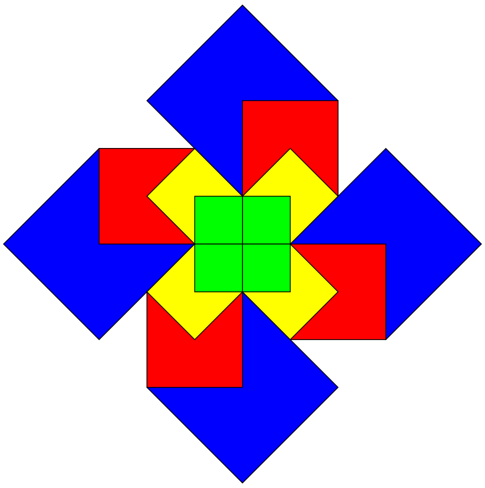
Apprenti Géomètre

Impact du logiciel « Apprenti Géomètre » sur certains apprentissages

Tome 5b



Ministère de la Communauté française

CREM

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

2007

Chapitre 12

Un pré-test en cinquième primaire (2006–2007).

12.1 Les objectifs des pré- et post-tests

Fondamentalement, les objectifs de ces tests effectués en cinquième primaire étaient les mêmes que ceux qui ont été mentionnés pour les épreuves similaires réalisées en 2005–2006 dans des classes de sixième.

Il s'agissait donc en premier lieu d'étudier les niveaux de perception des élèves, c'est-a-dire leur capacité à voir, analyser et structurer une figure. Il s'agissait aussi d'évaluer l'impact de l'utilisation d'*Apprenti Géomètre* dans les classes expérimentales sur cette capacité. Le domaine géométrique choisi ayant été la construction des formules d'aires, les questions du post-test n'ont pas négligé ce sujet.

Un autre objectif était de comparer les résultats des tests de cinquième et de sixième année, afin d'essayer d'esquisser l'évolution des concepts des élèves sur une période de deux années consécutives, voire de trois années si l'on tient compte de l'expérience menée simultanément en première secondaire. C'est pour cette raison que l'expérience a été menée cette année dans des classes différentes de celles de 2005–2006.

Bien évidemment, les pré- et post-tests ont été utilisés dans les mêmes classes que celle où a été menée l'expérimentation relatée au chapitre 7.

12.2 Les énoncés

Le pré-test comprend sept items. Les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Au total, 146 élèves ont participé à ce test. Il est à noter que dans deux des écoles situées en milieu rural, les élèves de cinquième et ceux de sixième année étaient rassemblés en une seule classe. Notre échantillon comportait de ce fait 131 élèves de cinquième et 15 élèves de sixième. Les institutrices concernées n'ont signalé aucune différence sensible de réactions entre ces deux catégories d'élèves. Néanmoins, leurs taux de réussite sont souvent différents, sans que ces différences puissent être considérées comme très significatives, vu la faiblesse de l'effectif des élèves de sixième. Aussi, pour plus de sécurité et sauf mention explicite du contraire, les effectifs et les pourcentages mentionnés dans la suite ne tiendront pas compte de ces quinze élèves de sixième année.

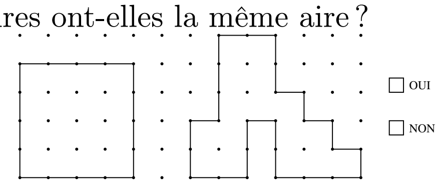
– Item 1

Défi 1 – Que dois-tu connaître pour répondre aux questions suivantes ?

	une longueur	une aire	un volume	un poids	un temps
Mon ami(e) habite deux rues plus loin. A quelle distance se trouve sa maison ?					
Je dois acheter du sable pour remplir le grand trou qui est dans le jardin. Quelle quantité faut-il ?					
Je veux recouvrir le sol de ma chambre avec du parquet. Quelle quantité de parquet dois-je acheter ?					
Je vais entourer mon jardin d'une clôture en treillis. De quelle quantité de treillis ai-je besoin ?					
Je veux repeindre les murs de mon salon. De quelle quantité de peinture ai-je besoin ?					

– Item 2

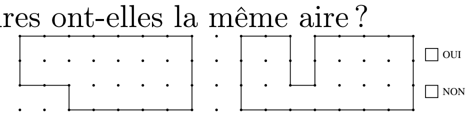
Défi 2 – Ces figures ont-elles la même aire ?



Justifie ta réponse en expliquant comment tu as procédé. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 3

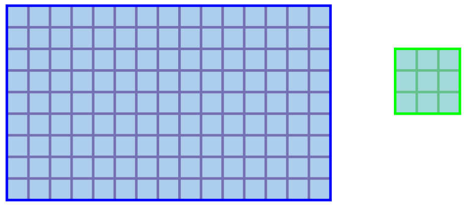
Défi 3 – Ces figures ont-elles la même aire ?



Justifie ta réponse en expliquant comment tu as procédé. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 4

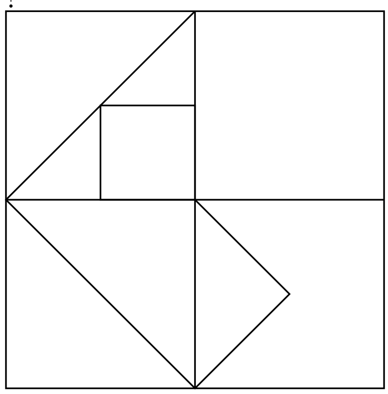
Défi 4 – Le rectangle bleu est plus grand que le carré vert. Combien faut-il de carrés verts pour recouvrir le rectangle bleu (complètement et sans déborder) ?



Justifie ta réponse en expliquant comment tu as procédé. Tu peux dessiner sur les figures.

– Item 5

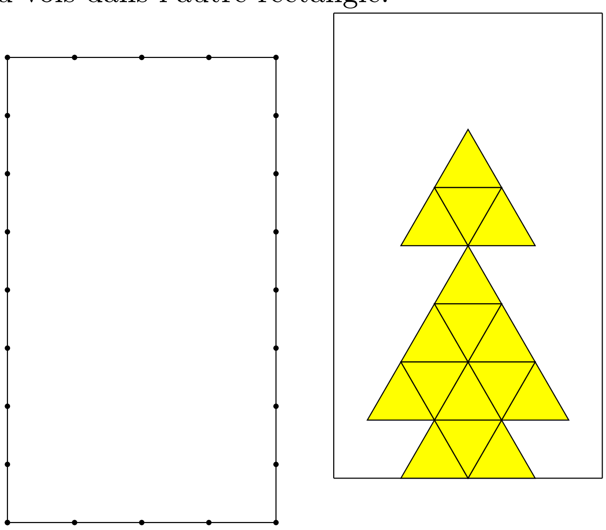
Défi 5 – Combien de carrés vois-tu sur ce dessin ? Combien de triangles vois-tu sur ce dessin ?



Repasse en vert sur les côtés du plus grand triangle et en rouge sur les côtés du plus grand carré.

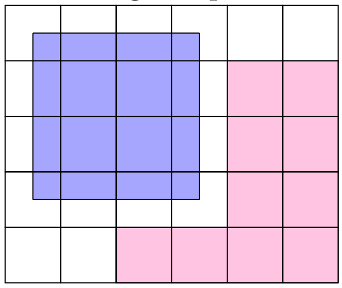
– Item 6

Défi 6 – Recopie le plus précisément possible dans le rectangle vide le dessin que tu vois dans l'autre rectangle.



– Item 7

Défi 7 – Laquelle de ces deux figures possède la plus grande aire ?



Explique ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.

12.3 Analyse des items

12.3.1 Item 1

Les réponses attendues étaient :
- Question 1 : longueur
- Question 2 : volume
- Question 3 : aire
- Question 4 : longueur
- Question 5 : aire

Cependant, le sable se vend au poids sans indication d'un volume par tonne de sable. Les pots de peinture se vendent au litre tout en indiquant souvent — mais pas toujours — un nombre de m^2 par litre. Dans notre société, il est aussi devenu courant de mesurer des distances en minutes. Ces pratiques de notre vie quotidienne ne rendent pas nécessairement simple l'utilisation de « problèmes de la vie courante » dans le cours de mathématique. Cela nous interdit aussi de considérer les réponses induites par ces habitudes comme des erreurs. Nous avons donc également considéré comme correcte la réponse « un poids » (produite par 65% des élèves) à la question 2, ainsi que les réponses « un volume » et « un poids » (produites respectivement par 30% et 32,5% des élèves) à la question 5. À cette question 5, la réponse « une aire » est également fournie par 30% des élèves.

Moyennant ces modifications, nous constatons que vingt-cinq élèves sur cent trente-et-un, soit 19%, ont fourni une réponse correcte à tous les items.

La présence de la possibilité de répondre « un temps » a joué un rôle perturbateur. Alors qu'aucun des items n'appelait cette réponse, elle a été donnée à 19 reprises, dont 6 à la question 1, ce qui — comme il a été dit plus haut — peut se comprendre. Par contre on se demande ce qui peut amener un élève à proposer cette réponse pour une des questions 2 à 5, sinon le sentiment que chacune des réponses proposées doit être choisie au moins une fois.

Les autres erreurs sont essentiellement de trois types :

- des confusions longueur–aire : 52% des élèves ;
- des confusions aire–volume : 20% des élèves ;

- des confusions longueur–volume : 18% des élèves.

12.3.2 Items 2 et 3

Pour cette analyse des réponses, nous rassemblons les items 2 et 3 qui ne diffèrent pas par les questions posées mais par la complexité des dessins : l'item 3 est clairement plus facile que l'item 2.

Le tableau suivant résume les constatations générales relatives à ces items :

	Réussite	Bonne réponse	Justification partielle mais correcte	Justification incorrecte	Absence de justification
Item 2	21%	54%	36%	37%	15%
Item 3	26%	74%	42%	33%	17%

L'intitulé « Réussite » se rapporte aux réponses qui sont à la fois correctes et dont la justification est également correcte et complète. La colonne « Bonne réponse » ne tient pas compte de la qualité de la justification. Elle confirme la plus grande facilité de l'item 3, mais cette constatation est relativisée quand on regarde les autres colonnes : il n'est guère plus facile pour les élèves de cinquième primaire de justifier leur réponse dans un cas facile que dans un cas plus complexe.

Nous nous sommes évidemment intéressés aux méthodes de résolution utilisées par les élèves. Nous réutiliserons dans ce but la classification explicitée à la section 10.3.1 qui analysait le pré-test effectué en 2005–2006 en sixième primaire. Nous distinguerons donc trois modes fondamentaux de raisonnement.

1. Le mode **qualitatif** recouvrait en 2005–2006 la démarche de *découpage et recomposition*. Dans le présent test, elle recouvre de plus l'*équicomplémentarité*, dont l'emploi est assez naturel pour l'item 3.
2. Le mode **quantitatif** consiste à compter le nombre de carrés du quadrillage associés à chaque figure.
3. Dans le mode **numérique**, l'élève utilise des formules d'aire.

La présence d'une trame quadrillée en arrière-plan des figures des items 2 et 3 a induit un recours particulièrement fréquent au mode quantitatif.

Nous affecterons le mode numérique à quelques élèves qui effectuent une ou des multiplications pour déterminer l'aire du carré de l'item 2 ou des enveloppes des rectangles de l'item 3, ainsi qu'aux élèves qui mesurent des longueurs, ce qui est souvent significatif d'une confusion entre périmètre et aire.

D'autres procèdent par découpage et recomposition, ou encore — dans le cas de l'item 3 — par équicomplémentarité. Cette dernière méthode consiste à remarquer — souvent sans chercher à le vérifier — que les deux formes s'inscrivent dans des rectangles et que les « trous » ont même aire.

Une dernière méthode à signaler, qui ne mène jamais à la bonne réponse, est le comptage des points situés à l'intérieur — ou parfois sur les bords — des figures à comparer.

Le tableau suivant indique les taux d'utilisation de chacune de ces méthodes :

	Comptage de carrés	Multiplication	Découpage et recomposition	Équicomplémentarité	Mesure de longueurs	Comptage de points
Item 2	50%	8%	5%	–	10%	8%
Item 3	50%	3%	2%	10%	10%	10%

À lire ce tableau, on a *a priori* l'impression que la conceptualisation de l'aire est en route mais est loin d'être terminée. Environ 65% des élèves ont une idée valable de ce que signifie « comparer deux aires ». Ils emploient dans ce but plusieurs méthodes de niveaux conceptuels différents.

La méthode de comptage de petits carrés se comprend aisément pour la figure 2 de l'item 2. Son emploi pour trouver le nombre de petits carrés intérieurs au carré de la figure 1 de cet item semble montrer qu'elle reste la méthode standard.

Ce n'est certainement pas par hasard que la mention de l'utilisation d'une multiplication est plus fréquente pour l'item 2 que pour l'item 3 : à l'item 2, l'emploi de la « formule » de l'aire du carré fournit immédiatement la réponse. À l'item 3 l'emploi de la formule du rectangle doit être précédé de la perception de ce rectangle et suivi d'une démarche d'équicomplémentarité. Il s'agit en fait de combiner la visualisation d'une forme géométrique connue « derrière » un dessin « approché », un raisonnement numérique et un raisonnement qualitatif qui permet de revenir à la forme géométrique réellement dessinée.

Les méthodes précédentes conduisent plutôt à la réussite. Par contre, mesurer des longueurs mène généralement à un échec, soit que l'élève confond un périmètre et une aire, soit qu'il croit que la comparaison des périmètres donne le même résultat que la comparaison des aires.

Le comptage des points intérieurs aux contours indique une compréhension encore débutante de ce que l'aire correspond à un contenu. Environ 6% des élèves de cinquième année n'en sont même pas encore là, tenant le raisonnement suivant : *les deux figures n'ont pas la même aire parce qu'elles n'ont pas la même forme* ([1]).

Les méthodes utilisées par les élèves apparaissent assez stables. 70% des élèves utilisent la même méthode dans les deux défis. En particulier, 61 élèves, soit 46% du total, utilisent le comptage de carrés pour les deux items. Cet effectif de 61 élèves stables représente l'écrasante majorité des 66 élèves qui comptent des carrés à l'item 2 et (également !) des 66 élèves qui procèdent de même à l'item 3. On peut donc supposer que cette méthode correspond à une phase d'équilibre conceptuel (au sens donné à cette expression à la section 6.2 : vu la situation à traiter, notamment vu la présence d'une trame carrée à

([1]) En 2005-2006, nous avions rencontré cette conception chez un élève de sixième. Cette approche du concept d'aire peut aussi se rencontrer dans l'histoire des mathématiques : au Xe siècle, le mathématicien arabe AL-QUHI explique à son ami AL-SHABI, qu'il est permis de comparer l'aire d'un disque à celle d'un carré, bien que ces deux formes géométriques *ne soient pas homogènes*, (*voir page 92*).

l'arrière plan, il n'est nullement besoin d'utiliser autre chose qu'un comptage) qui est le fait d'environ la moitié des élèves de cet âge.

Par contre, les autres élèves changent plus fréquemment de méthode. Vraisemblablement, ils ont dépassé l'équilibre précédent et sont en voie d'en construire un nouveau. Ils utilisent alors des méthodes plus variées, pouvant différer d'un item à l'autre. Relativisons quand même les variations constatées : une variation de 4% d'un taux de réponse représente moins de cinq élèves. La seule variation réellement significative est probablement celle qui concerne la méthode d'équicomplémentarité.

L'attraction pour cette méthode à l'item 3 entraîne une baisse des taux d'utilisation de la multiplication, du découpage-recomposition et du mesurage de longueurs. Ces variations pourraient être le fait d'élèves à la recherche de procédures plus efficaces que le comptage de carrés. Vu dans cette perspective de dépassement, le mesurage de longueurs apparaît moins négatif que ne pourrait le laisser croire la confusion entre périmètre et aire que cette méthode entraîne souvent.

La méthode de comptage des points constitue un peu pour nous une énigme. Elle est également assez stable : 11 élèves à l'item 2, 14 à l'item 3. Mais cette méthode apparaît comme un stade peu élaboré de la conceptualisation de l'aire. On lui trouvera un côté positif en considérant qu'elle pourrait évoluer vers le comptage des carrés, chaque point pouvant par exemple être associé à un petit carré du quadrillage. Si cela est vrai, les élèves adoptant cette procédure ne seraient pas à ranger parmi ceux ayant dépassé l'équilibre lié au comptage de carrés mais plutôt parmi ceux qui ne l'ont pas encore atteint.

