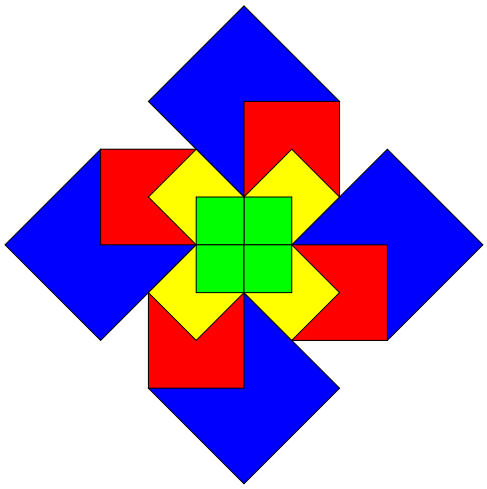
Apprenti Géomètre

Impact du logiciel « Apprenti Géomètre » sur certains apprentissages

Tome 5c



Ministère de la Communauté française

CREM

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

2007

Chapitre 14

Un pré-test en première secondaire (2006–2007)

14.1 Les objectifs des pré- et post-tests

Les questions relatives aux grandeurs géométriques et à leur mesure figurent parmi les compétences qui doivent être certifiées à 12 ans et entretenues jusqu'à 14 ans. Le pré-test réalisé en première secondaire avait en conséquence un double objectif : évaluer la maîtrise des compétences relatives aux grandeurs géométriques à la sortie de l'école primaire et, par comparaison avec les résultats du post-test, juger de l'impact d'*Apprenti Géomètre*.

Les résultats présentés ci-dessous montrent que l'acquisition des compétences considérées n'est pas effective chez un grand nombre d'élèves. Comme nous le verrons, une des raisons de cette déficience réside dans la difficulté qu'éprouvent beaucoup d'entre eux à distinguer des formes géométriques peu usuelles, et cela qu'elles soient en situation de superposition ou de juxtaposition. Les élèves souffrent également de difficultés d'expression qui peuvent entraver leur réflexion.

La maîtrise des grandeurs géométriques au début de la première année du secondaire est faible. C'est d'autant plus préoccupant que le professeur de mathématique de cette année d'études n'est pas en mesure d'accorder une place très importante à un sujet qui est seulement considéré comme étant à *entretenir*...

14.2 Les énoncés

Le pré-test comprend six items. Il a été utilisé dans huit classes de première secondaire : deux du Collège Saint-Marie à Rêves, une de l'Institut Sainte-Marie à La Louvière, deux de l'Institut Saint-Joseph à La Louvière, deux de l'Athénée Royal Lucie Dejardin à Seraing, et une de l'Athénée Royal d'Auderghem. Dans chaque classe, les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Au total, 167 élèves ont participé à ce test.

– Item 1

Défi 1 – Que dois-tu connaître pour répondre aux questions suivantes ?

	une longueur	une aire	un volume	un poids	un temps
Mon ami(e) habite deux rues plus loin. A quelle distance se trouve sa maison ?					
Je dois acheter du sable pour remplir le grand trou qui est dans le jardin. Quelle quantité faut-il ?					
Je veux recouvrir le sol de ma chambre avec du parquet. Quelle quantité de parquet dois-je acheter ?					
Je vais entourer mon jardin d'une clôture en treillis. De quelle quantité de treillis ai-je besoin ?					
Je veux repeindre les murs de mon salon. De quelle quantité de peinture ai-je besoin ?					

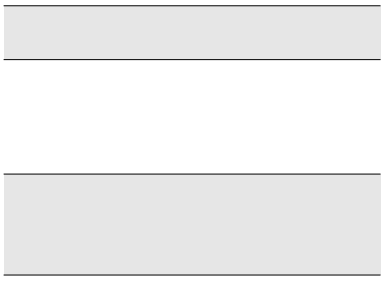
Peux-tu répondre aux questions suivantes :

- Qu'est-ce qu'un périmètre ?
- Comment calculerais-tu un périmètre ?
- Qu'est-ce qu'une aire ?
- Comment calculerais-tu une aire ?

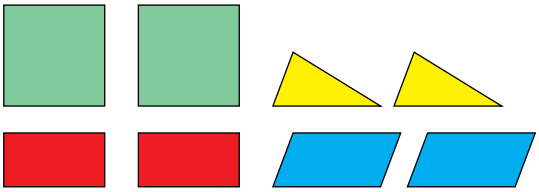
– Item 2

Défi 2 – Découpe les formes dessinées sur la feuille. Il y a deux parallélogrammes, deux triangles, deux rectangles et deux carrés.
Ensuite place les formes sur les deux bandes dessinées ci-dessous. Tu dois pour cela respecter deux règles :

– tu ne peux pas mettre deux formes identiques sur la même bande,
– chaque forme doit avoir deux côtés posés sur chacun des bords de la bande (ou un côté et un sommet dans le cas du triangle).

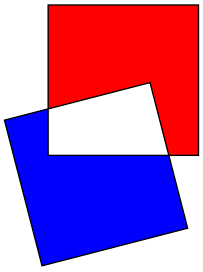


Voici les formes que tu dois découper.



– Item 3

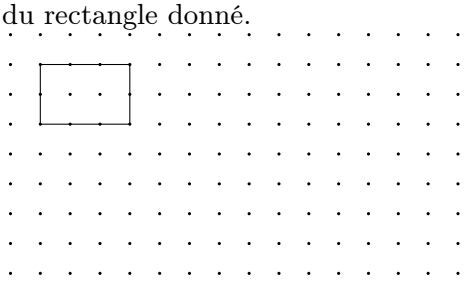
Défi 3 – Les carrés sont de même dimension. Comment est la zone bleue par rapport à la rouge ?
a) Elle est plus grande.
b) Elle est égale.
c) Elle est plus petite.



Explique ton raisonnement.

– Item 4

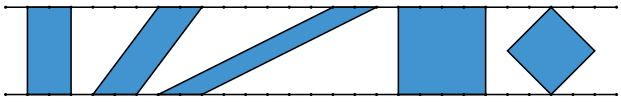
Défi 4 – Dessine un rectangle dont les côtés ont une mesure égale à trois fois celle des côtés du rectangle donné.



À combien de fois l'aire du petit rectangle est égale l'aire du grand rectangle (celui que tu as dessiné) ?
Et inversément : quelle partie de l'aire du grand rectangle représenté est égale au petit rectangle ?
Explique tes différents raisonnements.

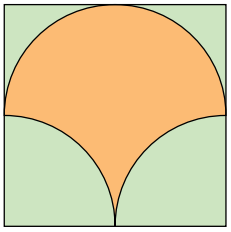
– Item 5

Défi 5 – En comparant les aires des figures suivantes, tu verras qu'il y a un intrus. Quel est cet intrus ?
Justifie ta réponse en expliquant ton raisonnement.



– Item 6

Défi 6 – Si l'aire du carré vaut 1, que vaut l'aire de la zone orange ?



Explique ton raisonnement.

14.3 Analyse des items

14.3.1 Item 1

La première partie de cet item comportait cinq questions également posées dans le pré-test de cinquième primaire. Les réponses attendues étaient donc les mêmes :

- Question 1 : longueur,
- Question 2 : volume,
- Question 3 : aire,
- Question 4 : longueur,
- Question 5 : aire.

De plus, les remarques faites au début de la section 12.3.1 restent valables. La réponse « un poids » a donc été admise à la question 2. Elle est fournie par 70 élèves (42%). De même les réponses « un volume » (28,5% des élèves) et « un poids » (25,7%) ont été admises à la question 5. De son côté, la réponse « une aire » à cette question est le fait de 39 % des élèves.

Même si aucun élève n'échoue à l'ensemble des questions, le score de réussite est faible : 26% des élèves ont réussi, 72% ont au moins une erreur. Parmi ceux-ci, 43% confondent longueur et aire, 22% confondent aire et volume, 19% confondent longueur et volume. La confusion « longueur et aire » s'observe principalement dans la question 4. Il en va de même pour la confusion « longueur et volume ».

Notons encore que six élèves ont répondu « un temps » à la première question, ce qui peut se comprendre, et que neuf ont fourni cette réponse à une des questions 3 à 5, ce qui est plus difficile à comprendre.

La seconde partie de l'item 1 cherchait à préciser quelle conception les élèves ont de ce que sont une périmètre et une aire.

Des deux questions « Qu'est-ce qu'un périmètre ? » et « Qu'est-ce qu'une aire ? », nous attendions qu'elles nous renseignent sur ce que ces mots représentent pour les élèves. Il n'était donc pas question de vérifier la correction de « définitions » que nous savons difficiles à rédiger. C'est particulièrement vrai pour le mot « aire » dont nous avons déjà souligné que c'est un terme primitif (*voir la section 5.2*).

En adjoignant les questions « Comment calculerais-tu un périmètre ? » et « Comment calculerais-tu une aire ? » aux deux précédentes, nous voulions inciter l'élève à séparer dans son discours les aspects procéduraux des aspects conceptuels. En effet, si la notion de *mesure* est une composante essentielle des concepts d'aire et de périmètre (*voir le chapitre 6*), la façon de déterminer cette mesure est une question de procédure qui peut varier d'une forme géométrique à une autre. Un nombre important d'élèves ne réalisent pas encore cette distinction.

Pour la clarté de ce compte-rendu, nous séparons les résultats observés relativement aux deux questions portant sur les calculs de ceux qui concernent la signification des mots « périmètre » et « aire ».

En ce qui concerne les questions relatives aux calculs, nous avons distingué les réponses

relativement générales de celles qui ne sont valables que pour une forme particulière spécifiée dans la réponse. Une formule de calcul telle que *Côté*+*Coté*+... a été considérée comme générale car les différents mots *Côté* peuvent désigner des côtés différents. Par contre *Côté*×4 a été considéré comme particulier.

De la même manière, en ce qui concerne le calcul de l'aire, les formules du carré ou du rectangle n'ont pas été considérées comme généralisables. Par contre, la réponse « avec une formule » a été jugée telle malgré — et peut-être à cause de — son imprécision.

Nous avons néanmoins relevé les élèves qui donnaient comme exemples les formules du carré ou du rectangle.

35,9% des élèves donnent une méthode de calcul suffisamment générale pour le périmètre mais seulement 9,58% pour l'aire. Cela est notamment dû au fait qu'environ la moitié des élèves (52%) se contentent d'exemples (formules du carré ou du rectangle). De plus, 12% d'entre eux confondent les formules du périmètre et de l'aire.

En ce qui concerne la signification du mot « périmètre », nous constatons que 57% des élèves associent ce mot, de l'une ou l'autre façon, à celui de « contour » *sans aucune mention de mesure*, cependant que 22% incorporent cette idée de mesure à leur explication.

Le statut du mot *aire* est plus flou encore : 23 % des élèves l'associent à l'*intérieur* de « quelque chose », 33% au mot *surface* et seulement 13% lui attribuent un sens de *mesure*, généralement en présentant l'aire comme le résultat d'un calcul.

Les citations suivantes illustrent différentes réponses, certaines fréquentes, d'autres moins.

– **Qu'est-ce qu'un périmètre ?**

Un périmètre c'est le contour de quelque chose.

Fig. 14.1

c'est la longueur du tour des bandes.

Fig. 14.2

un périmètre est un longueur calculer par des +.

Fig. 14.3

la surface d'une chose

Fig. 14.4

une surface

Fig. 14.5

le calcul d'une L+P

Fig. 14.6

– **Qu'est-ce qu'une aire ?**

c'est l'intérieur d'un volume.

Fig. 14.7

la profondeur d'une forme

Fig. 14.8

une aire est une longeur au carré.

Fig. 14.9

ce ce qui rempli une forme

Fig. 14.10

la surface d'une figure

Fig. 14.11

la partie que l'on voit et qu'on peut sentir

Fig. 14.12

Il est aussi à noter qu'environ 9% des élèves ne répondent pas du tout à cette seconde partie de l'item 1.

14.3.2 Item 2

Cet item comportait un piège : l'impossibilité de disposer un carré entre les bords de la première bande. 45% des élèves sont tombés dans ce piège et ont placé un carré sur cette bande. En général, ils ont simplement laissé le carré déborder, sans respecter la deuxième

règle (*Fig. 14.13*). Certains ont fait preuve d'ingéniosité, par exemple en pliant le carré (*Fig. 14.14*).

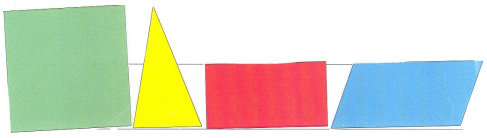


Fig. 14.13

Fig. 14.14

Seulement 28% des élèves ont évité le piège et placé correctement dans les deux bandes les sept formes qu'il était possible de placer. Oublions le piège : 48% des élèves placent correctement les sept formes.

TOUS les élèves ont placé correctement un carré dans la bande inférieure (la plus large). À l'opposé, c'est le triangle qui a provoqué le plus de problèmes : si 85% en placent correctement un exemplaire dans la bande la plus large, seuls 65% en font autant dans la bande la plus étroite. Dans ce cas, la consigne a été moins facile à appliquer, ou plus facile à oublier. Cependant, il fallait faire tourner le triangle pour le placer dans la bande la plus large et non dans l'autre.

Fig. 14.15

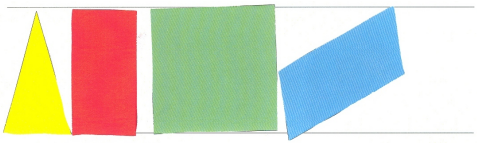


Fig. 14.16

Les deux parallélogrammes étaient plus faciles à positionner : 95% de placements acceptables dans la bande la plus étroite, 78% dans l'autre. Cette fois, c'est bien le cas qui nécessitait de faire tourner la forme qui a été moins bien réussi.

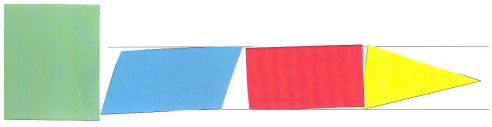


Fig. 14.17

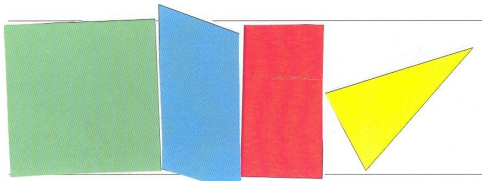


Fig. 14.18

Enfin, les deux rectangles ont été généralement bien placés : 95% dans la bande la plus étroite, 90% dans la bande la plus large (qui nécessitait de faire tourner le rectangle).

On retiendra surtout de cet item que certains élèves étaient au moment du test assez malhabiles dans la manipulation des formes, mais aussi que, même en ne tenant pas compte du piège constitué par le carré, la moitié d'entre eux (52%) commettent au moins une erreur de positionnement. Nous rencontrerons à nouveau ce type d'erreur à l'item 5.

14.3.3 Item 3

Nous avons mentionné au chapitre 6 que le concept d'*égalité d'aires* précède le concept d'*aire* lui-même. L'item 3 vient donc à son heure : les élèves sont-ils en mesure de constater

que les deux zones bleue et rouge ont même aire, et surtout d'expliquer pourquoi ?

Force est de constater que si 69% des élèves affirment l'égalité des deux aires, 15% seulement sont en mesure de fournir une justification complète et correcte. Il s'agissait évidemment de percevoir que les deux zones, rouge et bleue, avaient même complémentaire par rapport à des carrés de même taille. Il y avait donc deux informations à fournir. 14% des élèves ne fournissent qu'une des deux informations, ce qui porte quand même à près de 30% le taux de réponse ne comportant pas d'erreurs.

Fig. 14.19

Une des erreurs consiste à comparer les deux carrés plutôt que les deux zones coloriées. Les deux carrés sont alors parfois perçus, l'un comme complètement rouge, l'autre comme complètement bleu, la partie blanche commune étant dans ce cas « à la fois bleue et rouge » (*Fig. 14.20*). L'élève résout dans ce cas un problème tout différent !

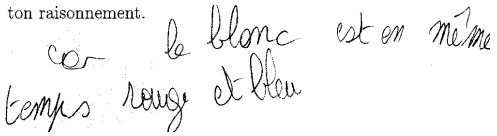


Fig. 14.20

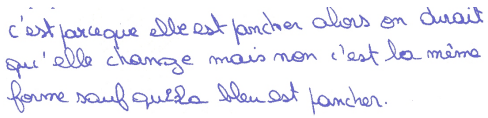


Fig. 14.21

Les deux seules formes dont on puisse dire qu'elles sont « les mêmes », sauf que l'une est penchée, sont les deux carrés (*Fig. 14.21*).

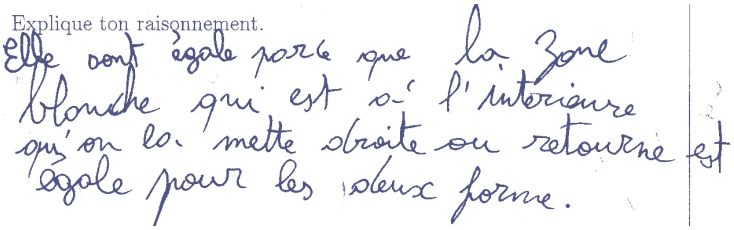


Fig. 14.22

Même chez certains élèves dont le raisonnement est fondamentalement correct, on peut repérer une tendance à assimiler les zones bleue et rouge aux carrés : l'auteur du raisonnement de la figure 14.22 considère la zone blanche comme intérieure aux deux autres formes. Celles-ci sont donc les deux carrés. Les zones bleue et rouge sont des formes géométriques irrégulières et peu familières. L'élève « se raccroche » aux carrés.

