivalente » simplifie l'approche de la question des unités sous-multiples dans la mesure des aires.
- Cela nous permet, par exemple, de définir une autre unité rencontrée dans les documents anciens : *le pan (ou palm) simple*. Contrairement à ce qu'indique son nom, c'est une unité de mesure d'aire. Il vaut 1/16 de destre carré.

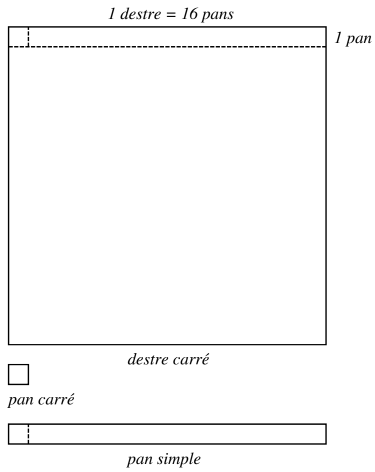


Fig. 4.19 Destre et pans

Il ne faut pas le confondre avec le *pan carré*. En effet,

$$\begin{aligned} 1 \text{ destre carré} &= 16 \text{ pans simples} \\ 1 \text{ destre carré} &= 256 \text{ pans carrés.} \end{aligned}$$

En fait, le pan simple équivaut à la superficie d'une bande de terrain rectangulaire de 1 pan de large et 1 destre de long (*Fig. 4.19*).

Cela semble clair ? Mais attention ! Derrière cette apparente simplicité se cachent des pièges sournois tels que celui-ci :

> Le destre carré utilisé pour mesurer un labour est plus grand que celui utilisé pour mesurer une vigne... !

Le premier est appelé *destre carré long*, et le second *destre carré court*. Le pan simple doit alors plutôt être défini comme la mesure de l'aire d'une bande de terrain rectangulaire

de largeur égale à 1 pan équivalent à une fraction de l'unité d'aire principale considérée, celle-ci étant imposée par le contexte.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{1 pan simple} &= \text{1/16 de destre carré long} \\ &= \text{1/13 de destre carré court} \\ &= \text{1/8 de canne carré} \end{aligned}$$

C'est donc une unité de mesure qui ne peut s'interpréter que dans un contexte préalablement défini.

– En gardant l'image des bandes rectangulaires, on peut définir également la *toise-pied*, la *toise-pouce*...

Chapitre 5

Une grandeur de base : l'aire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous élaborons un fil conducteur relatif aux concepts d'aire et de mesure des aires, en nous plaçant d'un strict point de vue mathématique. Il s'agit donc de décrire ces concepts dans leur évolution de situations familières simples vers des situations de plus en plus sophistiquées. Compte tenu du public cible de notre recherche, nous nous abstiendrons néanmoins d'aller jusqu'à envisager le stade ultime de cette évolution, à savoir celui de la théorie de l'intégration sur un espace mesuré.

Nous partirons donc de l'observation des objets et de leurs relations, et envisagerons ensuite la manipulation et la mesure de *grandeurs* telles que *longueur* et *aire*.

Les grandeurs permettent de comparer des objets. Elles induisent l'idée de mesure qui elle-même conduit à la nécessité d'établir des unités conventionnelles. On peut ainsi, dans la communication, remplacer la grandeur considérée par une expression associant un nombre et une unité de mesure. Ce passage permet de se *simplifier la vie* en remplaçant une manipulation concrète par une manipulation formelle.

Les mesures de certaines grandeurs s'obtiennent par un mesurage direct.

Exemples : Mesurer les dimensions d'un meuble. Mesurer la capacité d'une bouteille en la remplissant d'eau puis en transvasant celle-ci dans un récipient gradué.

D'autres s'obtiennent par un mesurage d'autres grandeurs suivi d'un calcul.

Exemples :
- Calculer la vitesse et l'éloignement d'un objet en mouvement en mesurant la durée entre le moment d'émission et le moment de réception d'un signal radar.
- Calculer le volume d'une pièce d'habitation en mesurant ses dimensions.

Comme l'exprime Stella Baruk,

> *Depuis des millénaires, l'homme s'est ingénié à remplacer les mesures directes... par des opérations et des calculs ne mettant en jeu que des nombres.*

Notre programme est donc tracé : partant du concept de grandeur « à l'état brut », il nous revient de décrire son évolution jusqu'à l'établissement des formules d'aire les plus courantes.

5.2 Au début était le verbe...

La langue maternelle ne s'apprend pas à l'aide de définitions. Toute tentative de définition d'une grandeur telle que l'aire d'une partie du plan « à partir de rien » revient à remplacer un mot par un autre, et est susceptible d'entraîner d'innombrables quiproquos, comme le montrent les exemples suivants :

– *La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions : longueur, largeur et hauteur, [54].*
– *L'aire d'une surface est l'étendue de celle-ci, [63].*
– *L'aire d'une portion de plan limitée par une ligne fermée est obtenue par quantification de son étendue, [10].*

Toutes ces « définitions » n'ont de sens que pour ceux qui n'ont pas besoin d'une véritable définition parce qu'ils savent de quoi on parle.

Notre approche dans ce chapitre étant strictement mathématique, nous considérerons donc les termes « grandeur » , « longueur » , « aire » , « mesure » ... comme étant des termes primitifs ne nécessitant aucune définition. Par contre, il nous appartient de leur attribuer des propriétés et de les impliquer dans des opérations.

Insistons encore sur le fait que le concept de grandeur est ce qui permet de **comparer** deux objets.

5.3 Perception qualitative de l'aire

5.3.1 Comparaison directe d'aires

Dans un premier temps, nous pouvons comparer les aires de deux portions de plan sans faire intervenir aucune mesure. Cette perception correspond au niveau 0 de Van Hiele qui considère les objets de façon globale, sans intervention de propriétés particulières.

La comparaison de deux objets consiste à établir une relation d'ordre entre leurs aires. Il faut donc déterminer si l'aire de A est plus ou moins grande que celle de B, ou si elles sont égales. Dans ce contexte, les expressions « plus étendu que » et « moins étendu que », spécifiques à la grandeur *aire*, seront privilégiées. En effet, les termes « plus grand que » et « plus petit que » peuvent être utilisés pour toutes les grandeurs. Par contre, l'usage des termes spécifiques aide l'apprenant à prendre conscience de la notion d'aire.

Dans les premiers exemples rencontrés, cette comparaison se fera

– par superposition directe ([1])

([1]) R. Bkouche, [12], mentionne ce principe comme étant *le principe premier de la géométrie.*

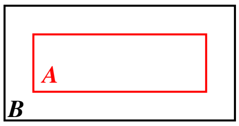


Fig. 5.1
Aire $(A) <$ Aire (B)

– à l'œil : on déplace mentalement un objet de façon à le visualiser superposé à une partie de l'autre.

Si trois objets A, B, C sont mis en comparaison, on peut aboutir à une expression telle que

Aire $(A) <$ Aire $(B) <$ Aire (C)

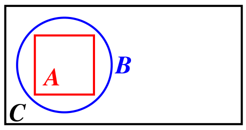


Fig. 5.2

L'expression ci-dessus fournit un encadrement de l'aire de B par celles de A et C. De plus, bien qu'elle ne mette en évidence que deux comparaisons, une troisième est sous-jacente du fait que la comparaison des aires possède la principale propriété d'une relation d'ordre : la *transitivité*. Cette dernière est très « naturelle » : *Si l'aire de A est plus petite que celle de B et si l'aire de B est plus petite que celle de C, alors l'aire de A est plus petite que celle de C.*

5.3.2 Comparaison indirecte d'aires

Par « comparaison indirecte » des aires d'objets A et B, nous entendons un processus constitué d'une suite d'opérations (fusion, décomposition) s'appliquant à l'objet A, donnant un objet A' qui peut *in fine* être comparé directement à B.

A. Précautions préalables

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons utiliser une propriété spécifique des opérations évoquées ci-dessus afin de faire émerger le caractère additif de l'aire qui assure sa conservation lors du processus de comparaison.

Aires et fusion :

L'assemblage de deux formes géométriques dans le but d'en créer une troisième par fusion permet de faire apparaître le caractère additif de l'aire.

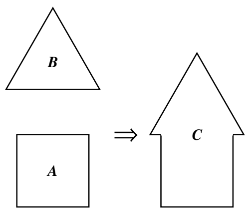


Fig. 5.3
Aire $(A) +$ Aire $(B) =$ Aire (C)

Une manipulation de ce type et son expression par une formule situent l'activité au niveau 1 de Van Hiele.

Aires et décomposition :

La décomposition d'une forme géométrique dans le but d'en créer deux relève également du caractère additif de l'aire.

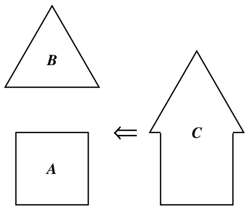


Fig. 5.4
Aire (C) = Aire (A) + Aire (B)

Conclusion :

Le caractère additif de l'aire assure sa conservation aussi bien lors de la décomposition que de la recomposition.

B. Les puzzles ou le procédé d'*équidécomposition*

Si nous devons comparer deux formes géométriques différentes, nous pourrons mettre en évidence l'égalité éventuelle de leurs aires via un découpage d'un des objets suivi d'une recomposition permettant d'obtenir l'autre. Nous venons de montrer que la fusion et la décomposition de surfaces conservent l'aire totale, ce qui légitime le procédé.

Le découpage d'un objet A en morceaux ne doit pas être effectué de manière aléatoire mais bien de manière raisonnée, en vue de reconstituer un objet B à la façon d'un puzzle.

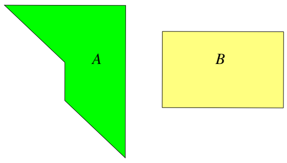


Fig. 5.5

Les objets A et B ne sont pas superposables. La relation d'ordre entre leurs aires respectives n'étant pas évidente à l'œil nu, il faut décomposer l'une pour obtenir une forme comparable à l'autre. Dans l'exemple choisi, il est possible de décomposer l'objet A en deux pièces permettant de recomposer l'objet B comme illustré ci-dessous.

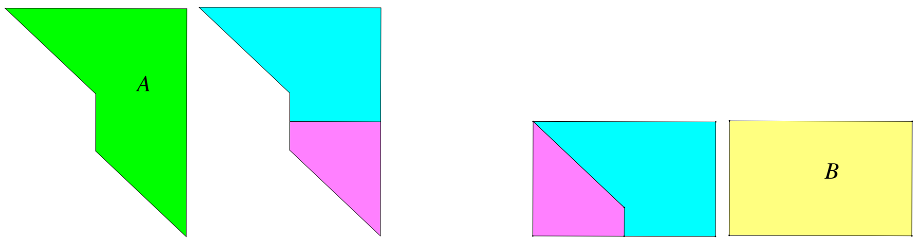


Fig. 5.6

Les puzzles constituent donc un outil permettant d'établir l'égalité d'aire de formes différentes. De plus, notons dès à présent qu'ils vont nous conduire également à l'élaboration de *formules* de calcul d'aires (*voir section 5.8*).

Remarque :

Nous touchons ici à une des compétences fondamentales du raisonnement mathématique : l'aptitude à trouver les outils et les procédures nécessaires pour passer d'une situation initiale à une situation finale imposée sans disposer d'un algorithme donné. Ce type de démarche nous amène au niveau 2, voire 3, de VAN HIELE.

En fait, lorsque l'élève se trouve devant l'objet A, il faut qu'il parvienne à **voir** les propriétés qu'il recèle, les différents éléments qui lui sont associés, déjà tracés ou non, et dont l'usage lui permettra de décomposer l'objet A pour reconstituer l'objet B. Il faut pour cela que l'esprit fasse un aller-retour constant entre les objets A et B, pour évaluer le *chantier* A en le comparant avec l'*objectif* B.

« **Voir** les propriétés que les objets recèlent » signifie notamment :

– repérer les côtés de même longueur, les angles de même amplitude...
– imaginer les diagonales, les médianes, les hauteurs...
– visualiser les axes et les centres de symétrie, les milieux des segments...
– élaborer toute découpe utile
– ...

Cette capacité à **voir** est primordiale dans l'apprentissage des mathématiques et dans leur usage car elle est notamment à la base de la compétence « démontrer » et elle permet la perception de « patterns [2] ». Elle a été étudiée en détails par R. DUVAL (*voir l'annexe A.4*).

Ce sujet, bien qu'abordé dans la présente recherche, s'étend bien au-delà des objectifs que nous nous sommes fixés.

B. Le procédé d'*équicomplémentarité*

Le principe est le suivant : Les objets A et B sont de même aire si on peut les englober chacun dans un même objet C, de telle façon que les compléments à apporter pour obtenir C soient identiques [3].

[2] *Pattern* : mot anglais signifiant *exemple, modèle*. Par **pattern**, nous entendons *élément répétitif, structure commune* permettant la généralisation. Par exemple la structure qui sous-tend les abaques du système métrique permet d'imaginer une extension à plus de trois dimensions. De même, la structure commune aux polynômes obtenus en développant des puissances de binômes conduit au binôme de Newton e au triangle de Pascal.

[3] Cette notion est déjà présente chez EUCLIDE. En effet, au début du livre I des « Eléments », on trouve dans les notions communes (c'est-à-dire communément admises)
– 2. *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
– 3. *Et si, à des choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*

Exemple 1

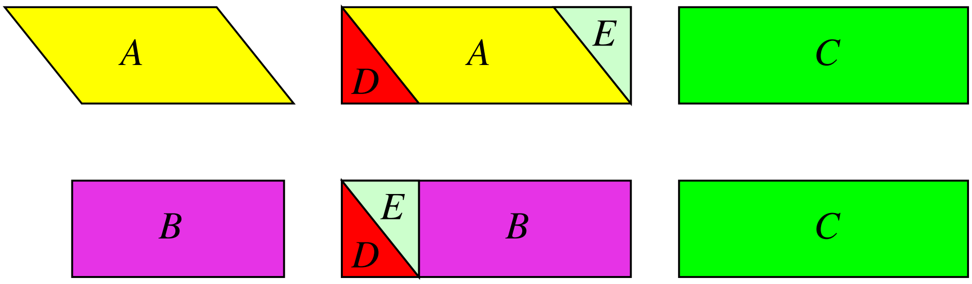


Fig. 5.7

A et B peuvent tous deux être englobés dans C, et on a

$$\begin{cases} \text{Aire }(A) + \text{Aire }(D) + \text{Aire }(E) = \text{Aire }(C) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{et} \\ \text{Aire }(B) + \text{Aire }(D) + \text{Aire }(E) = \text{Aire }(C) \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que Aire $(A) =$ Aire (B).

Exemple 2

On peut appliquer ce procédé pour comparer les aires de X et Y.

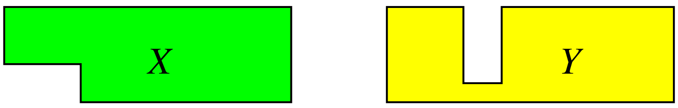


Fig. 5.8

En effet

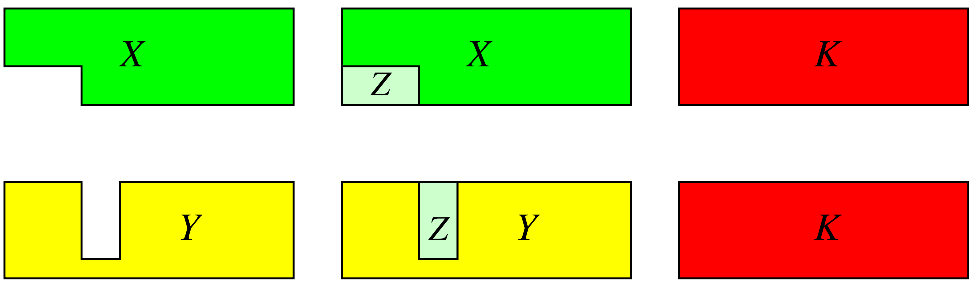


Fig. 5.9

On voit que

$$\begin{cases} \text{Aire }(X) + \text{Aire }(Z) = \text{Aire }(K) \\ \qquad\qquad\quad \textit{et} \\ \text{Aire }(Y) + \text{Aire }(Z) = \text{Aire }(K) \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que Aire $(X) =$ Aire (Y).

Remarque :

Le procédé d'équicomplémentarité nous fournit un second outil permettant non seulement d'établir l'égalité d'aire de formes différentes, mais conduisant également à l'élaboration de *formules* de calcul d'aires.

D. Une application « historique »

On trouve dans EUCLIDE, Livre 1 des Eléments, proposition 35 :

> *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

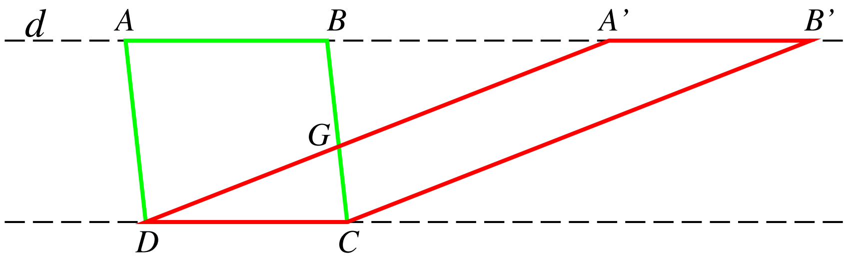


Fig. 5.10

Dans la démonstration de cette proposition, EUCLIDE utilise déjà le procédé d'équicomplémentarité.