12.3.3 Item 4

Cet item est presque identique à l'item 3 du pré-test réalisé en sixième primaire en 2005-2006, la seule différence portant sur le fait que le carré étalon (de taille 3×3) était cette fois détaché du rectangle à mesurer au lieu de lui être accolé. Nous avions en effet constaté (*voir la figure 10.16, page 351*) que cinq élèves (sur 109) de sixième année fournissait la réponse 14 au lieu de 15, mesurant donc non le rectangle, mais ce qu'il faut ajouter au carré pour trouver le rectangle. Le même phénomène était réapparu lors du post-test.

Cette fois, nous ne trouvons que deux élèves ayant reproduit exactement la même erreur, en répondant 14. Il convient toutefois de placer sur le même pied les élèves qui ont commis l'erreur analogue dans le cadre de l'utilisation du mode *quantitatif atomisé* (*voir page 352*). Ils dénombrent en effet les 135 petits carrés constituant le rectangle, puis soustraient 9 et produisent la réponse 126. Au total ce sont onze élèves, soit 8%, qui ont ce comportement, lequel apparaît donc comme indépendant du fait que le carré étalon soit, ou non, détaché du rectangle.

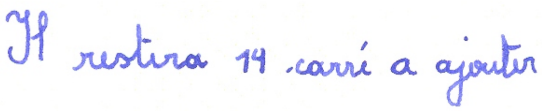


Fig. 12.1

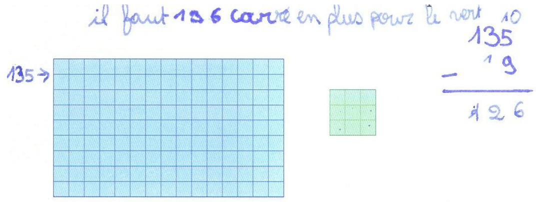


Fig. 12.2

Néanmoins, nous constatons ainsi la persistance, mais aussi la diminution, de la cinquième à la sixième année d'une erreur que l'on pourrait qualifier de *mesure du complémentaire de l'unité*.

Comme on pouvait s'y attendre, les élèves de cinquième année utilisent les mêmes méthodes que ceux de sixième pour résoudre cet exercice. Nous voyons donc réapparaître les méthodes qualifiées à la section 10.3.3 de *quantitative-globale*, *numérique* et *quantitative-atomisée*.

Le mode quantitatif-global

Ce mode a été adopté par 53 % des élèves qui, d'une façon ou d'une autre, ont dessiné les quinze carrés dans le rectangle, et les ont comptés.

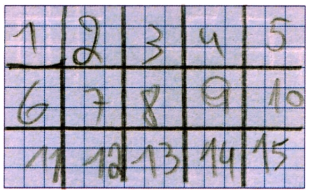


Fig. 12.3

Le mode numérique

Dans ce mode, que l'on peut détecter sur 10% des feuilles, l'élève mesure, d'une façon ou d'une autre, chacun des côtés du grand rectangle et du petit carré et effectue une multiplication. Celle-ci est éventuellement suivie d'une division lorsque l'unité de longueur choisie n'est pas le côté du carré. On rencontre ainsi essentiellement des multiplications de 3 par 5 et de 9 par 15, dans ce cas parfois, mais pas toujours, suivie d'un autre calcul.

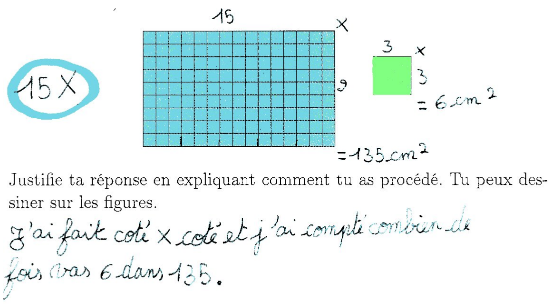


Fig. 12.4

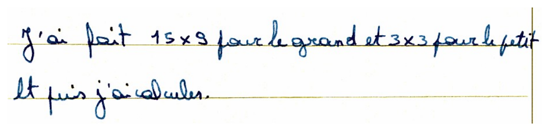


Fig. 12.5

Bien entendu, ces opérations peuvent être entachées d'erreurs de calcul, ne débouchant pas nécessairement sur une mauvaise réponse (*Fig. 12.4*), ce qui donne à penser que certains élèves ont cherché à résoudre le problème de deux façons différentes.

Le mode quantitatif-atomisé

Nous avons attribué ce mode opératoire aux vingt-et-un élèves (16%) qui ont compté (correctement ou non) les 135 petits carrés du rectangle. Souvent on peut les reconnaître au fait d'avoir pointé séparément chacun de ces carrés (*Fig. 12.6*), mais il faut être attentif car un tel pointage est également parfois utilisé en vue de regrouper les carrés en pavés de 9 (*Fig. 12.7*). Dans un tel cas, l'élève concerné s'est vu attribuer le mode quantitatif-global.

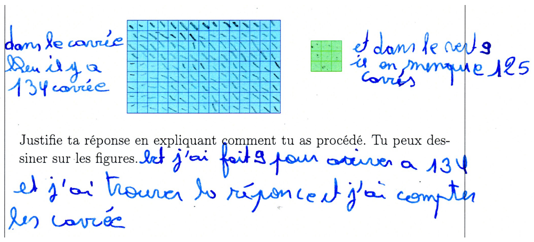


Fig. 12.6

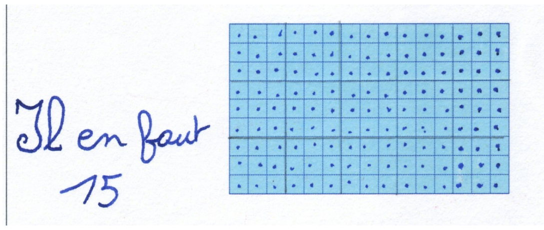


Fig. 12.7

Si nous considérons les réponses à cet item en termes de réussites ou d'échecs, nous pouvons résumer la situation par le tableau suivant.

	Réussite	Bonne réponse	Justification partielle mais correcte	Justification incorrecte	Absence de justification
Item 4	53%	70%	10%	15%	17%

Il est à noter que 70% des élèves donnent la bonne réponse mais seulement 58% produisent une justification correcte. Parmi ces derniers, certains ne donnent pas la bonne réponse, ce qui explique que le taux de réussite ne soit que de 53% ; ce sont en fait des élèves qui n'ont pas répondu clairement à la question.

12.3.4 Item 5

Cet item dont l'objectif était d'évaluer le niveau de perception des élèves n'avait pas d'équivalent lors du pré-test réalisé en 2005–2006. Nous pouvons cependant y retrouver un niveau pouvant être qualifié de *local* et un autre de *global*.

Au niveau local, nous placerons les élèves qui perçoivent la figure comme une *juxtaposition* de pièces *ne se chevauchant pas*. Ces élèves ne dénombrent que six triangles et deux carrés que l'on peut qualifier de « formes élémentaires ». Ils ont été 27 dans ce cas, soit 21%.

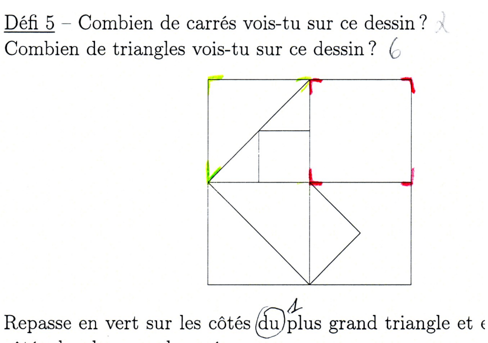


Fig. 12.8

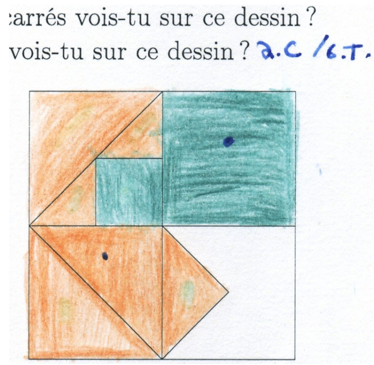


Fig. 12.9

Le niveau global nécessite de percevoir le dessin comme une *superposition* de formes géométriques de tailles différentes. À ce niveau apparaissent huit triangles et six carrés. Seuls 4 élèves sur 131 (3%), ont atteint ce stade. Comme il semble normal, ils ont également dessiné correctement le plus grand triangle et le plus grand carré (*Fig. 12.10*).

36% des élèves sont à un niveau intermédiaire, percevant toutes les formes élémentaires mais non toutes celles qui se constituent par assemblage de formes élémentaires. Il n'est pas toujours aisé de déterminer quelles formes ils ont perçues (*Fig. 12.11*).

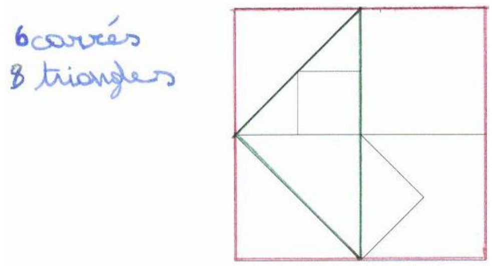


Fig. 12.10

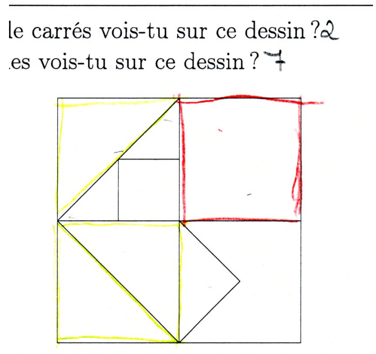


Fig. 12.11

À ces constatations, il convient d'ajouter que la forme de la question à induit des comportements ne répondant pas à l'attente des auteurs du questionnaire. 14% des élèves ont été attirés par l'activité de coloriage et l'ont exécutée sans guère se préoccuper des consignes. Certains colorient effectivement le plus grand carré et le plus grand triangle sans répondre aux questions de dénombrement.

D'autres, également sans dénombrer les triangles et les carrés, colorient plus de formes qu'il n'était demandé. Les coloriages se chevauchant, il devient difficile de déterminer à quel niveau de perception ces élèves se situent (*Fig. 12.12*).

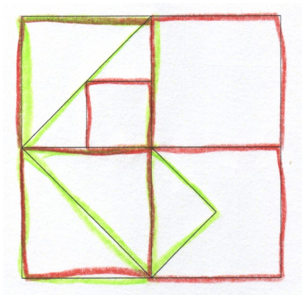


Fig. 12.12

Signalons encore quelques cas particuliers, en commençant par deux élèves (d'écoles différentes) dont la perception va au-delà de ce que l'on imaginait. Le premier (un élève de sixième année) ajoute concrètement des traits à la figure et dépasse ce stade en en imaginant d'autres. Il dénombre ainsi 32 triangles, mais ne voit que 4 carrés (*Fig. 12.13*). Le second (*Fig. 12.14*) n'ajoute aucun trait concrètement mais, sans aucun doute possible, il les visualise. Il est plus performant que le précédent puisqu'il arrive à 16 carrés et 32 triangles. Ces deux élèves sont très flexibles : leur dénombrement se situe au niveau local puisqu'ils ne comptent que des formes ne se chevauchant pas. Mais pour y arriver, ils passent par un niveau global de perception. Quant au dessin, à l'exception du grand carré pour le premier, l'un comme l'autre dessinent des formes qui ne sont pas celles que l'on attendait et qui ne figurent pas parmi celles qu'ils ont dénombrées.

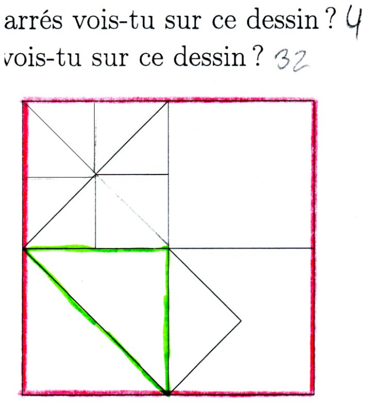


Fig. 12.13

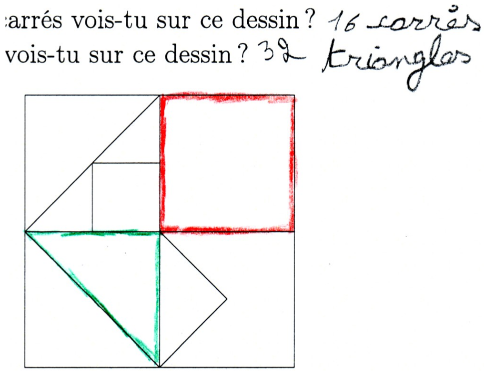


Fig. 12.14

Autres cas particuliers : exactement deux élèves numérotent les différentes formes.

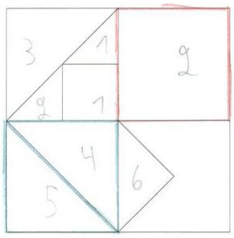


Fig. 12.15

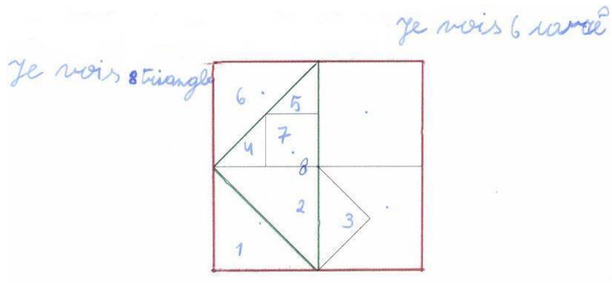


Fig. 12.16

La description qui vient d'être faite des comportements des élèves à cette question nous amène à considérer comme inopportun de les évaluer en termes de réussite ou d'échec. Et cependant, le niveau de perception d'un élève influence fatalement sa réussite aux activités géométriques.

12.3.5 Item 6

Avec cet item, nous retrouvons la « poupée » déjà utilisée lors du pré-test en 2005–2006. Nous renvoyons donc le lecteur à la section 10.3.5 pour ce qui concerne la description des comportements possibles des élèves, et en particulier pour la définition des modes *atomisé*, *local* et *global* de reproduction de la figure, et pour les illustrations correspondantes.

L'examen des copies des élèves de cinquième année fait apparaître des comportements très semblables à ceux qui avaient été rencontrés en sixième. Toutefois la répartition des élèves entre les différents modes de perception est assez différente :

- Mode atomisé : 32%
- Mode local : 55%
- Mode global : 4%

Nous avions aussi rencontré en 2005–2006 un mode de construction mixte dans lequel l'élève utilise des modes différents pour la tête et le corps de la poupée. En cinquième, ce mode est utilisé par 6% des élèves.

Par ailleurs, quelques élèves ne parviennent pas à reproduire la figure et effacent ce qu'ils avaient déjà dessiné.

En ce qui concerne la précision des dessins, on rencontre également les mêmes problèmes qu'en sixième année, mais beaucoup plus fréquemment : 78% des dessins doivent être considérés comme imprécis. Certains élèves essayent de « remplir » le cadre : ils étirent le dessin de façon qu'il parte du bord inférieur et atteigne le bord supérieur. Par contre le phénomène de perturbation dû au décalage en hauteur n'est apparu que chez 16% des élèves.

12.3.6 Item 7

Cette question figurait également dans le pré-test réalisé en 2005–2006 dans des classes de sixième année.

Mentionnons d'abord que 70% des élèves fournissent la bonne réponse. Toutefois, seuls 6% d'entre eux sont en mesure de la justifier correctement. Il est vrai que nous avons été assez stricts dans l'évaluation des justifications, notre objectif n'étant pas d'évaluer les élèves.

D'une façon générale, les élèves ne sont pas en mesure de rédiger une justification claire et complète. 48% produisent une justification partielle mais sans erreur, cependant que 23% d'entre eux produisent une justification erronée.

On constate aussi que 16% des élèves ne fournissent aucune justification et que certains, en guise de justification, se contentent de réaffirmer leur résultat (*Fig. 12.17*). De plus, sur beaucoup de copies la justification écrite ne fournit aucune indication quant à la procédure utilisée pour la comparaison des aires des deux formes (*Fig. 12.18*). Au fait, une justification est-elle bien nécessaire (*Fig. 12.19*) ?

