ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE 2011

MATHÉMATIQUES

Grandeurs – Solides et figures

PISTES DIDACTIQUES

2e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ministère de la Fédération Wallonie-Bruxelles
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
Service général du Pilotage du système éducatif

SOMMAIRE

Ce document *Pistes didactiques* a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe 2e secondaire en mathématiques :

Charlotte ALEXANDRE, attachée au Service général du Pilotage du système éducatif ;
Joseph BETHLEN, conseiller pédagogique ;
Florent CHENU, chercheur à l'Unité d'analyse des Systèmes et des Pratiques d'enseignement de l'ULg ;
Jordan CANCELLIER, enseignant ;
Francine CORDIER, conseillère pédagogique ;
Virginie DUPONT, chercheuse à l'Unité d'analyse des Systèmes et des Pratiques d'enseignement de l'ULg ;
Francine FRAIPONT, inspectrice ;
Colette GENOT, inspectrice ;
Jean-Marc HOUYOUX, conseiller pédagogique ;
Claire-Agnès HUGO, enseignante ;
Léopold KROEMMER, chargé de mission au Service général du Pilotage du système éducatif ;
Claire LAMOLINE, enseignante ;
Pierre-Emmanuel LOSFELD, conseiller pédagogique ;
Jules MIEWIS, conseiller pédagogique ;
René QUEVRIN, inspecteur ;
Julien REMACLE, enseignant ;
Francis RENIER, inspecteur;
Julie SAELEN, enseignante ;
René SCREVE, conseiller pédagogique ;
Myriam TOMBEUR, conseillère pédagogique.

INTRODUCTION

Ce document fait suite aux résultats de l'évaluation externe en mathématiques menée en novembre 2011 dans les classes de 2e secondaire, en commune et complémentaire d'une part, et en différenciée d'autre part. Cette évaluation avait une visée essentiellement diagnostique et formative. L'épreuve avait en effet pour objectif d'établir un bilan précis de l'acquisition de certaines compétences en mathématiques dans les domaines des grandeurs et des solides et figures, et de déceler celles qui sont moins bien maitrisées et qui devraient faire l'objet d'une attention particulière.

C'est sur la base des constats présentés dans le document *Résultats et commentaires* que ce recueil de pistes didactiques a été élaboré. Y sont proposées des activités concrètes et des ressources didactiques dans les domaines précis qui ont été pointés comme posant problème à de nombreux élèves.

Les principales difficultés constatées en 2e commune et complémentaire sont les suivantes :

- la justification sur base de propriétés en géométrie ;
- les calculs d'aires, de périmètres et de volumes ;
- le calcul de pourcentages.

Les résultats à l'épreuve obtenus par les élèves de deuxième année différenciée étant très faibles, nous proposons à travers ce document quelques pistes pour aider ceux-ci à progresser. Néanmoins, les pistes rédigées à l'intention des enseignants de cinquième année primaire peuvent également être exploitées dans ces classes. En effet, certains items étant communs aux deux épreuves, les pistes de cinquième année primaire peuvent être une aide supplémentaire en deuxième année différenciée[1].

Concernant les pistes proposées aux classes de 2e différenciée, nous pensons que l'attention doit être portée sur les deux derniers problèmes relevés également en 2e commune et complémentaire : les aires, périmètres et volumes d'une part, le calcul des pourcentages, d'autre part. Si les deux premières difficultés sont plus spécifiques à la 2e commune et complémentaire, certaines parties des pistes peuvent néanmoins s'avérer intéressantes à envisager pour les élèves de 2e différenciée. Nous pensons en particulier au jeu *Qui est-ce ?* et aux activités amenant à dépasser le stade de la visualisation (voir plus loin).