Partons des éléments suivants :

- $ABCD$ est un parallélogramme,
- $[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments de même longueur de la droite d.

Démontrons que l'aire de $(ABCD)$ est égale à l'aire de $(A'B'CD)$.

En effet :

Les deux triangles (ADA') et (BCB') sont égaux ([4]). Ils ont donc la même aire.

Ceci peut se traduire en disant que la somme de l'aire du trapèze $(ABGD)$ et de l'aire du triangle (GBA') est égale à la somme de l'aire du trapèze $(CGA'B')$ et de l'aire du triangle (GBA') (*propriété d'additivité de l'aire appliquée à la décomposition*).

Donc, l'aire du trapèze $(ABGD)$ est égale à l'aire du trapèze $(CGA'B')$ (*par le principe d'équicomplémentarité*).

Par conséquent, la somme de l'aire du trapèze $(ABGD)$ et de l'aire du triangle (DGC) est égale à la somme des aires du trapèze $(CGA'B')$ et du triangle (DGC).

([4]) Cas d'égalité des triangles C-A-C :
- $|AD| = |BC|$
- $|AA'| = |AB| + |BA'| = |A'B'| + |BA'| = |BB'|$
- $\widehat{DAB} = \widehat{CBB'}$

Autrement dit, l'aire du parallélogramme $(ABCD)$ est égale à l'aire du parallélogramme $(A'B'CD)$ (*propriété de l'additivité de l'aire appliquée à la fusion*).

5.4 Perception mixte de l'aire

Dans la section précédente nous avons traité de la comparaison de deux aires d'un point de vue purement qualitatif. En allant plus loin dans l'utilisation des outils rencontrés, nous nous acheminons vers une quantification de l'aire. En effet, dans cette section, des nombres naturels d'abord, des rapports de naturels ensuite, interviennent lors de comparaisons d'aires.

5.4.1 Multiplication d'une aire par un naturel

Si nous assemblons plusieurs formes identiques, nous obtenons une nouvelle forme dont l'aire est obtenue par additions répétées des aires de la forme de base, ce qui peut être regardé comme la multiplication de l'aire de cette forme de base par un nombre naturel. Il s'agit bien de travailler avec un opérateur multiplicatif agissant sur une grandeur et non pas avec un nombre pur.

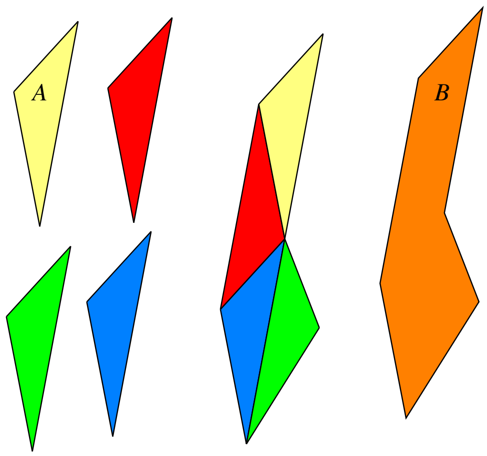


Fig. 5.11

Il apparaît clairement que
$\text{Aire }(A) + \text{ Aire }(A) + \text{ Aire }(A) + \text{ Aire }(A) = 4 \text{ Aire }(A) = \text{ Aire }(B).$

Ce passage à l'utilisation d'un opérateur multiplicatif nous permet d'aborder deux autres notions fondamentales :
– la **décomposition d'une forme en fragments identiques**,
– le **rapport d'aires**.

5.4.2 Décomposition d'une forme en fragments identiques

a) Utilisation de l'opérateur multiplicatif en lecture inverse Certaines formes peuvent se décomposer en une juxtaposition de fragments identiques. Soit, par exemple :

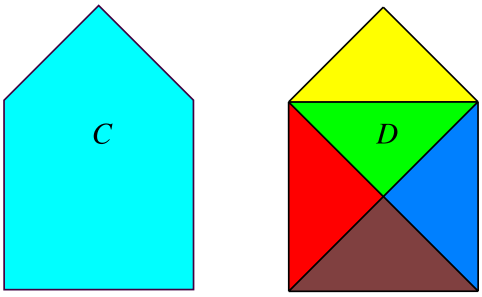


Fig. 5.12

On voit clairement que Aire $(C) = 5$ Aire (D).

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\text{Aire } (D) &= \frac{1}{5}\text{ Aire } (C)\\ &= \frac{\text{Aire } (C)}{5}\end{aligned}$$

b) Une deuxième « application historique » : Euclide I 37

> *Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

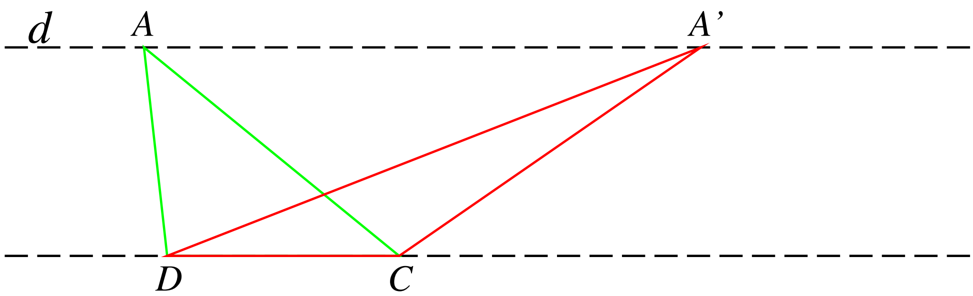


Fig. 5.13

Si A et A' sont deux points d'une droite parallèle à DC, alors les triangles (ADC) et $(A'DC)$ ont la même aire.

En effet, chaque triangle est la moitié d'un parallélogramme dont le quatrième sommet se trouve sur la droite AA'.

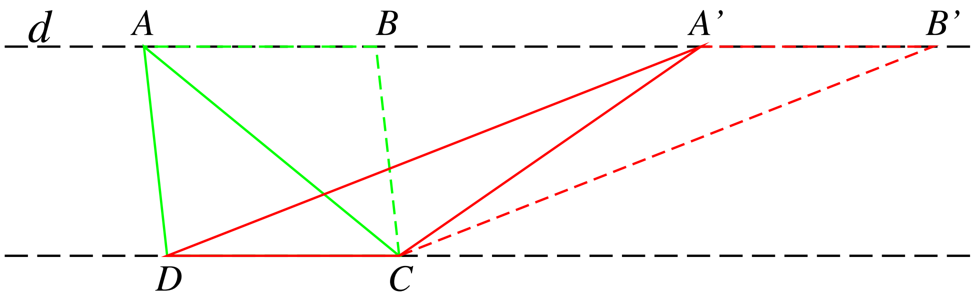


Fig. 5.14

On sait que les aires de $(ABCD)$ et de $(A'B'CD)$ sont égales (EUCLIDE I 35).

Or, l'aire de $(ABCD)$ est le double de celle de (ADC), tout comme l'aire de $(A'B'CD)$ est le double de celle de $(A'DC)$.

Par conséquent l'aire de (ADC) est égale à celle de $(A'DC)$ ([5]).

5.4.3 Rapport de deux aires

La comparaison simple ([6]) de deux formes d'aires différentes peut parfois être affinée dans le cas où un multiple de l'une a la même aire qu'un multiple de l'autre.

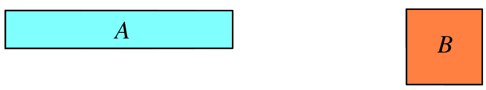


Fig. 5.15

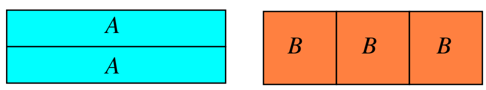


Fig. 5.16

La comparaison des multiples des deux formes A et B tels qu'on les voit à la figure 5.16 montre que $2 \times A$ est aussi étendu que $3 \times B$, ou 2 Aire $(A) = 3$ Aire (B).

Ceci nous conduit à exprimer la comparaison des aires de A et B sous la forme : « *L'aire de A est à l'aire de B comme 3 est à 2.* »

Attention, cette approche de la notion de rapport se fait sans que la **mesure** d'aire ne soit nécessaire !

([5]) Dans cette démonstration, EUCLIDE utilise encore une des notions communes présentent au début du livre I (voir la note en bas de page 111). En effet, on trouve au numéro 6. *Et les moitiés des choses égales sont égales entre elles.*

([6]) Nous appelons comparaison simple une relation du type Aire $(A) <$ Aire (B).

5.4.4 Remarques

Notion de bande

L'approche développée dans les deux propositions d'EUCLIDE précitées permet de donner une justification au vocabulaire qui sera utilisé plus loin lorsqu'on établira les formules de calcul d'aire d'un parallélogramme ou d'un triangle.

En effet, les deux droites parallèles envisagées dans ces deux propositions permettent de définir ce que nous appellerons une *bande*. Nous entendons par *bande* la portion de plan comprise entre ces deux parallèles.

Notons que tout parallélogramme peut être inscrit dans deux bandes et que tout triangle peut être inscrit dans trois bandes.

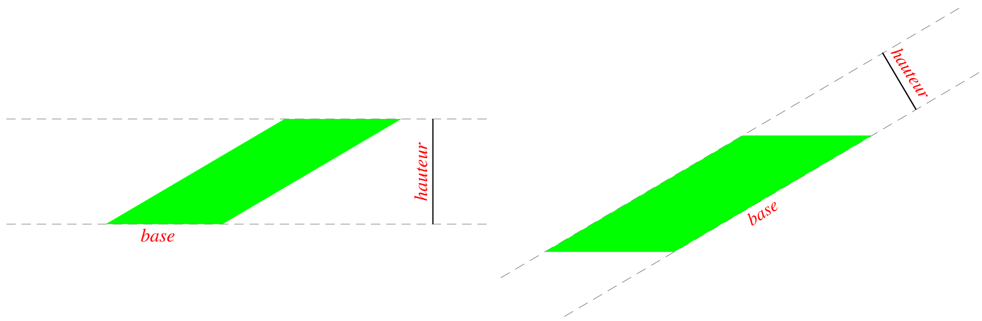


Fig. 5.17

Une bande étant choisie, on appellera *base* d'un parallélogramme ou d'un triangle un côté appartenant à un des bords de la bande, et *hauteur* (relative à cette base) la largeur de la bande.

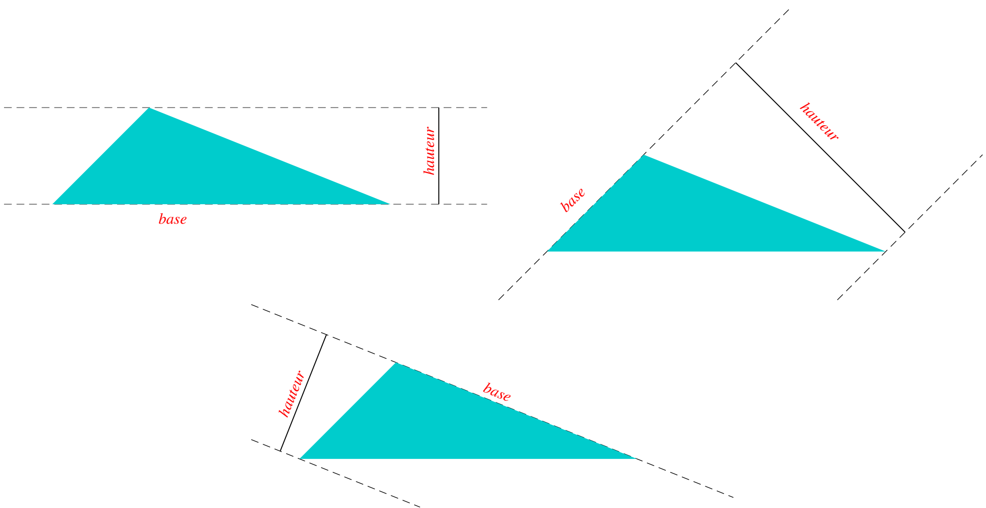


Fig. 5.18

On peut voir que la largeur de la bande change si on change de base, et donc que la hauteur dépend de la base choisie.

Autre regard

On peut aussi envisager la déformation continue du triangle ADC (*fig.* 5.13) ou du parallélogramme $ABCD$ (*fig.* 5.10) obtenue en « tirant » leur sommet A en A' de telle sorte que AA' soit parallèle à DC. On peut déduire de ce qui précède que l'aire de tous les triangles et de tous les parallélogrammes obtenus tout au long de cette déformation est constante.

Extension du procédé

L'objet X peut être déformé de façon continue pour obtenir le rectangle Y.

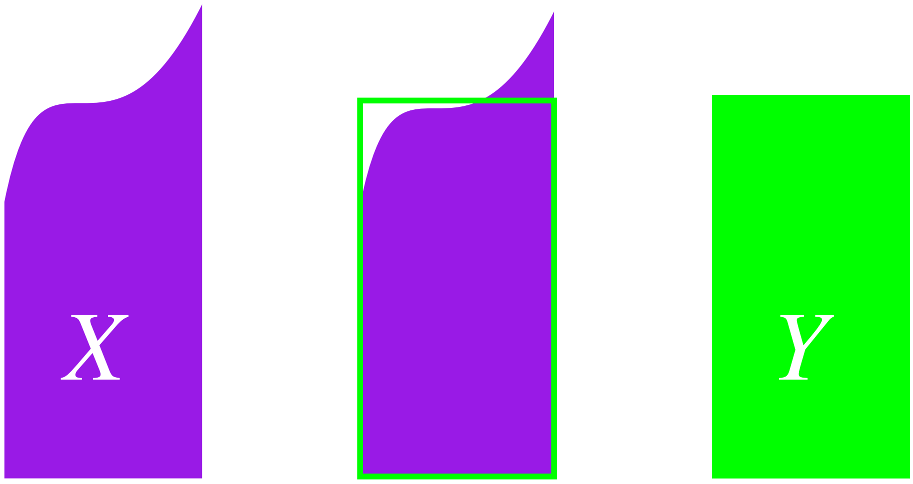


Fig. 5.19

Notons que la hauteur du rectangle Y est la valeur moyenne de la hauteur des points de la courbe limitant l'objet X. Cette valeur moyenne peut être obtenue par les techniques du calcul intégral. Mais ceci sort du cadre de cette recherche.

5.5 Quantification de l'aire

Le caractère additif de l'aire et la décomposition d'une forme en fragments identiques, rencontrés à la section précédente, nous fournissent les outils justifiant la **quantification** de l'aire d'une figure.

Etablissons une distinction entre **quantifier** et **numériser** une grandeur.

a) **Quantifier une grandeur** revient à l'exprimer en tant que multiple ou partie d'une unité qui est elle-même une grandeur de même nature choisie comme référence. La quantification associe donc un **nombre** à la grandeur étudiée. Ce nombre sera appelé **mesure** de cette grandeur pour l'unité choisie. Ceci nous ouvre le chemin de la numérisation.
b) **Numériser une grandeur** consiste à *remplacer* cette grandeur par une quantité nu-

mérique qui se substitue à elle. On quitte donc alors une notion et un objet géométriques pour s'occuper essentiellement de quantités, c'est-à-dire de nombres. On remplace donc un objet « matériel » (qui peut être touché, dessiné, colorié, ...) par un nombre qui relève d'une autre forme d'abstraction. Ce remplacement constitue un changement de **cadre** au sens de R. Douady ([7]). En effet, on passe d'un objet géométrique à un objet numérique.

Ce remplacement peut être perçu comme une facilitation des opérations. Notons cependant qu'il conduit parfois à une perte du sens des opérations que l'on mène et des résultats obtenus. C'est particulièrement visible dans les problèmes de « calcul de grandeurs » qui sont quelquefois pratiqués et dans lesquels les données sont numériques, les manipulations utilisent des formules et des nombres et les résultats sont purement numériques et n'ont plus de signification liée au contexte concret qui sert de *prétexte* au problème ([8]).

La déviance qui vient d'être exprimée est un effet pervers de la **prégnance du nombre** sur la forme géométrique dans l'apprentissage des mathématiques.

Abordons donc maintenant la notion, ainsi clarifiée, de quantification de l'aire.

Celle-ci repose toujours sur le **pavage** de la surface à quantifier par des figures identiques. Un pavage est un recouvrement sans chevauchement et sans espace libre.

La figure répétée sera l'**unité**.

5.5.1 Recouvrement exact

Envisageons tout d'abord le cas où l'aire à quantifier est recouverte par un nombre entier de figures identiques à l'unité.