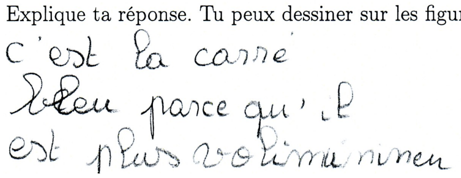

Explique ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.
c'est la carre bleu parce qu'il est plus volimminen

Fig. 12.17

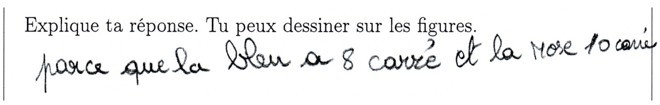

Explique ta réponse. Tu peux dessiner sur les figures.
parce que la bleu a 8 carré et la rose 10 carré

Fig. 12.18

Fig. 12.19

Quand la justification d'un élève n'est pas très élaborée, il faut se rabattre sur les marques apposées sur la figure pour déterminer la démarche de l'élève. Malheureusement, seuls 27% des élèves apposent de telles marques. Il est dès lors difficile d'avoir des renseignements précis quant aux raisonnements utilisés.

Nous arrivons cependant à la conclusion que 55% des élèves utilisent un comptage sans qu'on sache toujours clairement *comment* ils ont compté. (*Fig. 12.22*). La méthode par découpage et recomposition (consistant à rassembler des demi-carrés et des quarts de carrés bleus) est utilisée par 24% des élèves (*Fig. 12.20*). On peut penser qu'elle est très généralement complétée par un comptage, mais cela n'apparaît explicitement que sur environ 15% des feuilles (*Fig. 12.21*).

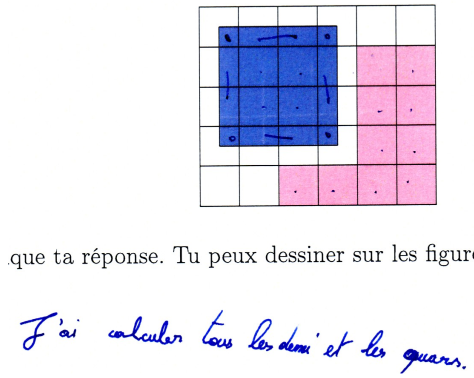


Fig. 12.20

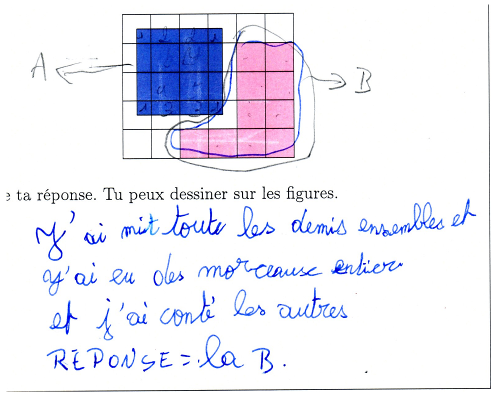


Fig. 12.21

La figure rose a la plus grande aire car
elle a 10 carrés et la bleue en a 9.

Fig. 12.22

Enfin, deux élèves mesurent des longueurs et appliquent une formule en confondant aire et périmètre et un élève utilise une translation (nous avions déjà rencontré cette dernière procédure dans le pré-test réalisé en sixième primaire en 2005–2006, *voir page 362*).

12.4 Des comportements de réussite ou d'échec

Ainsi que nous l'avons fait pour les tests réalisés en 2005–2006, nous avons utilisé l'analyse statistique implicative (*voir l'annexe B.5*) en vue d'étudier en profondeur les résultats du pré-test faisant l'objet de ce chapitre. Commençons par les comportements d'échec.

12.4.1 Les comportements d'échec

Les items 2 et 3 du présent test étant fort semblables aux items 1 et 2 du pré-test réalisé en 2005–2006 en sixième primaire, il n'y a rien d'étonnant à ce que l'on retrouve des comportements d'erreur analogues, en l'occurrence des mesures de longueur et des confusions entre aire et périmètre.

Les autres items sont assez isolés. À l'item 1, on retrouve la confusion entre longueur et aire.

À l'item 4, le mode quantitatif atomisé se révèle être un comportement d'échec, sans doute lié à la difficulté de compter un à la fois un ensemble de 135 petits carrés. On retrouve aussi l'erreur consistant à considérer que le carré vert dessiné cependant en dehors du rectangle bleu peut être pris en compte et qu'il ne reste donc plus à placer que 14 carrés verts (ou 126 petits carrés).

L'item 5 ne met en évidence aucun comportement d'échec particulier. Et cependant, 96 % des élèves fournissent une réponse inappropriée à cet item. On pourrait donc dire que, à part la réponse correcte, et ses composantes, toutes les autres réponses correspondent à des comportements d'échec. Cependant, l'analyse implicative dénie — à juste titre — toute signification à une implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ lorsque quasiment tous les individus testés possèdent la propriété $\mathcal{B}$.

L'item 6 était présent dans le test soumis aux élèves de sixième primaire en 2005–2006. On retrouve cette année comme comportement d'échec le fait de produire un dessin incomplet, mais aussi celui de vouloir « remplir le cadre ». Le problème dû au décalage en hauteur le fait d'utiliser un mode de construction atomisé entraînent la production de dessins imprécis.

Enfin, l'item 7, également présent en 2005–2006, met à nouveau en évidence la confusion entre aire et périmètre.

12.4.2 Des comportements de réussite

L'item 1 ne permet de dégager aucun comportement qui soit clairement associé à une réussite. Aux items 2 et 3, on voit apparaître, comme c'était le cas pour les items 1 et 2 du pré-test de 2005–2006, les comportements liés à l'apposition de marque sur les figures, ainsi que le fait d'effectuer une multiplication ou de dénombrer les (petits) carrés. La méthode de découpage et recomposition n'est pas classée parmi les comportements de réussite comme elle l'était pour les élèves de sixième. Une variante de cette méthode apparaît cependant à l'item 3 : le raisonnement par complémentarité.

À l'item 4, le principal comportement de réussite est le *mode quantitatif global* : l'élève trace les quinze carrés verts à l'intérieur du rectangle bleu et les dénombre.

À l'item 5, nous avons déjà indiqué que seule la réponse correcte peut être considérée comme un comportement de réussite. Elle n'est le fait que de quelques élèves.

L'item 6 est le dessin de la poupée déjà rencontrée lors du pré-test de sixième primaire. À cette occasion, nous avions constaté l'importance du mode de perception et de reproduction *global*, caractérisé par le fait que les côtés de la poupée étaient alignés avec les graduations du cadre. Pour les élèves de cinquième, le mode global est encore un comportement de réussite, mais il est moins important que le fait de tenir compte des graduations du cadre. Le mode *mixte* apparaît aussi parmi les comportements de réussite, mais pas le mode *local*.

Enfin, à l'item 7 (le plus difficile du test), les démarches qui amènent à la réussite sont, comme c'était le cas en sixième primaire, le découpage et la recomposition (éventuellement implicites) suivis d'un dénombrement, ainsi que l'apposition de marques sur la figure.

Nous avons également retenu certains comportements qui, ensemble, nous semblent avoir une influence sur la réussite globale au test. Ces comportements portent sur différentes facettes de l'activité demandée aux élèves. Ils ont souvent un taux d'utilisation faible, ce qui signifie qu'ils sont difficiles à acquérir. Il n'est donc pas étonnant que les élèves qui les utilisent ont tendance à avoir d'autres comportements de réussite qui recouvrent plusieurs items du test. Ces comportements sont les suivants :

– Usage d'une multiplication à l'item 2.
– Nombre de carrés exact à l'item 5.
– Nombre de triangles exact à l'item 5.
– Prise en compte des graduations des côtés du cadre l'item 6.
– Justification correcte à l'item 7.

12.5 Une comparaison cinquième-sixième

Plusieurs items du test de cinquième année (2006–2007) étaient fort semblables (même identiques) à des items du test de sixième année (2005–2006). Ceci nous permet quelques comparaisons.

Items 1 et 2 de sixième (pré-test et post-test) comparés aux items 2 et 3 de cinquième (pré-test)

Certains comportements de réussite à ces deux items sont les mêmes : dénombrement, apposition de marques sur les figures. En sixième année, la méthode par découpage et recomposition est plus utilisée qu'en cinquième et devient également un comportement de réussite.

Des comportements d'échec sont (presque) spécifiques à la cinquième année : le comptage de points et la confusion entre aire et forme. (Ce dernier a encore été relevé une fois en sixième.)

On voit ainsi apparaître des stades différents du concept d'aire dans un ordre chronologique : d'abord un stade purement visuel, marqué par la confusion entre aire et forme, puis un stade pré-quantitatif associé au comptage des points. Viennent ensuite un stade quantitatif-atomisé (comptage de petits carrés) et enfin un stade quantitatif-global nécessitant la perception des possibilités de découpage et assemblage.

Item 3 de sixième (pré-test et post-test) comparé à l'item 4 de cinquième (pré-test)

Les méthodes principalement utilisées pour cet item sont un mode quantitatif-atomisé (comptage de petits carrés ou triangles), un mode quantitatif-global (comptage de grands carrés ou parallélogrammes) et un mode numérique (multiplication).

Le mode-quantitatif atomisé n'est pas un comportement de réussite, ni en sixième, ni en cinquième. Sa fréquence d'utilisation diminue quand on passe de cinquième en sixième. Le mode quantitatif-global est le seul comportement réellement efficace pour ces items et est employé par plus de 80 % des élèves en sixième.

Item 5 de sixième (pré-test) comparé à l'item 6 de cinquième (pré-test)

Ce dessin à reproduire peut aussi être réalisé en modes atomisé, local ou global, ce dernier étant le plus efficace (dessins plus soignés, plus précis, plus complets). Il est aussi nettement plus fréquent en sixième qu'en cinquième.

Item 6 de sixième (pré-test) comparé à l'item 7 de cinquième (pré-test)

Pour ces items, le principal comportement de réussite est un comptage associé à des puzzles locaux : des carrés sont reconstitués à partir de fractions de carrés. C'est ce que nous avons appelé des comptages ou des découpages-recompositions implicites. Cette technique est utilisée de façon équivalente en cinquième et en sixième.

Cependant on voit se développer en sixième année des démarches différentes. La démarche numérique (emploi de formules) n'est pas une démarche de réussite dans ce contexte. Elle trahit souvent des confusions soit de concepts, soit de formules. Par contre, le pré-test de sixième primaire révèle une démarche globale tout-à-fait intéressante et fructueuse : une comparaison d'aires par translation « mentale ».

En conclusion

L'évolution conceptuelle se déroule clairement d'un stade « atomisé », vers un stade « global ». Les exercices proposés ne nécessitaient pas l'usage de formules, ce qui rend difficile l'insertion de cet élément dans la progression qui vient d'être indiquée. Les élèves ayant été tentés par l'application d'une formule sont probablement ceux dont la conceptualisation était insuffisante, ce qui a généralement entraîné un usage maladroit de la dite formule.

12.6 La population testée est-elle initialement homogène ?

Comme en 2005–2006, nous nous sommes préoccupés de savoir si la population d'élèves impliqués dans l'expérimentation était homogène. On ne peut en effet comparer valablement les résultats des groupes témoin et expérimental sans disposer de cette information.

Commençons par comparer les fréquences de réussite aux questions posées dans le test.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5 Carrés	Item 5 Triangles	Item 6	Item 7
Gr. Témoin	27 %	71 %	79 %	80 %	23 %	9 %	66 %	79 %
Gr. expé.	15 %	40 %	70 %	70 %	15 %	3 %	55 %	64 %
χ^2	2,65	11,9	1,12	1,69	1,38	4,29	1,5	3,05

Nous nous retrouvons dans la même situation qu'en 2005–2006 : les résultats du groupe expérimental semblent être inférieurs à ceux du groupe témoin. Plus encore que l'écart entre les taux de réussite des deux groupes à chaque item particulier, c'est le fait que cet écart va toujours dans le même sens qui est impressionnant.

Mais la dernière ligne du tableau nous oblige à nuancer notre appréciation. On y trouve en effet les valeurs des variables χ^2 associées à chaque colonne. Le test d'indépendance dit « du χ^2 » permet d'évaluer si une différence de deux pourcentages est significativement différente de 0. Un seuil de signification est à choisir. Conformément aux usages, nous avons choisi le seuil 0,95. La valeur critique correspondante (pour une variable χ^2 à un degré de liberté, ce qui est le cas ici) est de 3,841. Autrement dit, nous n'accepterons de dire que les taux de réussite du groupe témoin et du groupe expérimental sont différentes que si la valeur du χ^2 est supérieure à 3,841 (et si c'est le cas, nous avons encore 5 « chances » sur 100 de nous tromper).

Moyennant cette approche statistique, nous ne trouvons que deux différences significatives dans le tableau précédent : la réussite à l'item 2, et la réponse correcte concernant le nombre de triangles à l'item 5.

Comparons ensuite les résultats des deux groupes aux trois items mentionnés à la fin du paragraphe précédent qui ne sont pas déjà repris ci-dessus.

	Multiplication à l'item 2	Graduations des cotés du cadre à l'item 6	Justification à l'item 7
Gr. Témoin	11 %	41 %	13 %
Gr. expé.	7 %	16 %	1 %
χ^2	0,396	9,27	6,08

On voit que les deux dernières colonnes donnent lieu à des différences significatives.

Nous pouvons étendre notre recherche à l'ensemble des comportements de réussite mentionnés à l'annexe B.5. Nous obtenons les conclusions suivantes :

Les élèves du groupe témoin ont des taux significativement plus élevés que ceux du groupe expérimental aux comportements de réussite suivants :

- Item 2
  - Réponse correcte.
  - Comptage de petits carrés.
  - Apposition de marques pertinentes.
- Item 3
  - Justification partielle mais correcte.
  - Comptage de petits carrés.
  - Apposition de marques pertinentes.
- Item 4
  - Dessin des quinze carrés verts dans le rectangle bleu.
  - Démarche de comptage.
  - Mode quantitatif global.
- Item 5
  - Dessin du plus grand carré.
  - Dessin du plus grand triangle.
  - Réponse entre (2,6) et (6,8).
- Item 6
  - Prise en compte des graduations du cadre.
- Item 7
  - Utilisation (même implicite) d'un découpage et d'une recomposition.
  - Utilisation (même implicite) d'un comptage.
  - Apposition de marques pertinentes.

Ces différences significatives concernent donc essentiellement des démarches de dénombrement, d'apposition de marques, de découpage et recompositon (item 7) ainsi que des comportements liés à la perception : dessin du plus grand carré et du plus grand triangle à l'item 5, mode global de construction et prise en compte des graduations du cadre à l'item 6.

Ainsi, nous trouvons un nombre important de comportements de réussite pour lesquels les élèves du groupe témoin ont au pré-test un comportement significativement plus performant que ceux du groupe expérimental.

Chapitre 13

Un post-test en cinquième primaire (2006–2007).

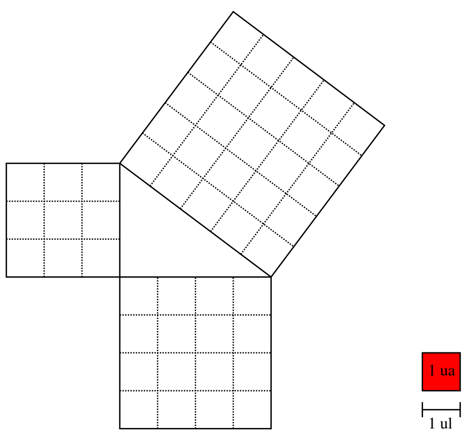
13.1 Les énoncés

Le post-test comprend cinq items. Les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Il a été réalisé dans les mêmes classes que le pré-test. Comme pour celui-ci, nous n'avons pas tenu compte des résultats des élèves de sixième qui figuraient dans deux des classes. Par le jeu des absences, le nombre d'élèves a été ramené à 123, dont 67 élèves du groupe expérimental, et 56 du groupe témoin.

Les figures suivantes ne reproduisent pas en vraie grandeur les fiches soumises aux élèves.

– Item 1

Défi 1 – Le petit carré rouge est l'unité d'aire (1 ua) et son côté est l'unité de longueur (1 ul).



1) Que vaut le périmètre du triangle ? Explique comment tu l'as trouvé.
2) Que vaut l'aire du triangle ? Explique comment tu l'as trouvée.

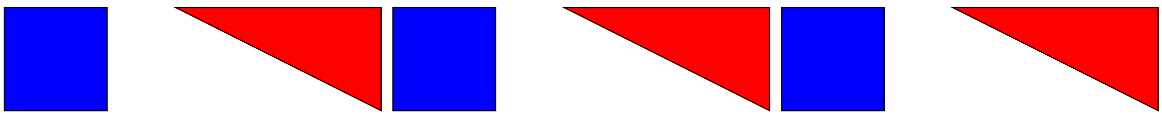
– Item 2

Défi 2 – Tu disposes de 3 carrés bleus et de 3 triangles rouges, dans une enveloppe à ton nom.