Les erreurs « classiques », confusion longueur – aire ou périmètre – aire, sont bien entendu présentes. Elles sont le fait d'environ 10% des élèves.

Signalons encore que 13% des élèves ne produisent aucune justification et que 13% (également) utilisent des méthodes variées.

On peut, *in fine*, considérer que cet item met en évidence des problèmes de perception dès lors qu'apparaissent des formes géométriques irrégulières. La variété des méthodes utilisées et le taux de non-justification sont significatifs de ce que cette question a pris de nombreux élèves au dépourvu.

14.3.4 Item 4

49% des élèves seulement ont réalisé avec exactitude le grand rectangle attendu. Un quart d'entre eux reproduisent correctement un ou plusieurs petits rectangles à l'intérieur (*Fig. 14.23*). Seuls deux élèves reproduisent, une ou plusieurs fois, le rectangle donné de manière non conforme. (*Fig. 14.24*).

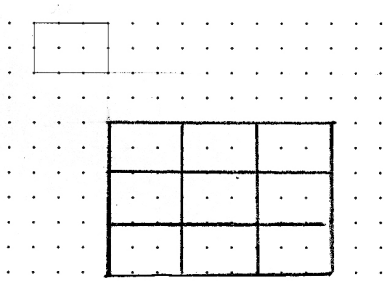


Fig. 14.23

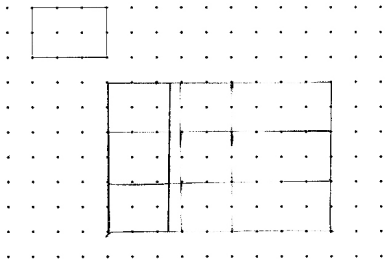


Fig. 14.24

La moitié des erreurs sont dues à une « perturbation par le quadrillage ». La présence de celui-ci a amené beaucoup d'élèves à ne rien mesurer, mais à compter le nombre de points situés sur les côtés du petit rectangle. Ils ont alors tout simplement multiplié les deux résultats par 3 et ont dessiné un rectangle de 12 points sur 9 ! On trouve ainsi une nouvelle version du vieux problème des piquets de clôture !

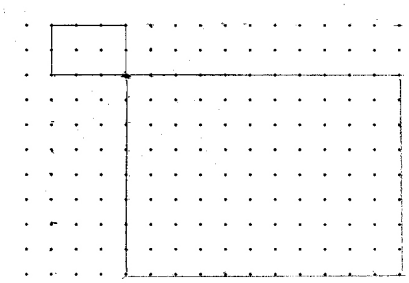


Fig. 14.25

Les deux questions subsidiaires ont été mal comprises. Le fait de bien répondre à la première n'implique pas que la réponse à la deuxième soit correcte : 26% ont bien répondu à la première, et 13% à la seconde. Un problème de fraction ?

Un nombre non négligeable d'élèves (31%) ne répondent ni à l'une ni à l'autre des deux questions et 21% des élèves ne répondent qu'à une des deux. Peut-être les questions ont-elles été mal comprises.

Beaucoup d'échecs à ces deux questions sont dûs à l'application aux aires des rectangles du même rapport que pour les périmètres (*Fig. 14.26*). Pour les 16% d'élèves qui commettent cette erreur, la phrase « ce rectangle-ci est trois fois plus grand que celui-là » n'est pas claire : ils ne peuvent déduire du contexte s'il est question des longueurs ou des aires.

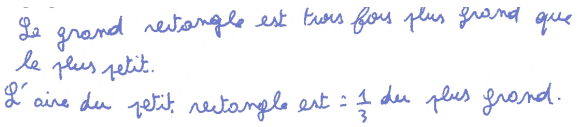


Fig. 14.26

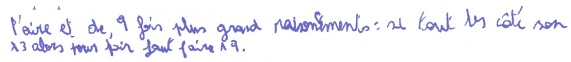


Fig. 14.27

Seuls quelques élèves (5%) adoptent un raisonnement adéquat. Un élève écrit (*Fig. 14.27*) : *si tout les côté sont* $\times 3$ *alors pour lair faut faire* $\times 9$.

14.3.5 Item 5

L'énoncé de cette question était tout à fait clair : *en comparant les aires, trouver l'intrus.* Des cinq formes présentées, quatre étaient d'aire 2, la cinquième (le carré placé en position « standard ») était d'aire 4. De plus, les graduations placées sur les bords de la bande permettaient des comparaisons faciles.

Mais une question de ce genre donne souvent lieu à une réaction immédiate, tenant compte de l'information visuelle plus que de celles fournies par l'énoncé. Il ne faut donc pas trop s'étonner de ce qu'on ne rencontre des comparaisons d'aires que sur 23% des copies. Il ne faut pas s'étonner non plus de ce que les réponses les plus fréquentes soient les suivantes :

1. La forme n°5 (le « carré sur pointe ») (32%).
2. La forme n°4 (la bonne réponse) (26%).

Examinons ces deux réponses dans l'ordre.

Le carré sur pointe

Les différences de cette forme avec les autres sont repérées immédiatement. On trouve sur les feuilles essentiellement quatre types d'arguments (vrais ou faux, cohérents ou non) pour expliquer que le carré sur pointe est l'intrus.

- Une différence de forme :

Fig. 14.28

- Une différence d'orientation :

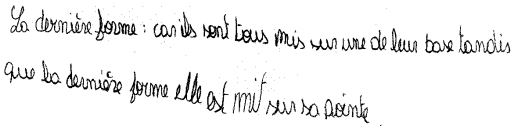


Fig. 14.29

Fig. 14.30

- Une différence de positionnement par rapport à la bande :

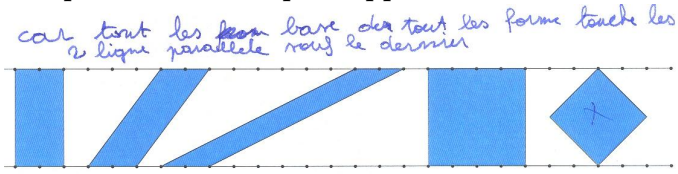


Fig. 14.31

- Une différence de taille :

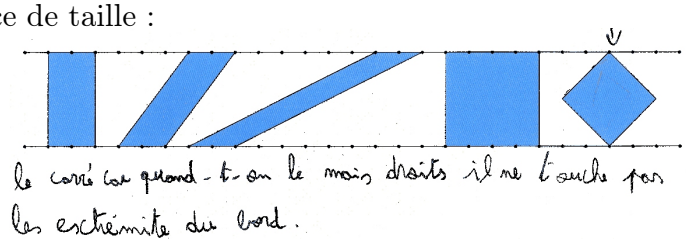


Fig. 14.32

Parfois la justification est tout à fait inattendue :

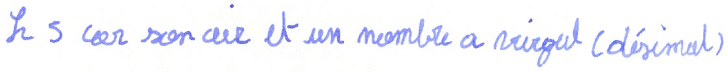


Fig. 14.33

La forme n°4

C'est la bonne réponse. Nous avons considéré une justification comme correcte dès qu'elle se réfère à une comparaison d'aires, même sans détailler le calcul de celles-ci. Nous n'en avons trouvé que 8 (5% des élèves) !

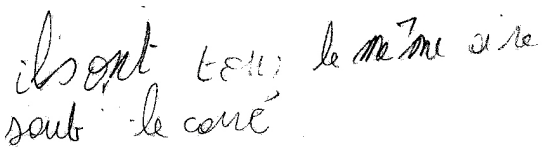


Fig. 14.34

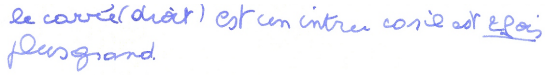


Fig. 14.35

D'autres justifications (erronées partiellement ou totalement) reposent

- sur la mesure des côtés horizontaux, souvent exprimée en « points », ce qui nous ramène au problème des « piquets de clôture » ;

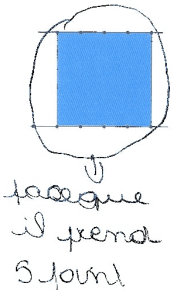


Fig. 14.36

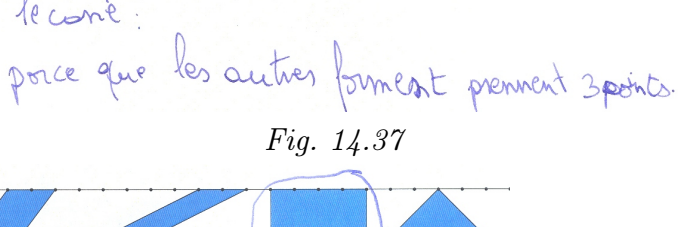


Fig. 14.37

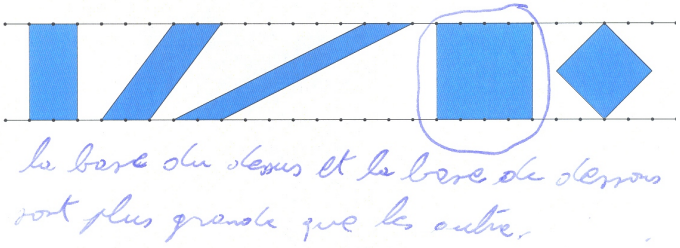


Fig. 14.38

- sur la comparaison d'aires fausses ;

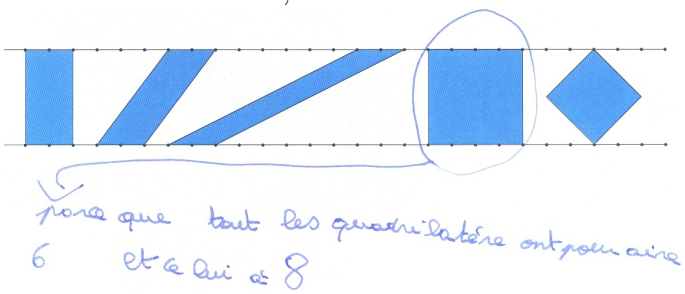


Fig. 14.39

- sur le fait que tous les côtés ont même longueur ;

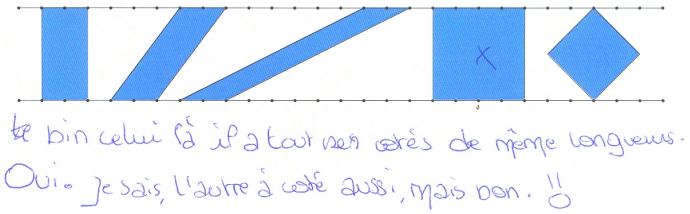


Fig. 14.40

La forme n°3, a également été sélectionnée comme « intrus », mais moins fréquemment. Les justifications la concernant sont variées.

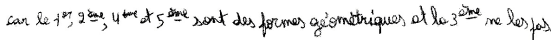


Fig. 14.41

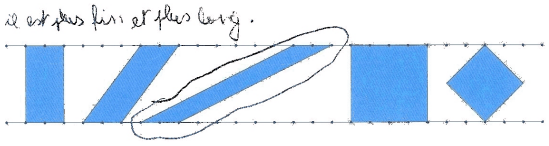


Fig. 14.42

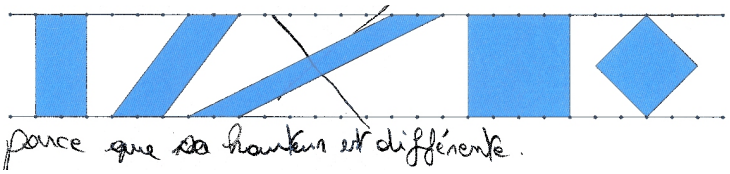
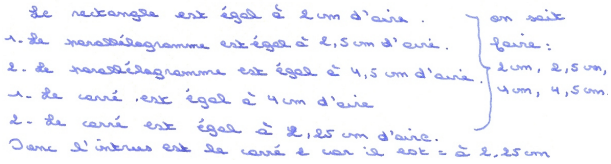


Fig. 14.43

On trouve encore d'autres types de justification : des calculs d'aires, des comparaisons de formules...



L'aire d'un parallélogramme et ici obtenue en multipliant les longueurs des deux côtés.

Fig. 14.44

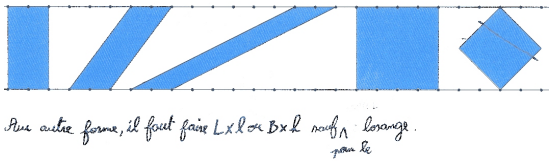


Fig. 14.45

Notons aussi que 22% des élèves n'ont pas répondu à cette question.

En observant la variété des démarches des élèves dans le cadre de cette question, on ne peut se départir de l'impression que beaucoup d'entre eux n'ont pas su comment aborder

la résolution. Certains expriment leur perplexité ouvertement (*Fig. 14.40*). D'autres sélectionnent non UN intrus mais DEUX (*Fig. 14.46*). Par ailleurs, les arguments basés sur l'orientation ou le positionnement des différentes formes montrent que celles-ci ne sont pas considérées en tant que formes géométriques, mais en tant que dessins sur une feuille de papier. Tout cela est pour nous une indication de ce que les connaissances des élèves sont instables. Il suffit alors d'une petite perturbation — en l'occurrence un exercice de type peu usuel — pour provoquer un déséquilibre et faire réapparaître des comportements d'erreur que l'on pouvait croire dépassés. Un tel phénomène de *régression* n'est pas rare.

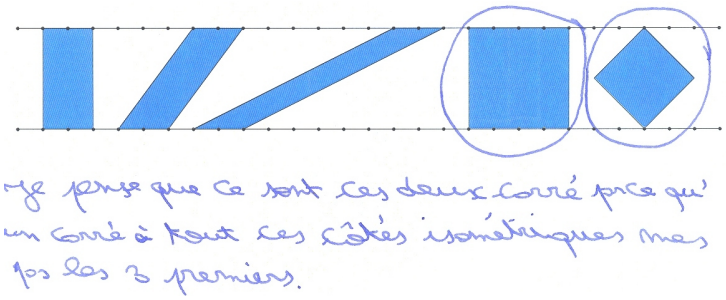


Fig. 14.46

14.3.6 Item 6

Ce dernier item du prétest proposait aux élèves une forme inhabituelle, mais dont le découpage ne présentait pas de grosses difficultés. De plus, la question était d'un type connu : calculer une aire. Les résultats sont en conséquence meilleurs que pour la question précédente le taux de réponses correctes est de 39,5% et le taux de réponses correctes accompagnées de justifications acceptables est de 24%.

On ne peut cependant être vraiment satisfait : 39% des élèves s'abstiennent totalement de répondre. Ont-ils été quand même déconcertés par la figure ou, tout simplement, dans certaines classes, les élèves n'ont-ils pas eu le temps d'achever le test ? On pourrait le croire car le taux de non-réponse à cette dernière question varie, selon la classe, entre 0% et 76%. Dans certaines circonstances, une heure de cours dans le secondaire peut facilement être amputée de 10 minutes ! Cette remarque vient à point nommé pour nous rappeler la prudence qu'il convient toujours d'observer au moment où on tire les conclusions d'une recherche.

La méthode de résolution la plus fréquente est la méthode par découpage et recomposition. Elle est utilisée par 36,5% des élèves. En particulier TOUS les élèves qui ont produit une justification acceptable ont employé cette méthode. Certains élèves représentent le découpage sur la feuille, en s'aidant parfois du tracé des médianes du carré, (*Fig. 14.47*). D'autres effectuent le découpage mentalement (*Figures 14.49 et 14.50*).

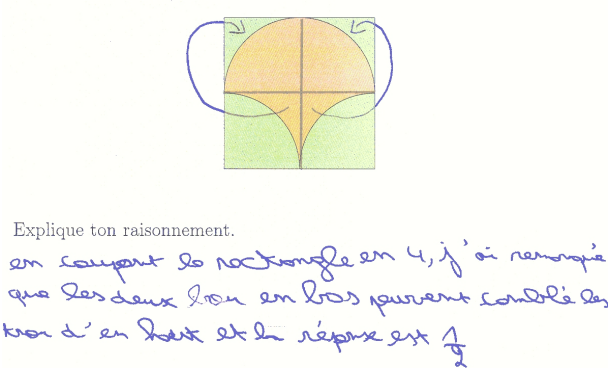


Fig. 14.47

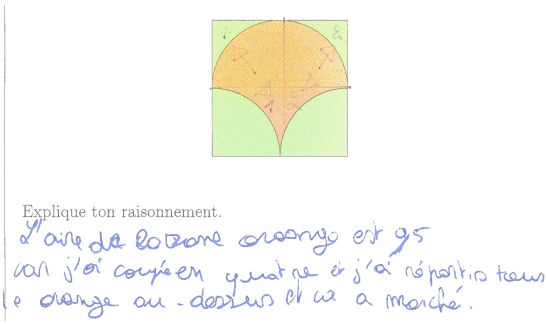


Fig. 14.48

Certains élèves appliquent la méthode par découpage correctement, en arrivant à la conclusion $\frac{1}{2}$ mais écrivent la réponse 1 sur leur feuille. Cette réponse, due à 8% des élèves, n'est pas aussi aberrante que l'on pourrait croire *a priori*. Les figures suivantes extraites de feuilles qui mentionnent toutes deux 1 comme réponse, montrent la confusion faite par l'élève : il constate que la zone orange a la même aire que la zone verte et prend celle-ci comme unité d'aire au lieu de prendre le carré.