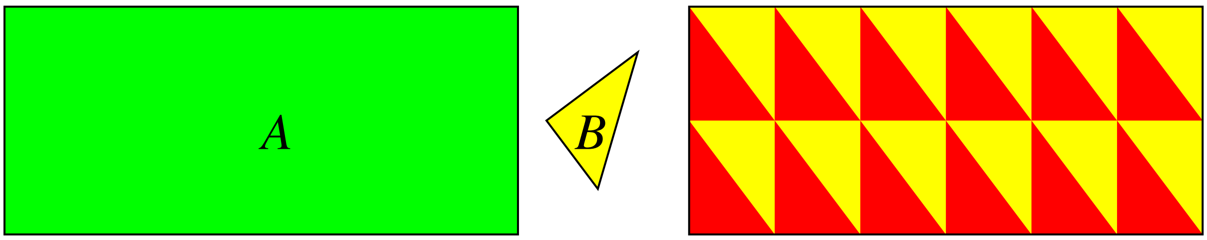


Fig. 5.20

Le rectangle A est pavé par le triangle B. L'aire de A s'exprime donc par comptage de ces triangles. Dans la figure ci-dessus, l'aire de A est égale à 24 fois l'aire de B. On peut écrire ceci de cette manière :

$$\text{Aire }(A) = 24 \text{ Aire }(B)$$

([7]) Voir l'annexe A.2

([8]) Un exemple parmi de nombreux autres : il est fréquent que des élèves soient incapables de donner la signification du résultat numérique d'un calcul d'aire obtenu par une application correcte d'une formule, parce qu'ils ne *voient* pas ce que représente l'unité d'aire.

5.5.2 Recouvrement par l'unité et fractions de celle-ci

Considérons maintenant une surface dont le recouvrement fait apparaître des fractions de la figure unité. Dans ce cas, le dénombrement entier ne suffit plus, les parties fractionnaires doivent aussi être prises en compte.

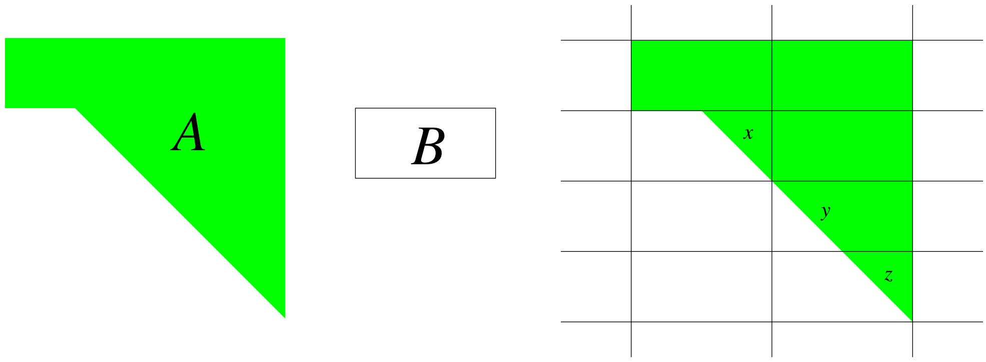


Fig. 5.21

Si nous voulons quantifier l'aire de A grâce à l'unité B, nous constatons que le pavage par des figures B fait apparaître 3 pièces entières et 3 pièces qui sont des fractions de B. Les pièces x et z ont une aire égale au quart de l'aire de B tandis que l'aire de y est égale aux trois quarts de celle de B.

Ainsi donc :

$$\text{Aire }(A) = 3 \text{ Aire }(B) + \frac{1}{4} \text{ Aire }(B) + \frac{3}{4} \text{ Aire }(B) + \frac{1}{4} \text{ Aire }(B) = \left(4 + \frac{1}{4}\right) \text{ Aire }(B)$$

5.5.3 Quantification par encadrement

Lorsqu'il n'est pas possible d'évaluer les fractions d'unité qui recouvrent la surface, un pavage permet cependant de fournir un encadrement quantifié de l'aire de la figure étudiée. Quelle que soit la forme A et quelle que soit l'unité B choisie, nous obtenons l'encadrement suivant :

Appelons k le nombre maximum d'éléments du pavage entièrement recouverts par A.

Appelons r le nombre minimum d'éléments entiers du pavage nécessaires pour recouvrir totalement A.

Nous avons alors

$$k \text{ Aire }(B) < \text{ Aire }(A) < r \text{ Aire }(B)$$

Illustrons ceci par un exemple :

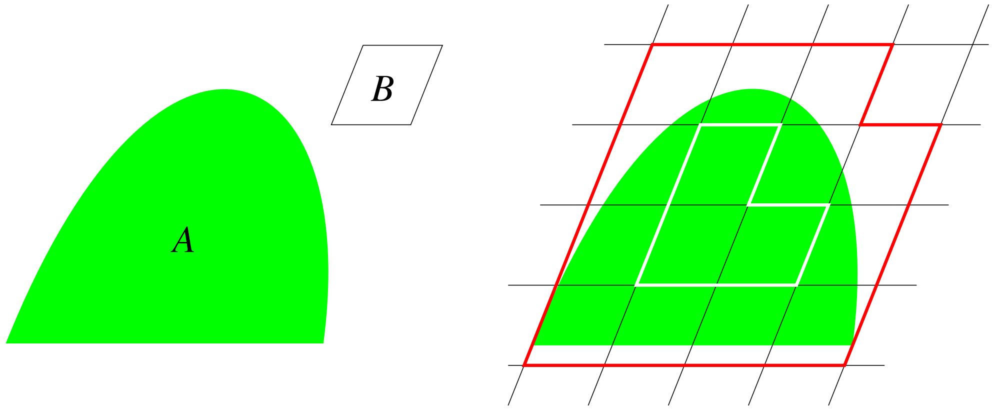


Fig. 5.22

Nous constatons que l'aire de A est comprise entre 3 et 15 fois l'aire de B.

$$3 \text{ Aire } (B) < \text{ Aire } (A) < 15 \text{ Aire } (B)$$

Remarques importantes :

1. Toute forme géométrique qui pave le plan peut être choisie comme unité et permet d'établir un encadrement de l'aire d'une figure.
2. La fourchette d'encadrement obtenue est dépendante de l'unité choisie.
3. La fourchette d'encadrement peut être améliorée, c'est-à-dire resserrée, en choisissant une unité plus petite, par exemple une fraction de l'unnité de départ.
   Appliquons ceci à la figure 5.22, en utilisant un pavage où la nouvelle unité B' est un quart de l'unité B.

$$\text{Aire } (B') = \frac{1}{4} \text{ Aire } (B)$$

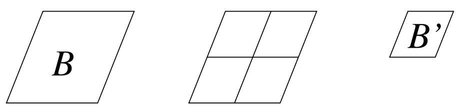


Fig. 5.23

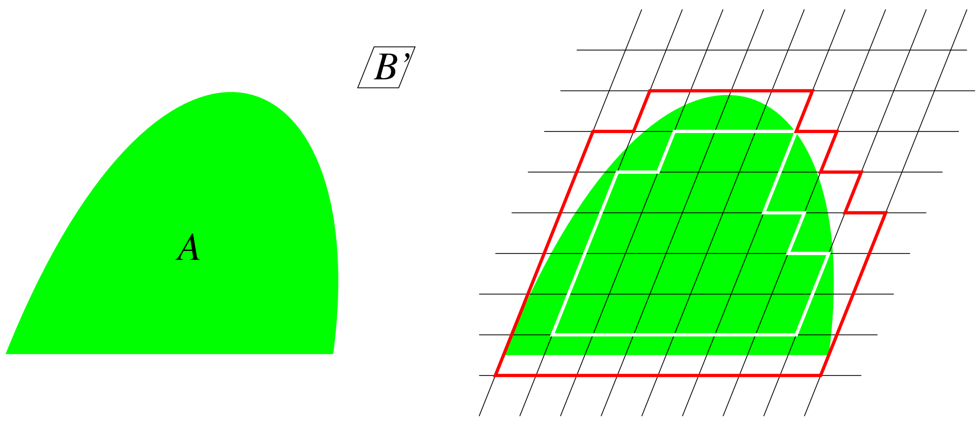


Fig. 5.24

Nous avons vu plus haut que l'aire de A est comprise entre 3 et 15 fois l'aire de B. Avec le nouveau pavage construit à l'aide de B', on voit que l'aire de A est comprise entre 24 et 49 fois l'aire de B'.

$$24 \text{ Aire } (B') < \text{ Aire } (A) < 49 \text{ Aire } (B')$$

Pour pouvoir comparer ces encadrements, il faut les exprimer à l'aide de la même unité :

$$24 \text{ Aire } (B') < \text{ Aire } (A) < 49 \text{ Aire } (B')$$

$$\Longleftrightarrow 6 \text{ Aire } (B) < \text{ Aire } (A) < (12 + \frac{1}{4}) \text{ Aire } (B)$$

$$\text{En effet } 4 \text{ Aire } (B') = \text{ Aire } (B)$$

L'aire de A se situe dans une fourchette dont la largeur est égale à 12 ($= 15 - 3$) fois l'unité B. Ce nombre 12 reflète l'erreur maximale « possible » sur la mesure de l'aire de A. Par contre, en utilisant B', la largeur de la fourchette devient $6 + \frac{1}{4}$ $(= 12 + \frac{1}{4} - 6)$ fois l'unité B. L'erreur maximale « possible » a donc diminué.
On peut réitérer ce processus afin d'améliorer l'encadrement jusqu'à atteindre la précision voulue, ou une largeur de fourchette nulle, ce qui nous ramènerait à un recouvrement exact.

5.5.4 Importance de la quantification sur la compréhension de la notion d'aire

Rappelons que l'**aire** est une grandeur et qu'elle correspond à ce que nous appelons familièrement l'**étendue**.

La grandeur aire d'une figure ne peut donc être considérée comme assimilée que lorsque l'élève est capable de « voir » la relation qui existe entre l'aire de la figure considérée et l'aire de l'unitéchoisi.

C'est précisément ce qui est réalisé lorsque l'élève a pu quantifier l'aire d'une figure.

Le travail de quantification de l'aire devrait absolument précéder la numérisation, et être longuement développé. Ceci devrait se faire au cours de multiples activités utilisant aussi bien les puzzles matériels que les recouvrements de figures-dessins par un unitéchoisi. Ce travail n'est nullement une perte de temps et nous paraît être la meilleure sinon la seule manière de donner du sens à la grandeur.

5.5.5 Choix du carré comme unité

Si dans le système conventionnel l'unité de longueur est u, alors l'unité d'aire sera l'aire du carré dont le côté est de longueur u.

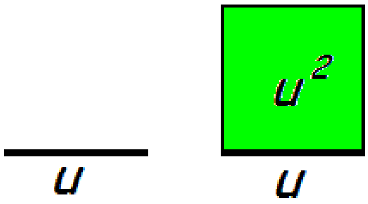


Fig. 5.25

Pourquoi l'unité « carré » s'est-elle imposée ?

Nous allons tenter de répondre à cette question par des éléments qui n'engagent toutefois que les auteurs de cette recherche. Il nous semble que deux arguments essentiels ont orienté ce choix.

Premier argument : la perpendicularité

Remarquons tout d'abord que la direction verticale est une direction fondamentale pour la perception visuelle de l'être humain. Divers facteurs justifient la prédominance naturelle de la verticale. Parmi ceux-ci, citons les observations suivantes :

- D'un point de vue physique, l'attraction gravitationnelle se manifeste suivant une direction que nous avons nommée la **verticale**. Cette force conditionne tous nos faits et gestes ainsi que notre milieu de vie (géotropisme).
- D'un point de vue physiologique, l'être humain posséde un plan de symétrie **vertical** (nous avons deux yeux, deux oreilles, etc.). Notons que, en terme d'évolution, c'est le passage à la bipédie qui a rendu la direction verticale prégnante.
- A un endroit donné, sur terre, la **verticale** est unique, contrairement aux horizontales et aux obliques, et est indépendante de l'observateur.

L'horizontalité, quant à elle, découle naturellement de la verticale comme conséquence de la gravitation, qui, à notre échelle humaine, fait apparaître le plan horizontal au niveau des étendues d'eau. Nous avons également une perception physiologique de l'horizontalité, ou, en tout cas, nous sentons assez vite, lors de déplacements, si un terrain est horizontal ou non. La confrontation de l'horizontalité et de la verticalité fait apparaître toute l'importance de **l'angle droit**.

Les mouvements simples (demi-tour, quart de tour) associés à l'orientation (devant, derrière, à gauche, à droite) mènent également à l'angle droit.

Parmi les formes géométriques qui pavent le plan, celles qui utilisent l'angle droit vont donc être privilégiées.

Deuxième argument : l'isotropie

Parmi les figures géométriques munies d'angles droits, le carré présente l'avantage supplémentaire d'utiliser la même longueur selon les deux directions déterminées par ses côtés.

Opposons à cela certains étalons d'aire utilisés autrefois, tels que le « pouce par toise », ou « pouce par aune » dont l'usage était spécifique à **une** activité donnée. Ces étalons étaient certes utiles dans le cadre de cette activité, mais leur utilisation très ciblée limitait leur intérêt.

Le carré, au contraire, est universel. L'usage du quadrillage s'est donc naturellement imposé. De plus, il a une conséquence essentielle qui est de permettre l'usage d'une même unité de longueur dans toutes les directions. Or, nous allons montrer plus loin que les calculs d'aire reposent en fait sur des mesures de longueur.

5.6 Numérisation de l'aire

5.6.1 Intérêt de la numérisation

Comme nous l'avons dit précédemment (p. 118), numériser l'aire consiste à lui attribuer une valeur numérique, c'est-à-dire une mesure, et ainsi à **remplacer** la grandeur géométrique par un **nombre**.

Pour faire ressortir la différence entre une aire quantifiée et une aire numérisée, à partir de maintenant nous adopterons les notations suivantes :

– Une aire numérisée à l'aide d'une unité U se notera $\text{Aire}_{\,U}(A) = n$

– Une aire quantifiée par un unité U sera toujours, comme précédemment, notée $\text{Aire}\ (A) = n\ \text{Aire}\ (U)$

Grâce à l'usage de l'unité universelle « carré », l'interprétation de ce **nombre** n est, elle aussi, universelle dès que la longueur u du côté de ce carré unité est donnée.

En pratique donc la quantité numérique donnant la mesure de l'aire doit être exprimée par un nombre accompagné de la dimension du carré unité.

Dès lors, tous les raisonnements et manipulations relatifs aux aires peuvent être remplacés par des raisonnements et calculs sur des nombres.

5.6.2 Etablissement de l'étalon conventionnel

Pour obtenir un étalon conventionnel utile, c'est-à-dire utilisé par tous (ou par un maximum de personnes), il reste à choisir ou à imposer l'unité de longueur u présentée figure 5.25. A l'heure actuelle le S.I. (système international) choisit le mètre et est quasi universellement accepté.

Une unité ayant acquis de la sorte un statut légal est généralement désignée sous le nom d'*étalon*.

5.7 Calcul de la mesure de l'aire par les mesures de longueurs

5.7.1 Un pont entre le monde des aires et le monde des longueurs

Le but de cette section est de montrer un cheminement mental qui va permettre de remplacer le processus de comptage des unités d'aire par un calcul numérique sur des mesures de longueur.

Comme l'écrit Stella BARUK [10] :

> *On pourrait compter les* cm^2*, mais étant donné la forme de* A*, il est plus commode, parce que plus rapide, de prévoir ce que donnerait le comptage, plutôt que de le faire en vrai... On ne mesure donc plus l'aire d'un rectangle, mais on la prédit à l'aide d'un calcul !*

La mesure de l'aire par comptage simple

Choisissons le rectangle comme figure de départ de notre raisonnement. Comme nous l'avons vu précédemment, l'aire du rectangle peut être quantifiée en fonction du carré unité par comptage. Commençons par envisager le cas simple du recouvrement exact.

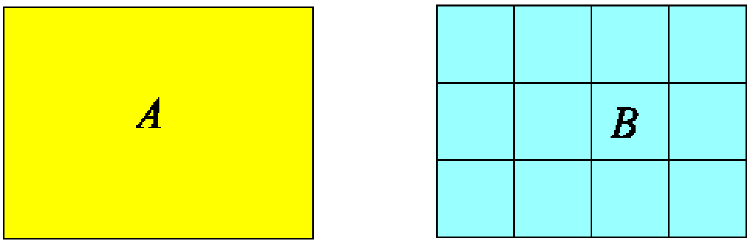


Fig. 5.26

Ici, on a Aire $(A) = 12$ Aire (B)

ou $\text{Aire}_B(A) = 12$

Si nous choisissons le cmcomme unité de longueur, nous avons pour notre exemple $\text{Aire}_{\,\mathrm{cm}^2}(A) = 12$.

La mesure de l'aire par comptage groupé par rangées

Le comptage peut être accéléré par le processus suivant :

a) on compte le nombre de carrés par rangée ;
b) on compte le nombre de rangées ;
c) le nombre total de carrés est bien entendu égal au nombre de carrés d'une rangée multiplié par le nombre de rangées.