L'aire du carré est-elle plus grande que celle du triangle, est-elle plus petite, ou sont-elles égales ?
Pour le voir tu peux assembler, découper ou tracer sur les figures.
Fais une croix dans la bonne case.
Explique comment tu l'as vu, et colle ci-dessous les figures utilisées pour t'aider à expliquer. Quand tu auras fini remets dans l'enveloppe les figures que tu n'as pas utilisées.

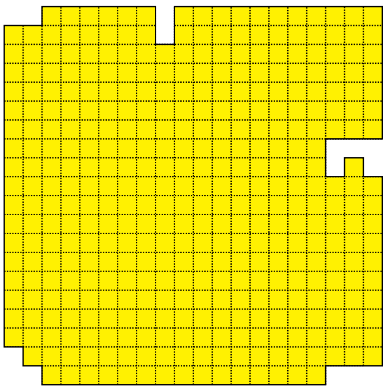
L'aire du carré est plus grande que celle du triangle.	☐
L'aire du carré est plus petite que celle du triangle.	☐
Les aires sont égales.	☐

Les triangles et les carrés présents dans l'enveloppe :



– Item 3

Défi 3 – Combien y a-t-il de petits carrés dans la figure jaune ?

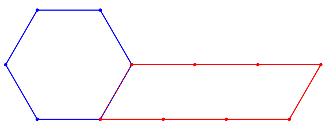


Explique comment tu as procédé.

– Item 4

Défi 4 – Compare les aires des deux figures ci-dessous.

Tu peux tracer sur les figures.
Fais une croix dans la bonne case.

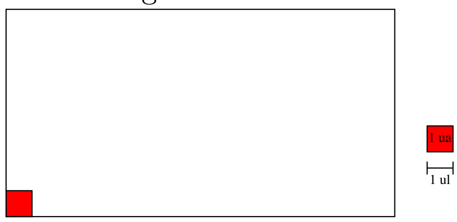


L'aire de la figure bleue est plus grande que celle de la figure rouge.	☐
L'aire de la figure bleue est plus petite que celle de la figure rouge.	☐
Les aires sont égales.	☐

Explique comment tu as procédé.

– Item 5

Défi 5 – Le petit carré rouge est l'unité d'aire (1 ua) et son côté est l'unité de longueur (1 ul).
On peut mettre 15 petits carrés sur la longueur du grand rectangle, ou 8 petits carrés sur sa largeur.



1. Que vaut le périmètre du rectangle ?
   Explique comment tu l'as trouvé.
2. Que vaut l'aire du rectangle ?
   Explique comment tu l'as trouvée.

13.2 Analyse des items

13.2.1 Item 1

Concernant le périmètre

Cet item utilisait une unité de longueur, notée « ul » différente de l'unité conventionnelle, c'est-à-dire le cm. Mais la différence (0,95 cm au lieu de 1 cm) était tellement faible que rares sont les élèves qui s'en sont rendu compte (*Fig. 13.2*). Nous avons donc considéré lors du dépouillement du questionnaire que pour cet item, il y avait équivalence entre les deux unités. (Plus loin, nous rencontrerons l'item 5 où ce point de vue ne pouvait plus être adopté.) Pour le périmètre du triangle nous avons donc accepté aussi bien la réponse 12 cm (*Fig. 13.1*) que la réponse 12 ul, et nous avons procédé de même en ce qui concerne l'aire. Bien entendu, nous avons également accepté les réponses proches de 11,4 cm, obtenues en mesurant à la latte, et avec plus ou moins de précision, les longueurs des trois côtés du triangle.

Fig. 13.1

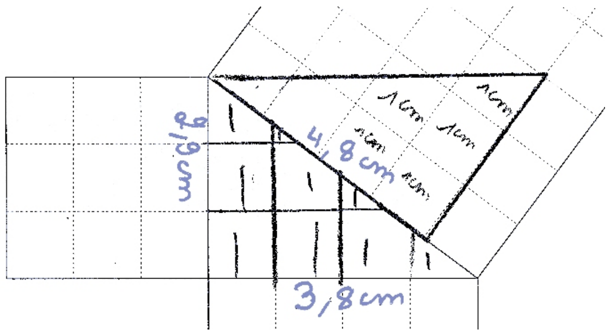


Fig. 13.2

Cela étant, 79% des élèves ont additionné les mesures des côtés, et prouvent ainsi leur compétence en ce qui concerne le calcul d'un périmètre dans le contexte donné.

Dans le cas présent, on ne peut néanmoins pas mettre sur le même pied l'élève qui voit directement que les longueurs des côtés (en ul) valent 3, 4 et 5 et celui qui prend sa latte pour mesurer les côtés, même si ses mesures sont précises.

En examinant les copies, nous constatons que 30% des élèves ont utilisé cette dernière procédure, ce qui fait apparaître dans la population étudiée non deux groupes d'élèves, mais trois : ceux qui fournissent une réponse incorrecte ou pas de réponse du tout (20%), ceux qui trouvent une réponse acceptable en mesurant (30%) et « les autres » (50 %), dont certains explicitent leur méthode, mais pas tous.

Parmi les réponses inacceptables, on trouve l'emploi de formules inexactes ou des justifications incorrectes. Certains ont multiplié des longueurs (éventuellement multipliées par 2) et confondent probablement périmètre et aire (*Fig. 13.3*), ou même volume (*Fig. 13.4*).

Voici la justification d'un élève qui proposait 60 comme périmètre :

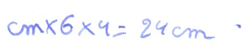


Fig. 13.3

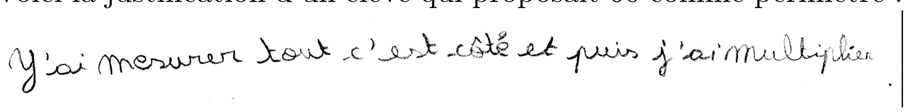


Fig. 13.4

Trois élèves ne donnent pas de réponse numérique, mais fournissent une justification incorrecte (*Fig. 13.5*).

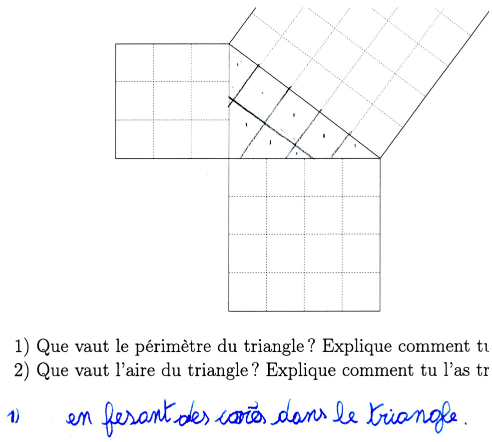


Fig. 13.5

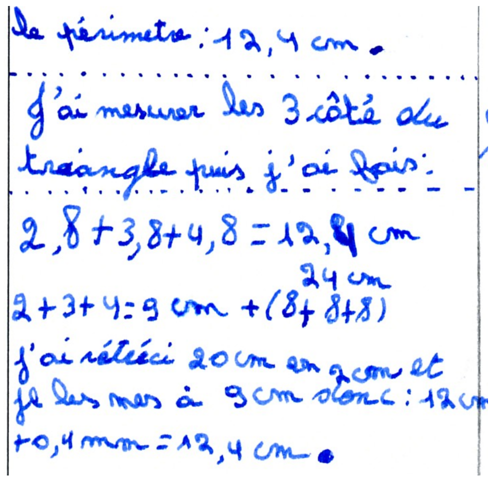


Fig. 13.6

Voici une justification (*Fig. 13.6*) dont on pourrait argumenter qu'elle ne comporte qu'une erreur de calcul. Ajoutons quand même que son auteur a plus de problèmes avec l'arithmétique et la langue maternelle qu'avec le calcul du périmètre.

Il existe aussi des justifications dont on ne peut affirmer qu'elles soient rédigées en bon français, mais qui sont correctes et claires :

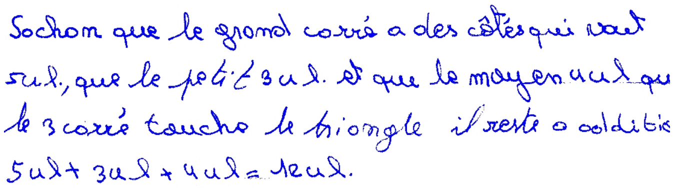

Sachant que le grand carré a des côtés qui vaut
5ul., que le petit 3ul. et que le moyen 4ul qu
le 3 carré touche le triangle il reste a additio
5ul+ 3ul + 4ul = 12ul.

Fig. 13.7

Concernant l'aire

Nous retrouvons la même confusion entre l'unité d'aire donnée et le centimètre carré. Aussi avons-nous considéré comme équivalentes les réponses 6 centimètres carrés et 6 u.a.

Le tableau suivant indique les fréquences des démarches les plus importantes :

	Réussite	Bonne réponse	Quadrillage	Construction d'un rectangle	Formule triangle
Pourcentage	47%	58%	52%	9%	7%

Par « réussite », il faut entendre « Réponse exacte assortie d'une justification (considérée comme) correcte ». La différence entre les deux pourcentages (11%) indique donc la fréquence des réponses correctes mais sans justification ou avec une justification insuffisante.

Quant aux autres colonnes :

- 52% des 123 élèves ont utilisé un quadrillage du triangle (*Fig. 13.8*), et ont ensuite essayé de recomposer des carrés unités. 35% (des 123 élèves) ont ainsi produit une réponse correcte. Ce taux descend à 32% si on tient compte de la correction de la justification.

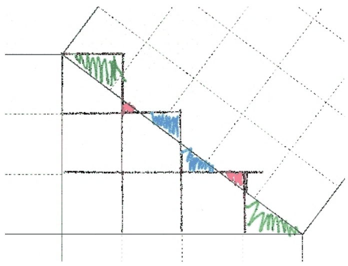
  

  Fig. 13.8

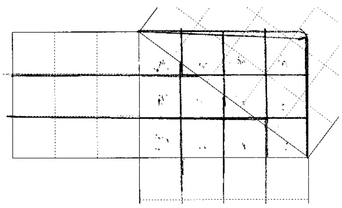
  

  Fig. 13.9

  C'est donc la méthode du quadrillage du triangle qui a été privilégiée, ce qui revient à dire que la moitié des élèves sont au stade qui a été qualifié de « quantitatif » aux chapitres 5 et 6. Cette méthode est cependant approximative et dans le cas présent difficile à mettre en œuvre : il n'est pas évident de reconstituer des carrés entiers. Elle ne conduit donc pas nécessairement à la bonne valeur.

- Quatorze élèves (9%) ont complété le triangle en un rectangle et ont calculé l'aire de celui-ci (*Fig. 13.9*). Treize d'entre eux ont alors obtenu l'aire du triangle en divisant par 2.

  Ces élèves ont une perception qui leur permet de *sortir du triangle* et de le compléter en un rectangle. De cette façon, ils n'ont aucun besoin d'une formule de calcul pour l'aire du triangle rectangle, celle du rectangle leur suffit. Et la formule de l'aire du rectangle est à peine une *formule* : elle repose entièrement sur la visualisation d'un quadrillage.

- Douze élèves (10%) ont essayé d'utiliser directement la formule d'aire du triangle, mais seulement quatre y sont parvenus.

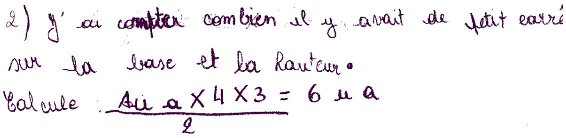

2) j'ai compter combien il y avait de petit carré
sur la base et la hauteur.
Calcule : $\frac{\text{Aii a} \times 4 \times 3}{2} = 6$ u a

Fig. 13.10

L'utilisation directe de la formule d'aire pour le triangle est liée au fait de l'avoir déjà rencontrée ou non. Mais cela ne suffit pas : la construction de cette formule (et donc sa compréhension et sa mémorisation) repose sur la perception d'un triangle comme étant un demi-parallélogramme. Dans le cas présent, le triangle étant rectangle, le parallélogramme est lui-même un rectangle. Dans ce cas, comme on vient de le remarquer, quand cette perception est acquise, la formule n'est plus nécessaire.

Certaines réponses révèlent soit une mauvaise perception (*Fig. 13.13* : l'élève remplace le triangle donné par un autre qui ne lui est pas superposable), soit une grande incompréhension à laquelle on supplée en faisant appel à la mémoire, pas toujours sûre (*Fig. 13.11* et *Fig. 13.12*).

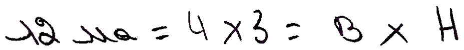

12 ua = 4 × 3 = B × H

Fig. 13.11

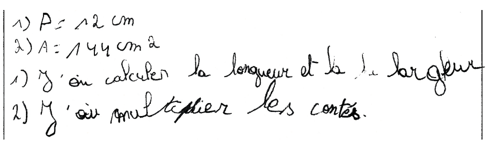

1) P = 12 cm
2) A = 144 cm 2
1) J'ai calculer la longueur et la la largeur
2) J'ai multiplier les contés.

Fig. 13.12

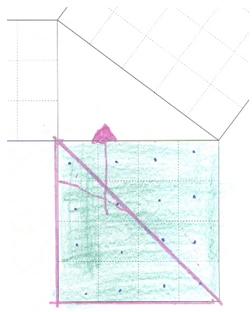


Fig. 13.13

Certaines réponses suggèrent que la perception de l'auteur est en train d'évoluer. Par exemple (*Fig. 13.14*), il « sort » du triangle en le complétant en un carré qui ne le satisfait pas. Il ne voit pas le rectangle qui conviendrait et se rabat sur le comptage de carrés.

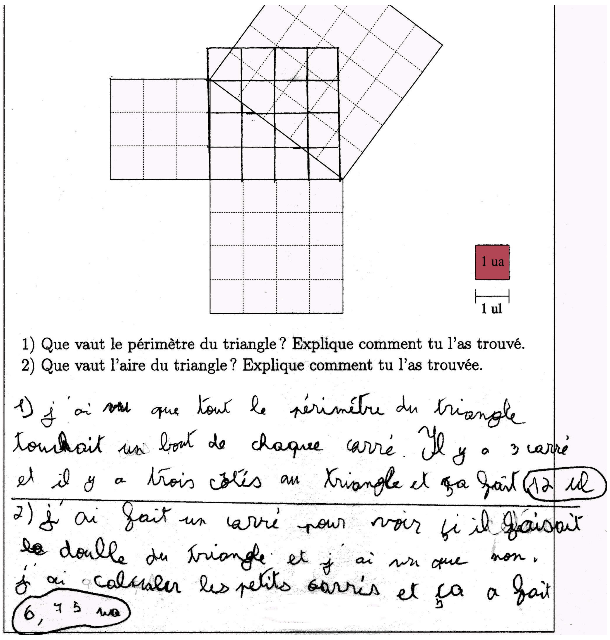


Fig. 13.14

13.2.2 Item 2

Le tableau suivant résume les constatations générales relatives à cet item :

	Bonne réponse	Réponse erronée	Multiplication d'aires	Découpage	Autres méthodes
Total	92%	7,3%	5,7%	86,2%	8,1%

Sur les cent vingt-et-un élèves (98,4%) qui répondent à l'item 2, plus de nonante pour cent (92%) conviennent que les aires du carré et du triangle sont égales.

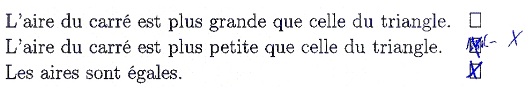


Fig. 13.15

À titre anecdotique, mentionnons un élève qui semble avoir donné deux réponses (dont la bonne). Il est possible qu'il se soit d'abord trompé et n'ait pu ensuite « gommer » son erreur.

Dans la catégorie « réponses erronées » la réponse « plus petite » est plus fréquente que la réponse « plus grande » (5,7 % contre 1,6%).

L'analyse des justifications des élèves montre que le mode qualitatif (ou mode puzzle) est, de loin, le plus utilisé. Comme les élèves disposaient de formes prédécoupées, assez naturellement la première opération en vue de comparer leurs aires est de superposer un carré et un triangle, appliquant ainsi le *principe de l'égalité par superposition* rappelé à la section 5.3.1.