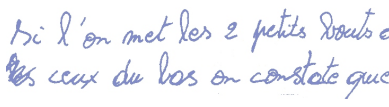


Fig. 14.49

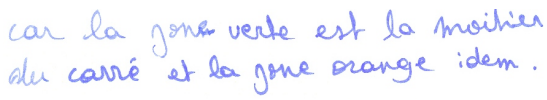


Fig. 14.50

Les autres démarches inadéquates ne sont guère fréquentes, aussi ne nous y attarderons-nous guère. Quatre élèves mesurent des longueurs et un élève calcule un périmètre. Cinq élèves appliquent des formules de calcul d'aire.

À titre anecdotique, mentionnons trois « justifications » inattendues.

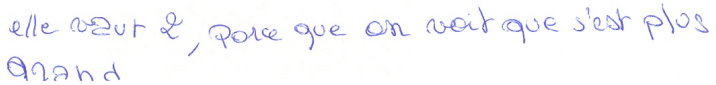


Fig. 14.51

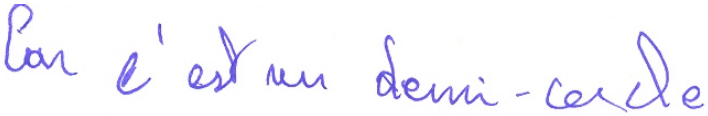


Fig. 14.52

Fig. 14.53

14.4 Des comportements de réussite ou d'échec

14.4.1 Des comportements d'échec

Nous nous intéressons surtout aux comportements qui trahissent la présence de conceptions imparfaites ou fausses ou encore des erreurs de procédure. Nous laissons donc de

côté les comportements qui se limitent à la production d'une mauvaise réponse ou d'une justification erronée, et qui ne sont en fait que des conséquences des précédents.

L'analyse statistique implicative nous a permis de dégager un certain nombre de comportements d'échec à ce pré-test (*section B.7.3*). Ces comportements sont en général isolés, en ce sens qu'ils se rapportent à un seul des items du test. Ceci nous amène à penser que les contextes des activités interviennent pour beaucoup dans la détermination des comportements des élèves.

Par exemple, le contexte « quotidien » de l'item 1, confère peut-être aux mots « longueur », « aire », « volume » une souplesse d'emploi qui ne correspond pas au sens mathématique. On constate ainsi à cet item une confusion entre longueur et aire qui n'intervient plus de façon importante dans les autres items. Le même item 1 montre d'ailleurs bien que les élèves de première secondaire associent majoritairement le sens de « contour » au mot « périmètre ».

Toutefois, on constate à l'item 3 que, pour comparer des aires, certains élèves comparent encore les périmètres. Ce n'est plus nécessairement une confusion longueur–aire, mais bien un autre type d'erreur : croire que deux formes ont même aire si et seulement si elles ont même périmètre.

Un autre comportement d'échec notable est, à l'item 5, le choix du carré sur pointe en tant qu'intrus, alors que l'énoncé demande explicitement de comparer les aires. La différence visuelle entre ce carré et les autres formes est telle que beaucoup d'élèves oublient la consigne.

14.4.2 Des comportements de réussite

En ce qui concerne les comportements de réussite, notre principale constatation est que ceux d'entre eux qui sont à la base du graphe implicatif, donc qui sont les plus difficiles à acquérir et en conséquence les plus significatifs de réussite, sont constitués non de connaissances (savoirs ou procédures) mais de la capacité à produire des justifications correctes. C'est ainsi que notre attention s'est portée plus particulièrement sur les comportements suivants :

- Réponse correcte à l'item 2
- Raisonnement complet et correct à l'item 3
- Raisonnement incomplet mais correct à l'item 3
- Procédure par comptage à l'item 4
- Raisonnement correct 4
- Justification partielle mais sans erreur à l'item 5
- Raisonnement partiel mais sans erreur à l'item 6

Le seul comportement de type procédural qui apparaît dans cette liste est le comptage à l'item 4. Encore ce comptage est-il utilisé dans le cadre d'une construction et non d'un dénombrement.

Bien entendu, pour produire des justifications et des raisonnements corrects, même partiels, des connaissances sont nécessaires. Ce que nous constatons est que les questions de ce pré-test nous permettent de vérifier la coordination de ces connaissances en une démarche cohérente. Nous allons en profiter pour vérifier l'homogénéité de la population testée.

14.5 La population testée est-elle initialement homogène ?

Ainsi que nous l'avons fait pour l'expérimentation dans le primaire, nous allons comparer les résultats des élèves des classes témoins et ceux des classes expérimentales lors de ce pré-test.

Comparons d'abord les taux de réussite aux différents items. Nous laisserons de côté l'item 1 qui fait intervenir trop d'éléments différents et est influencé par le contexte du quotidien.

À l'item 2, nous considérerons comme réussite le fait d'avoir placé correctement les sept formes qui pouvaient être placées et de n'avoir pas (mal) placé un carré dans la première bande. À l'item 3, la réussite est la réponse « égale », cependant qu'à l'item 4 nous relevons trois réponses : la production d'un dessin correct et les réponses aux deux questions concernant les rapports des aires R et r des deux rectangles. Enfin, à l'item 5 la réussite consiste à proposer le grand carré comme intrus et à l'item 6 à répondre $\frac{1}{2}$.

	Item 2	Item 3	Item 4 Dessin correct	Item 4 $\frac{R}{r}$	Item 4 $\frac{r}{R}$	Item 5	Item 6
Gr. Témoin	22 %	64 %	42 %	21 %	10 %	29 %	40 %
Gr. expé.	33 %	75 %	57 %	30 %	15 %	23 %	40 %
χ^2	2,64	2,37	3,33	1,75	0,75	0,74	1,25

Comme on le voit la plupart des questions sont mieux réussies par le groupe expérimental que par le groupe témoin. Cependant, aucun écart n'est significatif au seuil 0,95 ($\chi^2 > 2,706$).

Comparons à présent les résultats aux comportements de réussite mentionnés plus haut :

C1 : Raisonnement complet et correct à l'item 3

C2 : Raisonnement incomplet mais correct à l'item 3

C3 : Procédure par comptage à l'item 4

C4 : Raisonnement correct à l'item 4

C5 : Justification partielle mais sans erreur à l'item 5

C6 : Raisonnement partiel mais sans erreur à l'item 6

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Gr. Témoin	13 %	15 %	1 %	6 %	12 %	10 %
Gr. expé.	19 %	12 %	4 %	4 %	12 %	12 %
χ^2	0,97	0,31	0,95	0,61	0,02	0,17

À nouveau aucun écart n'est significatif au seuil 0,95. Cette fois, nous pouvons considérer qu'avant l'expérimentation, les deux groupes, témoin et expérimental avaient des performances comparables.

Chapitre 15

Un post-test en première secondaire (2006–2007).

15.1 Les énoncés

Le post-test comprend cinq items. Les élèves ont disposé de 50 minutes pour remplir le questionnaire. Il a été réalisé dans les mêmes classes que le pré-test. Par le jeu des absences, le nombre d'élèves a été ramené à 159, dont 81 du groupe expérimental, et 78 du groupe témoin.

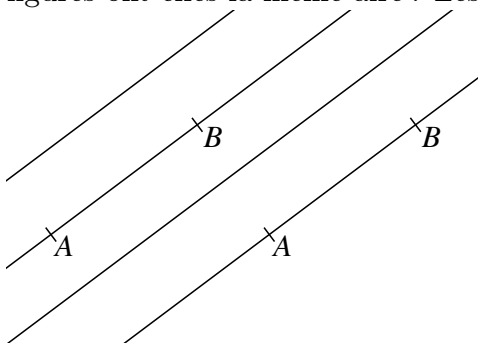
Les figures suivantes ne reproduisent pas en vraie grandeur les fiches soumises aux élèves.

– Item 1

Défi 1 – Dans les bandes ci-dessous, représente

1. un parallélogramme non rectangle dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
2. un rectangle, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
3. un carré, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
4. un losange non carré, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$,
5. un trapèze non parallélogramme, dont un côté a la même longueur que le segment $[AB]$.

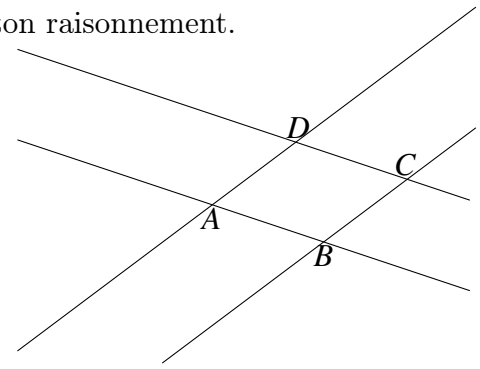
Tu peux utiliser tous les instruments que tu veux. Les sommets de chaque quadrilatère doivent être sur les bords de la bande.
Si tu ne parviens pas à dessiner des figures, explique pourquoi.
Certaines de ces figures ont-elles la même aire ? Lesquelles ?



– Item 2

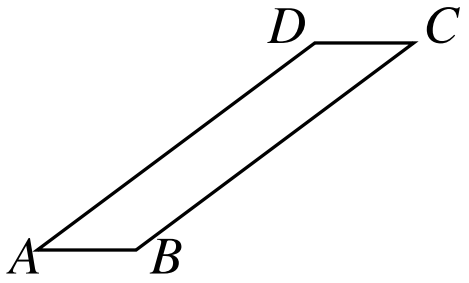
Défi 2 –

1. Dessine un parallélogramme $ABEF$ différent de ABCD, tel que les sommets E et F soient sur la droite CD.
2. Comment est l'aire de $ABEF$ par rapport à celle de $ABCD$? Explique ton raisonnement.



– Item 3

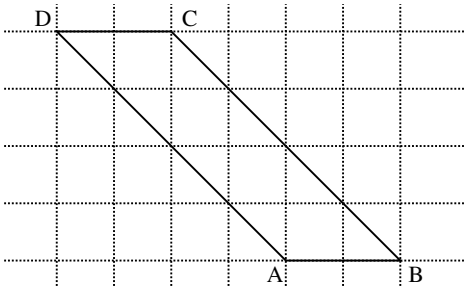
Défi 3 – Que vaut l'aire du parallélogramme $ABCD$? Utilise le cm^2 comme unité d'aire.
Tu peux tracer d'autres éléments sur la figure, tu peux mesurer.
Explique alors ce que tu as tracé, ce que tu as mesuré, et comment cela t'a permis de trouver l'aire.



– Item 4

Défi 4 – Trace le segment $[AC]$.

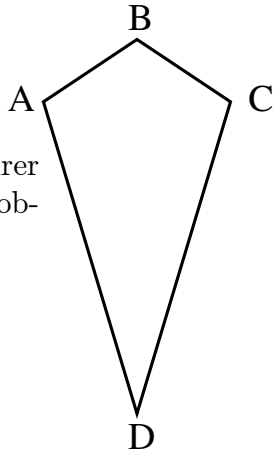
1. Comment est l'aire du triangle ABC par rapport à celle du triangle ADC ?
   Explique ton raisonnement
2. Que vaut l'aire du triangle ABC ?
   Comment l'as-tu obtenue ?



– Item 5

Défi 5 – $ABCD$ est un cerf-volant.

1. Sans autre information, peux-tu donner la valeur de son aire ?
   OUI ☐ Si oui, quelle est cette mesure ?
   NON ☐ Si non, tu peux tracer et mesurer tout ce qui est nécessaire pour l'obtenir. Que mesures-tu ?
2. Que vaut l'aire ? Explique comment tu l'as obtenue.
3. Dessine, sur la figure, un rectangle dont l'aire vaut le double de celle du cerf-volant.



15.2 Analyse des items

Avant d'entamer cette analyse, une remarque liminaire s'impose : nous avons renoncé à relever les erreurs liées à l'emploi du vocabulaire et des notations désignant les unités de longueur et d'aire. La confusion entre cm, cm^2, voire cm^3 est totale.

15.2.1 Item 1

Dans la première partie de la question, on demandait aux élèves de construire « dans les bandes » (si possible) un parallélogramme, un rectangle, un carré, un losange et un trapèze, tous ces polygones devant en outre avoir un côté de même longueur qu'un segment donné. Cette dernière construction rendait le carré inconstructible, la bande donnée étant trop étroite. Les élèves devaient alors expliquer pourquoi le carré ne pouvait être construit.

Le tableau suivant indique les taux de réponses correctes.

Parallélogramme	Rectangle	Carré	Justification	Losange	Trapèze
88 %	91 %	68 %	65 %	19 %	75 %

Ce tableau appelle peu de commentaires en ce qui concerne le parallélogramme et le rectangle.

- Six élèves n'ont pas dessiné de parallélogramme et treize en ont dessiné un qui ne respecte pas les consignes.
- Quatre élèves n'ont pas dessiné de rectangle et neuf en ont dessiné un qui ne respecte pas les consignes.

Le trapèze pose visiblement des problèmes : 28 élèves (17,6 %) n'en dessinent pas et neuf en dessine un qui ne respecte pas les consignes ou même « quelque chose » qui ne ressemble pas du tout à un trapèze (*Fig. 15.1*). Certains d'entre eux donnent une explication (*Fig. 15.2*, *Fig. 15.3*). Parfois, l'élève ne sait pas ce qu'est un trapèze, parfois il a mal compris la question.

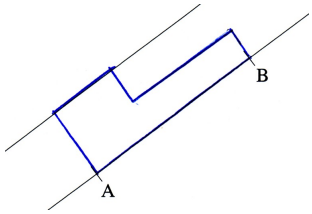


Fig. 15.1

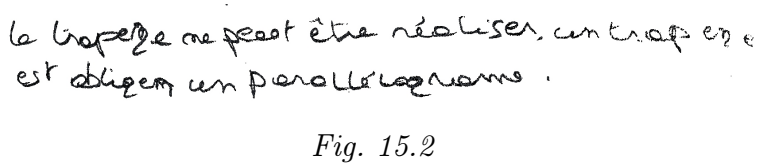

le trapèze ne peut être réaliser, un trapèze est obligem un parallélogramme.

Fig. 15.2

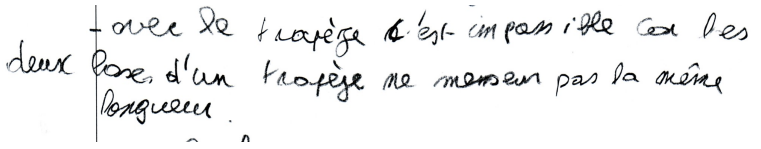

avec le trapèze c'est impossible car les deux base d'un trapèze ne mesure pas la même longueur.

Fig. 15.3

Nous constatons aussi que les trapèzes qui ont été dessinés sont souvent des trapèzes isocèles. Cette forme est-elle plus attractive ? Ou les trapèzes sont-ils plus souvent dessinés de cette façon ?

La question relative au carré n'a été réussie qu'à 65 %. Attention : pour cette question, la réussite consistait à dire explicitement qu'il n'était pas possible de dessiner le carré, et cela, indépendamment de la justification de cette impossibilité. Il convient donc d'ajouter que 15 % des élèves n'ont pas dessiné le carré *sans le mentionner explicitement*. Le taux de non-dessin est donc de 80 %, ce qui redevient honorable. Il y a quand même 20 % des élèves qui ont dessiné un carré, soit débordant de la bande (*Fig. 15.4*), soit comprimé pour y tenir.

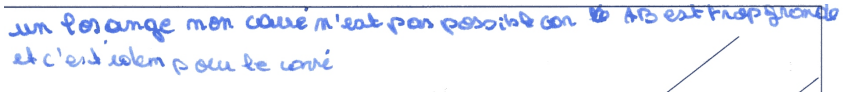


Fig. 15.5

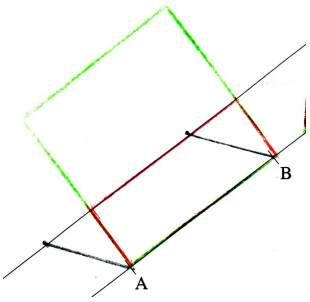


Fig. 15.4

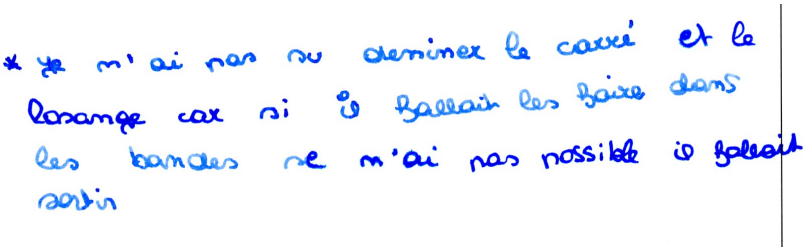


Fig. 15.6

En termes de hit-parade, on pourrait dire que le losange bat les records d'impopularité : 53 % de non-dessin et 26 % de dessins incorrects ! La raison la plus fréquente pour ne pas le dessiner : les bandes ne sont pas assez larges, comme dans le cas du carré (*Fig. 15.5*, *Fig. 15.6*).