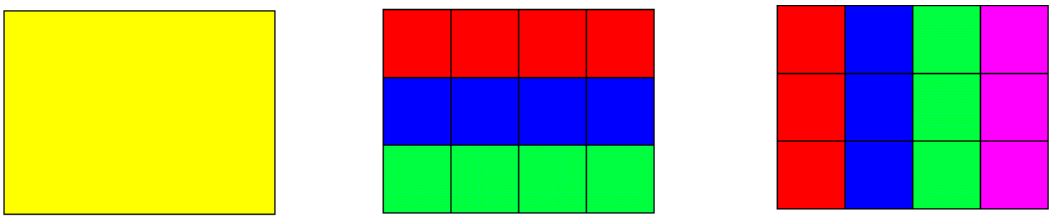


Fig. 5.27

On voit bien que le nombre de carrés couvrant A est égal à 4 carrés $\times 3$ ou 3 carrés $\times 4$.

$$\begin{aligned}\text{Aire}(A) &= (4\text{Aire}(B)) \times 3\\ &= (3\text{Aire}(B)) \times 4\end{aligned}$$

Si l'unité d'aire est le cm^2, nous pouvons également écrire

$$\text{Aire}(A) = 4\ \text{cm}^2 \times 3 \text{ ou } 3\ \text{cm}^2 \times 4.$$

Dans un sens comme dans l'autre, on a bien $\text{Aire}_{\text{ cm}^2}(A) = 12$

Le comptage : une technique en (perpétuelle) voie de disparition

Ces deux manières de numériser l'aire (globalement ou par rangées) sont aisées à utiliser lorsque le nombre de carrés à compter est relativement petit, et elles sont d'une efficacité équivalente.

Mais qu'en est-il lorsque le rectangle grandit ?

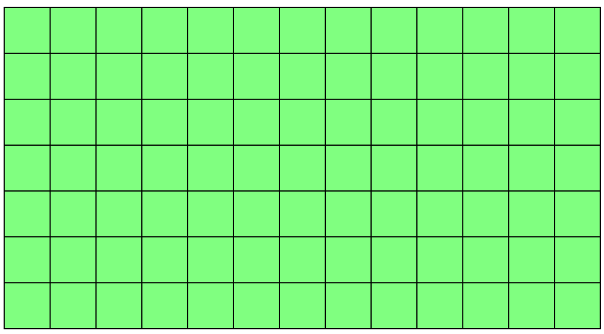


Fig. 5.28

Dans ce cas, le comptage individuel des carrés unités devient fastidieux, et donc le comptage par rangées devient rapidement plus efficace.

Et lorsqu'on arrive à un rectangle comme ci-contre, même le comptage du nombre de carrés d'une seule rangée devient lourd !
Notre paresse naturelle nous conduit alors à nous tourner vers les instruments.
Envisageons le matériel usuel de l'écolier. Avec un peu de chance, il aura à sa disposition crayon, gomme, équerre, compas, latte graduée, rapporteur...
Parmi ceux-ci, il n'y a **aucun instrument** lui permettant d'obtenir directement le nombre total de carrés. Par contre, avec une latte graduée suivant l'unité de longueur u, on peut aisément **lire** le nombre de carrés d'aire u^2 d'une rangée, aussi bien que le nombre de rangées.

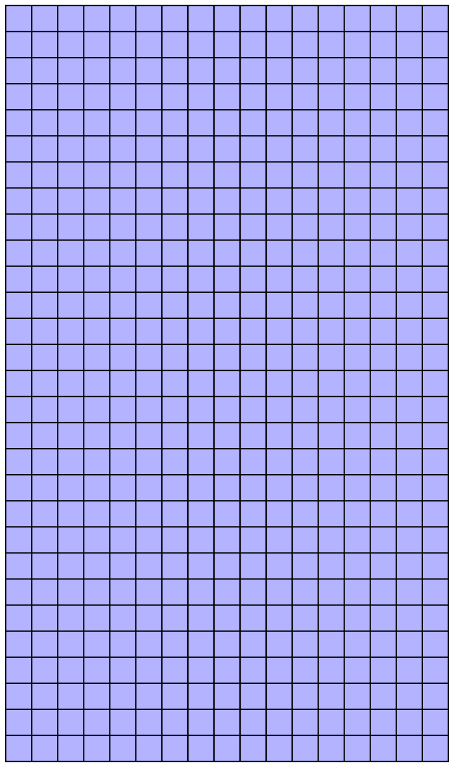


Fig. 5.29

La mesure de l'aire par les mesures de longueurs

Par ailleurs, la latte graduée est un instrument de mesure de longueur. Donc, elle donne à la fois le nombre de carrés (d'aire u^2) d'une rangée et la mesure de la longueur (en unité u) du côté correspondant. De même, le nombre de rangées correspond à la longueur (en unité u) de l'autre côté.

Donc, la mesure de l'aire du rectangle A (en unité u^2) peut être obtenue en multipliant les mesures de longueur (en unité u) de ses deux côtés.

Sous forme symbolique :

$$\mathcal{A}_{u^2} = L_u \times \ell_u$$

ou plus simplement $\mathcal{A} = L \times \ell$.

Nous en sommes donc arrivés à remplacer la quantification de l'aire du rectangle par un **calcul** numérique basé sur le produit des mesures de **deux** longueurs.

5.7.2 Remarques importantes

1. L'idée que le comptage du nombre de carrés par rangée puisse être remplacé par la mesure de la longueur de cette rangée est un passage relativement délicat pour les élèves. Il nous apparaît indispensable que ce passage soit rendu clairement perceptible par les élèves au moyen d'exercices multiples et variés.

2. Le développement que nous venons de faire dans le cas d'un recouvrement exact d'un rectangle peut s'étendre facilement au cas d'un encadrement de l'aire de ce rectangle. Il peut également s'étendre au cas d'un recouvrement fractionnaire.
3. L'idée essentielle qui vient d'émerger est le remplacement de la quantification de l'aire par un produit de mesures de deux longueurs.

   Par conséquent, nous établissons un pont entre « le monde des aires » et celui « des longueurs ». C'est cette démarche qui va nous conduire vers la construction de **formules** de calcul d'aire, et donc vers l'algébrisation.

5.8 Etablissement de formules du calcul de la mesure de l'aire de quelques polygones

5.8.1 Préliminaires

1. L'établissement des formules par et avec les élèves constitue un des meilleurs moyens de leur donner du sens !
2. Dans cette section, nous ne considérons plus que la mesure de l'aire sous sa forme numérisée, ce qui implique par exemple, que nous ne ferons plus apparaître de quadrillage. Néanmoins, il nous apparaît important de rappeler aussi souvent que possible aux élèves le sens des nombres utilisés.
3. De plus, attirons l'attention sur le fait que les formules qui vont suivre n'ont de sens que si toutes les mesures de longueur étant exprimées dans une même unité u, les mesures d'aire sont alors exprimées dans l'unité d'aire associée u^2.
4. Pour ne pas alourdir les formules, nous n'indiquerons pas les unités utilisées en regard de chacune des grandeurs.

$$\begin{array}{rl} \mathcal{A} & \text{est écrit en lieu et place de } \text{Aire}_{u^2}(\text{forme}) \\ L \text{ ou } \ell & \text{est écrit en lieu et place de } \text{Longueur}_{u}(\text{segment}) \end{array}$$

5.8.2 Le rectangle

Nous avons établi à la section 7 les formules suivantes [9]

$$\mathcal{A} = L \times \ell = \ell \times L$$

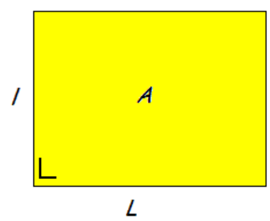


Fig. 5.30

(9) Ce résultat obtenu lors de la quantification de l'aire du rectangle justifie la commutativité du produit de nombres.

5.8.3 Le carré

Ce n'est qu'un cas particulier du rectangle, car ici, on a $L = \ell = c$, donc, $\mathcal{A} = c \times c = c^2$.

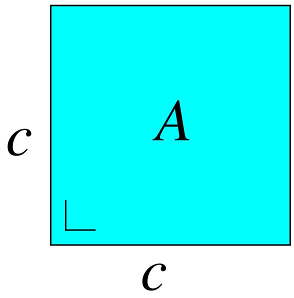


Fig. 5.31

Notons au passage que la lecture même de cette formule justifie l'utilisation du mot **carré** pour désigner la puissance 2.

5.8.4 Le parallélogramme

Utilisation du rectangle

Le parallélogramme peut, par décomposition et recomposition, être transformé en un rectangle.

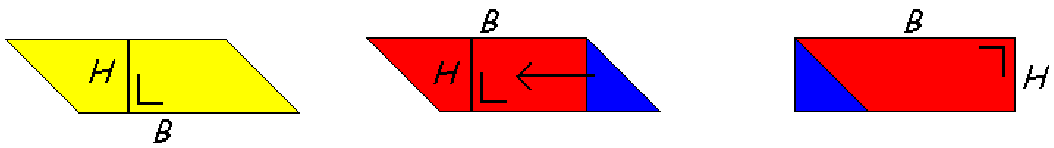


Fig. 5.32

L'aire du parallélogramme $\mathcal{A}$ est égale à celle du rectangle $\mathcal{C}$ dont les côtés ont pour longueur B et H.

$$\mathcal{A} = B \times H$$

Cette formule ressemble fort à celle qui permet de calculer la mesure de l'aire du rectangle et pourrait être confondue avec celle-ci. Cependant, pour le rectangle, les longueurs « utiles » sont directement disponibles sur la figure en étant fournies par les côtés de celui-ci. Par contre, pour le parallélogramme, la hauteur doit être **tracée** perpendiculairement au côté choisi comme base.

Utilisation des bandes

Rappelons ici qu'il est fort pratique d'inscrire le parallélogramme dans une **bande** (*voir page 117*), le choix de celle-ci déterminant quel côté est choisi comme base.

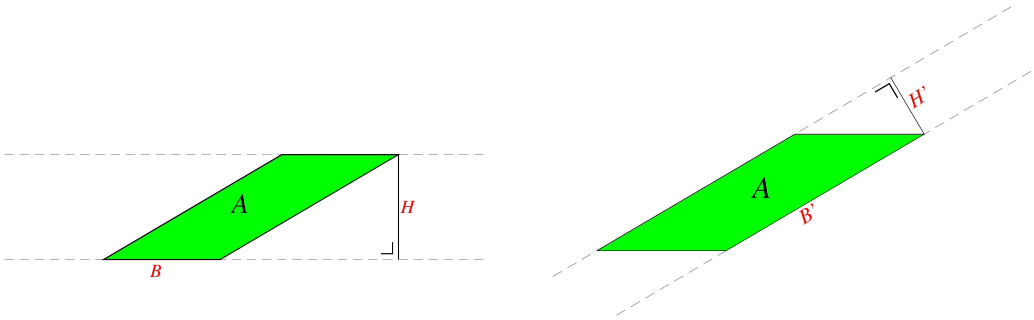


Fig. 5.33

On voit que $\mathcal{A} = B \times H$ ou $\mathcal{A} = B' \times H'$.

Donc, le résultat est identique quel que soit le côté choisi comme base, à condition de lui associer la hauteur correspondante.

5.8.5 Le triangle

La formule permettant de calculer la mesure de l'aire du triangle peut être obtenue au travers de différentes manipulations géométriques de manière à nous ramener à ce qui a déjà été établi précédemment.

Première approche

Deux exemplaires d'un même triangle peuvent être assemblés pour former un parallélogramme.

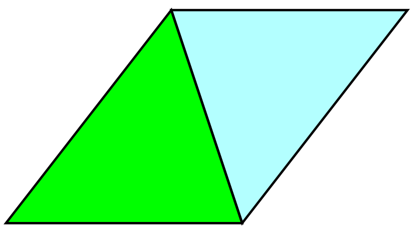


Fig. 5.34

Ainsi, l'aire d'un triangle est toujours égale à la moitié de l'aire du parallélogramme obtenu de cette manière. Remarquons que le triangle et le parallélogramme ont même base et même hauteur.

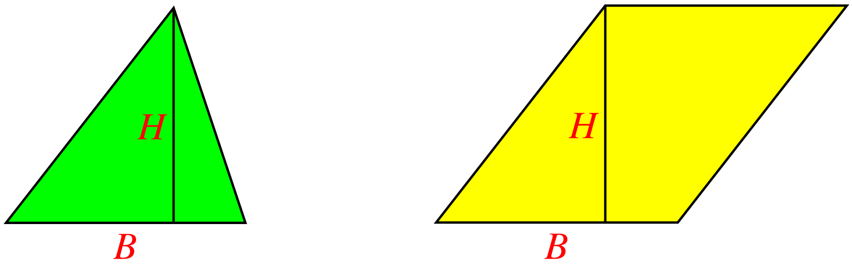


Fig. 5.35

Donc, la mesure de l'aire du triangle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{B \times H}{2}$$

Utilisation des bandes

De la même manière que pour les parallélogrammes, la hauteur H doit correspondre à la base B choisie. Ainsi donc, comme nous l'avons montré précédemment (*voir page 117*), l'inscription d'un triangle dans une bande fait clairement apparaître la hauteur correspondant à chacun des choix de base possible.

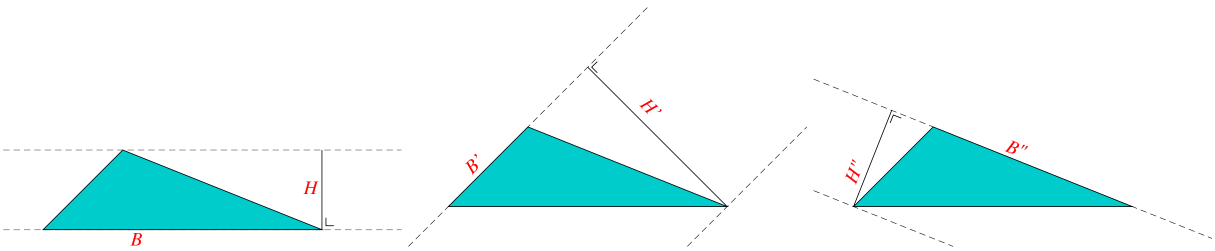


Fig. 5.36

L'aire étant constante quelle que soit la bande choisie, nous avons donc

$$\mathcal{A} = \frac{B \times H}{2} = \frac{B' \times H'}{2} = \frac{B" \times H"}{2}$$

Deuxième approche

La formule donnant la mesure de l'aire du triangle peut aussi s'obtenir en procédant par décomposition de celui-ci pour le ramener à un parallélogramme de même aire.

Le triangle de la figure suivante peut être vu comme ayant B comme base et H comme hauteur, mais aussi comme ayant B' comme base et H' comme hauteur.

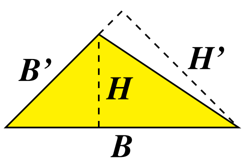


Fig. 5.37

Joignons les milieux de deux côtés et découpons le triangle en deux pièces, l'une triangulaire, l'autre trapézoïdale. Ensuite, faisons pivoter la partie triangulaire pour la placer dans l'alignement de la partie trapézoïdale. On obtient un parallélogramme qui peut être considéré comme étant de base B et de hauteur $\frac{H}{2}$ ou comme étant de base $\frac{B'}{2}$ et de hauteur H' :

Fig. 5.38

$$\mathcal{A}_{\text{ triangle}} = \mathcal{A}_{\text{ parallélogramme}} = B \times \frac{H}{2} = \frac{B'}{2} \times H'$$

Nous pouvons recommencer en joignant deux autres milieux de côtés :

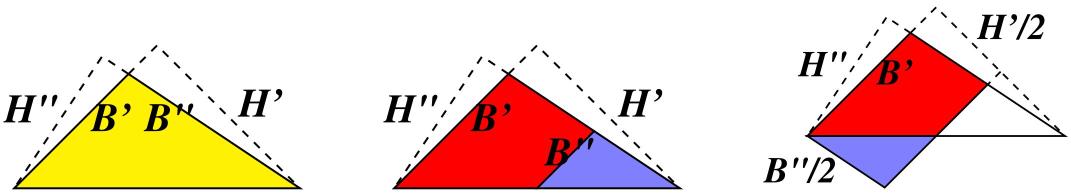


Fig. 5.39

$$\mathcal{A}_{\text{ triangle}} = \mathcal{A}_{\text{ parallélogramme}} = B' \times \frac{H'}{2} = \frac{B''}{2} \times H''$$

Appliquons le même procédé une troisième fois :

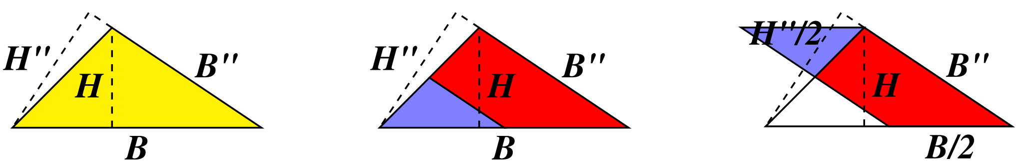


Fig. 5.40

$$\mathcal{A}_{\text{ triangle}} = \mathcal{A}_{\text{ parallélogramme}} = B'' \times \frac{H''}{2} = \frac{B}{2} \times H$$

Résumé

– Ainsi donc, nous avons obtenu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{triangle}} &= \frac{B \times H}{2} = B \times \frac{H}{2} = \frac{B}{2} \times H \\ &= \frac{B' \times H'}{2} = B' \times \frac{H'}{2} = \frac{B'}{2} \times H' \end{aligned}$$

$$= \frac{B'' \times H''}{2} = B'' \times \frac{H''}{2} = \frac{B''}{2} \times H''$$

Notons au passage que ces relations peuvent donner du sens aux règles de calcul des fractions.