Une grande majorité d'entre eux (86,2%) procèdent par découpage d'un triangle en vue d'une recomposition en un carré (72,4%). Les autres (13,8%) adoptent la méthode inverse : ils découpent un carré et recomposent un triangle. Cette répartition semblerait indiquer que, lors de la superposition du carré et du triangle donnés, le débordement du triangle par rapport au carré est plus prégnant que le débordement du carré par rapport au triangle.

Dans les deux cas, le découpage se réalise surtout physiquement. Mais, selon la figure découpée, entre 10% et 20% des élèves opèrent le découpage mentalement (tout en laissant souvent des traces physiques : trait de découpe et flèches).

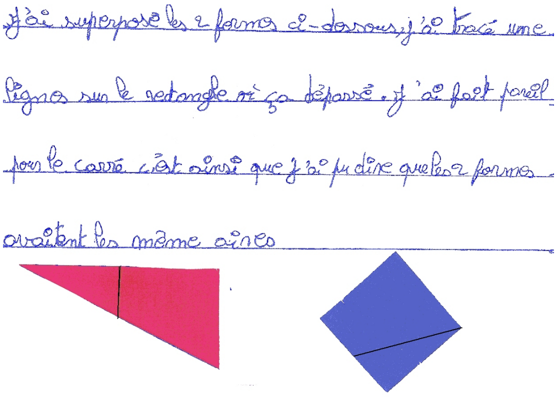


Fig. 13.16

Un élève a effectué les deux procédés, l'un à la suite de l'autre en commençant par le triangle, par *superposition* des formes entre elles. La comparaison des morceaux qui dépassaient, délimités par un trait sur chaque figure, lui a permis de constater l'équivalence des deux aires.

Quelques élèves (5,7%) procèdent par multiplication d'une aire par un naturel (*voir la section 5.4.1*) : ils juxtaposent deux carrés et deux triangles et obtiennent deux rectangles en les fusionnant. Ils comparent alors les aires de ces rectangles par *superposition* et découvrent ainsi leur égalité :

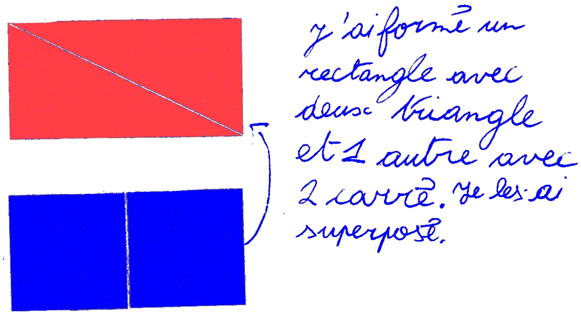


Fig. 13.17

Même si ces élèves restent à un niveau purement qualitatif, leur démarche tend vers une certaine quantification de l'aire. En effet, l'aire de la fusion de deux mêmes formes en une nouvelle est obtenue par additions répétées des aires de la forme de base, ce qui peut être regardé comme la multiplication de l'aire de cette forme de base par un nombre naturel, qui agit comme un opérateur multiplicatif (*voir le chapitre 5*).

C'est ce qu'un élève a l'air d'avoir fait mentalement en référence à la mesure d'une base et d'une hauteur du carré et du triangle :

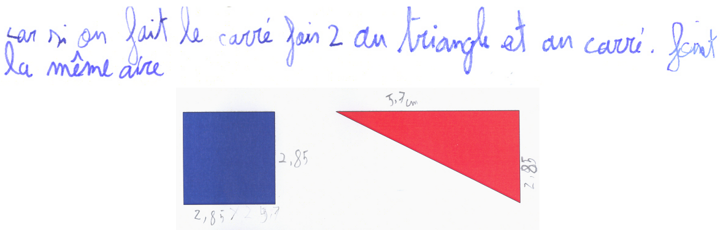


Fig. 13.18

Dans cette voie vers une quantification, il semble que chez l'un ou l'autre élève la détermination de mesures se soit substituée à la *superposition* comme outil de vérification (validation) de l'égalité des aires :

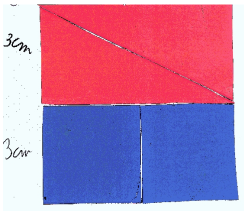


Fig. 13.19

Sur cette copie, l'élève a juxtaposé les deux rectangles selon leur plus grande dimension et mesuré leurs largeurs. Il se base ainsi, pour la largeur, sur une comparaison numérique et, pour la longueur, sur une comparaison qualitative.

D'autres élèves ont aussi réalisé des mesures qui justifient le procédé de superposition et précèdent le découpage :

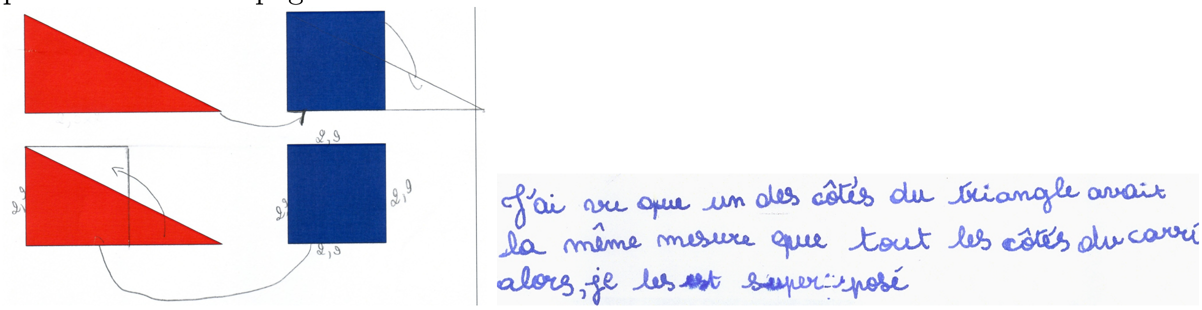


Fig. 13.20 Un examen attentif de la feuille montre que l'élève a inscrit $2,9 \times 2$ sous le triangle supérieur, puis l'a gommé. Cette marque a disparu à la reproduction.

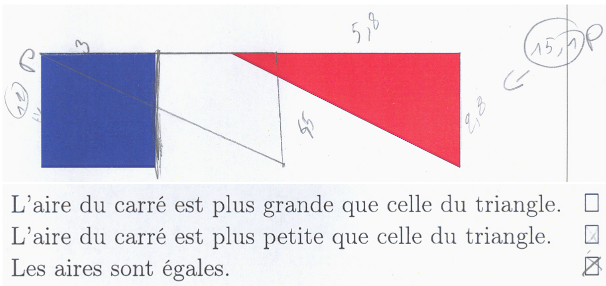


Fig. 13.21

Deux élèves ont mesuré un périmètre. Dans l'exemple ci-contre, cette mesure a interféré, dans un premier temps, avec la réponse (trace d'effacement d'une croix). Mais, en fin de compte, la réponse correcte a été cochée, entre autres par l'utilisation d'une autre méthode.

À côté du mode qualitatif de raisonnement, dominant dans cet item, nous avons repéré la présence du mode numérique. Celui-ci se résume à l'application de formules d'aire. La comparaison des résultats amène à reconnaître l'égalité des aires.

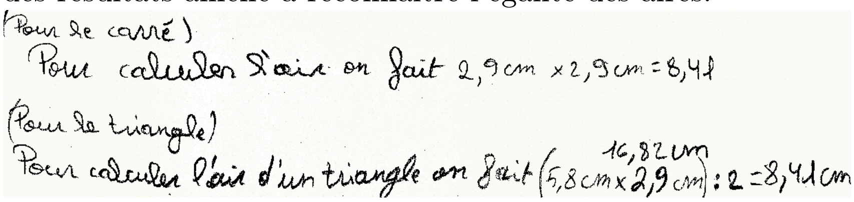


Fig. 13.22

Par contre, comme aucun élève n'a quadrillé les figures, le comptage de carrés, ou mode quantitatif, n'est pas apparu dans les raisonnements de l'item 2. Ceci peut être dû au fait qu'aucun quadrillage n'est dessiné sur les figures de départ.

13.2.3 Item 3

Cette question avait pour premier objectif de tester la persistance de comportements de type *quantitatif atomisé*, se manifestant dans le cas présent par le comptage de tous les petits carrés jaunes, un à la fois.

Cette démarche a effectivement été choisie par un nombre non négligeable d'élèves : 18 sur 123, soit 14,6 % (*Fig. 13.23*). Seuls 5 d'entre eux (4 %) arrivent à trouver la réponse correcte de cette façon.

Fig. 13.23

La démarche la plus fréquente (63 élèves sur 123, soit 51 %) est de type *global* : il s'agit de « recomposer » le grand carré, de calculer combien il contient de petits carrés, puis de déduire le nombre de petits carrés manquants. Cinquante-sept élèves vont au bout du processus, avec éventuellement des erreurs de calcul, dans le comptage des carrés blancs (6 sur 63) ou dans le calcul numérique (9 sur 63). Cela donne 42 réponses correctes

Une troisième démarche peut être qualifiée de *locale* (*Fig. 13.24*) : le travail de dénombrement a été effectué par blocs en décomposant la figure en carrés ou rectangles dont l'aire était calculée par la formule classique « côté × côté ». Il restait ensuite à compter et ajouter les petits carrés composant les figures restantes. Trente élèves (24,4 %) ont procédé de la sorte.

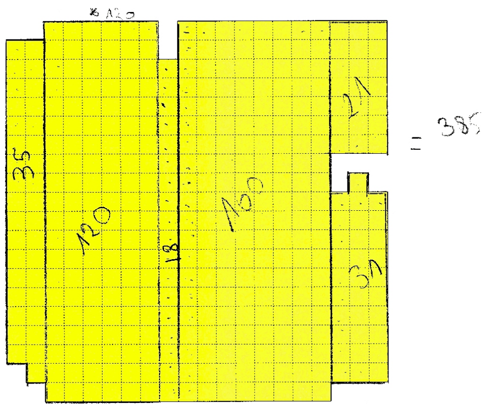


Fig. 13.24

Cela donne 13 réponses correctes. Ce comportement suppose déjà d'apercevoir des structures dans la figure.

Onze élèves ont utilisé des méthodes diverses, ce qui a fourni trois réponses correctes supplémentaires. Quelques-uns ont mesuré à la latte (*Fig. 13.25*). Trois élèves ont travaillé par puzzle, en déplaçant des petits carrés jaunes pour combler les trous. Un d'entre-eux a obtenu la réponse correcte. Ce comportement nécessite aussi une vision globale.

Au total, 63 des 123 élèves ont trouvé la réponse correcte.

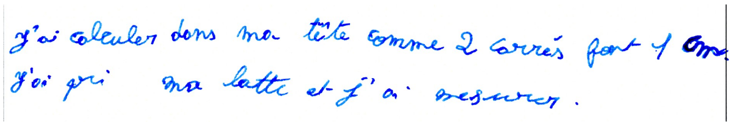


Fig. 13.25

13.2.4 Item 4

Le tableau suivant résume les constatations générales relatives à cet item :

Bonne réponse	Réponse erronée	Pas de découpe	Comptage	Appariement	Mesures
59%	41%	20%	39%	17,1%	13%

Notons d'abord que 121 élèves sur 123 répondent à cette question, ce qui montre qu'elle ne surprend pas. Notons aussi que deux d'entre eux se contredisent eux-mêmes en cochant deux cases au lieu d'une. Pour l'un des deux on peut penser qu'une des deux réponses fournies se rapporte à une question qui n'était pas posée : la comparaison des périmètres.

Si quasiment tous les élèves fournissent une réponse, seuls 59 % d'entre eux fournissent la réponse correcte. L'affirmation que la figure bleue (l'hexagone) est plus grande que la rouge (le parallélogramme) est sélectionnée par 30 % des élèves, l'affirmation opposée par 11%. Le plus grand « succès » de l'hexagone est peut-être due à un phénomène de perception : le parallélogramme plus allongé et moins haut est *a priori* plus petit.

Certains élèves ont mesuré des longueurs, d'autres ont compté des points ou des segments des figures à comparer. Ils n'avaient alors aucun besoin de découper les figures d'une quelconque façon. D'autres affirment avoir procédé par superposition et l'absence de découpage est alors plus étonnante, d'autant plus que cette superposition a l'air d'avoir été opérée mentalement.

Pour analyser les raisonnements des élèves, nous séparerons ceux-ci en deux groupes selon qu'ils se basent sur des découpages ou non.

• La première catégorie est constituée de vingt-cinq élèves (20,3%) dont les feuilles ne comportent aucune trace ni aucune mention de découpage.

– Cinq d'entre eux fournissent la réponse correcte, sans l'accompagner d'une quelconque explication. Nous ne pouvons exclure que, mentalement, ils aient quand même procédé par découpage.
– Trois autres élèves ne fournissent aucune explication mais considèrent tous les trois l'hexagone comme plus petit. Peut-être ont-ils mentalement comparé les périmètres.
– Six comparent explicitement les périmètres et concluent explicitement que l'hexagone est plus petit. Notons quand même que l'un d'entre eux figure parmi ceux qui ont fourni deux réponses contradictoires, dont la réponse correcte.
– Deux ont procédé par superposition de segments ou de figures (*Fig. 13.28*).
– Six ont compté des points ou des segments.
– Enfin, quatre ont fait d'autres mesures (*Fig. 13.27*).

Un seul des élèves repris dans les trois derniers groupes produit une réponse correcte (*Fig. 13.26*)

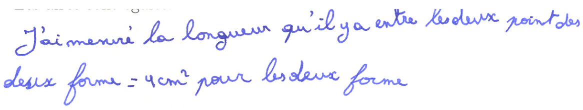


Fig. 13.26

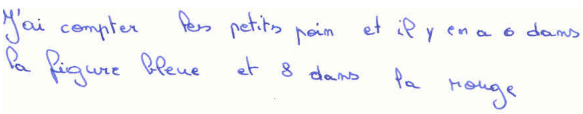


Fig. 13.27

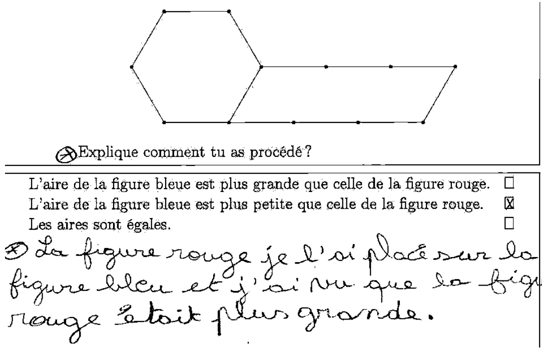


Fig. 13.28

• Considérons ensuite la seconde catégorie d'élèves : ceux qui ont procédé par découpage. Ils sont au nombre de 98 (79,7%) et se répartissent en plusieurs sous-catégories selon le type de découpage.

– Quarante-quatre ont dessiné des triangles équilatéraux. Certains ont compté ces triangles (parfois en les « pointant »).

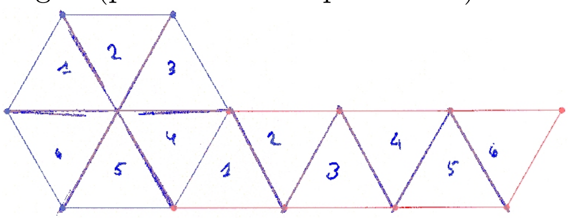


Fig. 13.29

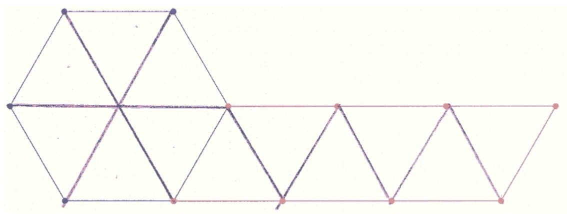


Fig. 13.30

– Trente ont dessiné des parallélogrammes. Sept d'entre eux ont alors compté les parallélogrammes (*Fig. 13.31*) ; sept autres ont procédé par appariement (*Fig. 13.32*, *Fig. 13.33*) ; les autres n'explicitent pas nécessairement leur démarche finale (*Fig. 13.34*).