Clairement, le losange est mal connu. Apparemment, il est souvent associé au carré (un élève dit : *un losange est un carré penché*. Puisqu'on ne pouvait pas dessiner un carré, on ne pouvait pas dessiner non plus un losange !

Mais il n'y a pas que cela : le stéréotype du « losange au garde-à-vous » existe toujours et empêche aussi le dessin (*Fig. 15.9*), ou le rend non conforme aux consignes (*Fig. 15.7*).

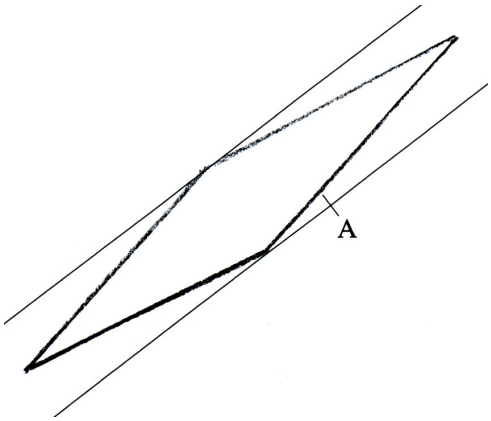


Fig. 15.7

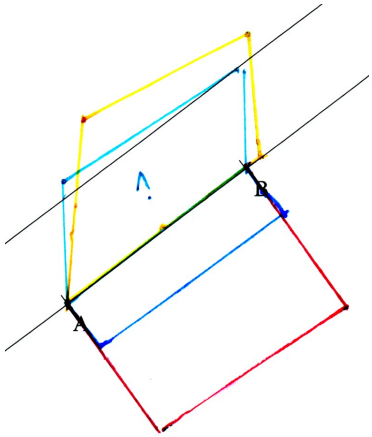


Fig. 15.8

À épingler également la formule parfois citée pour le calcul de l'aire d'un losange : côté × côté, comme pour le carré, à nouveau ! Tous ces éléments indiquent que le concept de

losange est *instable* chez beaucoup d'élèves.

Un élément intéressant est le nombre de réponses correctes fournies par chaque élève. Laissant de côté la justification relative au carré, nous obtenons le tableau suivant.

Nombre de réponses correctes	5	4	3	2	1	0
Nombre d'élèves	19	69	45	16	6	4
Pourcentages	12 %	43 %	28 %	10 %	4 %	2,5 %

Les figures 15.8 et 15.9 montrent deux exemples de réponses où les formes dessinées sont soit incorrectes, soit non conformes aux consignes. Sur la figure 15.8, le carré n'est pas dessiné sans que ce soit explicité.

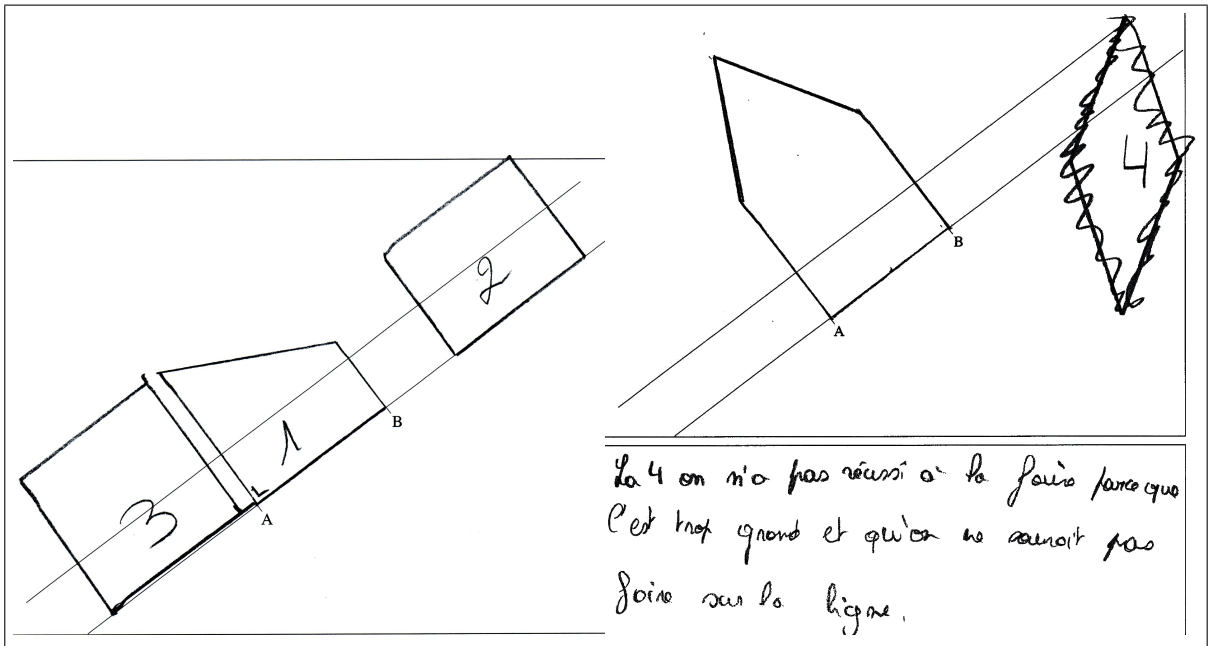


Fig. 15.9

La deuxième partie de cet item portait sur l'égalité des aires. Peu d'élèves y ont répondu. Peut-être l'item était-il trop long ? Ou bien l'explication concernant le carré a-t-elle fait perdre de vue la dernière partie de la question ?

Toujours est-il que
- 7 élèves (4 %) affirment l'égalité des aires du parallélogramme, du rectangle et du losange ;
- 34 élèves (21 %) se limitent à l'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle ; Ceci est cohérent avec le peu de réponses correctes à la question concernant le losange ;
- 1 élève se limite à l'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle ;
- de même, 1 élève se limite à l'égalité des aires du losange et du rectangle ;

Vu le peu de réponses à cette question, alors que l'on pouvait s'attendre à ce que l'égalité des aires du rectangle et du parallélogramme soit généralement reconnue, il est difficile de tirer des conclusions.

15.2.2 Item 2

Voici d'abord un tableau résumant les comportements des élèves par rapport à cet item.

Dessin correct	Dessin incorrect	Pas de dessin
57 %	39 %	4 %

Soixante-trois élèves (39 %) produisent un dessin incorrect, mais « incorrect » peut signifier des choses différentes.

1. L'objet dessiné peut ne pas être un parallélogramme (*Fig. 15.10*). C'est une erreur conceptuelle grave.
2. L'erreur peut résulter d'une mauvaise compréhension des consignes. Par exemple, un élève peut oublier qu'une lettre ne peut pas désigner deux points différents et élaborer une interprétation personnelle de la consigne « $ABEF$ différent de $ABCD$ ». L'auteur de la figure 15.12 l'a comprise comme signifiant « le deuxième parallélogramme $ABEF$ doit être construit à partir d'un nouveau segment $[AB]$, obtenu par translation du précédent dans l'une des bandes. »

   Autre mauvaise interprétation : pour certains élèves la phrase « tel que les sommets E et F soient sur la droite CD » signifie que l'un des points E, F est sur BC et l'autre sur AD (*Fig. 15.11*)

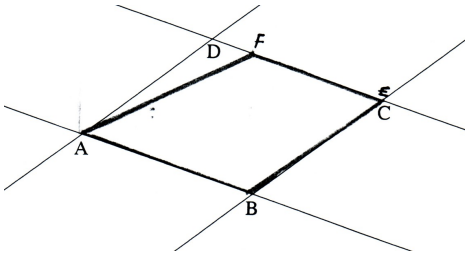


Fig. 15.10

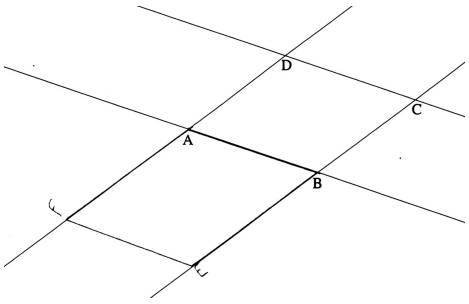


Fig. 15.11

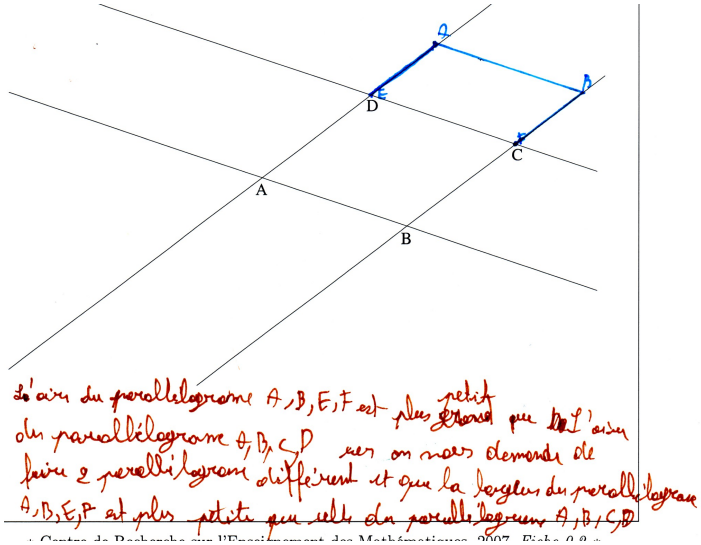


Fig. 15.12

Il nous a donc semblé opportun de distinguer les deux types d'incorrection des dessins, car ils peuvent avoir des conséquences différentes et nécessiter des remédiations différentes. Parmi les soixante-trois dessins incorrects, nous en avons dix-huit dans lesquels l'objet dessiné n'était pas un parallélogramme (le plus souvent du fait d'une imprécision jugée trop forte du tracé des parallèles) et quarante-cinq dans lesquels toutes les consignes ne

sont pas respectées. Avec la pratique de la géométrie, ce non respect des consignes devrait s'estomper.

Nous pouvons donc préciser le tableau ci-dessus :

Dessin correct	Non parallélogramme	Consignes non respectées	Pas de dessin
57 %	11 %	28 %	4 %

Ce défi 2 avait pour objectif de vérifier l'assimilation par les élèves de la construction de la formule de l'aire d'un parallélogramme, via le concept de famille de parallélogrammes (*voir le chapitre 9*). La première partie du défi devait amener l'élève à un dessin comportant deux parallélogrammes d'une même famille de sorte que la réponse considérée comme correcte à la seconde partie du défi était l'égalité.

Pour les élèves n'ayant pas produit un dessin correct, cette seconde partie du défi n'avait guère de signification. Nous restreignons donc dans ce qui suit l'analyse des réponses aux nonante élèves ayant réalisé un dessin correct. Voici donc les résultats de cette partie du défi, les pourcentages étant calculés sur un total de nonante réponses.

Réponse correcte	Autre réponse	Pas de réponse	Justif. correcte	Justif. incorrecte	Pas de justif.
66 %	16 %	19 %	30 %	32 %	38 %

Deux-tiers de cet échantillon de 90 élèves répondent que les deux parallélogrammes ont même aire. Quatorze répondent qu'elles sont différentes (*Fig. 15.13* et *Fig. 15.14*) et dix-sept ne répondent pas. Certaines réponses relèvent soit de la confusion connue entre périmètre et aire, soit de la croyance que plus le périmètre est grand, plus l'aire est grande.

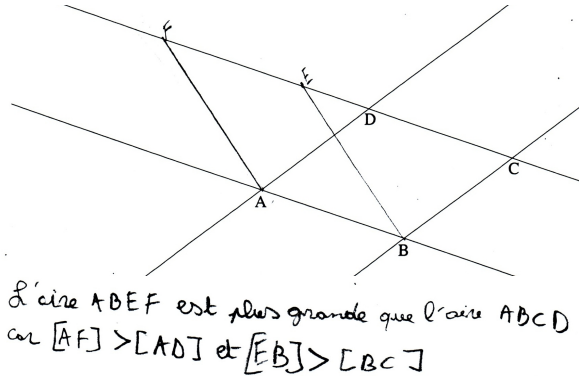


Fig. 15.13

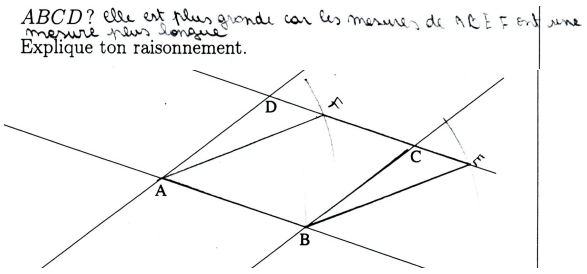


Fig. 15.14

Seulement 30 % de cet échantillon de 90 élèves formulent des justifications correctes (*Fig. 15.15* et *Fig. 15.16*).

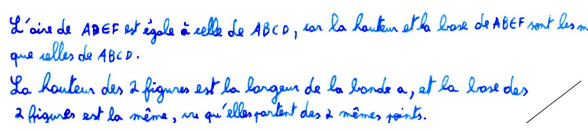


Fig. 15.15

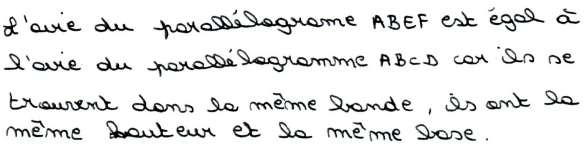


Fig. 15.16

Quelques erreurs de justification :

1. L'élève compare de nouveau les périmètres et non les aires.

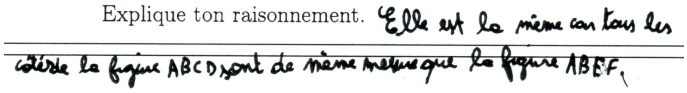


Fig. 15.17

2. Une justification peut être incomplète de plusieurs façons :

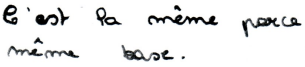


Fig. 15.18

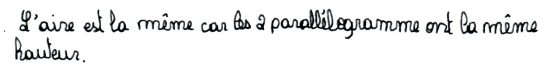


Fig. 15.19

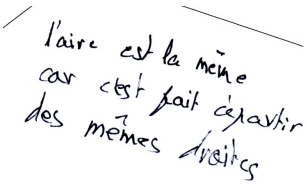


Fig. 15.20

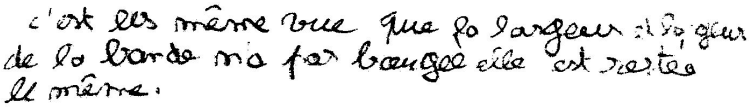


Fig. 15.21

3. Certaines erreurs de justification ne sont le fait que d'un seul élève et ne seront donc pas documentées ici.

15.2.3 Item 3

Le taux de réussite à cette question est *a priori* fort décevant, vu le temps consacré dans les classes à l'aire du parallélogramme : seulement 47 élèves, soit 29,5 %, ont produit la bonne réponse 4 cm^2. Aussi convient-il d'analyser quelles méthodes ont été employées et quelles erreurs ont été commises. Nous distinguerons cinq méthodes principales :

1. Formule Base × Hauteur en utilisant un des côtés $[AB]$, $[CD]$ comme base : $|AB| \times h_{AB}$. On avait $|AB| = 1$ cm et $h_{AB} = 4$ cm.
2. Formule Base × Hauteur en utilisant un des côtés $[AD]$, $[BC]$ comme base : $|AD| \times h_{AD}$. On avait $|AD| = 5$ cm et $h_{AD} = 0{,}8$ cm.
3. Produit des longueurs des côtés $[AB]$ et $[AD]$: $|AB| \times |AD|$.
4. Formule du périmètre.
5. Découpage en tranches.

D'autres méthodes ont également été utilisées, chacune par moins de cinq élèves, souvent issus d'une même classe.

Le tableau suivant indique la répartition des élèves entre ces différentes méthodes (sans oublier l'absence de réponse), ainsi que les taux de réussite associés.

	$\|AB\| \times h_{AB}$	$\|AD\| \times h_{AD}$	$\|AB\| \times \|AD\|$	Périmètre	Tranches	Méthodes variées	Non réponse
Effectifs	45	10	36	8	8	34	18
Taux de choix	28 %	6 %	22,5 %	5 %	5 %	20 %	11,3 %
Taux de réussite	93 %	40 %	0 %	0 %	0 %	3 %	0 %

La première ligne de ce tableau indique en chiffres absolus la répartition des 159 élèves selon le choix de la méthode. La seconde ligne indique la même répartition en pourcentages. Enfin, la troisième ligne indique le taux de réussite à l'intérieur de chaque groupe d'élèves. Par exemple, 93 % des 45 élèves ayant choisi d'appliquer la formule $|AB| \times h_{AB}$ ont réussi.

On comprend aisément pourquoi les deux formules $|AB| \times h_{AB}$ et $|AD| \times h_{AD}$ mènent à des taux de réussite différents.

- La première est facile à appliquer : la hauteur se trace sans problème, les mesures (en cm) sont des nombres entiers et multiplier 1 par 4 ne peut être considéré comme une tâche redoutable !