– Rappelons encore que chacun des côtés du triangle peut être choisi comme base et qu'il faut alors lui associer la hauteur correspondante. Il nous paraît important d'organiser un grand nombre d'activités mettant cet aspect des choses en évidence. Ce n'est que de cette manière que les élèves pourront se convaincre du fait que la base n'est pas nécessairement horizontale.

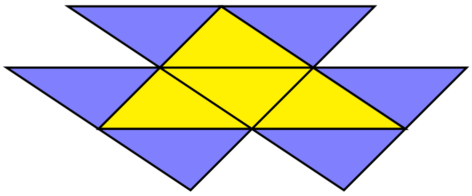


Fig. 5.41

Combien cette figure comporte-t-elle de parallélogramme ayant même aire que le grand triangle jaune ?

5.8.6 Le trapèze

En raisonnant comme pour le triangle, nous pouvons obtenir la formule donnant la mesure de l'aire du trapèze par divers procédés.

Procédé 1

Dupliquons le trapèze :

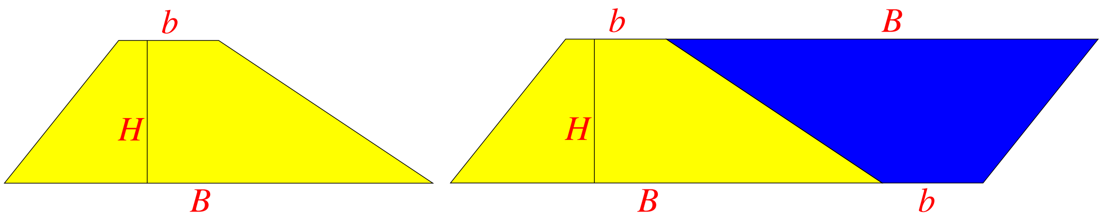


Fig. 5.42

L'aire du trapèze vaut la moitié de l'aire du parallélogramme dont la base est $B + b$ et la hauteur H.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{(B + b) \times H}{2}$$

Procédé 2

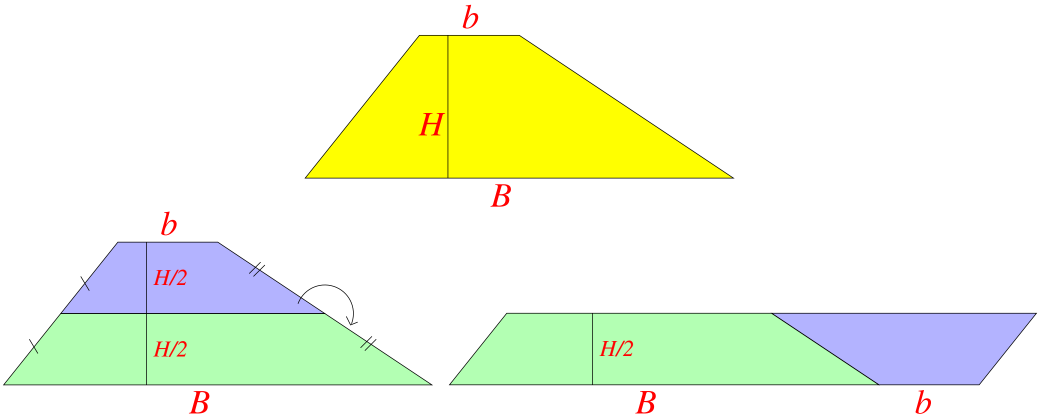


Fig. 5.43

Coupons le trapèze en deux parties en menant une parallèle aux bases à mi-hauteur. Amenons la partie supérieure à droite de la partie inférieure. Nous obtenons un nouveau parallélogramme de base $B + b$ et, cette fois, de hauteur $\frac{H}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = (B + b) \times \frac{H}{2}$$

Procédé 3

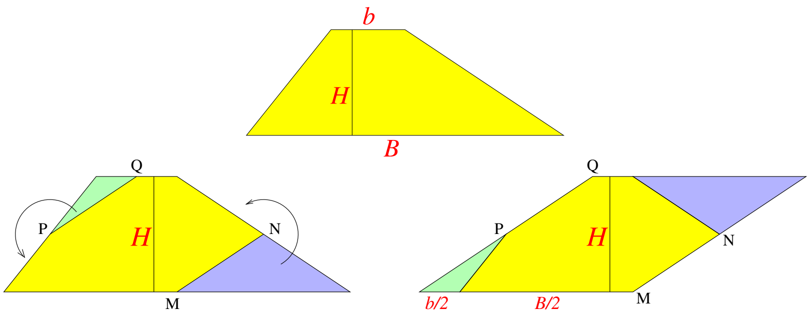


Fig. 5.44

Dans la figure ci-dessus, M, N, P et Q sont les milieux des côtés auxquels ils appartiennent. En faisant pivoter les deux triangles indiqués, on obtient un parallélogramme de hauteur H et de base $\frac{b}{2} + \frac{B}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \left(\frac{b}{2} + \frac{B}{2}\right) \times H$$

Procédé 4

Le trapèze peut également être partagé en 2 triangles de hauteur H et de bases respectives B et b.

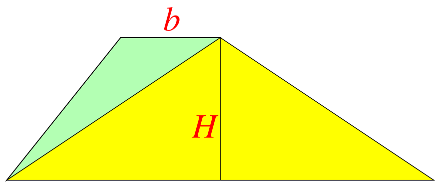


Fig. 5.45

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{B \times H}{2} + \frac{b \times H}{2}$$

Résumé

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b) \times H}{2} = (B+b) \times \frac{H}{2} = \left(\frac{b}{2} + \frac{B}{2}\right) \times H = \frac{B \times H}{2} + \frac{b \times H}{2}$$

De nouveau, nous retrouvons une illustration de certaines règles de calcul algébrique relatives aux fractions et à la distributivité.

5.8.7 Généralisation

Tout polygone peut toujours être décomposé en triangles. Ceci permet de calculer la mesure de son aire par sommation des mesures de l'aire de ces triangles.

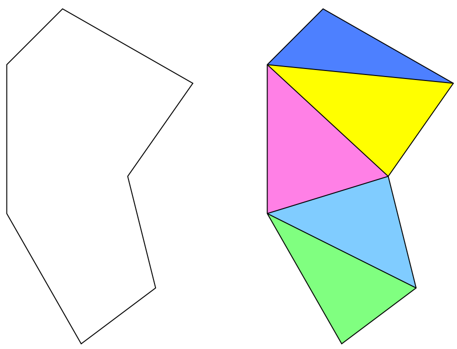


Fig. 5.46

Remarquons que cela débouche rarement sur une formule exploitable.

Cas particulier des polygones réguliers

Tout polygone régulier peut se décomposer en triangles isocèles isométriques. Par exemple, le pentagone, ou l'hexagone où les triangles sont de plus équilatéraux.

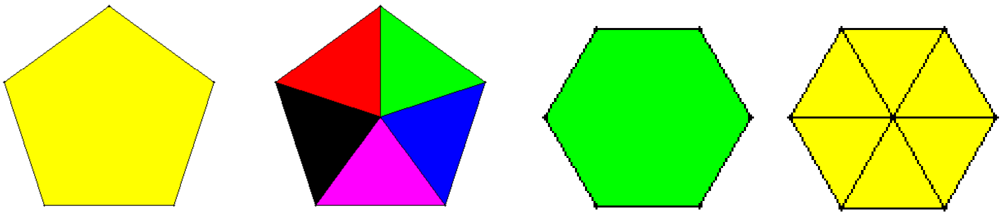


Fig. 5.47 : Pentagone et hexagone décomposés en triangles isométriques.

Contrairement à ce qui se passe avec les polygones irréguliers, la régularité des formes considérées permet d'aboutir à une formule de calcul de la mesure de leur aire.

En effet, comme la figure ci-dessus l'illustre, un polygone régulier à n côtés est décomposable en n triangles isométriques isocèles. L'aire du polygone est donc égale à n fois l'aire d'un de ces triangles.

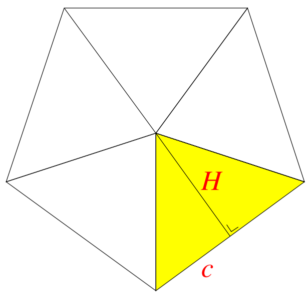


Fig. 5.48

Pour calculer la mesure de l'aire d'un de ces triangles, choisissons pour base celui de ses côtés qui coïncide avec le côté du polygone. Appelons c la mesure de celui-ci. La hauteur du triangle donne également la distance entre le centre du polygone et les côtés de celui-ci. Cette distance constante est appelée *apothème* du polygone régulier.

La mesure de l'aire du triangle est donc $\frac{c \times H}{2}$. Par conséquent la mesure de l'aire du polygone est égale à

$$\mathcal{A} = n \times \frac{c \times H}{2}$$

5.8.8 Utilisation de diagonales

Bien sûr, comme nous l'avons déjà dit, tous les polygones peuvent se décomposer en triangles. Cependant, il existe parfois d'autres approches possibles de formules permettant de calculer des aires. Parmi celles-ci, envisageons le cas particulier des quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires [10].

[10] C'est notamment le cas du losange et du cerf-volant

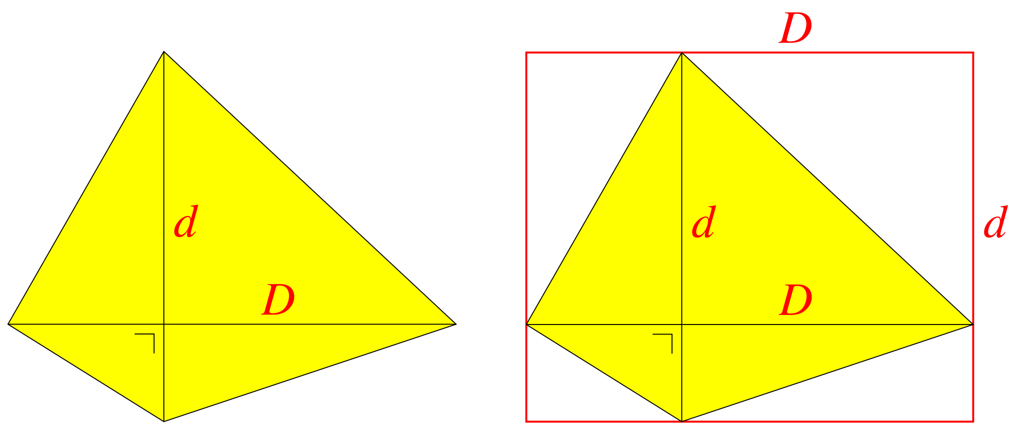


Fig. 5.49

Appelons d et D les mesures des deux diagonales. Un tel quadrilatère est toujours inscriptible dans un rectangle dont les côtés ont pour mesure d et D. Comme on le voit sur la figure ci-dessus, il est clair ([11]) que l'aire de ce rectangle vaut le double de l'aire du quadrilatère.

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}$$

Nous retrouvons ainsi la formule bien connue de la mesure de l'aire du losange.

5.9 Une autre voie vers le calcul des aires

Nous venons de voir que tout polygone peut être décomposé en triangles et que donc son aire est aisément mesurable. Cependant, il existe bien d'autres surfaces quarrables. Pour celles-ci, il faut utiliser une toute autre technique que la décomposition. Il s'agit du calcul intégral.

Il faut distinguer trois catégories :

1. Les surfaces dont l'aire peut être mesurée exactement
   Exemples :
   (a) Considérons l'arc de sinusoïde qui va de 0 à π. L'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses et cet arc a pour mesure 2. Et pourtant, elle dépend bien de l'irrationnel π .
   (b) L'aire de la lunule comprise entre les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ a pour mesure $\frac{1}{3}$.
2. Les surfaces dont l'aire ne peut être calculée exactement, même si on peut obtenir une précision aussi grande que l'on veut.
   Exemple : L'aire du disque se calcule à l'aide de la formule bien connue : $A = \pi \times R^2$. La précision de la valeur obtenue dépend de la précision choisie pour π.

([11]) Il suffit en effet de comparer les aires des triangles apparaissant sur la figure.

3. Les surfaces auxquelles il n'est pas possible d'attribuer une aire. On les dit *non-mesurables*. En donner un exemple n'est pas possible dans le cadre de ce travail.

Chapitre 6

Une approche épistémologique

La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

6.1 Un préalable : la géométrie

Aborder les problèmes de l'enseignement de la géométrie, c'est d'abord parler — fût-ce sommairement — de la géométrie. La définition donnée par LEGENDRE ne fait que confirmer l'étymologie du mot. Les développements historiques résumés au chapitre 4 attestent que les premières activités géométriques relèvent de l'arpentage.

6.1.1 L'ouvrage de LEGENDRE

Une bonne partie de l'ouvrage de LEGENDRE, *Éléments de géométrie* [54], dont est extraite la définition, pourrait être qualifiée de « transposition didactique du texte d'EUCLIDE ». Cet ouvrage a de plus servi de base à quasiment tous les manuels de géométrie qui ont été utilisés dans notre enseignement secondaire jusqu'en 1968 ([1]). C'est donc la lettre et l'esprit de ce document qui ont inspiré durant très longtemps l'enseignement de la géométrie chez nous, ce qui justifie que nous lui accordions quelque attention.

L'ouvrage est divisé en huit *livres*

1. Les principes.
2. Le cercle et la mesure des angles.
3. Les proportions des figures.
4. Les polygones réguliers et la mesure du cercle.
5. Les plans et les angles solides.
6. Les polyèdres.
7. La sphère.
8. Les trois corps ronds.

([1]) Année de la généralisation des programmes dits de « mathématique moderne ».

Le livre 1 comporte trente-et-une propositions dont une bonne vingtaine font intervenir des comparaisons de longueurs ou d'angles. Citons les propositions I et XXXI :

Proposition I *: Les angles droits sont tous égaux entre eux.*

Proposition XXXI *: Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Ainsi, dès le premier livre, la comparaison de certaines grandeurs est au cœur des préoccupations. Les autres propriétés (parallélisme, perpendicularité) apparaissent plutôt comme des *outils* permettant d'obtenir des résultats concernant les grandeurs. Il en est de même dans les livres suivants.

Le livre 2 est tout entier consacré à la comparaison des angles. Malgré l'emploi occasionnel du mot « mesure », jusqu'à la fin de ce livre il n'est nullement question de « mesurer » des grandeurs géométriques au sens que nous donnons à ce terme, c'est-à-dire « *après avoir choisi une grandeur unité, attribuer une valeur numérique à la grandeur considérée* ».

Le livre 3 traite des propriétés de proportionnalité entre longueurs (notamment le théorème de Thalès) ([2]) ainsi que des propriétés élémentaires relatives aux aires.

L'exposé progresse lentement en commençant toujours par des affirmations *relatives* avant de passer à des affirmations *dans l'absolu.* Voici par exemple les propositions III à IV de ce livre 3 :

Proposition III *: Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Proposition IV *: Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits des bases multipliées par les hauteurs.*

Après la proposition IV, LEGENDRE prend la peine d'expliquer :

Donc on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres, qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la base,et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur.

Cette mesure, d'ailleurs, n'est pas absolue, mais seulement relative ;[. . .]

Par exemple, si la base du rectangle A est de trois unités et sa hauteur de dix, le rectangle sera représenté par le nombre 3×10*, ou* 30*, nombre qui, ainsi isolé, ne signifie rien ; mais si on a un second rectangle B dont la base soit de douze unités et la hauteur de sept, le second rectangle sera représenté par le nombre* 7×12*, ou* 84 *: de là on conclura que les deux rectangles A et B sont entre eux comme* 30 *est à* 84*. [. . .]*

Il est plus ordinaire et plus simple de prendre le carré pour l'unité de surface, et on choisit le carré dont le côté est l'unité de longueur ; alors la mesure que nous avons regardée simplement comme relative devient absolue [. . .]

Après ces considérations, LEGENDRE se sent autorisé à introduire (sans d'ailleurs le définir) le mot *aire* :

Proposition V *: L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base*

([2]) Sans que cette dénomination soit utilisée.

par sa hauteur.