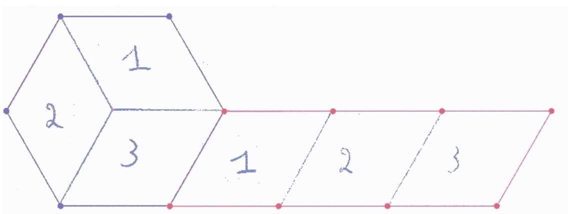


Fig. 13.31

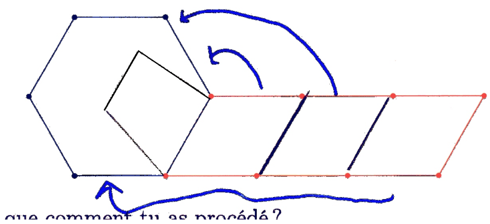


Fig. 13.32

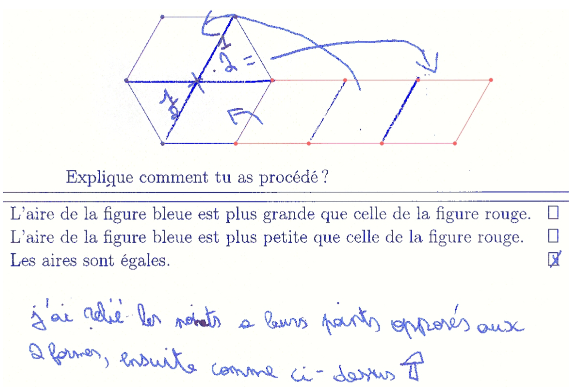


Fig. 13.33

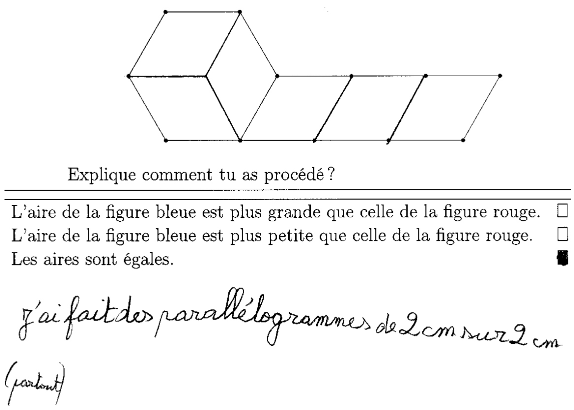


Fig. 13.34

– Dix-neuf élèves dessinent des trapèzes, de différentes façons : par une grande diagonale dans l'hexagone (huit élèves), par une oblique dans le parallélogramme (trois élèves) ou les deux à la fois (six élèves). Les explications sont variables.

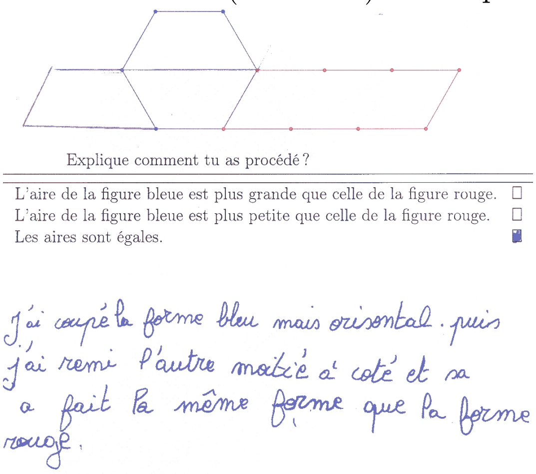


Fig. 13.35

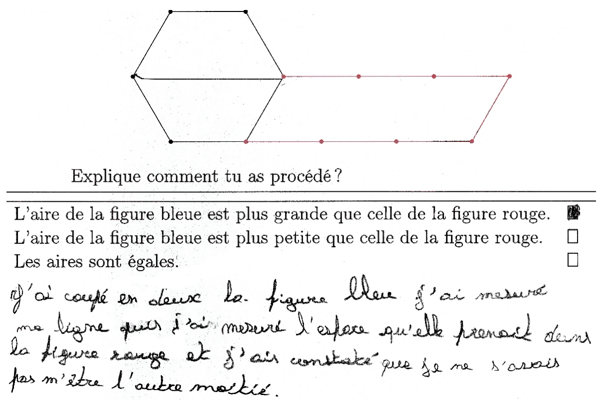


Fig. 13.36

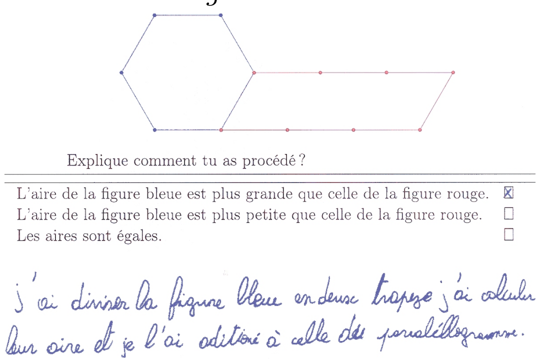


Fig. 13.37

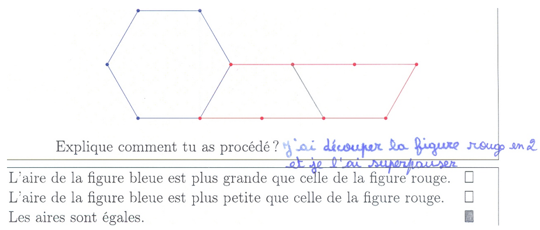


Fig. 13.38

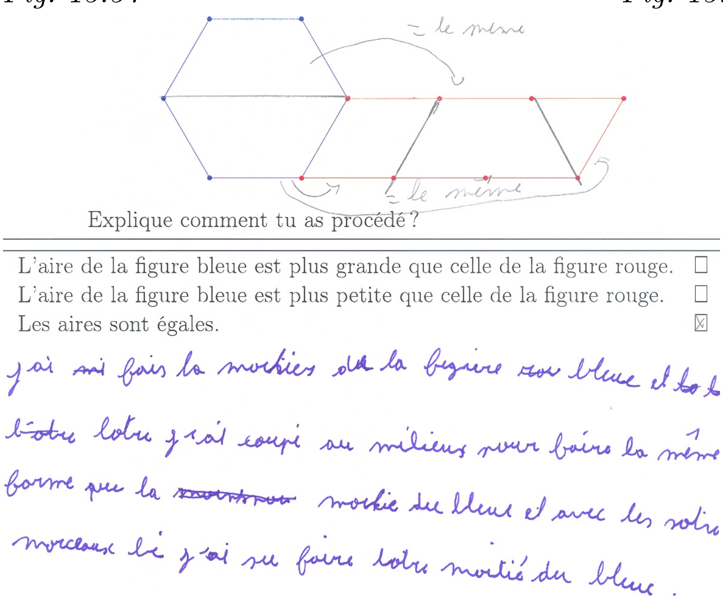


Fig. 13.39

– Enfin vingt-neuf élèves ont inventé d'autres types de découpes, comme le montrent les figures suivantes. Certaines peuvent être interprétées comme des exemples incomplets

d'un des types précédents.
Il arrive aussi fréquemment que sur une même figurent soient dessinés à la fois des triangles et des parallélogrammes ou de trapèzes... Les élèves concernés sont alors compté plusieurs fois ci-dessus.
Quelques-uns quadrillent mais de manière approximative et pas toujours avec uniquement des carrés (*Fig.* *13.40*). Certains apparient (*Fig.* *13.41*). D'autres mesurent (*Fig.* *13.42*). Pour d'autres encore, le procédé n'apparaît pas (*Fig.* *13.43*).

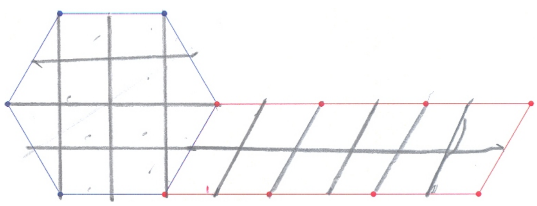


Fig. 13.40

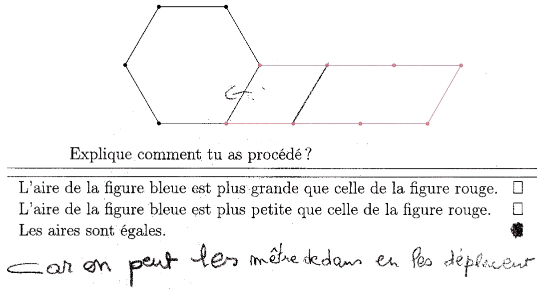


Fig. 13.41

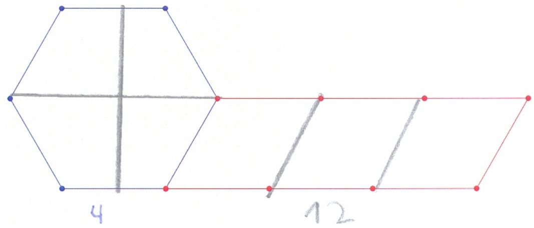


Fig. 13.42

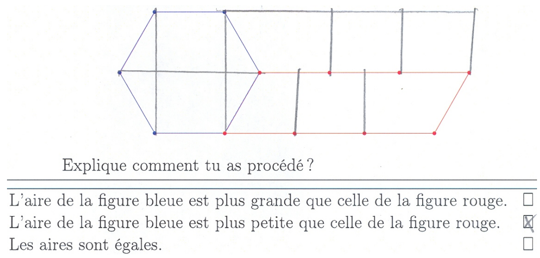


Fig. 13.43

Trois grandes méthodes de résolution

Le comptage est le procédé utilisé par le plus grand nombre d'élèves (39%). Ce comptage, comme nous l'avons vu, ne s'applique pas uniquement aux figures à deux dimensions, mais aussi à des points ou des segments. En terme de mode de raisonnement, il s'agit du mode quantitatif.

L'appariement constitue un deuxième procédé qu'une partie des élèves (17,1%) emploient. Il concerne presque exclusivement des figures à deux dimensions mais rarement des points ou des segments. Cette méthode peut être classée dans le mode qualitatif de raisonnement.

La troisième méthode (13%) consiste en la mesure de segments. Nous avons rencontré un seul cas où un élève raisonne en mode numérique par l'utilisation d'une formule d'aire.

13.2.5 Item 5

L'utilisation à bon escient de formules pour calculer des périmètres ou des aires peut dissimuler une mauvaise compréhension ou — si l'on préfère — une conceptualisation limitée des aspects fondamentaux du domaine des grandeurs géométriques et de leurs mesures. Derrière un énoncé à première vue relativement simple, le dernier item de ce test jette un éclairage sur les difficultés qui peuvent apparaître dès que les situations présentées aux élèves s'écartent quelque peu de la pratique routinière.

La situation présentée aux élèves comporte le calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle et l'explication des méthodes utilisées pour obtenir ces résultats. Or nous constatons que, si de l'ordre de 50 % des élèves produisent des explications techniques acceptables de leurs résultats, seuls 45 % trouvent une valeur correcte pour le périmètre et 38 % une valeur correcte pour l'aire. Et la baisse enregistrée en passant des justifications aux résultats ne s'explique pas seulement par des erreurs de calcul.

Les taux précis sont repris dans le tableau suivant :

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
Les 123 élèves				
Périmètre	47 %	45 %	37 %	18 %
Aire	51%	38 %	40 %	22 %

Voyons donc quelles particularités de l'énoncé peuvent affecter à ce point les résultats, notamment ceux qui concernent le calcul de l'aire.

L'emploi d'unités non conventionnelles

À la différence de la situation de l'item 1, l'unité de longueur (notée ul) utilisée dans cet item 5 différait suffisamment de 1 cm pour que nous ne puissions pas accepter de considérer 1 ul comme équivalent à 1 cm. En fait, la relation entre ul et cm était donnée par la formule 1 ul = 0,7 cm, ce qui entraînait pour les unités d'aire 1 ua = 0,49 cm^2.

Or nous avons relevé quatre attitudes différentes des élèves devant cette question.

1. Vingt-six élèves (21 % de 123) n'ont tenu aucun compte des unités ul et ua, ni des indications relatives aux nombres de petits carrés rouges qui pouvaient être placés au long des côtés du rectangle. Apparemment, ces élèves ne conçoivent pas qu'on puisse utiliser une autre unité que le cm. Ils ont donc pris leur latte et ont mesuré, bien entendu en cm, les côtés du rectangle (6,1 cm et 11,5 cm). Ils ont produit, lorsqu'ils ne se trompaient pas en mesurant ou en calculant, les réponses $35,2$ cm pour le périmètre et $70,15\ \text{cm}^2$ pour l'aire, réponses que nous ne pouvions pas considérer comme fausses et que nous avons donc rangées dans la catégorie des réponses correctes. Le problème n'est pas au niveau de la correction des calculs, mais au niveau du concept d'unité de mesure, qui est insuffisamment maîtrisé comme le montre la méconnaissance de l'aspect arbitraire du choix d'une unité.

   La figure 13.44 montre la réponse d'un élève de cette catégorie qui se trompe en mesurant la longueur du rectangle. L'auteur de la figure 13.45 ne répond pas à la question concernant le périmètre, mais fournit l'aire correctement, avec une bonne explication. On appréciera à la figure 13.46 la distinction entre *les* longueurs et *les* largeurs du rectangle dans le calcul du périmètre et *la* longueur et *la* largeur (soulignés par l'auteur) du même rectangle dans le calcul de l'aire.

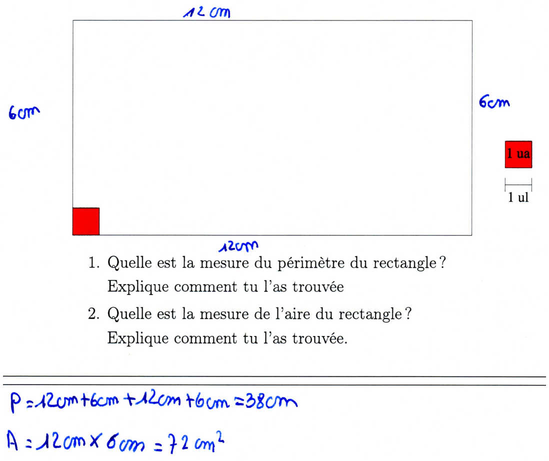


Fig. 13.44

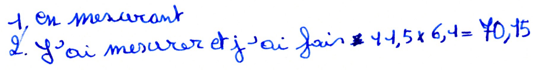


Fig. 13.45

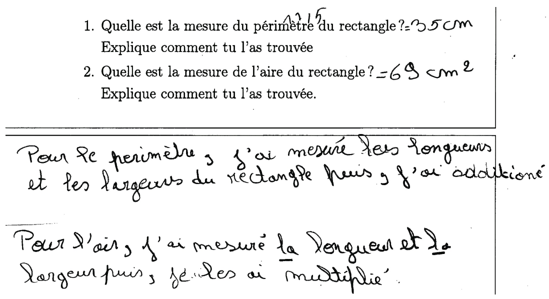


Fig. 13.46

Les erreurs relevées sur les copies des élèves de cette catégorie sont pour la plupart des erreurs de mesure, de calcul ou d'applications de formules. L'absence de réponse n'est pas rare, comme le tableau ci-dessous l'indique.

Trois élèves ont quadrillé le rectangle donné, ce qui induit d'autres erreurs sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Le tableau suivant indique pour cette catégorie d'élèves les différents taux de réponses et de justifications correctes (les taux sont relatifs au total de 26).

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
26 élèves qui ne tiennent aucun compte des ul et ua				
Périmètre	38 %	46 %	31 %	23 %
Aire	46 %	23 %	38 %	38 %

2. Quatorze élèves ont considéré que l'unité ul était exactement de 1 cm, donc que les dimensions du rectangle étaient de 8 cm sur 15 cm, ce qui les amenait — sauf erreur de calcul de leur part — à un périmètre de 46 cm et une aire de 120 cm^2.

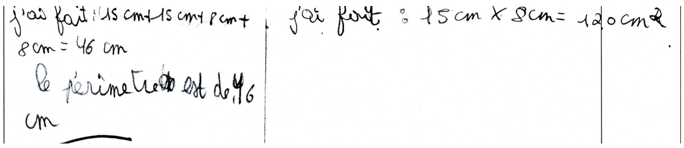


Fig. 13.47

Même si les calculs étaient corrects et les démarches valables, il ne nous a pas semblé possible d'accepter des réponses qui non seulement révèlent une méconnaissance du côté arbitraire des unités de mesures, mais de plus font apparaître un manque de sens critique quant à la plausibilité des résultats obtenus ([1]).

Si nous avons considéré les réponses des élèves de cette catégorie comme automatiquement fausses, (une ou deux étaient manquantes), nous avons néanmoins relevé

([1]) Nous ne pouvons cependant pas exclure qu'une telle démarche soit liée à la présentation occasionnelle aux élèves de figures dessinées à l'échelle, et mentionnant des longueurs qui à strictement parler sont fausses :

Peut-être notre rectangle n'était-il qu'une représentation d'un rectangle de 8 cm sur 15 cm !

la valeur des justifications et constaté que neuf des quatorze justifications relatives au périmètre et onze de celles relatives à l'aire étaient acceptables. Autrement dit, les procédures de calcul étaient valables (*Fig. 13.47*).