  Néanmoins trois élèves se trompent en appliquant cette formule. Le premier (*Fig. 15.22*) commet une erreur en mesurant la hauteur. Le second semble ignorer ce qu'est une hauteur (*Fig. 15.23*). Le troisième réalise un dessin correct, indique la bonne méthode et fournit un résultat incorrect (*Fig. 15.24*).

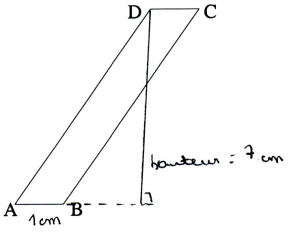


Fig. 15.22

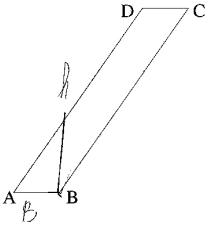


Fig. 15.23

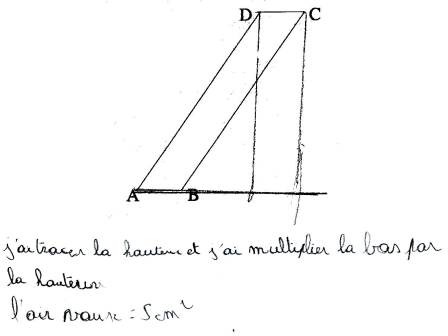


Fig. 15.24

- La seconde présente un plus grand nombre de difficultés. Une erreur peut se produire
  - lors du tracé de la hauteur (*Fig. 15.25*),
  - lors de la mesure de cette hauteur : au lieu de compter une hauteur de 0,8 cm, beaucoup d'élèves arrondissent à 1 cm... et l'aire passe de 4 cm^2 à 5 cm^2 (*Fig. 15.26*).

  Une erreur peut aussi rester inexpliquée (*Fig. 15.27*).

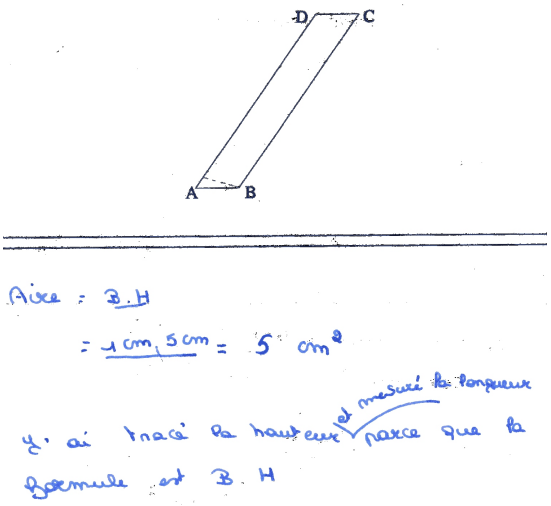


Fig. 15.25

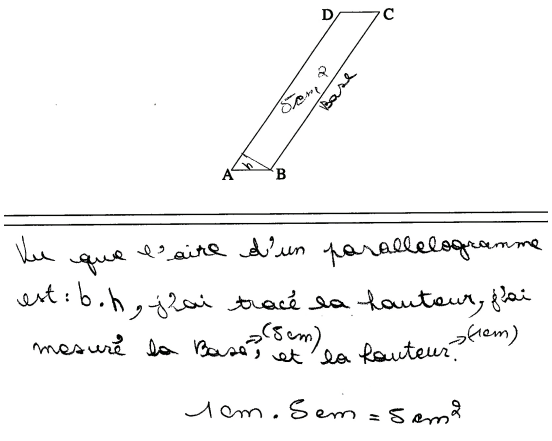


Fig. 15.26

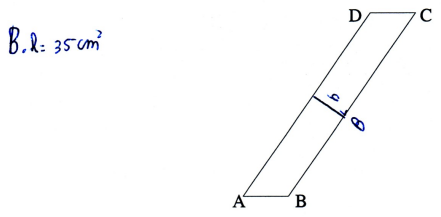


Fig. 15.27

- La méthode consistant à multiplier les longueurs des deux côtés résulte d'une confusion avec la formule du rectangle. Dans ce cas l'élève qualifie souvent le côté $[AD]$ de « hauteur » (*Fig. 15.28* et *Fig. 15.29*).

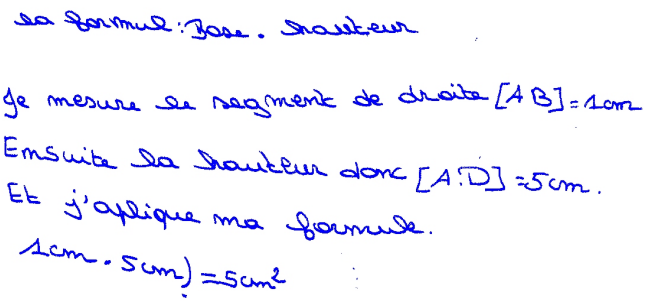


Fig. 15.28

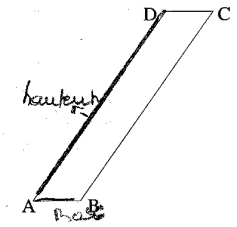


Fig. 15.29

- L'utilisation de la formule du périmètre (*Fig. 15.30*) est le fait de huit élèves. C'est un classique du calcul de l'aire.

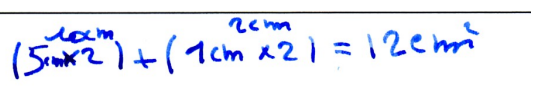


Fig. 15.30

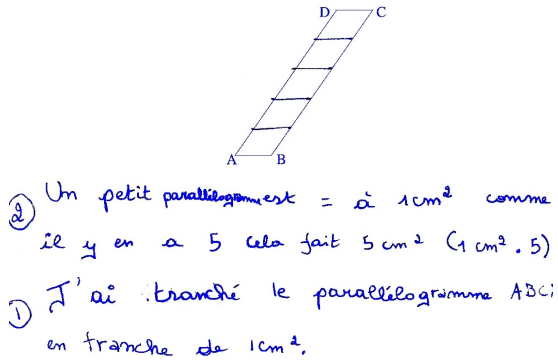


Fig. 15.31

- Le découpage en tranches (également huit élèves) est une méthode de type quantitatif. Peut-être est-ce lié au caractère « penché » du parallélogramme. Les élèves essaient de constituer des tranches de 1 cm^2. En général, ils exploitent le fait que le segment $[AB]$ mesure 5 cm pour le découper en cinq parties et ils utilisent les points de subdivision pour délimiter des tranches horizontales. On trouve aussi un découpage en sept tranches, et un cas « bizarre ».

- Parmi les « méthodes variées », signalons d'abord un élève qui dessine un rectangle de même hauteur que le parallélogramme et l'utilise avec succès pour trouver l'aire de celui-ci (*Fig. 15.32*). D'autres élèves essayent d'appliquer la même idée, mais n'y réussissent pas.

  On trouve aussi des applications de la formule du triangle, $\frac{B \times H}{2}$ (*Fig. 15.33*), des formules diverses (produit des quatre côtés...) des calculs peu clairs, des découpages selon une diagonale... Toutes ces tentatives sont vouées à l'échec.

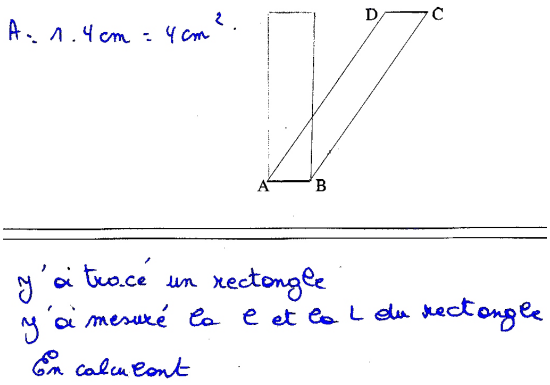


Fig. 15.32

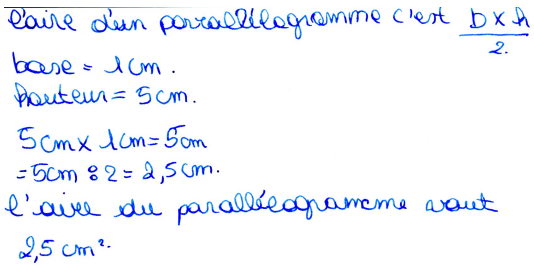


Fig. 15.33

Cette accumulation de méthodes différentes donne l'impression que la situation en première secondaire n'est pas vraiment meilleure que dans le primaire. En tous cas, elle reste instable.

15.2.4 Item 4

L'item 4 comporte deux parties qui appellent chacune une réponse et une explication.

Première partie de l'item 4

Cent trente élèves affirment correctement l'égalité des aires des deux triangles, ce qui donne un taux de réussite à la première partie de 82 %. Il est assez normal que ce taux soit assez élevé, vu que la situation testée ici est celle qui avait servi à construire la formule de l'aire du triangle (*voir la section 9.6.2*). Dans ce contexte, le fait que vingt-trois élèves (14 %) s'abstiennent de répondre et que six (4 %) fournissent des réponses « bizarres » reste préoccupant.

Ce qui est aussi intéressant, c'est la méthode utilisée par les élèves pour expliquer l'égalité des deux aires. Nous distinguerons ci-dessous plusieurs méthodes.

- La première consiste essentiellement à dire que *la diagonale coupe le parallélogramme en deux parties de même aire* (*Fig. 15.34*). Lors des activités de construction de la formule d'aire, cette propriété a été observée intuitivement et prise comme point de départ. Elle constitue donc une explication correcte et il est normal qu'elle soit la plus fréquente. Elle est parfois formulée avec imprécision et nous l'avons considérée comme valable dès que l'idée de *coupage* était présente. Nous la désignerons par l'expression « Coupage en deux ».

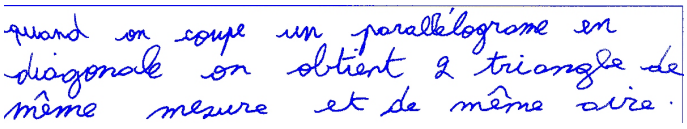


Fig. 15.34

- Sous l'appellation « Explications apparentées », nous rassemblons divers raisonnements peu formalisés qui reviennent à une comparaison directe des deux triangles, par superposition ou comparaison des longueurs des côtés. L'auteur de la figure 15.35

élève s'inspire peut-être d'une manipulation avec *Apprenti Géomètre* qui lui permet de superposer les deux triangles. À la figure 15.36, on peut lire un raisonnement mathématiquement correct puisqu'il s'agit d'un des cas d'isométrie des triangles, mais l'élève l'ignore probablement. Il s'agit bien pour lui d'un raisonnement intuitif, correspondant à la superposabilité.

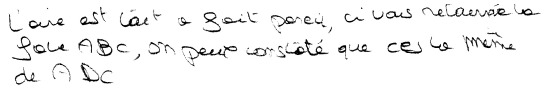


Fig. 15.35

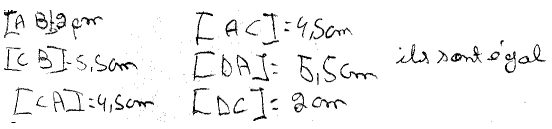


Fig. 15.36

- Une autre explication proche consiste à invoquer le fait que les deux triangles ont « même base et même hauteur » (*Fig. 15.37*). C'est encore une explication de type strictement géométrique en ce sens qu'aucune mesure ne doit être réalisée. Il suffit de *voir* des égalités de longueurs (par exemple sur le quadrillage). Toutefois, elle anticipe et rend inutile l'application de la formule.

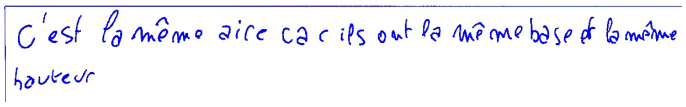


Fig. 15.37

- L'explication suivante est précisément l'usage de la formule classique (*Fig. 15.38*).

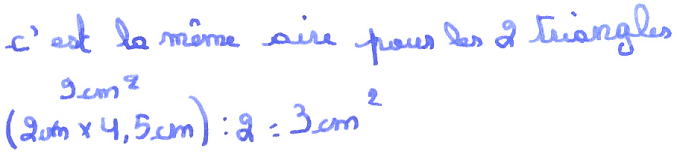


Fig. 15.38

- Un autre type d'explication a également été rencontré : le comptage des petits carrés (*Fig. 15.39*). Autrement dit le mode quantitatif atomisé.

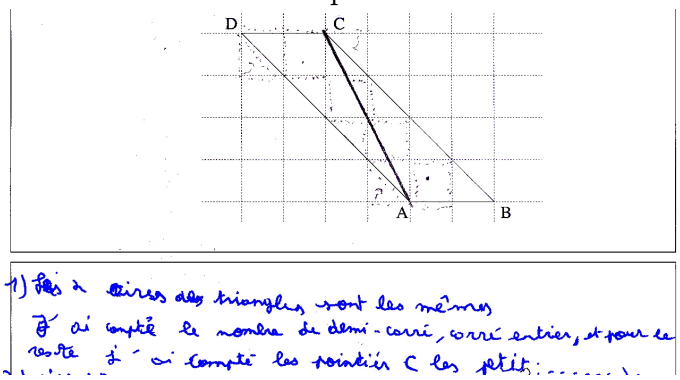


Fig. 15.39

- Enfin, quelques réponses partielles n'ont pu être rangées dans aucune des catégories précédentes (*Fig. 15.40*). Nous les classerons sous « Explications partielles ».

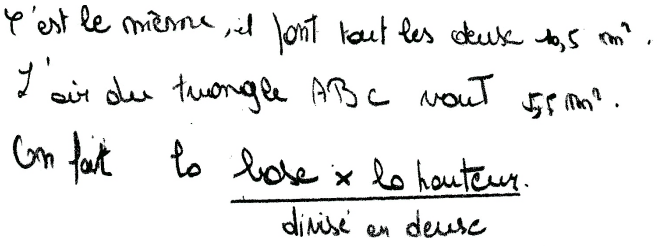


Fig. 15.40

Le tableau suivant mentionne la répartition des élèves entre les différentes méthodes, les pourcentages correspondants et les taux de réponse correcte calculés par rapport aux nombres d'élèves des groupes correspondants.

	Coupage en deux	Expl. apparentées	Base et hauteur	Formule	Comptage	Expl. partielles	Pas d'expl.
Effectifs	62	8	2	24	3	8	52
Taux de choix	39 %	5 %	1 %	15 %	1,9 %	5 %	29 %
Taux de réussite	92 %	100 %	100 %	83,3 %	100 %	62,5 %	56 %

Insistons sur le fait que dans ce tableau le mot « réussite » désigne le fait d'avoir répondu que les deux aires sont égales, pas que la valeur de ces aires soit correcte. On note aussi que le nombre d'élèves qui ne fournissent pas d'explication est plus du double du nombre d'élèves qui n'ont pas répondu à cette première question.

Deuxième partie de l'item 4

Quarante des cent cinquante neuf élèves, soit 25 % n'ont pas répondu à cette deuxième partie de l'item 4. Ceci confirme le caractère préoccupant déjà signalé au début de l'analyse des réponses à la première partie. Parmi les cent dix-neuf élèves ayant répondu, cinquante-huit (36,5 %) ont trouvé, parfois avec une imprécision due aux mesures effectuées, la réponse correcte (4 cm^2). Et par conséquent soixante-et-un élèves (38,5 %) proposent une réponse incorrecte.

Les cent dix-neuf élèves qui ont répondu à la question devaient de plus expliquer la méthode utilisée. Six ne le font pas. Nous pouvons regrouper les méthodes décrites par les autres en trois catégories : celles qui reposaient sur la formule donnant l'aire d'un triangle, celles qui reposaient sur la formule donnant l'aire d'un rectangle, et... les autres. Voici la répartition des cent treize élèves en ces trois catégories et les taux relatifs de réponse correcte à la question posée (aire du triangle ABC) calculés séparément pour chaque catégorie.

	Formule du triangle	Formule du rectangle	Autre méthode
Effectifs	92	10	11
Taux de réussite	59 %	0 %	18 %

Passons les trois catégories en revue.

- La formule du triangle

Dans cette catégorie, nous avons rangé aussi bien les élèves appliquant la formule $\frac{b \times h}{2}$ que ceux qui expliquent « j'ai calculé l'aire du parallélogramme, puis divisé par 2 ». Les deux démarches sont en effet les mêmes. En particulier, dans les deux cas, la principale difficulté est le choix de la hauteur.

Trente élèves sur les nonante-deux commettent une erreur en effectuant ce choix. La plupart d'entre eux ont choisi le côté $[AB]$ comme base. Ils prennent alors comme hauteur soit le côté $[AC]$ soit le côté $[BC]$, ce qui les amène à l'aire soit de 4,5 cm^2, soit de 5,7 cm^2 s'ils ont mesuré $[BC]$ avec précision, de 5,5 cm^2 dans le cas contraire. Certains évaluent la hauteur à 5 cm, sans qu'on puisse déterminer avec certitude ce qui les a amenés à cette valeur. Ont-ils hésité entre 4,5 cm et 5,5 cm ? Ont-ils arrondi leur mesure ? Ou encore ont-ils mesuré la distance du sommet C au milieu du côté $[AB]$? La figure 15.41 est due à un élève qui choisit 5,5 cm comme hauteur du triangle ABC et 4,5 cm comme hauteur du triangle ADC.