Le livre 3 se poursuit par l'établissement des propriétés relatives au triangle rectangle (théorème de Pythagore sous ses différents habits), puis aux proportionnalités liées au parallélisme (théorème de Thalès) et à la comparaison des polygones quelconques. Le livre 4 est le dernier consacré à la géométrie plane. Ses différentes propositions amènent aux propriétés relatives aux rapports des périmètres et aires des polygones réguliers, puis aux rapports des circonférences de cercles et d'aires de disques, avec le calcul d'une approximation du nombre π.

Les livres 5 à 8 sont consacrés à la géométrie de l'espace. Ils sont organisés selon les mêmes principes que les quatre premiers livres et débouchent sur des propriétés relatives aux aires et volumes des différents corps solides. Ainsi, après que le livre 5 ait fixé les outils — les propriétés concernant les positions relatives des plans et droites de l'espace, ainsi que quelques résultats sur l'égalité des *angles solides* — le livre 6 s'intéresse aux polyèdres, le livre 7 à la sphère et le livre 8 aux « Corps ronds » (cylindre, cône et — à nouveau — sphère). Citons simplement les propositions terminales de ces trois livres :

Livre 6, Proposition XXVII *: Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.*

Livre 7, Proposition XXVII *: De tous les triangles sphériques formés avec un côté donné, le plus grand est celui dans lequel les deux côtés non déterminés sont égaux.*

Livre 8, Proposition XVIII *: Tout segment de sphère, compris entre deux plans parallèles, a pour mesure la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus la solidité* ([3]) *de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre*

Pour conclure ce parcours de l'ouvrage de Legendre, retenons d'abord le fait que le corpus théorique de la géométrie élémentaire s'est développé autour de problèmes concernant des mesures de longueurs, aires et volumes.

Remarquons au passage que lorsqu'il passe du point de vue relatif au point de vue absolu (voir ci-dessus), Legendre suppose que l'on choisit une unité de longueur (et en conséquence des unités d'aire et de volume) sans pour autant effectuer ce choix lui-même. Un tel choix relève en effet de la physique, non de la mathématique. Heureusement, les résultats théoriques ne dépendent pas de ce choix d'une unité de longueur, ce qui permet au mathématicien d'assimiler les mesures à des nombres. Par contre pour le physicien, ou le technicien, une mesure n'a aucune signification si l'unité n'est pas mentionnée.

Retenons également la séparation en géométrie plane et géométrie de l'espace et le fait que les propriétés établies en géométrie plane sont souvent à la base des raisonnements effectués en géométrie spatiale. Exceptionnellement, il peut arriver qu'une propriété du plan nécessite un détour par l'espace afin d'être établie.

([3]) *Synonyme de « volume ».*

6.1.2 Après Legendre

L'enseignement de la géométrie a relativement peu évolué entre l'ouvrage de Legendre et l'introduction dans les années 1960–1970 des mathématiques « modernes ». Notons quand même la prise de conscience progressive de la nécessité d'introduire la notion de droite *illimitée*. Pour Legendre, une *ligne droite* est définie comme étant *le plus court chemin d'un point à l'autre* et deux lignes sont *parallèles* si *elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre*. Il n'opère donc aucune différence entre *segment* et *droite*.

Si l'enseignement de la géométrie ne progresse guère durant la période mentionnée, la géométrie elle-même avance à grands pas, notamment à la suite de la construction de la géométrie hyperbolique par Bolyai et Lobachevsky et à l'apparition en algèbre du concept de *groupe*. Après les travaux de Riemann, Hilbert, Klein… toute géométrie est associée à un groupe de transformations, la géométrie euclidienne en particulier est associée au groupe des *similitudes*. Les *isométries* (cas particulier de similitudes) sont les concepts géométriques qui formalisent les mouvements physiques. L'introduction de ces concepts dans les programmes de mathématiques constitue l'apport principal et durable du courant « mathématique moderne » des années 1960–1980.

6.2 La conceptualisation

Reprenons maintenant ces diverses questions en les considérant du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage. Nous ne pouvons plus adopter un ordre de présentation des divers sujets géométriques qui serait uniquement basé sur leur enchaînement logique. Les types d'activités que nous pouvons proposer aux élèves dépendent fortement de leur âge et de leur environnement.

À côté des aspects géométriques, nous devons tenir compte d'aspects relevant de la psychologie cognitive, liés à la formation des concepts.

6.2.1 Un point de vue constructiviste

Nous adopterons dans la suite un point de vue résolument *constructiviste* qui peut se résumer en un slogan :

> Les concepts ne sont pas enseignés par les professeurs, ils sont construits par les élèves.

Ce point de vue, qui remonte au moins à Piaget, [58], nécessite quelques commentaires.

1. Notons d'abord que le point de vue de Piaget, pour qui c'est à travers d'actions qu'« un enfant construit un concept », rejoint celui d'auteurs plus modernes tels que D. Tall, [71], pour qui la conceptualisation se réalise par l'application de *procédures*

à des objets encore incomplètement conceptualisés. La conceptualisation va de pair avec une structuration des connaissances. Elle se réalise progressivement à travers une suite d'activités.

2. Un concept est une abstraction qui n'existe que dans le cerveau et n'acquiert de signification qu'à travers un tissu de relations avec d'autres concepts.

> Considérons par exemple le nombre 2. Personne ne l'a jamais mis en vente dans un magasin. Le petit enfant perçoit d'abord les deux mains de sa mère, puis deux chaussettes ou deux souliers... Progressivement, il perçoit une qualité commune à toutes les paires d'objets. Une qualité « insaisissable » mais à laquelle les adultes associent un mot : « deux ».
> Ensuite, il constate que ce « deux » apparaît aussi quand on place deux « un » l'un à côté de l'autre. Et que si on place un « un » à côté d'un « deux », on obtient un « trois », etc.
> Dès lors que les propriétés de l'objet « deux » font partie intégrante du concept « deux », il est difficile d'affirmer qu'un concept puisse atteindre une forme définitive. Par exemple, savoir que 2^{10} est proche de 1000 est une propriété que tout informaticien intègre à « son » concept « deux ».

De plus, des analogies permettent d'établir des liens entre des concepts relevant de domaines différents et entraînent éventuellement l'apparition de *compétences transversales*. Ces relations aussi s'intègrent aux concepts eux-mêmes.

3. Piaget affirme aussi que c'est le *besoin* qui engendre une action et que ce besoin est la manifestation d'un déséquilibre. Illustrons cette idée de *besoin* par un exemple simple : l'apparition du nombre 0.

> On trouve des traces d'activités de comptage dès l'époque sumérienne, 3500 ans avant J.-C., et cette activité débouche sur la conceptualisation des nombres 1, 2, 3... Encore que le nombre 1 ne résulte pas d'un comptage, mais de l'opposition à *plusieurs*. Quant à 0, il ne correspond à aucune activité de comptage. Les Sumériens n'avaient pas besoin du *nombre* 0 et ne l'ont pas inventé. Par contre, leur système de numération aurait bénéficié de l'utilisation d'un *chiffre* 0 qu'ils n'ont pas inventé non plus. Le besoin est *nécessaire* mais pas toujours *suffisant*...
> Les Indiens inventèrent le *chiffre* 0 au Ve siècle après J.-C. Comme chacun sait, ce *chiffre* 0 sert à marquer l'absence d'unités d'un rang donné dans l'écriture d'un nombre. Deux siècles plus tard, Brahmagupta assimilait pour la première fois 0 à un nombre : le résultat de la soustraction de tout nombre à lui-même. Avec l'apparition des nombres négatifs, il devenait indispensable d'accorder à zéro un vrai statut de nombre. Mais tout le monde n'a pas été convaincu immédiatement... ([4]).

([4]) La consultation de quelques manuels d'arithmétique montre que dans notre enseignement secondaire, le statut de 0 a été controversé jusqu'aux environs de 1960. Les citations suivantes illustrent le malaise de certains auteurs : *Zéro est regardé comme un nombre* (N. J. Schons, Traité d'arithmétique, La Procure, Namur, édition 1947), *Zéro est considéré comme un nombre, bien que, d'après les définitions, le zéro n'en soit pas un* (Th. Gos, Traité d'arithmétique, revu par E. Vandepoel, L'Élan, Liège, édition 1960).

4. Ainsi les concepts mathématiques ne sont pas des objets statiques bien définis et immuables. Si un concept a été introduit en vue de résoudre une catégorie de problèmes précis, la rencontre d'un problème apparenté, mais auquel le concept se révèle inadapté, crée un déséquilibre et amène une modification du concept afin de lui rendre son efficacité. C'est ce que Piaget appelle *l'équilibration majorante*. La conceptualisation passe donc par une série de seuils que les élèves rencontrent à des moments différents et qu'ils franchissent grâce aux actions qu'ils effectuent.
5. Le fait que les concepts se construisent de façon dynamique et progressive a pour première conséquence qu'il est illusoire de vouloir enseigner directement un concept donné sous la forme que l'on espère voir acquise par l'enfant à la fin de sa scolarité. Quelles que soient les précautions prises par l'enseignant pour assurer la correction de son discours et son adaptation à des situations générales, l'élève n'intègre à ses schémas mentaux que les aspects qu'il a effectivement utilisés lors des activités qui lui ont été effectivement proposées.

   Une autre conséquence est le fait que l'activité de l'enfant peut faire débuter certaines conceptualisations avant tout enseignement spécifique. L'enfant crée alors lui-même un ensemble de représentations et procédures qu'il utilise comme outils. Vergnaud, [75], les considère comme des « théorèmes implicites » et les appelle des *théorèmes en actes* :

   > *Le concept de « théorème en acte » désigne les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est pour autant capable de les expliciter ou de les justifier.*

6. Ainsi, le rôle de l'enseignant est de confronter l'élève à des situations nouvelles pour lui, de façon à créer des déséquilibres qui entraîneront des besoins nouveaux et des progrès dans la conceptualisation. C'est alors dans le cadre du travail personnel de l'élève que les explications fournies par l'enseignant prendront du sens.

On pourra certainement objecter à ce qui précède qu'il s'agit là d'une conception utopiste de l'enseignement, qu'il n'est pas possible à un élève de redécouvrir par lui-même tout le corpus mathématique qui lui est soumis et de franchir seul tous les seuils difficiles qu'il rencontrera. C'est sans doute vrai. Toutefois il ne fait aucun doute que ce sont les concepts qu'il aura manipulés effectivement à travers des activités bien choisies qu'il maîtrisera le mieux. En témoigne le fait qu'il arrive à chacun d'entre nous de ne comprendre la signification réelle d'un concept mathématique que bien longtemps après l'avoir rencontré au niveau scolaire.

6.2.2 Représentations et perception

Si l'apprentissage des mathématiques passe nécessairement par la formation de concepts, il ne faut pas oublier que *personne ne manipule jamais ces concepts eux-mêmes*. Des *manipulations* ne peuvent en effet s'exercer que sur des objets concrets, y compris des taches d'encre sur des feuilles de papier ou des « pixels » allumés sur un écran d'ordinateur.

Autrement dit, l'être humain ne manipule que des *représentations* des concepts, qui servent en quelque sorte d'*interface*. Mais beaucoup de représentations peuvent exister pour un même concept.

Par exemple au concept « six », on peut associer les représentations suivantes.

1. Le mot « six ».
2. Le chiffre décimal 6.
3. L'écriture binaire **110**.
4. L'écriture « romaine » VI.
5. L'expression $4+2$.
6. Le nombre « figuré » : 

L'existence de plusieurs représentations pour un concept donné peut correspondre à des besoins différents. Ainsi l'écriture romaine se prête peu au calcul écrit. Les représentations décimale et binaire sont liées à l'utilisation d'algorithmes différents, adaptés aux propriétés physiques des machines qui les réalisent.

Certaines représentations peuvent avoir plusieurs interprétations. Ainsi, pour le mathématicien, $4+2$ désigne aussi bien une opération d'addition que le résultat de cette opération. Une telle flexibilité n'apparaît que progressivement mais est une composante indispensable de la réussite en mathématique car elle permet une *compression* des informations à stocker en mémoire de travail (voir à ce sujet [44]).

Pour plus de détails à propos des représentations des concepts mathématiques, le lecteur pourra consulter l'annexe A.2 et la bibliographie qui y est mentionnée.

Les représentations principalement utilisées relèvent de plusieurs types : symbolique, graphique... Par exemple le « nombre figuré » rencontré plus haut est une représentation graphique du concept « six ». Par la force des choses, les objets géométriques font très souvent l'objet de représentations graphiques.

Aux représentations graphiques peuvent être associés des problèmes de perception. « Voir » une figure de géométrie, qu'il s'agisse de géométrie plane ou de géométrie spatiale, n'est pas toujours simple. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans la suite. Le lecteur pourra aussi consulter l'annexe A.4.

6.3 Le cas de la mesure

Après ces généralités, examinons de plus près quels sont les seuils à franchir dans la construction de la mesure des longueurs et des aires. Une grande partie du travail a été faite pour nous par J. Piaget dans son ouvrage *La géométrie spontanée de l'enfant* ([5]), [59]. Plusieurs phases peuvent être distinguées.

([5]) Cet ouvrage est beaucoup moins contesté que *La représentation de l'espace chez l'enfant* dans lequel Piaget met en relation le développement mental du petit enfant avec les structures fondamentales décrites par Bourbaki.

6.3.1 La mesure de segments sur une droite

La première phase — la plus élémentaire — porte sur l'apprentissage de la mesure de la longueur de segments situés sur une même droite.

Dans une approche qualitative, on peut y associer des activités de comparaison par emboîtement et/ou juxtaposition. Le compas à pointes sèches peut être utilisé à cet effet. Il convient non seulement pour des segments situés sur une même droite, mais plus généralement pour des segments situés dans un même plan, voire dans l'espace.

L'approche quantitative passe par le choix d'une unité de mesure. Elle peut déboucher sur des mesures exactes : « ce segment vaut autant de fois l'unité », ou sur des encadrements : « la longueur de ce segment est comprise entre … et … » À ce stade, il est peu probable que l'on puisse faire apparaître l'impossibilité de mesurer tout segment de manière exacte avec la même unité de mesure.

La propriété fondamentale de toute activité de mesure peut dès ce stade être mise en évidence : *si un segment est obtenu par juxtaposition de deux autres, sa mesure est la somme des mesures des deux autres.* C'est ce que l'on appelle l'*additivité* de la mesure.

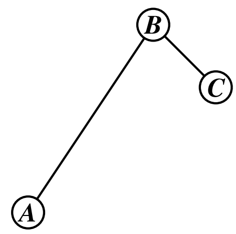
L'activité réciproque de « mesurer un segment » est « dessiner un segment de mesure donnée ».

Pour mesurer ou dessiner des segments situés sur une droite à l'aide d'une latte graduée, on est amené à déplacer la latte au long de la droite, réalisant ainsi des mouvements physiques correspondant à des translations. Il s'agit là d'une première rencontre avec ces transformations qui met déjà en œuvre leur réversibilité.

La latte n'est pas le seul instrument de mesure possible. Par exemple, via le langage `Logo` et les instructions `Avance` et `Recule`, l'enfant peut piloter une tortue au long d'une droite. Il dessine donc des segments de mesures données et retrouve dans un autre contexte la propriété d'additivité de la mesure. Notons aussi que si les instructions `Avance 10` et `Recule 10` engendrent des déplacements de même mesure, ces déplacements ont lieu en sens contraire et constituent une première rencontre avec des grandeurs orientées. On n'est pas loin des nombres négatifs.

6.3.2 La mesure de segments dans le plan ou l'espace

Piaget analyse cette deuxième phase de façon très fouillée. En fait on passe du concept de longueur d'un segment à celui de longueur de ce que l'on appelait jadis une *ligne brisée*, nous dirons une *ligne polygonale.*
Mais comment mesurer une ligne polygonale ABC constituée par exemple de deux segments $[AB]$ et $[BC]$?



1. *Ou bien on mesure successivement les deux segments* $[AB]$ *et* $[BC]$ *et on additionne les deux mesures. Dans ce cas, on est amené à déplacer la latte dans le plan en lui*

imprimant un mouvement qui n'est pas seulement un glissement,

2. *ou bien on suppose que la ligne polygonale ABC est articulée en B et on fait pivoter un des deux segments, par exemple $[BC]$ autour de B de façon que les deux segments soient situés dans le prolongement l'un de l'autre. On peut alors mesurer directement le segment $[AC]$.*

Dans les deux cas, la procédure fait appel à des mouvements physiques, soit de la latte graduée, soit d'un segment à mesurer, et suppose que l'enfant maîtrise suffisamment ces mouvements, en particulier qu'il ne met pas en doute la conservation des longueurs par ces mouvements.

Nous désignons les mouvements physiques par « glisser » et « tourner » pour les distinguer des transformations mathématiques correspondantes, « translation » et « rotation » .

Analysant plus finement cette question de mouvements, Piaget fait remarquer que leur maîtrise suppose des éléments fixes de référence qui permettent d'apprécier leur amplitude en changement de direction (des angles) et en déplacement (des longueurs).

L'analyse de Piaget montre que la mesure des longueurs des segments est déjà une opération conceptuellement fort complexe. Cela ne signifie pas que les mouvements dans le plan (ou dans l'espace) doivent faire l'objet d'un enseignement spécifique, car la plupart des schémas qui les gouvernent s'implantent de façon naturelle dès les premiers pas d'un petit enfant.