Le tableau suivant indique pour cette catégorie d'élèves les différents taux de réponses et de justifications correctes (les taux sont relatifs au total de 14).

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
14 élèves pour lesquels ul = 1 cm				
Périmètre	64 %	0 %	100 %	0 %
Aire	79 %	0 %	93 %	7 %

3. Vingt élèves nous semblent dans une situation plus difficile que les précédents, en ce sens qu'ils mélangent sur leurs feuilles les unités ul et ua avec les cm et les cm^2, calculant parfois un résultat (périmètre ou aire) avec une unité d'un type, et l'autre résultat avec une unité d'un autre type. Sur la figure 13.49, la largeur du rectangle est 6 cm lors du calcul du périmètre, et 6 ua (!) lors du calcul de l'aire. Au pire, on voit un élève ajouter des ul et des cm ! Ainsi la figure 13.50 ne mentionne explicitement aucune unité. Mais le calcul du périmètre utilise la mesure de la largeur du rectangle en cm (6) et celle de sa longueur en ul (15). Quant au calcul de l'aire il est correct dans le système ul/ua. Les feuilles de cette catégorie sont parfois difficiles à décrypter.

   Lorsque c'était possible, nous avons accepté un résultat (périmètre ou aire) exprimé dans un système d'unité s'il était correct avec ce système. Si un résultat ne mentionnait aucune unité, nous l'avons encore considéré comme correct s'il était compatible avec un des deux systèmes possibles. Par exemple, à la figure 13.48, nous avons validé le résultat pour le périmètre qui est correct si on utilise le cm comme unité et nous n'avons pas validé le résultat pour l'aire qui ne correspond pas à un calcul dans le système ul – ua.

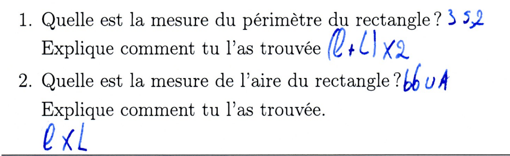


Fig. 13.48

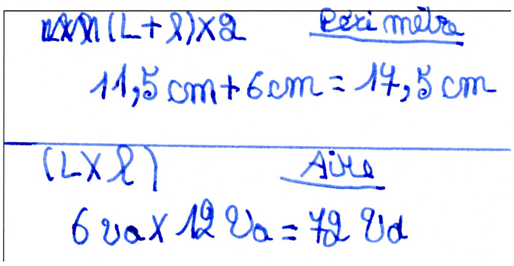


Fig. 13.49

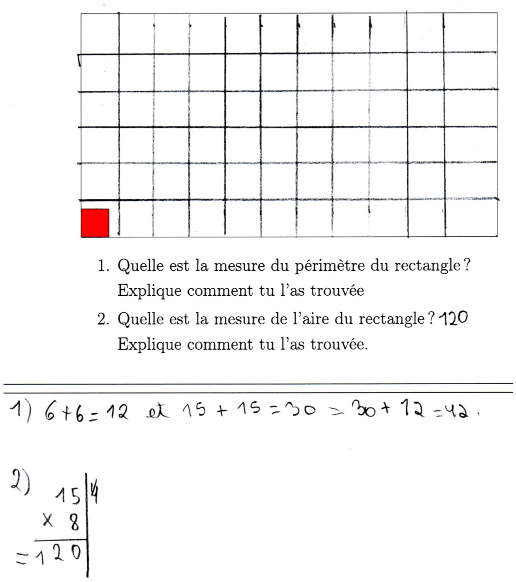


Fig. 13.50

Le tableau suivant indique pour cette catégorie d'élèves les différents taux de réponses et de justifications correctes (les taux sont relatifs au total de 20).

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
20 élèves qui mélangent ul/ua et cm/cm^2				
Périmètre	40 %	30 %	50 %	20 %
Aire	45 %	20 %	75 %	5 %

4. La dernière catégorie d'élèves par rapport à l'emploi des unités est constituée des soixante-trois élèves qui n'appartiennent à aucune des trois catégories précédentes. C'est donc celle dont les réponses ne permettent pas d'affirmer qu'ils ont utilisé des cm ou des cm^2. Cette catégorie est un peu fourre-tout. Elle contient par exemple les élèves qui ont remis des feuilles blanches et dont on ne peut par conséquent pas non plus affirmer qu'ils ont utilisé des ul !

   Voici le tableau de résultats les concernant (les taux sont relatifs au total de 63) :

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
63 autres élèves				
Périmètre	49 %	59 %	22 %	19 %
Aire	49 %	59 %	17 %	24 %

   On notera avec intérêt que malgré le caractère fourre-tout de cette catégorie d'élèves, ses résultats globaux sont meilleurs que ceux des trois premières catégories (pour faciliter les comparaisons, les différents tableaux ont été réunis en un seul, page 423).

   Cette catégorie étant constituée des élèves qui n'ont pas essayé d'utiliser les unités conventionnelles, on peut penser qu'ils ont pu transposer les principes qui gouvernent celles-ci à des unités autres, ce qui indique une meilleure compréhension des principes fondamentaux des mesures de grandeurs et pourrait (restons prudents) expliquer de meilleures performances.

La formulation inhabituelle de l'énoncé

Un des *leitmotive* de notre travail est la distinction des modes de raisonnement mis en œuvre en vue de déterminer la mesure d'une aire. Depuis le chapitre 5, nous distinguons un mode quantatif (atomisé ou global), essentiellement le dénombrement d'aires unités incluses à la forme géométrique considérée et le mode numérique, qui désigne l'emploi de formules.

Pour calculer le périmètre ou l'aire d'un rectangle avec des élèves de fin de cinquième primaire, on peut s'attendre à ce que le mode numérique domine. C'est effectivement ce mode que la plupart des élèves utilisent... mais cela n'est pas toujours aussi immédiat qu'on pourrait le croire.

L'emploi d'une unité inconnue, la formulation inhabituelle de l'énoncé sont autant de facteurs qui peuvent déstabiliser un élève dont les connaissances restent mal assurées et l'amener à revenir au mode de raisonnement quantitatif.

Par « formulation inhabituelle de l'énoncé », nous pensons à la phrase « On peut mettre 15 petits carrés sur la longueur du grand rectangle ou (2) 8 petits carrés sur sa largeur ». Une bonne maîtrise de l'emploi d'unités arbitraires (nous y revenons !) permet d'interpréter immédiatement cette phrase comme signifiant « la longueur du rectangle est de 15 ul et sa largeur de 8 ul ».

(2) Il eût mieux valu dire « et » !

Un élève qui n'a pas cette maîtrise n'interprète pas immédiatement la dite phrase de cette façon. Pour y voir clair, il entreprend de mettre effectivement quinze petits carrés sur la longueur, et huit sur la largeur. On trouve ainsi de nombreuses feuilles sur lesquelles figurent des graduations des côtés gauche et inférieur du rectangle.

Mais ce n'est pas chose facile que de « mettre » quinze petits carrés sur la longueur du grand rectangle. Certains — qui ont assimilé le changement d'unité — entreprennent de graduer « en ul » et suite aux imprécisions de leur tracé, liées au fait que leur latte est graduée en cm, constatent que leur dernier segment est plus petit que les autres (*Fig. 13.51*). Ce n'est pas très grave, mais cela n'empêche pas la confusion entre ul et cm. D'autres graduent en centimètres, et n'arrivent qu'à placer dix points de subdivision... (*Fig. 13.52*). Une autre difficulté provient de ce qu'un petit carré a déjà été dessiné. Que faut-il en faire ? (*Fig. 13.50*)

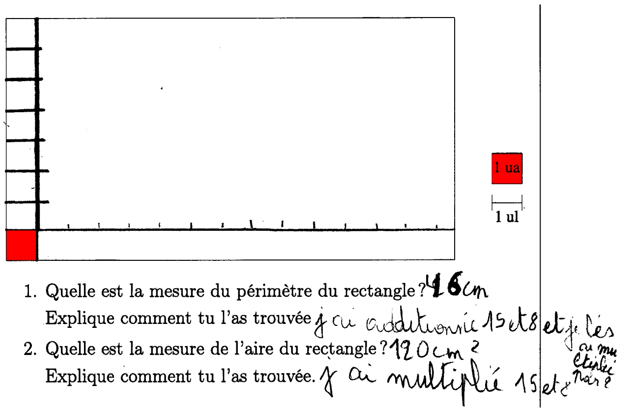


Fig. 13.51

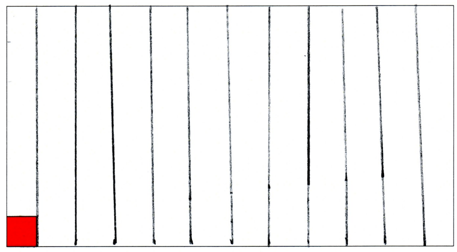


Fig. 13.52

Cinquante-et-un élèves vont plus loin en entreprenant de quadriller le rectangle. Quinze vont jusqu'au bout de ce travail. Et seulement sept réalisent un quadrillage de 8 × 15, ce qui n'entraîne pas nécessairement des réponses correctes (*Fig. 13.53*). Ceux qui graduent en cm arrivent à un quadrillage 6 × 11, ce qui explique certaines réponses 66 pour l'aire du rectangle.

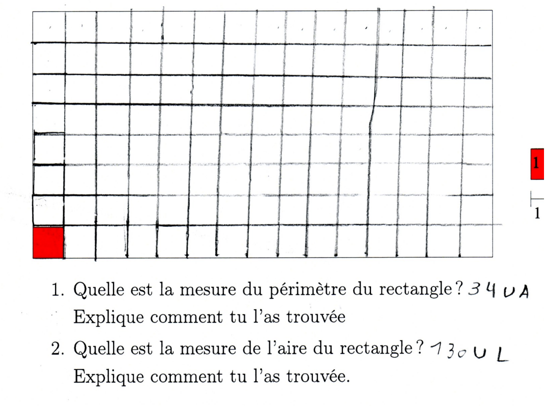


Fig. 13.53

Certains des quadrillages ainsi réalisés ne servent à rien : l'élève revient à l'application de la formule d'aire d'un rectangle en utilisant des mesures en cm (*Fig. 13.54*). D'autres quadrillages, ou ébauches de quadrillages, servent de support pour réaliser une multiplication. En quelque sorte, les élèves qui ont procédé de la sorte, ont réagi au problème constitué par l'emploi d'une unité nouvelle en reconstruisant la formule d'aire « longueur × largeur », affranchissant donc cette formule du contexte des mesures en centimètres.

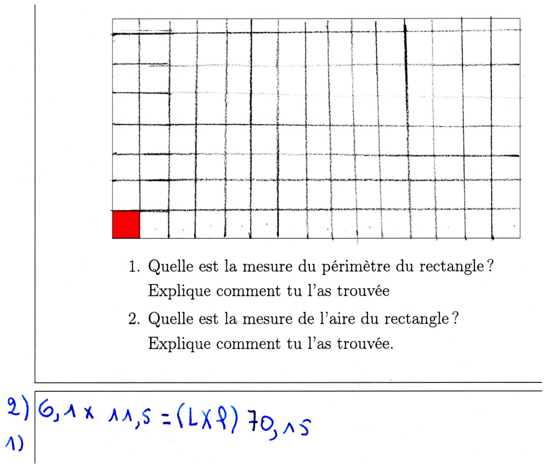


Fig. 13.54

Un seul élève (*Fig. 13.55*) a compté un à la fois les carreaux du quadrillage qu'il a construit, se plaçant ainsi dans le mode de raisonnement quantitatif atomisé. Encore l'a-t-il fait pour trouver le périmètre du rectangle ! Pour trouver l'aire, il a « fait × sur les deux côtés », se plaçant alors, comme les autres, en mode numérique.

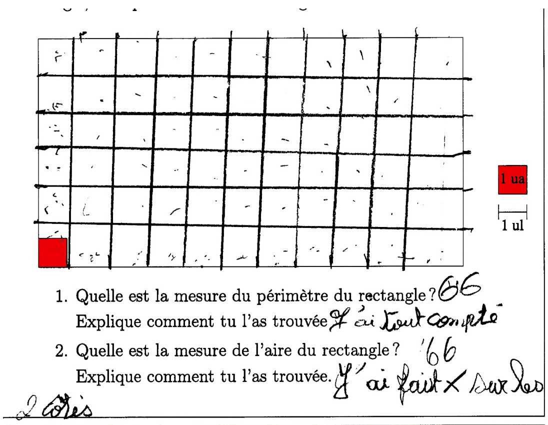


Fig. 13.55

Il n'est peut-être pas sans intérêt de comparer aux taux globaux les taux de réussite des cinquante-et-un élèves ayant ébauché un quadrillage. Rappelons que ce groupe d'élèves ne constitue pas une « cinquième catégorie ». Tous les élèves qui en font partie ont également été pris en compte pour le calcul des données relatives aux quatre catégories que nous avons constituée dans l'analyse de cet item.

Le tableau suivant reprend toutes les informations mentionnées précédemment, complétées par les informations relatives à cet ensemble d'élèves ayant ébauché un quadrillage.

	Justification acceptable	Résultat correct	Résultat incorrect	Absence de résultat
Les 123 élèves				
Périmètre	47 %	45 %	37 %	18 %
Aire	51%	38 %	40 %	22 %
Première catégorie : 26 élèves qui ne tiennent aucun compte des ul et ua				
Périmètre	38 %	46 %	31 %	23 %
Aire	46 %	23 %	38 %	38 %
Deuxième catégorie : 14 élèves pour lesquels ul = 1 cm				
Périmètre	64 %	0 %	100 %	0 %
Aire	79 %	0 %	93 %	7 %
Troisième catégorie : 20 élèves qui mélangent ul/ua et cm/cm^2				
Périmètre	40 %	30 %	50 %	20 %
Aire	45 %	20 %	75 %	5 %
Quatrième catégorie : 63 autres élèves				
Périmètre	49 %	59 %	22 %	19 %
Aire	49 %	59 %	17 %	24 %
51 élèves qui ébauchent un quadrillage				
Périmètre	31 %	35 %	37 %	27 %
Aire	41 %	31 %	43 %	25 %

Comme on l'a déjà remarqué, le sous-groupe ayant le plus fort taux de réussite est celui constitué des soixante-trois élèves qui ont travaillé sans utiliser aucunement les cm et cm^2. 59% des membres de ce groupe ont transposé au contexte ul/ua les compétences acquises dans le contexte métrique.

13.3 Des comportements de réussite ou d'échec

Passons à présent aux comportements d'échec et de réussite détectés par l'analyse implicative (*section B.6*) et qui interviennent donc de façon significative dans des relations d'implication avec d'autres comportements. Nous ne nous attardons que sur les méthodes de résolution, et non sur la production d'un résultat, correct ou incorrect.

13.3.1 Des comportements d'échec

Ces comportements ne sont pas très nombreux. On citera en tête le comportement *quantitatif atomisé*, qui consiste à l'item 3 à dénombrer tous les petits carrés jaunes un à la fois et que l'on retrouve également chez un élève à l'item 5.

Cet item 5, qui apparaît comme le plus difficile du post-test est l'occasion de constater l'existence de comportements d'échec non encore rencontrés auparavant et dûs à la difficulté de maîtriser l'emploi d'une unité de longueur non conventionnelle. Il s'agit soit de la confusion entre ul et cm, soit même du mélange de ces unités, ce qui va jusqu'à entraîner des additions du style « pommes-poires ».

Par ailleurs, la difficulté de cet item, qui réside principalement dans la compréhension de son énoncé, amène certains élèves à recourir à des comportements d'échec qu'ils n'utilisent plus dans des situations plus simples. C'est ainsi que la confusion entre périmètre et aire refait surface à l'item 5 (pour un rectangle), chez 15 % des élèves, alors qu'à l'item 1, ce type d'erreur (pour un triangle) n'était plus assez fréquent pour que l'on puisse affirmer qu'il entraîne significativement l'échec. Par contre, la confusion entre aire et périmètre est significativement présente à l'item 4. Cette fois, il s'agissait de comparer les aires d'un hexagone et d'un parallélogramme. Pour les élèves qui ne perçoivent pas le découpage en triangles ou en parallélogrammes, la situation était sans doute complexe. Les découpages autres qu'en parallélogrammes ou en triangles mènent aussi plutôt à l'échec.