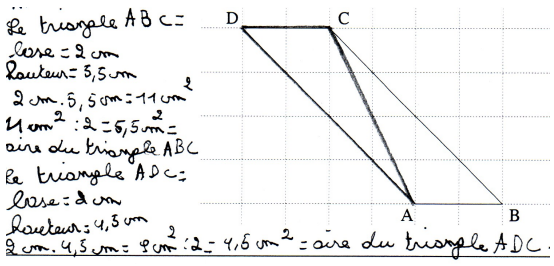


Fig. 15.41

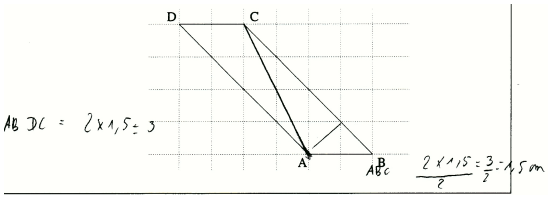


Fig. 15.42

Certains élèves choisissent le côté $[BC]$ comme base et ont alors plus de difficulté pour déterminer la hauteur correspondante, généralement évaluée à 1,5 cm (elle vaut $\sqrt{2}$ cm). L'auteur de la figure 15.42 associe la base $[AB]$ à la hauteur issue du sommet A.

En plus des trente élèves qui commettent une erreur en choisissant la hauteur, on en trouve sept qui commettent des erreurs de calcul.

- La formule du rectangle

Appliquer cette formule revient à oublier la division par 2. Ainsi, que la hauteur ait été bien choisie ou non, cette formule ne peut mener qu'à l'échec.

- Autre méthode

Les onze élèves de cette catégorie sont, pour la plupart, en situation difficile. En plus de la formule du périmètre, ils effectuent des calculs tels que « multiplier les longueurs des trois côtés du triangle », « additionner deux côtés » ... Il en est cependant deux qui aboutissent à la réponse correcte, sans appliquer de formule, mais en « comptant les petits carrés » (*Fig. 15.43*).

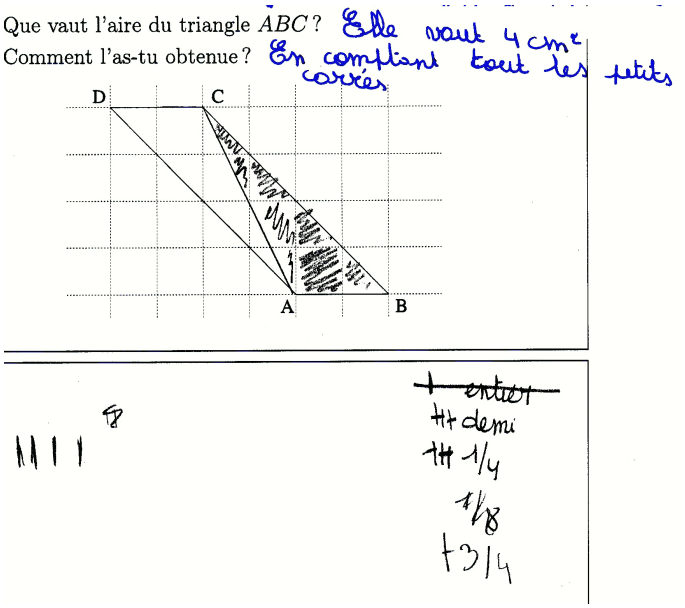


Fig. 15.43

Il nous reste une particularité à signaler. Vingt élèves (12,5 %) n'ont pas tracé le segment $[AC]$. Parmi eux, douze n'ont rien écrit sur leur feuille. Intéressons-nous aux huit autres.

Quatre répondent correctement à la première question de l'item 4 (sans expliquer leur réponse) :

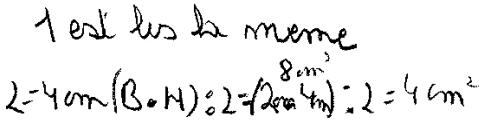


Fig. 15.44

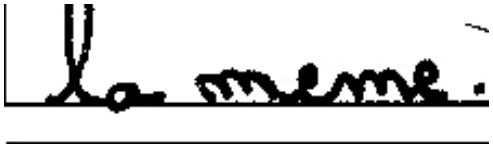


Fig. 15.45

Fig. 15.46

L'élève auteur de la figure 15.47 a tracé deux triangles isocèles avec comme bases les segments $[AB]$ et $[DC]$.

Il conclut directement à l'égalité des aires, mais quels triangles compare-t-il réellement ? A-t-il sciemment remplacé les deux triangles ABC et ADC par deux triangles plus faciles à comparer ?

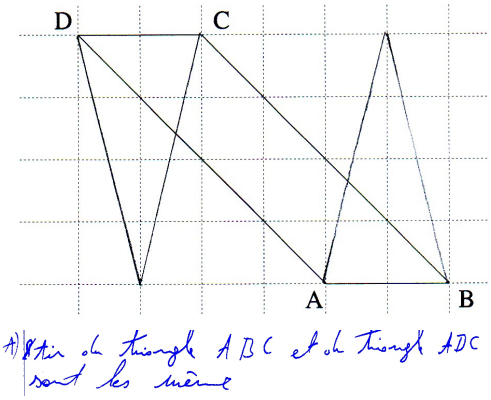


Fig. 15.47

À la deuxième partie de la question, trois des huit élèves concernés utilisent la formule du triangle, un autre la formule du rectangle. Un seul calcule correctement l'aire du triangle

ABC. Un autre (l'auteur de la figure 15.47) trouve 4,3 cm^2, et on peut admettre qu'il s'agit d'une imprécision dans la mesure de la hauteur, car il applique la bonne formule, et sans erreur de calcul.

La question qui se pose est de savoir si pour ces élèves la visualisation mentale du segment $[AC]$ suffit à supporter le raisonnement. Clairement, il n'est pas possible de tracer un segment sans l'avoir au préalable visualisé mentalement. Les élèves ayant tracé $[AC]$ sont donc aussi passés par cette phase. Au moins pour certains d'entre eux, le tracé effectif était nécessaire.

Le nombre d'élèves n'ayant pas tracé le segment $[AC]$ est maheureusement trop faible pour que nous puissions en tirer des conclusions dans la suite de cette analyse.

15.2.5 Item 5

Avec cet item, nous voulions voir dans quelle mesure les élèves pouvaient transférer leurs acquis à une situation nouvelle pour eux. C'était donc une petite activité de résolution de problème qui leur était posée.

- La première question avait surtout pour but d'amener les élèves à s'approprier le problème, en les amenant à s'interroger sur la façon de le résoudre.
- Avec la deuxième question, on leur demandait d'aller jusqu'au bout de la résolution du problème en indiquant l'aire du cerf-volant et la méthode de calcul appliquée.
- Enfin la dernière question permettait de valider le résultat de la recherche en fournissant un moyen de contrôle. Cette étape pouvait éventuellement être intégrée à la deuxième.

Examinons en détail les réactions des élèves à chacune de ces trois questions.

- **Première question**
  La formulation « Sans autre information, peux-tu donner la valeur de son aire ? » était difficile pour des élèves de première secondaire. Vingt-trois élèves répondent « oui », dont trois seulement fournissent une réponse. Dans la suite, ces élèves ayant répondu « oui » ne se comportent pas différemment de ceux qui ont répondu « non ». Les réactions à cette question ne nous apprennent qu'une chose, c'est que nous aurions dû la rédiger autrement ou l'abandonner.
- **Deuxième question**
  Il est vraisemblable que le tracé du cerf-volant, semblable au stéréotype du losange « au garde-à-vous » a attiré l'attention de beaucoup d'élèves sur les diagonales. De fait, 103 élèves sur 159 (65 %) ont tracé au moins une diagonale. On peut considérer que pour certains élèves, il s'agit là d'un transfert d'un acquis puisque c'est cette méthode qui avait été utilisée (*voir section 9.8*) lors des activités concernant l'aire du losange et son insertion dans un rectangle.
  Le tableau suivant indique les pourcentages de valeurs correctes attribuées à l'aire, tant pour l'ensemble de la population testée, que pour les deux groupes d'élèves distingués selon qu'ils ont ou non dessiné au moins une diagonale. Une valeur a été considérée comme

correcte si sa justification utilisait une méthode adéquate avec des données bien choisies, et cela même si la réponse numérique n'était pas exacte. Sous les mêmes conditions, la justification a également été considérée comme correcte. Cette façon de dépouiller les réponses résulte de notre souci de concentrer notre attention sur les méthodes utilisées par les élèves et non sur les imprécisions de mesures ou les erreurs de calcul.

	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Pas de réponse
Tous les élèves	29 %	36 %	35 %
Avec diagonale(s)	43 %	42 %	15 %
Sans diagonale	4 %	26 %	70 %

En lisant la première colonne de ce tableau, on peut penser que les élèves n'ayant pas dessiné de diagonale ont beaucoup moins bien réussi que les autres puisque leur taux de réponse correcte est largement inférieur. En lisant la seconde colonne, on constate que leur taux de réponse incorrecte est également inférieur. En fait la différence entre les deux groupes se situe d'abord du côté de l'absence de réponses.

Examinons ensuite les méthodes utilisées pour la résolution, en séparant à nouveau les élèves ayant dessiné une diagonale et les autres.

Dans les deux cas, nous avons relevé

- les élèves qui ont décomposé le cerf-volant en deux triangles, calculé les aires des deux triangles et justifié correctement ;
- les élèves qui ont calculé le demi-produit des diagonales et justifié correctement ;
- les élèves qui ont procédé d'une autre manière et justifié correctement ;
- les élèves qui ont justifié incorrectement ;
- les élèves qui n'ont pas justifié.

Les « autres manières de justifier correctement » mentionnées ci-dessus ne sont qu'au nombre de deux et utilisées par quatre élèves. Trois d'entre eux calculent en premier lieu l'aire du rectangle double du parallélogramme, puis divisent par 2 (*Fig. 15.49*). Le quatrième découpe le cerf-volant en quatre triangles au lieu de deux.

Des justifications correctes

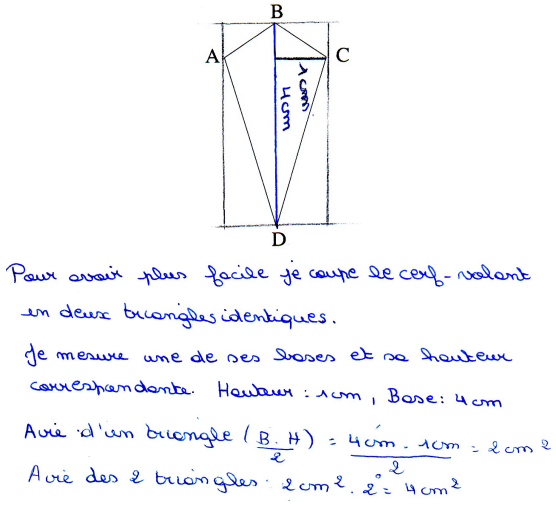


Fig. 15.48

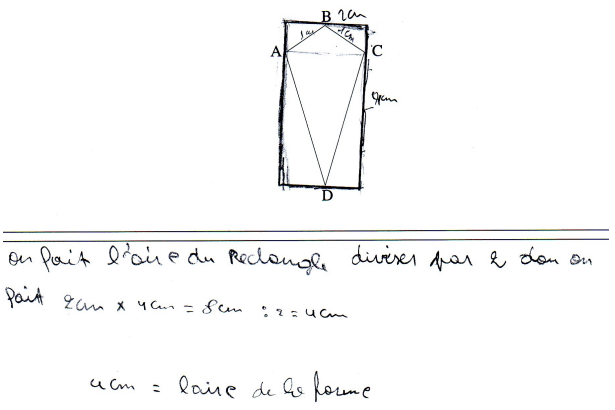


Fig. 15.49

Des justifications incorrectes

Fondamentalement, c'est la maîtrise insuffisante de la procédure de détermination de l'aire d'un triangle qui est à la base des mauvais résultats enregistrés. Nombreux sont les élèves qui pensent à découper le cerf-volant en deux triangles. Ensuite... on retrouve bien entendu des méthodes incorrectes déjà rencontrées dans les items précédents. Par exemple la multiplication des longueurs des côtés (*Fig. 15.50*) ou le calcul du périmètre (*Fig. 15.51*).

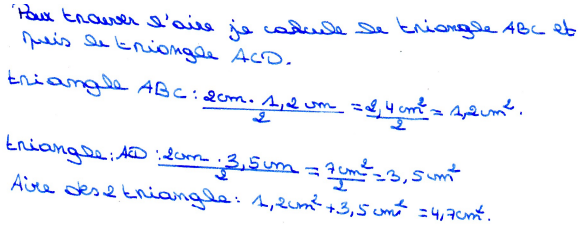


Fig. 15.50

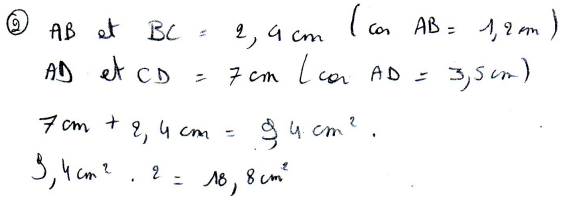


Fig. 15.51

La figure *Fig. 15.52* illustre une erreur d'un nouveau genre, associée à une méthode qui n'est ni un découpage en deux triangles, ni le demi-produit des diagonales. L'élève veut obtenir l'aire du cerf-volant en soustrayant l'aire totale des triangles extérieurs à celle du rectangle. Outre les imprécisions de mesure, il se trompe dans le calcul de l'aire totale des triangles extérieurs.

Quant à l'auteur de la figure 15.53, il se trompe en convertissant les mm² en cm².

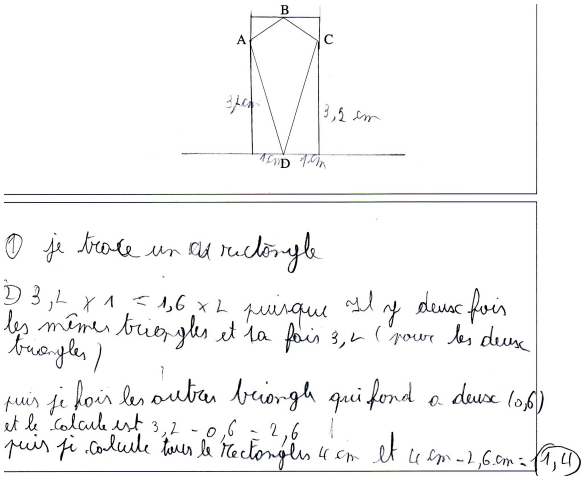


Fig. 15.52

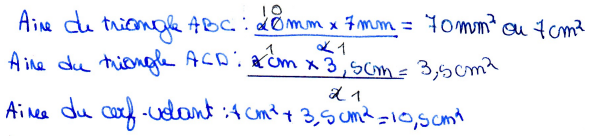


Fig. 15.53

Le tableau suivant indique les taux des différentes justifications.

	Aires deux triangles	Demi-produit diagonales	Autre manière	Justification incorrecte	Pas de justification
Tous les élèves	26%	3 %	2,5 %	35 %	33 %
Avec diagonale(s)	39 %	5 %	2,9%	39 %	13,7%
Sans diagonale	1,8 %	0 %	2 %	28 %	68 %

De nouveau, nous voyons apparaître une plus grande réussite chez les élèves qui utilisent les diagonales par rapport à ceux qui ne les utilisent pas. Ceux-ci ne perçoivent pas les triangles à l'intérieur du cerf-volant, ni l'analogie avec le losange. Ils n'ont en fait pas de méthode claire pour calculer l'aire. On remarque néanmoins que la conséquence en est

beaucoup plus l'absence de justification que la justification incorrecte. Autrement dit, ces élèves ne font pas nécessairement « n'importe quoi ».

Les deux tableaux qui viennent d'être présentés montrent une fois de plus l'importance de la visualisation en géométrie et, l'importance de la concrétiser par un tracé effectif.

- **Troisième question**

Présentons à nouveau les résultats à cette question par un tableau distinguant les élèves selon leur tracé des diagonales. Nous avons considéré trois possibilités.

– Le rectangle est correctement dessiné.
– Un rectangle est dessiné mais n'a pas les bonnes dimensions.
– Aucun rectangle n'est dessiné.

Signalons aussi qu'en plus de ces possibilités, certains élèves ne positionnent pas leur rectangle — même de bonnes dimensions — de façon que les sommets du cerf-volant soient sur les côtés. Ces élèves n'effectuent pas de liaison entre les propriétés du rectangle et celles cerf-volant.

	Rectangle correct	Rectangle incorrect	Pas de rectangle
Tous les élèves	37,7%	22%	40,2%
Avec diagonale(s)	46 %	22.5 %	31 %
Sans diagonale	23 %	21 %	56 %

Un dernier tableau va nous permettre de tirer une conclusion. Rassemblons les taux de réponse correcte (premier tableau), de justification correcte (en sommant les trois premières colonnes du deuxième tableau) et de réponse correcte (troisième tableau) :

	Aire correcte	Justification correcte	Rectangle correct
Tous les élèves	29 %	31,5 %	37,7%
Avec diagonale(s)	43 %	46,9 %	46 %
Sans diagonale	4 %	3,8 %	23 %

Nous observons la stabilité du groupe d'élèves qui tracent au moins une diagonale. Ils sont à peu près dans les mêmes proportions à visualiser des traits servant à découper le cerf-volant ou des traits permettant de « sortir » de celui-ci.