Néanmoins le contexte naturel des mouvements de l'enfant dans l'espace est différent de celui des mouvements d'une latte ou d'une tige quelconque au long d'une droite ou dans le plan. Il n'est donc pas mauvais de proposer à l'enfant des situations qui lui permettent d'utiliser ces mouvements de façon consciente, en tant qu'outils en vue de réaliser des projets variés (dessins ou autres). À nouveau, `Logo` par l'intermédiaire des instructions `Gauche` et `Droite` permet d'utiliser des mouvements et de se repérer par rapport à des directions de référence. En suggérant à l'enfant de mimer avec son propre corps les mouvements de la tortue, `Logo` établit un lien entre deux contextes différents (*voir le chapitre 1*). On reste néanmoins fort éloigné de l'utilisation des mouvements dans l'espace ([6]).

Bien entendu, le micro-monde d'*Apprenti Géomètre* en mettant les mouvements à la disposition des enfants — plus explicitement encore que `Logo` — est propre à aider à la conceptualisation de la mesure des segments dans le plan.

6.3.3 Les formules de calcul du périmètre d'un polygone

D'un point de vue procédural, le périmètre s'obtient en additionnant des longueurs, ce qui signifie d'abord additionner les mesures des côtés.

Pour un polygone quelconque, ayant n côtés, la seule formule de calcul possible du périmètre s'écrit

$$\ell_1 + \cdots + \ell_n$$

([6]) À notre connaissance le `Logo3D` — le pilotage d'une tortue marine — n'a guère rencontré de succès.

Pour des polygones particuliers, la formule prend un aspect particulier. Par exemple, pour connaître le périmètre d'un carré de 4 centimètres de côté, nous effectuons une addition que nous pouvons exprimer sous les deux formes suivantes : 4 cm $+4$ cm $+4$ cm $+4$ cm ou $4+4+4+4$ cm. Rapidement dans la pratique scolaire ces formules additives sont remplacées par des formules multiplicatives ($C \times 4$ pour les carrés, $(L+\ell) \times 2$ pour les rectangles…), ce qui amène certains élèves à en oublier l'origine. Par la suite, cet usage d'une structure multiplicative amène aussi un risque de confusion entre le périmètre et l'aire.

En utilisant plus longtemps une structure additive en vue de calculer des périmètres, nous pensons que la distinction entre ces deux grandeurs sera renforcée.

Remarquons aussi que la mutliplication présente, par exemple, dans la formule du carré est ce que les mathématiciens appellent une opération *externe* : les deux facteurs du produit sont de natures différentes, un nombre naturel et une longueur. Par contre la multiplication utilisée pour calculer une aire est une opération *interne* : les deux facteurs sont deux longueurs.

Dans les activités expérimentées qui suivent nous avons parlé d'*addition* dans le cas des périmètres et de *multiplication* dans le cas des aires.

6.3.4 La longueur d'une courbe

Le problème de la mesure de la longueur d'une courbe est très complexe du fait de l'obligation d'utiliser un passage à la limite, sous une forme ou une autre. Nous nous limiterons à quelques remarques concernant la longueur du cercle, dont il n'est pas possible de faire l'économie.

Le seul résultat important dans ce cas est le fait que le rapport de la longueur d'un cercle à celle de son diamètre est une constante, et que la valeur de cette constante est approximativement 3,14159… Ce résultat peut être obtenu de manière expérimentale, par la mesure de divers objets circulaires et de leurs rayons ou diamètres.

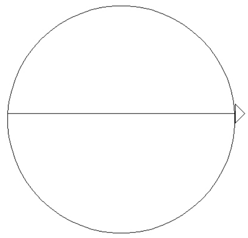
À des élèves entraînés à la pratique du `Logo`, et au repérage à l'aide de coordonnées, on peut proposer de réaliser un *projet* consistant à mesurer le diamètre d'un cercle à l'aide de l'instruction DISTANCE qui retourne la distance de la tortue à un point donné par ses coordonnées `[x y]`.

La méthode consiste à dessiner un cercle de façon approchée par une instruction du type `Repete 60 [Avance 20 Ga 6]`. Ce qui est dessiné est en réalité un polygone régulier à soixante côtés, mais le dessin est perçu comme un cercle. Et ce cercle a une longueur : 1200 (l'unité est le pas de la tortue).

Après avoir dessiné ce cercle, on fait un demi-tour supplémentaire par l'instruction `Repete 30 [Avance 20 Ga 6]`. La tortue est alors positionnée au point diamétralement opposé du point de départ. Si celui-ci est, par exemple, le point `[0 0]`, l'instruction `Montre Distance [0 0]` fournit alors le diamètre du cercle. Ensuite les deux instructions `Ga 90`

`Avance Distance [0 0]` produisent le dessin de ce diamètre, ce qui permet de valider la démarche en constatant que la tortue est bien revenue à sa position initiale.

```
Repete 60 [Avance 20 Ga 6]
Repete 30 [Avance 20 Ga 6]
Montre Distance [0 0]
Ga 90 Avance Distance [0 0]
```



Avec la version `MswLogo`, on a obtenu pour le diamètre la valeur 382,146451380082 ce qui fournit le rapport $\frac{1200}{382{,}146451380082} \approx 3,14015$. Il est normal que ce rapport soit légèrement inférieur à π puisque le numérateur 1200 est en réalité la longueur d'un polygone inscrit au cercle.

En appliquant la méthode à des cercles différents (faire varier la longueur du côté du polygone régulier inscrit), on peut à nouveau constater que le rapport varie peu, et — avec une bonne approximation — peut être considéré comme constant.

6.3.5 Les aires de polygones

Remarquons d'abord que si le concept de longueur d'un segment est relativement facile à appréhender, car deux segments ont toujours même forme, il n'en est pas du tout de même en ce qui concerne le concept d'aire d'un polygone. Nous avons d'ailleurs déjà noté à la section 5.2 que la plupart des définitions de l'aire d'une figure plane reviennent à remplacer un nouveau mot par un ancien qui n'est pas nécessairement mieux compris. Reprenons donc notre slogan dans ce cas particulier :

On n'enseigne pas aux élèves ce qu'est une aire, c'est à eux de construire ce concept.

Nous pensons qu'il n'est pas possible de construire le concept d'aire, sans construire simultanément le concept de *mesure de l'aire*. Plus précisément, le concept de mesure de l'aire est une partie intégrante du concept d'aire. Autrement dit, les aspects qualitatifs et quantitatifs qui ont été décrits en détail au chapitre 5 doivent être associés et coordonnés pour que l'enfant puisse construire un concept d'aire efficace. Nous rejoignons ainsi le point de vue du physicien pour qui une grandeur physique n'a d'intérêt et de signification qu'à condition de définir une unité de mesure et une procédure (mesurage ou calcul) en vue de déterminer la mesure de cette grandeur.

L'égalité d'aires

Le concept d'aire ne peut être construit qu'à travers la constatation que des polygones peuvent avoir des formes très différentes tout en ayant « quelque chose en commun ». Autrement dit le concept d'*égalité d'aires* précède celui d'aire, ce qui montre bien l'inutilité d'une définition de celui-ci.

Il s'agit donc d'organiser des activités de comparaison d'aires, débouchant sur des relations telles que *telle forme est plus grande (ou plus petite) que telle autre* et *telle forme a même grandeur que telle autre*. Dans cette phrase, le mot « grandeur » doit être pris au départ dans un sens très général et peut éventuellement être remplacé par un autre. L'important est que l'enfant sache que ce ne sont pas des longueurs que l'on compare.

Nous avons décrit aux paragraphes 5.3 à 5.5 divers aspects mathématiques des activités susceptibles d'être organisées. Ajoutons ici quelques remarques :

1. La première rencontre avec des formes de même aire se fait inévitablement par la *superposabilité*, par la superposabilité *parfaite* vaudrait-il mieux dire, mais les mathématiciens n'utilisent le mot « superposable » que pour des objets *parfaitement* superposables ([7]). Et pour vérifier que deux objets sont superposables, on les amène l'un sur l'autre... et revoici un principe de conservation par les mouvements.

   Déplacer ou retourner une forme géométrique plane est donc une activité de base. Tout au moins, elle l'est si elle est mise en œuvre consciemment.
2. Les activités de découpage et de recomposition combinent l'invariance de l'aire par déplacement et retournement et le principe d'additivité de la mesure.
3. Si la comparaison de deux formes géométriques met en œuvre des découpages des deux formes, un technique de mise en correspondance (biunivoque) entre les composantes de l'une et les composantes de l'autre interviendra souvent en vue de dégager la conclusion. Il s'agit cette fois que les composantes ainsi appariées soient clairement de même aire.
4. Découper une forme géométrique donnée en vue de montrer qu'elle a même grandeur qu'une autre forme géométrique donnée *a priori* pose des problèmes difficiles de perception. Il s'agit en effet de découper la forme mentalement selon des traits non dessinés mais choisis afin de permettre la reconstitution de la seconde forme. Le projet doit être entièrement conçu mentalement avant d'être exécuté. L'expérimentation que nous avons réalisée (voir les sections 10.4.2 et 11.4.2) montre que les élèves qui disposent d'une perception globale des figures géométriques ont un plus grand nombre de comportements de réussite que les autres. On constate ainsi le rôle important de la perception visuelle dans la conceptualisation.

La capacité à *voir* que nous venons d'évoquer comporte plusieurs composantes, notamment :

1. reconnaître des formes,

([7]) En fait, les mathématiciens utilisent de préférence le mot « isométrique » .

2. décomposer une forme en éléments constructibles aux instruments,
3. visualiser des traits non dessinés d'une figure et sélectionner ceux dont le tracé peut faire progresser la réflexion,
4. visualiser la transformation d'une forme en une autre.

La construction du concept d'égalité d'aires est, comme on le voit, un des aspects de l'approche qualitative du concept d'aire. Un autre aspect est le classement de formes géométriques selon leur grandeur. Dans certains cas, il sera également nécessaire de passer par l'intermédiaire de découpages et recompositions pour pouvoir déterminer laquelle de deux formes est la plus petite.

La quantification de l'aire

Aborder l'étude quantitative de l'aire — c'est-à-dire apprendre à mesurer les aires— n'aurait guère de sens tant que le concept d'égalité d'aires est insuffisamment élaboré. Que signifie en effet une expression telle que « l'aire de cette forme géométrique vaut 5 cm^2 » sinon que cette forme a même aire qu'une forme de référence ?

Mais avec la mesure de l'aire, nous faisons intervenir simultanément des considérations de natures très différentes, les unes géométriques, les autres arithmétiques ou même algébriques. Ces changements de cadre constituent des difficultés nouvelles pour les enfants. Un parcours très rapide, une « course à la formule » ne peuvent qu'avoir des conséquences négatives sur leur appropriation de ces questions.

1. Une première approche de la quantification des aires peut être réalisée en travaillant sur du papier quadrillé ([8]) ou — en cas de travail sur ordinateur — avec un réseau de points en arrière-plan. Le traditionnel *géoplan* fera aussi l'affaire. Dans les cas simples, la quantification se réduit alors à un *comptage*.

   Comme le fait remarquer Piaget, dans cette situation le « carré unité » n'est nullement perçu comme le « produit de deux longueurs ». C'est seulement par la grande disponibilité du papier quadrillé que ce support apparaît plus fréquemment dans ce contexte.

   Les tableaux croisés sont courants dans divers jeux (combat naval, mots croisés. . .) et activités quotidiennes. Ils sont également plus faciles à dessiner que leurs équivalents triangulaires. Ces différents aspects interviennent dans le choix d'un carré comme unité conventionnelle, mais nous n'en sommes encore qu'à l'acquisition du concept d'aire.

([8]) Le papier quadrillé se prête moins bien au travail sur les longueurs, sauf si on décide d'utiliser la *distance du chauffeur de taxi*. Sans doute vaut-il mieux attendre que la distance euclidienne soit maîtrisée avant d'envisager cette autre distance, dont l'intérêt n'est pas négligeable.

Bien entendu, le comptage d'unités carrées dans un rectangle peut se faire en lignes ou en colonnes, et des activités de ce type font naturellement apparaître des multiplications. Mais — répétons-le — ce ne sont pas des longueurs qui sont multipliées, ce sont des nombres.

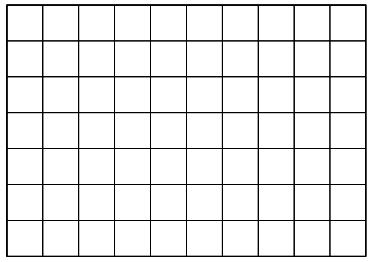


Fig. 6.1

Rien n'empêcherait d'utiliser de la même manière du papier triangulé et constater que le comptage de petits triangles à l'intérieur d'un grand débouche aussi sur une multiplication.

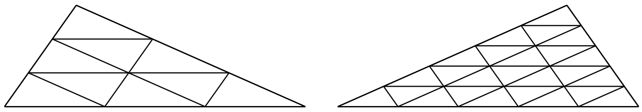


Fig. 6.2

Mais il s'imposerait dans ce cas de faire remarquer immédiatement que la géométrie de la figure impose plutôt des additions :

$$1+3+5=9 \qquad 1+3+5+7+9=25$$

2. Dans les situations précédentes, on voit apparaître simultanément des considérations géométriques et numériques. Le dessin sur papier quadrillé de formes polygonales dont les côtés ne sont pas parallèles aux lignes du quadrillage pousse les choses plus loin en faisant intervenir des fractions : tout segment oblique coupe en deux parties superposables un rectangle dont les côtés sont parallèles aux directions du quadrillage.

Dans le polygone de gauche de la figure ci-contre, on distingue rapidement un carré 2×2 et un demi-rectangle 1×2. Il reste alors deux triangles dont l'un est un demi-rectangle 1×3 amputé d'un demi-carré jaune, et l'autre un demi-rectangle 1×4, également amputé d'un demi-carré jaune.

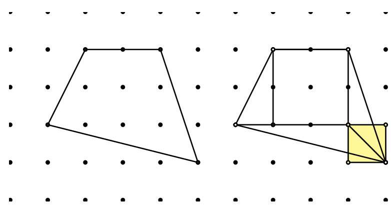


Fig. 6.3

Dès que ces décompositions et recompositions ont été perçues, le dénombrement peut être effectué par application des principes déjà rencontrés (invariance et additivité). Une fois de plus, la principale difficulté est la lecture de la figure, en tenant compte de traits non dessinés afin de percevoir comment compléter cette figure de façon efficace.

On constate néanmoins un effet pervers de l'usage du papier quadrillé chez certains enfants qui « comptent les points » au lieu de « compter les intervalles » (voir par exemple l'item 4 du pré-test réalisé en première secondaire en 2006–2007, page). Trois points étant marqués sur un segment de longueur 2, pour dessiner un segment de longueur double, ces enfants comptent six points en enfilade ! On peut considérer qu'il s'agit là d'un dénombrement qui ne s'appuie pas sur une perception correcte.

3. Le concept d'*unité commune de mesure* intervient dès que l'on veut comparer quantitativement les aires de deux formes géométriques.

   Il met en jeu la décomposition des deux formes en parties identiques, avec le problème de visualisation qui a déjà été mentionné à plusieurs reprises. Ce n'est qu'après avoir découvert ces décompositions que l'on distingue effectivement quelle est l'unité commune de mesure.

   Si on en trouve une — le plus souvent, ce n'est pas possible — le rapport des deux aires s'exprime par une fraction à termes entiers. Chacune des deux aires peut aussi s'exprimer comme un multiple entier de l'unité commune de mesure (voir le chapitre 5).

La systématisation

Nous distinguerons deux phases dans la systématisation : l'introduction d'unités *conventionnelles* et la construction de *formules de calcul*. Du point de vue didactique, il n'est pas clair qu'une de ces deux phases doive nécessairement être abordée avant l'autre. Pour la clarté de notre texte, nous les décrirons néanmoins successivement.

L'introduction d'unités conventionnelles

Cette introduction se justifie par des raisons économiques et sociales uniquement. On a rappelé à la section 4.5 quelques-uns des faits ayant conduit les responsables de la Première République française ([9]) à la décision de remplacer le système de mesures de l'époque par un nouveau système qui devait être rationnel et universel.

Dans le cadre de ce travail, nous devons mettre l'accent sur deux aspects essentiels.

1. Le lien entre l'unité conventionnelle d'aire et celle de longueur.

   Le cm^2 est l'aire du carré dont le côté mesure 1 cm.

   Notons au passage, que l'unité conventionnelle principale de longueur, c'est-à-dire celle d'où dérivent les autres unités de longueur est le mètre et non le centimètre. Nous nous limiterons néanmoins dans ce qui suit à nous exprimer en cm et cm^2, la transposition de ces remarques au cas du mètre ou d'autres unités étant immédiate.