Ces constatations ne font qu'illustrer un fait bien connu, à savoir que le type d'erreur commise par les élèves dépend non seulement de leurs connaissances, mais aussi de la complexité du problème traité. Tant que le phénomène se produit, on doit parler d'une instabilité des acquis.

Une dernière observation : si, jusqu'à un certain point, on peut admettre les imprécisions de mesure, il n'en est pas de même pour les erreurs de comptage ou de calcul, surtout dans un item comme l'item 3. Dans ce cas, ces erreurs ont aussi entraîné l'échec de façon significative.

13.3.2 Des comportements de réussite

Mesurer des côtés à la latte pour évaluer le périmètre, utiliser le mode quantitatif en dessinant un quadrillage et évaluer l'aire par dénombrement des carrés, compléter le triangle en un rectangle et diviser l'aire de celui-ci par 2 constituent autant de comportements de réussite à l'item 1.

À l'item 2, le seul comportement de réussite qui ait été significativement utilisé est celui qui consiste à couper un morceau de triangle et reconstituer ainsi un carré.

À l'item 3, seule la reconstitution du grand carré, suivie de la soustraction du nombre de carrés manquants est classée par l'analyse implicative parmi les comportements de réussite.

Nous l'avons déjà mentionné plus haut : à l'item 4 ce sont les découpages en triangles isométriques ou en parallélogrammes qui permettent de façon significative d'arriver à la réponse correcte.

Enfin, à l'item 5, la réussite résulte de l'emploi des formules usuelles de calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, ce qui est normal dès lors que l'élève se rend compte qu'il connait les mesures des côtés.

On notera encore que les démarches qui viennent d'être énumérées relèvent de différentes activités mentales et intellectuelles : mesurer, calculer, appliquer une formule, dessiner, dénombrer, découper, percevoir, c'est une éventail très large de compétences qui devaient être mises en œuvre dans ce test.

13.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre*

Pour commencer, rappelons que si nous comparons les résultats du groupe témoin et ceux du groupe expérimental, c'est d'abord pour évaluer l'impact du logiciel *Apprenti Géomètre*, c'est-à-dire quels comportements de l'élève sont susceptibles d'être modifiés du fait de son emploi. Les tableaux de réussite ne constituent donc pour nous qu'un point de départ.

Voici le tableau des réussites pour le post-test :

	Item 1 Périmètre	Item 1 Aire	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5 Périmètre	Item 5 Aire
Gr. témoin	86 %	70 %	95 %	61 %	61 %	46%	46 %
Gr. expé.	73 %	40 %	90 %	43 %	57 %	43 %	31 %
χ^2	2,9	10,6	1,06	3,71	0,2	0,12	2,94

Les taux de réussite du groupe témoin restent supérieurs à ceux du groupe expérimental. Toutefois les écarts semblent diminuer, ce qui se concrétise par la présence de valeurs inférieures à 1 dans la ligne des χ^2. Par ailleurs, on ne trouve de différence significative que dans une seule colonne.

Considérons les comportements que l'analyse implicative a placé aux sources du graphe des comportements de réusite :

C1 : Mesurer les côtés (item 1).

C2 : Dessiner un quadrillage et compter (item 1)

C3 : Calcul de l'aire du rectangle, puis division par 2 (item 1).

C4 : Découpage d'un triangle (item 2).

C5 : Reconstitution du grand carré, puis soustraction des carrés manquants (item 3).

C6 : Découpage en triangles puis comptage (item 4).

C7 : Découpage en parallélogrammes, puis comptage (item 4).

C8 : Valeur correcte pour l'aire (item 5).

C9 : Bonne formule pour le périmètre (item 5).

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
Gr. témoin	25 %	34 %	9%	71%	45%	57%	23%	46 %	25%
Gr. expé.	34 %	31 %	12 %	73%	25%	18 %	25%	31 %	33%
χ^2	1,26	2,55	0,29	0,04	5,04	20,4	0,08	2,94	0,9

Aux colonnes 1, 3, 4, 7 et 9 on constate que le groupe expérimental a des pourcentages supérieurs à ceux du groupe témoin, mais aucune des différences n'est significative au seuil 0,95. Seules les colonnes 5 et 6 présentent des différences significatives, en faveur du groupe témoin.

On note au passage qu'à l'item 5, les élèves du groupe témoin préfèrent découper l'hexagone en triangles, alors que ceux du groupe expérimental préfèrent (de peu) découper en parallélogrammes. Cela ne peut résulter que d'une différence de perception, peut-être plus globale dans le groupe expérimental.

Si on considère l'ensemble des comportements de réussite considérés comme significatifs par l'analyse implicative (*voir l'annexe B.6*), on constate que les élèves du groupe témoin ont des taux significativement plus élevés que ceux du groupe expérimental aux comportements suivants :

- Item 1
  - Valeur correcte pour l'aire.
- Item 3
  - Reconstitution du grand carré, puis soustraction (correcte) des carrés manquants.
- Item 4
  - Dessiner des triangles isométriques.
- Item 5
  - Utiliser une bonne formule pour l'aire.

Dans l'autre sens, les élèves du groupe expérimental ont un taux significativement plus élevé que ceux du groupe témoin pour le dessin de trapèzes à l'item 4. Il vaut la peine de signaler qu'ils ont un taux plus élevé (mais pas significativement) pour le prolongement du triangle en un rectangle à l'item 1 car il s'agit là d'une perception « en dehors » de la figure donnée.

En conclusion

La situation semble en pleine évolution et l'usage d'un logiciel n'est qu'un élément parmi d'autres au cours de cette évolution. Le nombre de comportements de réussite pour lesquels le groupe témoin a obtenu des résultats significativement meilleurs que le groupe expérimental est plus important au pré-test qu'au post-test. Ceci indique une tendance du groupe expérimental à se rapprocher du groupe témoin. Mais il n'est pas possible de détecter un domaine dans lequel le phénomène soit net.

Après l'expérience réalisée en sixième en 2005–2006, il apparaissait comme possible que les élèves du groupe expérimental aient acquis une meilleure perception globale et comme quasi-certain qu'ils étaient devenus plus performants que ceux du groupe témoin en ce qui concerne l'assemblage de formes géométriques.

On n'oserait affirmer la même chose après l'expérience réalisée en cinquième, car les résultats du post-test semblent parfois contradictoires. En ce qui concerne le phénomène de perception, par exemple, on voit le groupe témoin plus performant que le groupe expérimental à l'item 3 (reconstitution du grand carré). Par contre, à l'item 1, le groupe expérimental prend le dessus dans le calcul de l'aire du triangle par complétion préalable en un rectangle (bien que la différence ne soit pas significative) et à l'item 4, il dessine plus facilement le trapèze. Sans doute, d'un item à l'autre les contextes sont-ils différents, ce qui peut influencer les résultats.

Si le groupe expérimental a effectivement tendance à se rapprocher du groupe témoin, sans que cela soit plus marqué dans un domaine que dans un autre, c'est qu'il s'agit d'une attitude générale lorsque l'élève se trouve confronté à une résolution de problème. Et nous pouvons rapprocher cela du commentaire d'une des institutrices ayant participé à l'expérience, commentaire déjà rapporté dans l'introduction à ce travail :

> *Ce qui est pratique avec l'informatique c'est que les enfants devaient mieux se représenter au départ ce qu'ils voulaient réaliser parce que sinon ils étaient piégés, à la limite quand ils peuvent disposer de matériel qu'ils peuvent manipuler, ils vont chipoter. Tandis qu'avec l'ordinateur, ils ont tout intérêt s'ils veulent être efficaces rapidement à imaginer là où ils veulent aller !... bien se représenter et réfléchir avant d'agir. Ils pourraient chipoter aussi avec l'informatique mais en règle générale ils ne le font pas, car ils se rendent compte qu'ils sont vite piégés !*

Nous nous garderons toutefois de tirer des conclusions définitives.

Annexe C

Index

Annexe D

Bibliographie

[1] P. Abgrall. *Le développement de la géométrie aux* IX^e–XI^e *siècles*. A. Blanchard, Paris, (2004).

[2] Aristote. *Physique*. Les belles lettres, Paris, (1990).

[3] N. Artemiadis. *History of mathematics : from a mathematician's vantage point*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2004).

[4] T. Assude et J.-M. Gelis. La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, **50**, 3, 259–287, (2002).

[5] N. Balacheff and J. Kaput. Computer-based Learning Environments in Mathematics. In Bishop et al. [11], pages 469–501.

[6] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Jeux mathématiques 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1992). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 6.

[7] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Géométrie de l'espace 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1994). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 7.

[8] E. Barbin. Qu'est-ce que faire de la géométrie ? *Repères-IREM*, pages 59–82, (2001).

[9] G. Barthélemy. *2500 ans de mathématiques : l'évolution des idées*. Ellipses, Paris, (1999).

[10] S. Baruk. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Ed. du Seuil, Paris, (1992).

[11] A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde, éditeurs. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).

[12] R. Bkouche. La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2, Rethymnon, (2006). Université de Crète.

[13] C. Boyer and U. Merzback. *A history of mathematics*. Wiley, Singapore, (1989).

[14] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble, (1998).

[15] M. Caveing. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Éléments » d'Euclide et la « Physique » d'Aristote*. In *Penser la science*. Points Sciences, Seuil, (1982).

[16] M. Caveing. *La figure et le nombre : recherche sur les premières Mathématiques des Grecs*. Presses Universitaires du Septentrion, Paris, (1998).

[17] D. H. Clements and M. T. Battista. The effects of Logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 5, 356–371, (1990).

[18] CREM. *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2003).

[19] CREM. *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2004).

[20] CREM. *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2005).

[21] E. Crone, E. Dijksterhuis, and al. *The principal works of* SIMON STEVIN, *volumes* IIA *et* IIB. C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, (1958).

[22] N. Crowder. Automatic Tutoring by means of intrinsic programming. In Galantes [38].

[23] R. Cuppens. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, (1996). Deux tomes.

[24] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques*. Editions du Seuil, (1986).

[25] A. Djebbar. *Une histoire de la science arabe*. Editions du Seuil, (2001).

[26] A. Djebbar. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert-Adapt, Paris, (2005).

[27] *Décret « Missions de l'École », Mon école comme je la veux*. Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1997).

[28] *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire)*. Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1999). `www.enseignement.be/@librairie/documents/socles/telechargement/pdf/socle_math.pdf`.

[29] *Mathématiques — Premier degré – 1 A et 2e Commune*. Fédération de l'Enseignement secondaire catholique, Bruxelles, (2000). `www.segec.be/Documents/Fesec/Programmes/15_MATH1.pdf`.

[30] *Programme d'études du cours de mathématiques — 1re année A – 2e année commune*. Ministère de la Communauté Française — AGERS, Bruxelles, (2000). `www.restode.cfwb.be/download/programmes/10-2000-240.pdf`.

[31] R. Douady. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7**, 2, 5–31, (1986).

[32] J.-C. Duperret. Le geste géométrique ou l'art de démontrer. *Repères-IREM*, pages 83–116, (2001).

[33] R. Duval. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37–65, (1993).

[34] R. Duval. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53, (2005).

[35] Euclide. *Les éléments, traduction en français du texte de Heiberg par B. Vitrac.* Presses Universitaires de France, Paris, (1994).

[36] J.-P. Friedelmeyer. Les aires : outil heuristique - outil démonstratif. *Repères-IREM*, **31**, 39–62, (1998).

[37] J.-P. Friedelmeyer. Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, **44**, 5–31, juillet 2001. Topiques Éditions, Metz.

[38] E. Galantes, éditeur. *Automatic Teaching : the state of the art.* Wiley, New York, (1959).

[39] Galilée. *Discours concernant deux sciences nouvelles.* Presses Universitaires de France, (1995). D'après une traduction de Maurice Clavelin.

[40] E. Gallou-Dumiel. Symétrie orthogonale et micro-ordinateur. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 5–60, (1987).

[41] GEM. *L'archipel des isométries.* Ed. GEM, Louvain-la-Neuve, (1982).

[42] R. Gras. Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, **Supplément n°15**, 9–33, (2005).

[43] R. Gras et al. *L'implication statistique.* La Pensée Sauvage, Grenoble, (1996).

[44] E. M. Gray and D. Tall. Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 2, 116–140, (1994).

[45] Herodote. *Histoires, traduit en français par Larcher.* Charpentier, Paris, (1850). En ligne sur `Gallica.bnf.fr`.

[46] J. Hillel. Mathematical and programming concepts acquired by children, aged 8–9, in a restricted Logo environment. *Recherches en didactique des mathématiques*, **6**, 2–3, 215–268, (1985).

[47] J. Hillel and C. Kieran. Schemas used by 12-years olds in solving selected turtle geometry tasks. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 61–102, (1987).

[48] J. Hoyrup. *Lengths, widths, surfaces : a portrait of old babylonian : algebra and its skin.* Springer-Verlag, New York, (2002).

[49] M. Kittel et G. Kuntz. De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques. Etude d'un exemple. *Repères IREM*, **49**, 41–58, (2002).

[50] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, (1990).

[51] C. Laborde and B. Capponi. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **14**, 1–2, 165–210, (1994).

[52] J.-M. Laborde and R. Strässer. Cabri-géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **90**, 5, 171–190, (1990).

[53] M. Lebrun. *Des technologies pour enseigner et apprendre.* 2e édition, De Boeck, Bruxelles, (2002).

[54] A.-M. Legendre. *Éléments de Géométrie avec des notes, suivis d'un traité de trigonométrie.* Société Nationale pour la propagation des bons livres, Bruxelles, (1838).

[55] L. Lismont et N. Rouche, éditeurs. *Formes et Mouvements.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2001).

[56] R. Noss. Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**, 5, 343–362, (1987).

[57] S. Papert. *Jaillissement de l'esprit.* Flammarion, Paris, (1980).

[58] J. Piaget. *Six études de psychologie.* Gonthier, Genève, (1964).

[59] J. Piaget, B. Inhelder, et A. Szeminska. *La géométrie spontanée de l'enfant.* Presses Universitaires de France, Paris, (1948).

[60] Plutarque. *Œuvres morales. Le banquet des sept sages. traduit en français par V. Bétolaud.* Hachette, (1870). En ligne sur `hodoi.fltr.ucl.ac.be/concordances`.

[61] C. Pribetich Aznar. La formulation des surfaces des bâtiments et des superficies des terrains aux XIV^{e}–XVI^{e} siècles dans le sud-est de la France. *Histoire et mesure*, **XVI - n°3/4**, (2005). mis en ligne le 7 décembre 2005, référence du 25 avril 2007, disponible sur : http ://histoiremesure.revues.org/document142.html.

[62] R. Rashed et B. Vahabzadeh. *Al-Khayyām Mathématicien.* Albert Blanchard, Paris, (1999).

[63] X. Roegiers. *Les Mathématiques à l'école primaire (tome 2).* De Boeck, (2000).

[64] N. Rouche. *Le sens de la mesure.* Didier-Hatier, Bruxelles, (1992).

[65] N. Rouche et P. Skilbecq. Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel. *Mathématique et Pédagogie*, **149**, 68–84, (2004).

[66] N. Rouche et P. Skilbecq. *Apprenti Géomètre : pourquoi un nouveau logiciel.* CREM, Nivelles, (2006).

[67] C. Ruby. Lire (vraiment) Leibniz. *EspacesTemps.net*, (Mis en ligne le 5 mai 2004).

[68] M. Serres. *Les origines de la géométrie.* Flammarion, (1993).

[69] B. F. Skinner. *La révolution scientifique de l'enseignement.* Ed. Dessart, Bruxelles, (1969).

[70] S. Stévin. *L'Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques.* Ed. A. Girard, Leyde, (1634).

[71] D. Tall. Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignement mathématique*, **42**, 395–415, (1996).

[72] D. Tall. A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **11**, 195–215, (2006).

[73] R. Taton. *La science antique et médiévale*. Presses universitaires de France, Paris, (1957).

[74] P. van Hiele. La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive. *Mathematica & Paedagogia*, **16**, 25–34, (1958/59).

[75] G. Vergnaud. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2**, 2, 215–232, (1981).

[76] G. Waldegg. L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez STÉVIN. Peyresq, (1999). Actes du colloque « La pensée numérique », www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pensee.numer.htm.

[77] F. Woepcke. *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, (1986).

[78] A. Youschkevitch. *Les mathématiques arabes (VII^e^- XV^e^ siècles)*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, (1976).

Table des matières