Par contre au sein du groupe d'élèves qui ne dessinent pas de diagonale, ceux qui complétent le cerf-volant en un rectangle sont nettement plus nombreux que ceux qui arrivent à donner une valeur numérique à l'aire. Ce groupe d'élèves est plus à l'aise pour réaliser une étude qualitative que numérique. Il pourrait continuer d'évoluer.

15.3 Des comportements de réussite ou d'échec

15.3.1 Des comportements d'échec

L'analyse des comportements d'échec réalisée à l'aide de l'analyse statistique implicative montre d'abord que les comportements d'échec aux items 1, 2 et 3 sont fortement liés. Ainsi, les élèves qui fournissent des réponses incorrectes à l'item 1 ont tendance à faire de même aux items 2 et 3.

Il en est de même pour les items 4 et 5 : certaines des erreurs commises à l'item 4 entraînent d'autres erreurs à l'item 5. Il s'agit pour la plupart d'erreurs portant sur les aspects numériques de la détermination d'une aire : emploi d'une formule du type côté $\times$ côté pour un parallélogramme ou un triangle, mauvais choix de hauteur. On retrouve même neuf élèves qui utilisent une formule de calcul du périmètre à la place de celle du calcul d'une aire.

L'analyse implicative montre également un fait intéressant, à savoir la proximité de tous les comportements de non-réponse ou de non-justification. Tout se passe comme si pour certains élèves, la non-réponse s'érigeait en un système. Serait-ce parce qu'ils savaient que ce test ne comptait pas pour l'évaluation ?

15.3.2 Des comportements de réussite

Comme pour les autres tests, nous avons relevé les comportements qui constituent les sources du graphe des comportements de réussite. Ils ne sont qu'au nombre de cinq.

Il s'agit des comportements suivants :

C1 : Cinq bonnes réponses à l'item 1.

C2 : Quatre bonnes réponses à l'item 1.

C3 : Emploi d'une formule d'aire à l'item 4.

C4 : Calcul de l'aire par le produit des demi-diagonales à l'item 5.

C5 : Autre justification correcte à l'item 5.

C'est sur la base de ces constatations que nous considérons que réussir à l'item 1 signifie fournir au moins quatre bonnes réponses sur cinq.

Contrairement au pré-test, les comportements ci-dessus ne sont pas des justifications, mais bien des procédures de résolution ou des réponses elles-mêmes. Cela peut résulter de ce que la matière couverte par le test a été étudiée plus récemment.

15.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre*

Pour étudier l'impact d'*Apprenti Géomètre*, commençons par comparer les résultats des groupes témoin et expérimental aux différentes questions du post-test.

	Item 1	Item 2 Dessin	Item 2 Egalité d'aires	Item 3	Item 4 Égalité d'aires	Item 4 Valeur de l'aire	Item 5 Valeur de l'aire	Item 5 Dessin rectangle
Gr. Témoin	56 %	63 %	50 %	32 %	71 %	35 %	29 %	32 %
Gr. expé.	54 %	50 %	46 %	27 %	85 %	38 %	28 %	43 %
χ^2	0,07	2,4	0,3	0,46	4,98	0,22	0,02	2,1

Alors qu'au pré-test, aucun des écarts entre les taux de réussite des groupes témoin et expérimental n'était significatif, nous constatons ici que la valeur du χ^2 relative à l'égalité des aires à l'item 4 dépasse 3,841, ce qui signifie que l'écart est significatif au seuil 0,95. Voilà donc une question pour laquelle les élèves du groupe expérimental sont significativement plus performants que ceux du groupe témoin.

Cherchons s'il existe d'autres comportements qui font apparaître des écarts significatifs, en commençant par les comportements C1 à C5 situés aux sources du graphe des comportements de réussite (*voir la section précédente*).

	C1	C2	C3	C4	C5
Gr. Témoin	9 %	47 %	15 %	5 %	1 %
Gr. expé.	14,8 %	39 %	15 %	1 %	4 % %
χ^2	1,28	1,02	0,01	1,98	0,95

Aucun des écarts mentionnés dans ce tableau n'est significatif. Aussi nous avons fait un inventaire systématique de tous les écarts significatifs existant entre les comportements mentionnés à l'annexe B.8. Ceci nous permettra non pas de décider que tel groupe d'élèves a globalement de meilleures performances que tel autre, mais surtout de déterminer à propos de quelle question, de quelles démarches, chaque groupe a de meilleures performances. C'est bien de cette façon qu'il convient d'évaluer *l'impact* du logiciel *Apprenti Géomètre*.

Examinons la situation item par item.

Item 1

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,99 dans le groupe expérimental
– L'élève mentionne l'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle, mais oublie le losange.
Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,90 dans le groupe expérimental
– L'élève a tenté de dessiner un carré.
Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,90 dans le groupe témoin
– L'élève a justifié pourquoi on ne pouvait pas dessiner de carré.
– L'élève n'a pas dessiné de trapèze.
Pour cet item, les élèves du groupe expérimental ont donc de meilleurs résultats pour le trapèze, ceux du groupe témoin pour le carré. L'égalité des aires du parallélogramme et du rectangle est nettement mieux assimilée au sein du groupe expérimental. Le losange pose des problèmes pour tous, peut-être du fait de son orientation dans la bande.

Item 2

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,90 dans le groupe expérimental

– L'élève a justifié incorrectement l'égalité des aires de $ABEF$ et $ABCD$.

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,99 dans le groupe témoin
– L'élève respecte les consignes.
– L'élève ne justifie pas l'égalité des aires de $ABEF$ et $ABCD$.

Les deux groupes ont des difficultés pour justifier l'égalité des aires de $ABEF$ et $ABCD$, mais l'écart est beaucoup plus significatif dans le cas de la non-justification que de la justification incorrecte. Le groupe témoin respecte mieux les consignes.

Item 3

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,95 dans le groupe témoin
– L'élève ne justifie pas le calcul de l'aire du parallélogramme.

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,90 dans le groupe témoin
– L'élève calcule l'aire en utilisant $[AB]$ comme base et la hauteur correspondante.

L'orientation horizontale du côté $[AB]$ est mieux exploitée par le groupe témoin que par le groupe expérimental. L'usage d'*Apprenti Géomètre* par celui-ci l'a peut-être moins souvent mis en contact avec des parallélogrammes ayant cette orientation qui facilite le choix d'une hauteur et le calcul de l'aire. Les élèves du groupe expérimental sont 9 à calculer l'aire du parallélogramme en choisissant $[BC]$ comme base alors que ceux du groupe témoin ne sont que 2.

Item 4

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,95 dans le groupe expérimental
– L'élève répond que ABC et ADC ont même aire.
– L'élève justifie l'égalité d'aires par coupage selon une diagonale.

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,95 dans le groupe témoin
– L'élève ne répond pas à la question de comparaison des aires de ABC et ADC.
– L'élève ne justifie pas sa réponse à cette question.
– L'élève ne justifie pas la valeur qu'il propose pour l'aire de ABC.
– L'élève ne trace pas le segment $[AC]$.

Les élèves du groupe expérimental ont ici des résultats significativement meilleurs que ceux du groupe témoin. Leur familiarité avec les mouvements de formes géométriques dans *Apprenti Géomètre* leur permet de repérer et de justifier l'égalité des aires des deux triangles. Ceux du groupe témoin se réfugient plus facilement dans l'abstention.

Item 5

Comportements significativement plus fréquents au seuil 0,95 dans le groupe expérimental
– L'élève attribue une valeur incorrecte à l'aire du cerf-volant.
– L'élève trace au moins une diagonale du cerf-volant.
– L'élève mesure au moins une diagonale du cerf-volant.
– L'élève mesure des côtés du cerf-volant.
– L'élève justifie incorrectement la valeur attribuée à l'aire du cerf-volant.

Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,99 dans le groupe témoin

– L'élève ne justifie pas la valeur attribuée à l'aire du cerf-volant.
Comportement significativement plus fréquent au seuil 0,95 dans le groupe témoin
– L'élève ne calcule pas l'aire du cerf-volant.
– L'élève ne trace rien sauf éventuellement le rectangle.
Devant une situation nouvelle pour eux, calculer l'aire d'un cerf-volant, les élèves des deux groupes ont des réactions différentes. Dans le groupe témoin, de façon significativement plus importante que dans le groupe expérimental, on se réfugie dans l'abstention. Dans le groupe expérimental, de façon significativement plus importante que dans le groupe témoin, les élèves dessinent une diagonale, la mesurent et cherchent à calculer l'aire des deux moitiés de cerf-volant. Ce faisant, certains (trop !) utilisent un algorithme inadéquat, qui passe par la multiplication des longueurs de deux côtés du triangle. Le résultat est que les taux de réussite des deux groupes sont quasiment les mêmes : 29 % dans le groupe témoin, 28 % dans le groupe expérimental.

Cette identité de résultats ne doit pas masquer une différence fondamentale : les élèves du groupe expérimental ont eu une attitude plus active devant une situation nouvelle que ceux du groupe témoin.

En conclusion

L'impact d'*Apprenti Géomètre* lors de cette expérience réalisée en première secondaire se manifeste essentiellement dans deux directions :

– Une meilleure intuition géométrique due à la familiarité avec les mouvements des formes, et la perception des isométries qui en résulte.
– Une attitude plus active devant une situation nouvelle, un problème à résoudre.

Ce dernier comportement est particulièrement intéressant dans la mesure où l'on essaye de promouvoir un enseignement actif, reposant sur le traitement de situations-problèmes.

Ajoutons que les exercices soumis aux élèves lors de cette expérimentation en première secondaire mettaient en œuvre les formules d'aire beaucoup plus que ceux qui avaient été proposés aux élèves de cinquième et sixième primaire. Dans ces classes, il était possible de répondre correctement aux questions en utilisant des démarches soit de dénombrement, soit de découpage et recomposition. Nous avons vu que, dans des cas simples les dénombrements étaient disponibles dès la cinquième et que l'emploi des méthodes par puzzle augmentait ensuite.

Beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas la méthode numérique (emploi de formules) à leur entrée dans le secondaire, les résultats du pré-test le montrent à suffisance. Même le concept d'unité n'est pas fixé chez tous. L'enseignant du secondaire n'a que peu d'heures à consacrer à l'« entretien » de ces notions supposées connues. Notre expérimentation n'a pas fait exception. Il ne faut donc pas s'étonner des faibles taux de réussite enregistrés à certaines questions du post-test, que ce soit dans le groupe témoin ou dans le groupe expérimental.

Annexe C

Index

Additivité, 146, 150
Agrandissement, 154
Aire, 65, 107, 108, 140, 141, 150, 154, 253, 260
Analyse
    implicative, 479, 508
Angle
    solide, 141
Animation, 54
Archimède, 95, 96, 99
Argumenter, 254
Aristote, 93, 96, 98, 99
Arithmétique, 83
Arpentage, 139
Assude, T., 29, 56
Auto-évaluation, 57

Balacheff, N., 53
Bande, 54, 253
Baruk, S., 107, 125
Battista, M., 23
Bayart, F., 41
Bkouche, R., 108
Bolyai, J., 142
Borel, E., 102
Botaniste, 53
Brahmagupta, 143

`Cabri-Géomètre`, 15, 18, 24
`Cabri-Géomètre` , 34
`Cabri3d`, 24
Cadre, 471
Calcul
    intégral, 137
Cavalieri, B., 102
Cercle, 58, 141
`Chamois`, 36
`Cinderella`, 37
Circonférence, 141
Clements, D., 23
Comparer, 260
Compas, 58
    parfait, 90
Compétence
    transversale, 143
Compétences, 61
Comportement, 363, 479
Compression, 21, 145, 476
Comptage, 126, 151
Conceptualisation, 143
Condition
    déterminante, 63, 254, 261
Cône, 141
Constructeur, 53, 54
Constructivisme, 142
Continu, 85
Conversion, 18, 20, 55
Convertir, 472
Convivialité, 34
Corde, 58
    à nœuds, 80
Corps
    rond, 141

Correspondance
biunivoque, 150
Crowder, N., 16
Cylindre, 141

`Déclic`, 38
Décomposition, 65, 109
Déconstruction
dimensionnelle, 54
Découpage, 49, 65, 150
Découper, 55
Déformer, 55
Démarche
de découverte, 66
de généralisation, 66
de vérification, 66
de validation, 66
d'évaluation et d'auto-évaluation, 29
de découverte, 25, 54
de généralisation, 27, 54
de vérification, 26, 54
Demi-droite, 54
Démontrer, 254
Dénombrement, 152
Déplacement, 150
Déplacer, 55, 150
`Derive`, 15
Descartes, 90, 97
Didacticiel, 14
Dimension, 154
Disque, 141
Distracteur, 16
Diviser, 55
Douady, R., 57, 226, 471, 472
Droite, 54, 142
illimitée, 142
réelle, 97
Duplication, 49
Duval, R., 7, 20, 23, 54, 162, 343, 472, 474

e.a.o., 17
Égalité
d'aires, 150, 151
Égypte, 80
Équicomplémentarité, 111
Équidécomposition, 110
Équilibration
majorante, 144
Ératosthène de Cyrène, 85
Estimation, 260
Étalon
conventionnel, 124
de mesure, 103
Euclide, 83, 84, 92–94, 113, 115, 139, 255
Eudoxe, 83, 94
Évaluation, 57

Fichier
dynamique, 64
historique, 55, 56
Figure
géométrique, 29
Figures, 61, 62
Forme
libre, 3
standard, 2
Former, 472
Formules, 128, 253, 260
d'aires, 155, 156
de calcul, 153
de périmètres, 156
Fraction, 53, 58
Friedelmeyer, J.-P., 81, 255
Fusion, 49, 109
Fusionner, 55

Gabarit, 58
Galilée, 99
Gallou, E., 22
Gélis, J.-M., 29, 56
`GeoGebra`, 39
`GeoLabo`, 41
Géométrie, 80, 83
dynamique, 2, 25
`Geonext`, 42
Géoplan, 151
Glisser, 55, 63, 147
Grandeur, 53, 61, 108, 150
géométrique, 58
Grandeurs, 79, 107
commensurables, 84
incommensurables, 84, 93

Gras, R., 479
Groupe, 142
    de transformations, 142

Hérodote, 80
Héron d'Alexandrie, 90
Hilbert, D., 142
Hillel, J., 21, 23
Hippocrate de Chio, 101
Hohenwarter, M., 39
Homothétie, 64
Horizontale, 155
Al-Huwarizmi, 88

Infini, 86
Intensité
    d'implication, 479, 482
Interactif, 66
Invariance, 150, 153, 154
Inventeur-bricoleur, 53, 54
Isométrie, 142
Isométrique, 150

Jordan, C., 102
Justifier, 254

Abu Kamil, 90
Kaput, J., 53
Al-Karagi, 92
Al-Kashi, 95
Al-Khhayam, 93, 95
Kieran, C., 23
Kit
    libre, 3
    standard, 3
Kittel, M., 25
Klein, F., 142
Kortenkamp, U., 37
Kuntz, G., 25

Laboratoire
    d'informatique, 14
Laborde, J.-M., 2, 18
Le Corbusier, C.-E., 169
Lebesgue, H., 102
Legendre, A.-M., 139, 142
Leibniz, 102
Ligne
    polygonale, 146
Lignes
    parallèles, 142
`Lisp`, 19
Lobachevsky, N., 142
`Logo`, 15, 18, 19, 59, 146, 148
`Logo3d`, 147
Logos, 85
Longueur, 107, 108, 141, 150, 154
Lunule, 101

Macro, 54
Mathématiques
    arabes, 87, 88
    modernes, 142
Mesure, 53, 58, 81, 85, 93, 107, 108, 140, 141
Mesurer, 260
Métacognition, 55, 57
Méthode
    d'exhaustion, 87
Micro-monde, 1, 23, 53
Mode
    commande, 33
    de raisonnement, 420
    réponse, 33
Modèle
    mental, 491
Monade, 83
Mouvement, 22, 49, 142
Multiplication
    d'une aire par un naturel, 114

Narration
    de recherche, 56
Niveau, 53
    de van Hiele, 473
Nombre, 79
    d'or, 96
    entier, 82
    irrationnel, 85
    naturel, 82
    réel, 82
    rationnel, 85
Noss, R., 22
Numérisation, 124

Opérateur
multiplicatif, 114
Ostenne, E., 38
Ouverture, 34

Papert, S., 2, 18
Papier
quadrillé, 151
triangulé, 152
Pavage, 45
semi-régulier, 70
Pédagogie
différenciée, 56
Pentamino, 3
Perception, 150
mixte, 114
qualitative, 108
Périmètre, 141, 253, 260
Perspective
cavalière, 70
Pertinence, 34
Physique, 99
Piaget, J., 142–147, 151, 154
Platon, 99
Plutarque, 81
Polyèdre, 141
Principe
d'égalité par superposition, 108
Procept, 477
Projet, 20, 148
Pythagoricien, 82

Quadrillage, 60, 65
Quantification, 118, 151
par encadrement, 120
Al-Quhi, 90

Rapport, 141
de deux aires, 116
de grandeurs, 83, 94
Ratio, 85
Rayon, 59
Recollement, 65
Recomposition, 150
Registre
de représentation, 55
sémiotique, 18, 472
Régression, 440
Repérage, 154
Représentation, 145
Retournement, 150
Retourner, 55, 63, 150
Réversibilité, 146
Richter-Gebert, J., 37
Riemann, B., 102, 142
Rotation, 54, 55, 64, 147
Rouche, N., 85

Secteur angulaire, 54
Segment, 142
de sphère, 141
Service, 34
Seuil
épistémologique, 154
d'intensité, 480
Similitude, 142
Situation-problème, 1, 57
`Sketchpad`, 44
Skinner, B. F., 16
Socles
de compétences, 7, 57, 61, 256
Solides, 61
Sphère, 141
Stevin, S., 96
Structuration, 143
Structurer, 62
Super-tableau, 17
Superposabilité, 150
Symétrie axiale, 54, 55, 64
Synthétiser, 62

Tangram, 3
Thalès, 81
Théorème
de Pythagore, 65, 80, 141, 254
de Thalès, 81, 82, 84, 140, 141, 254
du papillon, 28
en acte, 144
Théorie
de la mesure, 102
des proportions, 83
TICE, 29

Tourner, 55, 63, 147
Traiter, 472
Transformation, 49, 63
Transitivité, 109
Translation, 54, 55, 64, 147
Triangle
    sphérique, 141
Al-Tusi, 95

Unité
    commune de mesure, 153
    conventionnelle, 107, 151, 153

van Hiele, P. et D., 53, 472
Variable, 156
Vergnaud, G., 21, 144
Verticale, 155
Viète, 95
Vitesse, 100
Volume, 141, 154, 260

Abu-l-Wafa, 92

Annexe D

Bibliographie

[1] P. Abgrall. *Le développement de la géométrie aux* IXe–XIe *siècles*. A. Blanchard, Paris, (2004).