   Bien entendu, la définition ci-dessus repose sur le fait que tous les carrés dont le côté mesure 1 cm sont superposables. Elle n'est donc possible que si l'invariance des aires par déplacement est acquise.

   Cette définition ne présente pas le cm^2 comme le produit 1 cm $\times$ 1 cm, expression qui n'apparaîtra que dans le cadre de l'utilisation de formules.

2. Si le point précédent est relativement banal, les choses se compliquent lorsqu'une aire n'est pas égale à un nombre entier de cm^2. Pour augmenter la précision, on est alors obligé d'utiliser une unité plus petite : le mm^2, ce qui pose directement

([9]) En fait, l'Académie des Sciences avait entamé des travaux dans cette direction dès avant la Révolution de 1789.

le problème du lien entre cm^2 et mm^2. On sait qu'il s'agit là d'un seuil difficile à franchir.

Comme tous les véritables seuils *épistémologiques*, il n'y a pas de méthode miracle pour amener l'élève à surmonter l'obstacle. C'est à force d'activités qu'un déclic peut se produire.

Plusieurs éléments compliquent la situation.

(a) À la base, on trouve un changement d'unité de longueur : le cm est remplacé par le mm, unité dix fois plus petite.

(b) Cette unité de longueur ne sert aucunement à mesurer des aires. Mais le changement d'unité de longueur entraîne un changement pour l'unité d'aire et pour l'unité de volume (il est difficile d'isoler l'unité d'aire dans cette question).

(c) Les changements d'unités (longueur, aire et volume) sont gouvernés par la dimension. L'enfant doit être conscient de la dimension 2 du plan, 3 de l'espace. C'est à nouveau un phénomène de perception.

(d) Le concept de dimension n'est pas nécessairement facile à percevoir. On peut l'associer aux questions de repérage, dont Piaget affirme qu'elles interviennent dans la maîtrise des mouvements plans ou spatiaux. Pour repérer un point dans le plan on utilise par exemple ses projections sur *deux* droites perpendiculaires. Pour l'espace, il en faut *trois*.

Des activités de repérage sur le terrain ou sur une carte peuvent donc jouer un rôle dans l'acquisition du concept de dimension. Elles contribuent à améliorer la perception du plan et de l'espace.

(e) Au cours d'activités de ce genre, il est assez naturel d'utiliser des plans ou des cartes d'échelles différentes, ou encore des photographies à des agrandissements différents. Combien de feuilles de papier A4 faut-il assembler pour pouvoir faire le plan au 10e d'une pièce rectangulaire de 3 m sur 4 m ? Quelles sont l'aire de la pièce et celle du plan ?

On revient ainsi à des changements d'unités. Mais ce qui est au cœur de tous ces éléments, c'est *un nouveau principe qui généralise le principe d'invariance par déplacement.*

> Par *agrandissement* ([10]), les aires sont multipliées par le carré du rapport d'agrandissement (et les volumes par le cube de ce rapport).

(f) Une autre difficulté peut provenir de l'ordre de grandeur des nombres manipulés. Exprimer 1 m^2 en cm^2, c'est remplacer le coefficient 1 par le coefficient 10 000. Les enfants ne sont pas nécessairement habitués à travailler avec des nombres aussi grands.

La construction des formules de calcul d'aire

Dans tout ce texte, nous avons voulu mettre en évidence que l'apprentissage des mesures de grandeurs géométriques ne se limite pas à la mise en place de formules, mise en place

([10]) Les mathématiciens diraient « par homothétie ».

parfois réalisée avant que le concept d'aire soit installé réellement. Dans un tel cas, il est fréquent de constater chez l'enfant une confusion l'amenant à l'incapacité d'utiliser à bon escient ces formules qu'il connaît. Par exemple, il confond les formules relatives au périmètre et celles relatives à l'aire.

De plus la remédiation — qui consisterait à revenir sur le concept d'aire lui-même, puis à reconstruire les formules — risque d'être inopérante, l'enfant ne comprenant plus le sens de ces activités. Partant du principe qu'il vaut mieux prévenir que guérir, consacrons le temps nécessaire à la construction du concept d'aire avant d'aborder les formules.

Cela étant dit, il faut arriver quand même à ces fameuses formules. Ici aussi quelques remarques s'imposent.

1. La première porte sur le fait qu'il existe plusieurs façons d'énoncer ces formules et que ces différences d'énoncés révèlent des habitudes de travail.

   Par exemple, un losange est un parallélogramme, mais la formule donnant l'aire du losange fait intervenir les diagonales et celle donnant l'aire du parallélogramme se réfère à une base et une hauteur.

   Ce vocabulaire peut être associé à des présentations stéréotypées des formes géométriques qui privilégient les directions horizontale et verticale.

   Depuis longtemps, on demande d'éviter ces présentations stéréotypées qui ont des effets pervers. Ainsi quand l'aire d'un triangle est exprimée sous la forme $\frac{\mathrm{b} \times \mathrm{h}}{2}$ et associée à des dessins de triangles dont un côté est toujours horizontal, il y a un risque non négligeable que l'enfant soit détourné d'une démarche consistant à placer la base sur un côté non horizontal.

2. Certes, l'horizontale et la verticale jouent effectivement un rôle privilégié dans notre perception. Par exemple, nous reconnaissons plus facilement les angles droits ayant un côté horizontal et un côté vertical que les autres. Cela n'implique pas que nous devions systématiquement les placer dans cette position.

   Une façon d'améliorer notre perception d'une figure est précisément de faire pivoter la feuille de papier, le géoplan, ou même l'écran de l'ordinateur, jusqu'à amener certains éléments de la figure à avoir une orientation privilégiée, puis, après examen, de remettre le support de la figure dans sa position initiale.

3. La formule donnant l'aire d'un triangle peut être appliquée de trois façons différentes, selon le côté qualifié de base, à la différence de celle donnant l'aire d'un rectangle qui donne lieu au même calcul quel que soit le côté qualifié de longueur et celui qualifié de largeur.

   La formule donnant l'aire d'un parallélogramme peut être appliquée de deux manières différentes, selon le côté qualifié de base, celle donnant l'aire d'un carré d'une seule manière.

4. Encore faut-il faire attention à ce que des formules telles que $\frac{b \times h}{2}$, $b \times \frac{h}{2}$ et $\frac{b}{2} \times h$ soient bien perçues comme équivalentes par les élèves. (Si ce n'est pas le cas, il y a trois formules différentes qui donnent l'aire d'un triangle et qui peuvent toutes être écrites de trois façons différentes.)

Autrement dit, la maîtrise des formules d'aires suppose une maîtrise des propriétés de la multiplication et de la division.

5. Du point de vue géométrique, le fait important dans toutes ces formules est qu'elles comportent le *produit de deux longueurs de segments perpendiculaires*.
6. Nous venons de parler de produit de deux longueurs de segments perpendiculaires. Sont-ce des longueurs que l'on multiplie ou des nombres ?

   Si A est l'aire d'un rectangle et que L et ℓ sont les longueurs de deux côtés consécutifs, la formule $A = L \times \ell$ n'a de sens que si ce sont des longueurs que l'on multiplie.
7. L'installation de la formule de l'aire du rectangle s'accompagne donc du remplacement d'une formulation du type $A = (6 \times 7) \times (1 \text{ cm}^2)$ par $A = (6 \text{ cm}) \times (7 \text{ cm})$.

   La première formulation correspond à un dénombrement des petits carrés unités inclus au rectangle, la seconde à la mesure des longueurs de deux côtés suivie d'une multiplication.

   Cette transition doit être explicitée. Il ne doit pas être considéré comme anormal que l'on multiplie des longueurs. Plus tard, on calculera même une vitesse en divisant une longueur par une durée.
8. Du point de vue de l'arithmétique, lorsque l'enfant rencontre pour la première fois les formules de périmètres ou d'aires, quel sens donne-t-il aux lettres qui y figurent ? N'ayant jamais rencontré le concept de *variable*, le seul sens qu'il puisse donner à ces lettres est celui de « marqueur » : ce sont des symboles à remplacer par des valeurs. C'est là un emploi rudimentaire des lettres qui ne sera dépassé qu'au début de l'apprentissage de l'algèbre.

Pour terminer ce chapitre, nous pourrions encore évoquer le rôle important du langage dans l'apprentissage des mathématiques. Nous sommes en effet convaincus que plus un domaine est abstrait — et les mathématiques sont nécessairement abstraites — plus son apprentissage dépend de la verbalisation. Mais développer ce sujet nous conduirait trop loin.

Annexe C

Index

Annexe D

Bibliographie

[1] P. Abgrall. *Le développement de la géométrie aux* IX^e–XI^e *siècles*. A. Blanchard, Paris, (2004).

[2] Aristote. *Physique*. Les belles lettres, Paris, (1990).

[3] N. Artemiadis. *History of mathematics : from a mathematician's vantage point*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2004).

[4] T. Assude et J.-M. Gelis. La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, **50**, 3, 259–287, (2002).

[5] N. Balacheff and J. Kaput. Computer-based Learning Environments in Mathematics. In Bishop et al. [11], pages 469–501.

[6] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Jeux mathématiques 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1992). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 6.

[7] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Géométrie de l'espace 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1994). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 7.

[8] E. Barbin. Qu'est-ce que faire de la géométrie ? *Repères-IREM*, pages 59–82, (2001).

[9] G. Barthélemy. *2500 ans de mathématiques : l'évolution des idées*. Ellipses, Paris, (1999).

[10] S. Baruk. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Ed. du Seuil, Paris, (1992).

[11] A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde, éditeurs. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).

[12] R. Bkouche. La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2, Rethymnon, (2006). Université de Crète.

[13] C. Boyer and U. Merzback. *A history of mathematics*. Wiley, Singapore, (1989).

[14] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble, (1998).

[15] M. Caveing. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Éléments » d'Euclide et la « Physique » d'Aristote.* In *Penser la science.* Points Sciences, Seuil, (1982).

[16] M. Caveing. *La figure et le nombre : recherche sur les premières Mathématiques des Grecs.* Presses Universitaires du Septentrion, Paris, (1998).

[17] D. H. Clements and M. T. Battista. The effects of Logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education,* **21**, 5, 356–371, (1990).

[18] CREM. *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2003).

[19] CREM. *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2004).

[20] CREM. *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2005).

[21] E. Crone, E. Dijksterhuis, and al. *The principal works of* SIMON STEVIN, *volumes* IIA *et* IIB. C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, (1958).

[22] N. Crowder. Automatic Tutoring by means of intrinsic programming. In Galantes [38].

[23] R. Cuppens. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre.* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, (1996). Deux tomes.

[24] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques.* Editions du Seuil, (1986).

[25] A. Djebbar. *Une histoire de la science arabe.* Editions du Seuil, (2001).

[26] A. Djebbar. *L'algèbre arabe, genèse d'un art.* Vuibert-Adapt, Paris, (2005).

[27] *Décret « Missions de l'École », Mon école comme je la veux.* Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1997).

[28] *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1999). `www.enseignement.be/@librairie/documents/socles/telechargement/pdf/socle_math.pdf`.

[29] *Mathématiques — Premier degré – 1 A et 2e Commune.* Fédération de l'Enseignement secondaire catholique, Bruxelles, (2000). `www.segec.be/Documents/Fesec/Programmes/15_MATH1.pdf`.

[30] *Programme d'études du cours de mathématiques — 1re année A – 2e année commune.* Ministère de la Communauté Française — AGERS, Bruxelles, (2000). `www.restode.cfwb.be/download/programmes/10-2000-240.pdf`.

[31] R. Douady. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* **7**, 2, 5–31, (1986).

[32] J.-C. Duperret. Le geste géométrique ou l'art de démontrer. *Repères-IREM*, pages 83–116, (2001).

[33] R. Duval. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37–65, (1993).

[34] R. Duval. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53, (2005).

[35] Euclide. *Les éléments, traduction en français du texte de Heiberg par B. Vitrac.* Presses Universitaires de France, Paris, (1994).

[36] J.-P. Friedelmeyer. Les aires : outil heuristique - outil démonstratif. *Repères-IREM*, **31**, 39–62, (1998).

[37] J.-P. Friedelmeyer. Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, **44**, 5–31, juillet 2001. Topiques Éditions, Metz.

[38] E. Galantes, éditeur. *Automatic Teaching : the state of the art.* Wiley, New York, (1959).

[39] Galilée. *Discours concernant deux sciences nouvelles.* Presses Universitaires de France, (1995). D'après une traduction de Maurice Clavelin.

[40] E. Gallou-Dumiel. Symétrie orthogonale et micro-ordinateur. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 5–60, (1987).

[41] GEM. *L'archipel des isométries.* Ed. GEM, Louvain-la-Neuve, (1982).

[42] R. Gras. Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, **Supplément n°15**, 9–33, (2005).

[43] R. Gras et al. *L'implication statistique.* La Pensée Sauvage, Grenoble, (1996).

[44] E. M. Gray and D. Tall. Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 2, 116–140, (1994).

[45] Herodote. *Histoires, traduit en français par Larcher.* Charpentier, Paris, (1850). En ligne sur `Gallica.bnf.fr`.

[46] J. Hillel. Mathematical and programming concepts acquired by children, aged 8–9, in a restricted Logo environment. *Recherches en didactique des mathématiques*, **6**, 2–3, 215–268, (1985).

[47] J. Hillel and C. Kieran. Schemas used by 12-years olds in solving selected turtle geometry tasks. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 61–102, (1987).

[48] J. Hoyrup. *Lengths, widths, surfaces : a portrait of old babylonian : algebra and its skin.* Springer-Verlag, New York, (2002).

[49] M. Kittel et G. Kuntz. De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques. Etude d'un exemple. *Repères IREM*, **49**, 41–58, (2002).

[50] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, (1990).

[51] C. Laborde and B. Capponi. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **14**, 1–2, 165–210, (1994).

[52] J.-M. Laborde and R. Strässer. Cabri-géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **90**, 5, 171–190, (1990).

[53] M. Lebrun. *Des technologies pour enseigner et apprendre.* 2e édition, De Boeck, Bruxelles, (2002).

[54] A.-M. Legendre. *Éléments de Géométrie avec des notes, suivis d'un traité de trigonométrie.* Société Nationale pour la propagation des bons livres, Bruxelles, (1838).

[55] L. Lismont et N. Rouche, éditeurs. *Formes et Mouvements.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2001).

[56] R. Noss. Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**, 5, 343–362, (1987).

[57] S. Papert. *Jaillissement de l'esprit.* Flammarion, Paris, (1980).

[58] J. Piaget. *Six études de psychologie.* Gonthier, Genève, (1964).

[59] J. Piaget, B. Inhelder, et A. Szeminska. *La géométrie spontanée de l'enfant.* Presses Universitaires de France, Paris, (1948).

[60] Plutarque. *Œuvres morales. Le banquet des sept sages. traduit en français par V. Bétolaud.* Hachette, (1870). En ligne sur `hodoi.fltr.ucl.ac.be/concordances`.

[61] C. Pribetich Aznar. La formulation des surfaces des bâtiments et des superficies des terrains aux XIV[e]–XVI[e] siècles dans le sud-est de la France. *Histoire et mesure*, **XVI - n°3/4**, (2005). mis en ligne le 7 décembre 2005, référence du 25 avril 2007, disponible sur : http ://histoiremesure.revues.org/document142.html.

[62] R. Rashed et B. Vahabzadeh. *Al-Khayyām Mathématicien.* Albert Blanchard, Paris, (1999).

[63] X. Roegiers. *Les Mathématiques à l'école primaire (tome 2).* De Boeck, (2000).

[64] N. Rouche. *Le sens de la mesure.* Didier-Hatier, Bruxelles, (1992).

[65] N. Rouche et P. Skilbecq. Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel. *Mathématique et Pédagogie*, **149**, 68–84, (2004).

[66] N. Rouche et P. Skilbecq. *Apprenti Géomètre : pourquoi un nouveau logiciel.* CREM, Nivelles, (2006).

[67] C. Ruby. Lire (vraiment) Leibniz. *EspacesTemps.net*, (Mis en ligne le 5 mai 2004).

[68] M. Serres. *Les origines de la géométrie.* Flammarion, (1993).

[69] B. F. Skinner. *La révolution scientifique de l'enseignement.* Ed. Dessart, Bruxelles, (1969).

[70] S. Stévin. *L'Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques.* Ed. A. Girard, Leyde, (1634).

[71] D. Tall. Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignement mathématique*, **42**, 395–415, (1996).

[72] D. Tall. A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **11**, 195–215, (2006).

[73] R. Taton. *La science antique et médiévale*. Presses universitaires de France, Paris, (1957).

[74] P. van Hiele. La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive. *Mathematica & Paedagogia*, **16**, 25–34, (1958/59).

[75] G. Vergnaud. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2**, 2, 215–232, (1981).

[76] G. Waldegg. L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stévin. Peyresq, (1999). Actes du colloque « La pensée numérique », www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pensee.numer.htm.

[77] F. Woepcke. *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, (1986).

[78] A. Youschkevitch. *Les mathématiques arabes (VII^e^- XV^e^ siècles)*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, (1976).

Table des matières