[2] Aristote. *Physique*. Les belles lettres, Paris, (1990).

[3] N. Artemiadis. *History of mathematics : from a mathematician's vantage point*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2004).

[4] T. Assude et J.-M. Gelis. La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, **50**, 3, 259–287, (2002).

[5] N. Balacheff and J. Kaput. Computer-based Learning Environments in Mathematics. In Bishop et al. [11], pages 469–501.

[6] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Jeux mathématiques 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1992). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 6.

[7] M. Ballieu, R. Giot, F. Higuet, B. Honclaire, G. Noël, et Y. Noël-Roch. *Géométrie de l'espace 1*. Université de Mons-Hainaut, Centre de Didactique des Sciences, (1994). Manuel d'utilisation des logiciels CDS-Math 7.

[8] E. Barbin. Qu'est-ce que faire de la géométrie ? *Repères-IREM*, pages 59–82, (2001).

[9] G. Barthélemy. *2500 ans de mathématiques : l'évolution des idées*. Ellipses, Paris, (1999).

[10] S. Baruk. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Ed. du Seuil, Paris, (1992).

[11] A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde, éditeurs. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).

[12] R. Bkouche. La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2, Rethymnon, (2006). Université de Crète.

[13] C. Boyer and U. Merzback. *A history of mathematics*. Wiley, Singapore, (1989).

[14] G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble, (1998).

[15] M. Caveing. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Éléments » d'Euclide et la « Physique » d'Aristote.* In *Penser la science.* Points Sciences, Seuil, (1982).

[16] M. Caveing. *La figure et le nombre : recherche sur les premières Mathématiques des Grecs.* Presses Universitaires du Septentrion, Paris, (1998).

[17] D. H. Clements and M. T. Battista. The effects of Logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 5, 356–371, (1990).

[18] CREM. *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2003).

[19] CREM. *Apprenti Géomètre. Rapport de recherche 2003-2004.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2004).

[20] CREM. *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2005).

[21] E. Crone, E. Dijksterhuis, and al. *The principal works of* Simon Stevin, *volumes* IIA *et* IIB. C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, (1958).

[22] N. Crowder. Automatic Tutoring by means of intrinsic programming. In Galantes [38].

[23] R. Cuppens. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre.* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, (1996). Deux tomes.

[24] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques.* Editions du Seuil, (1986).

[25] A. Djebbar. *Une histoire de la science arabe.* Editions du Seuil, (2001).

[26] A. Djebbar. *L'algèbre arabe, genèse d'un art.* Vuibert-Adapt, Paris, (2005).

[27] *Décret « Missions de l'École », Mon école comme je la veux.* Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1997).

[28] *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Ministère de la Communauté française — AGERS, Bruxelles, (1999). `www.enseignement.be/@librairie/documents/socles/telechargement/pdf/socle_math.pdf`.

[29] *Mathématiques — Premier degré – 1 A et 2e Commune.* Fédération de l'Enseignement secondaire catholique, Bruxelles, (2000). `www.segec.be/Documents/Fesec/Programmes/15_MATH1.pdf`.

[30] *Programme d'études du cours de mathématiques — 1re année A – 2e année commune.* Ministère de la Communauté Française — AGERS, Bruxelles, (2000). `www.restode.cfwb.be/download/programmes/10-2000-240.pdf`.

[31] R. Douady. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7**, 2, 5–31, (1986).

[32] J.-C. Duperret. Le geste géométrique ou l'art de démontrer. *Repères-IREM*, pages 83–116, (2001).

[33] R. Duval. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37–65, (1993).

[34] R. Duval. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53, (2005).

[35] Euclide. *Les éléments, traduction en français du texte de Heiberg par B. Vitrac.* Presses Universitaires de France, Paris, (1994).

[36] J.-P. Friedelmeyer. Les aires : outil heuristique - outil démonstratif. *Repères-IREM*, **31**, 39–62, (1998).

[37] J.-P. Friedelmeyer. Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères*, **44**, 5–31, juillet 2001. Topiques Éditions, Metz.

[38] E. Galantes, éditeur. *Automatic Teaching : the state of the art.* Wiley, New York, (1959).

[39] Galilée. *Discours concernant deux sciences nouvelles.* Presses Universitaires de France, (1995). D'après une traduction de Maurice Clavelin.

[40] E. Gallou-Dumiel. Symétrie orthogonale et micro-ordinateur. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 5–60, (1987).

[41] GEM. *L'archipel des isométries.* Ed. GEM, Louvain-la-Neuve, (1982).

[42] R. Gras. Panorama du développement de l'A.S.I. à travers des situations fondatrices. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, **Supplément n°15**, 9–33, (2005).

[43] R. Gras et al. *L'implication statistique.* La Pensée Sauvage, Grenoble, (1996).

[44] E. M. Gray and D. Tall. Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**, 2, 116–140, (1994).

[45] Herodote. *Histoires, traduit en français par Larcher.* Charpentier, Paris, (1850). En ligne sur `Gallica.bnf.fr`.

[46] J. Hillel. Mathematical and programming concepts acquired by children, aged 8–9, in a restricted Logo environment. *Recherches en didactique des mathématiques*, **6**, 2–3, 215–268, (1985).

[47] J. Hillel and C. Kieran. Schemas used by 12-years olds in solving selected turtle geometry tasks. *Recherches en didactique des mathématiques*, **8**, 1–2, 61–102, (1987).

[48] J. Hoyrup. *Lengths, widths, surfaces : a portrait of old babylonian : algebra and its skin.* Springer-Verlag, New York, (2002).

[49] M. Kittel et G. Kuntz. De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques. Etude d'un exemple. *Repères IREM*, **49**, 41–58, (2002).

[50] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, (1990).

[51] C. Laborde and B. Capponi. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **14**, 1–2, 165–210, (1994).

[52] J.-M. Laborde and R. Strässer. Cabri-géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **90**, 5, 171–190, (1990).

[53] M. Lebrun. *Des technologies pour enseigner et apprendre.* 2e édition, De Boeck, Bruxelles, (2002).

[54] A.-M. Legendre. *Éléments de Géométrie avec des notes, suivis d'un traité de trigonométrie.* Société Nationale pour la propagation des bons livres, Bruxelles, (1838).

[55] L. Lismont et N. Rouche, éditeurs. *Formes et Mouvements.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, (2001).

[56] R. Noss. Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**, 5, 343–362, (1987).

[57] S. Papert. *Jaillissement de l'esprit.* Flammarion, Paris, (1980).

[58] J. Piaget. *Six études de psychologie.* Gonthier, Genève, (1964).

[59] J. Piaget, B. Inhelder, et A. Szeminska. *La géométrie spontanée de l'enfant.* Presses Universitaires de France, Paris, (1948).

[60] Plutarque. *Œuvres morales. Le banquet des sept sages. traduit en français par V. Bétolaud.* Hachette, (1870). En ligne sur `hodoi.fltr.ucl.ac.be/concordances`.

[61] C. Pribetich Aznar. La formulation des surfaces des bâtiments et des superficies des terrains aux XIVe–XVIe siècles dans le sud-est de la France. *Histoire et mesure*, **XVI - n°3/4**, (2005). mis en ligne le 7 décembre 2005, référence du 25 avril 2007, disponible sur : http ://histoiremesure.revues.org/document142.html.

[62] R. Rashed et B. Vahabzadeh. *Al-Khayyām Mathématicien.* Albert Blanchard, Paris, (1999).

[63] X. Roegiers. *Les Mathématiques à l'école primaire (tome 2).* De Boeck, (2000).

[64] N. Rouche. *Le sens de la mesure.* Didier-Hatier, Bruxelles, (1992).

[65] N. Rouche et P. Skilbecq. Apprenti Géomètre, un nouveau logiciel. *Mathématique et Pédagogie*, **149**, 68–84, (2004).

[66] N. Rouche et P. Skilbecq. *Apprenti Géomètre : pourquoi un nouveau logiciel.* CREM, Nivelles, (2006).

[67] C. Ruby. Lire (vraiment) Leibniz. *EspacesTemps.net*, (Mis en ligne le 5 mai 2004).

[68] M. Serres. *Les origines de la géométrie.* Flammarion, (1993).

[69] B. F. Skinner. *La révolution scientifique de l'enseignement.* Ed. Dessart, Bruxelles, (1969).

[70] S. Stévin. *L'Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques.* Ed. A. Girard, Leyde, (1634).

[71] D. Tall. Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignement mathématique*, **42**, 395–415, (1996).

[72] D. Tall. A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **11**, 195–215, (2006).

[73] R. Taton. *La science antique et médiévale.* Presses universitaires de France, Paris, (1957).

[74] P. van Hiele. La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive. *Mathematica & Paedagogia*, **16**, 25–34, (1958/59).

[75] G. Vergnaud. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2**, 2, 215–232, (1981).

[76] G. Waldegg. L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stévin. Peyresq, (1999). Actes du colloque « La pensée numérique », www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pensee.numer.htm.

[77] F. Woepcke. *Études sur les mathématiques arabo-islamiques.* Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, (1986).

[78] A. Youschkevitch. *Les mathématiques arabes (VIIe- XVe siècles).* Librairie philosophique J. Vrin, Paris, (1976).

Table des matières

0 Introduction 1

0.1 Motivation et objectifs de la recherche 1

0.2 Les caractéristiques d'*Apprenti Géomètre* 2

0.3 Le contenu de la recherche 4

0.4 Le contenu du rapport 8

I L'état des lieux 11

1 Le contexte informatique 13

1.1 L'informatique dans les écoles : une réalité 13

1.2 Plusieurs types de logiciels 14

1.3 To clic or not to clic ? 15

1.4 Aux débuts de l'informatique dans les classes 15

1.5 Quand l'élève pilote l'ordinateur 18

1.6 `Logo` 19

1.7 `Cabri` 24

2 Analyse de didacticiels de géométrie dynamique 33

2.1 Deux modes de fonctionnement 33

2.2 Analyse de logiciels 34

2.3 `Cabri II+` 34

2.4 `Chamois` 36

2.5 `Cinderella` 37

2.6 `Déclic` 38

2.7 `GeoGebra` 39

2.8 `GeoLabo` 41

2.9 `Geonext` 42

2.10 `Sketchpad` 44

2.11 En situation 45
2.12 Conclusions 49
3 *Apprenti Géomètre* 53
3.1 Un micro-monde évolutif 53
3.2 Un instrument d'auto-évaluation 55
3.3 Le langage d'*Apprenti Géomètre* 55
3.4 Des objectifs d'*Apprenti Géomètre* à l'école primaire 56
3.5 Des objectifs d'*Apprenti Géomètre* à l'école secondaire 60
3.6 *Apprenti Géomètre* résiste-t-il au test ? 66
3.7 Des activités d'initiation 67

II La mesure des aires 77
4 Aperçu de l'histoire de la mesure 79
4.1 Grandeurs et nombres 79
4.2 À l'origine 80
4.3 Des entiers aux réels 82
4.4 De la décomposition infinie au calcul intégral 98
4.5 Histoire rapide des étalons de mesure 103
5 Une grandeur de base : l'aire 107
5.1 Introduction 107
5.2 Au début était le verbe... 108
5.3 Perception qualitative de l'aire 108
5.4 Perception mixte de l'aire 114
5.5 Quantification de l'aire 118
5.6 Numérisation de l'aire 124
5.7 Calcul de la mesure de l'aire par les mesures de longueurs 125
5.8 Etablissement de formules du calcul de la mesure de l'aire de quelques polygones 128
5.9 Une autre voie vers le calcul des aires 137
6 Une approche épistémologique 139
6.1 Un préalable : la géométrie 139
6.2 La conceptualisation 142
6.3 Le cas de la mesure 145

III Activités pour le cycle 10/12 ans 157

Présentation **159**

7 L'expérimentation en cinquième primaire (2006–2007) 161

7.1 Comparer des aires 163

7.2 Périmètres et aires des carrés et des rectangles 180

7.3 L'aire des parallélogrammes 205

8 L'expérimentation en sixième primaire (2005–2006) 223

8.1 L'aire de carrés 224

8.2 L'aire des rectangles et des parallélogrammes 247

IV Activités pour le cycle 12/14 ans 249

Présentation **251**

9 Vers les formules d'aires en première année du secondaire 253

9.1 Objectifs généraux 253

9.2 La transition primaire - secondaire 255

9.3 Annexe : exercice coté 269

9.4 Voir des quadrilatères à l'intersection de deux bandes 270

9.5 L'aire du parallélogramme 286

9.6 L'aire du triangle 296

9.7 L'aire du trapèze 304

9.8 L'aire du losange et du cerf-volant 309

9.9 L'aire d'un polygone régulier 318

9.10 L'aire du disque 324

9.11 Agrandir, réduire 332

V Les tests 339

10 Un pré-test en sixième primaire (2005–2006) 343

10.1 Les objectifs des tests 343

10.2 Les énoncés 344

10.3 Analyse des items 345

10.4 Des comportements de réussite ou d'échec 363

10.5 La population testée est-elle initialement homogène ? 364

11 Un post-test en sixième primaire (2005–2006) 367
11.1 L'objectif du test 367
11.2 Les énoncés 367
11.3 Analyse des items 369
11.4 Des comportements de réussite ou d'échec 378
11.5 L'impact d'*Apprenti Géomètre* 380
12 Un pré-test en cinquième primaire (2006–2007). 385
12.1 Les objectifs des pré- et post-tests 385
12.2 Les énoncés 385
12.3 Analyse des items 388
12.4 Des comportements de réussite ou d'échec 397
12.5 Une comparaison cinquième-sixième 399
12.6 La population testée est-elle initialement homogène ? 400
13 Un post-test en cinquième primaire (2006–2007). 403
13.1 Les énoncés 403
13.2 Analyse des items 405
13.3 Des comportements de réussite ou d'échec 423
13.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre* 425
14 Un pré-test en première secondaire (2006–2007) 429
14.1 Les objectifs des pré- et post-tests 429
14.2 Les énoncés 429
14.3 Analyse des items 432
14.4 Des comportements de réussite ou d'échec 441
14.5 La population testée est-elle initialement homogène ? 443
15 Un post-test en première secondaire (2006–2007). 445
15.1 Les énoncés 445
15.2 Analyse des items 448
15.3 Des comportements de réussite ou d'échec 465
15.4 L'impact d'*Apprenti Géomètre* 465

VI Annexes 469
A Quelques outils de base 471
A.1 Les cadres de R. Douady 471

A.2 Les registres de R. Duval 472
A.3 Les niveaux de Van Hiele 472
A.4 La déconstruction dimensionnelle selon Duval 474
A.5 La croissance cognitive selon Tall 476
B L'analyse statistique implicative 479
B.1 Présentation 479
B.2 La technique 480
B.3 L'analyse du pré-test de sixième primaire (2005–2006) 483
B.4 L'analyse du post-test de sixième primaire (2005–2006) 494
B.5 L'analyse du pré-test de 5e primaire (2006–2007) 506
B.6 L'analyse du post-test de 5e primaire (2006–2007) 522
B.7 L'analyse du pré-test de première secondaire (2006–2007) 531
B.8 L'analyse du post-test de première secondaire (2006–2007) 541
C Index 553
D Bibliographie 559
VII Fiches didactiques pour le cycle 10-12 ans
VIII Fiches didactiques pour le cycle 12-14 ans