[1] Elles sont téléchargeables sur http://www.enseignement.be/index.php?page=25102&navi=3207

Chacun des points abordés dans ce recueil de pistes est présenté selon une structure similaire :

- un bref retour sur les principaux constats issus de l'épreuve, éclairés par une analyse des difficultés courantes des élèves ;
- une réflexion qui établit le lien entre difficultés observées et propositions d'activités ;
- des propositions concrètes d'activités accompagnées de fiches à destination des élèves.

1 LA JUSTIFICATION EN GÉOMÉTRIE

1.1 LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Une des principales conclusions tirées des résultats de 2e commune et complémentaire à l'évaluation externe non certificative de 2011 est la faible réussite aux questions qui demandent à l'élève de justifier une affirmation. Des analyses de réponses à ces différentes questions ont été réalisées afin de cerner des types de problèmes rencontrés par les élèves.

Les réponses erronées à la question 29 permettent de donner un premier aperçu de la variété des difficultés. Pour rappel, l'item 52 obtient un pourcentage de réussite de 36 % et l'item 53 de 28 %.

Question 29

Les propositions suivantes sont fausses. **JUSTIFIE**.

	Justifie	
Il est possible de construire un triangle qui a deux angles obtus.		☐ 52
Il est possible de construire un triangle rectangle équilatéral.		☐ 53

Pour le premier item, trois types de réponses insatisfaisantes sont fréquents :

- ce n'est pas possible parce que ce serait une autre figure, un carré ;
- ce n'est pas possible de construire un triangle avec deux angles obtus ;
- les côtés du triangle ne se rejoindraient pas, ne se toucheraient pas, seraient parallèles.

Pour le deuxième item, une réponse insatisfaisante est récurrente :

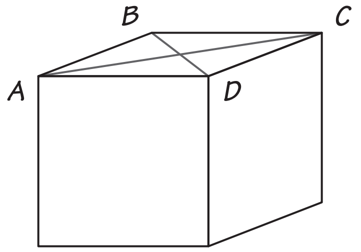
- c'est soit l'un, soit l'autre ; il faut choisir, ça poserait problème.

Ces différentes réponses mettent en évidence que beaucoup d'élèves n'ont pas compris le principe selon lequel la justification en géométrie doit s'appuyer sur une propriété. Certains se limitent à reformuler l'affirmation, d'autres se basent sur le résultat visuel (ça ne se toucherait pas) de l'une ou l'autre affirmation.

On retrouve le même type de résultat pour l'item 102 (23 % de réussite) et pour l'item 103 (31 % de réussite).

Question 56

Voici une représentation en perspective d'un cube.
Les segments [AC] et [BD] sont de même mesure dans la réalité.

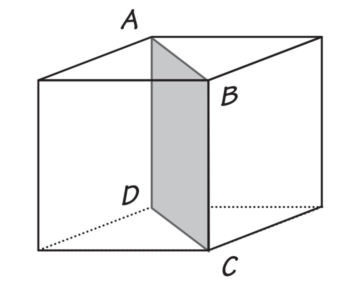


EXPLIQUE pourquoi cette affirmation est correcte ....

☐ 102

Question 57

Dans le cube ci-dessous, **DÉTERMINE** la nature du quadrilatère *ABCD*.



Nature du quadrilatère : ....

☐ 103

Pour la question 56, un certain nombre d'élèves expliquent que *« c'est en perspective »*, que *« si on changeait de vue, on verrait que c'est égal »*. Beaucoup d'autres utilisent une propriété, mais pas celle qui convient à la situation :

- le carré (face) a ses côtés de même longueur ;
- le cube a des arêtes isométriques.

La question 57, même si elle ne sollicite pas de justification, confirme que bon nombre d'élèves se basent sur l'aspect visuel des figures pour raisonner : les réponses erronées les plus fréquentes sont *carré* et *parallélogramme*.

Les difficultés sont encore plus profondes lorsqu'il s'agit d'associer plusieurs propriétés ou d'utiliser leur caractère nécessaire et/ou suffisant. C'est ce qu'illustre l'analyse des réponses aux questions 9 et 30.

La question 9 comportait trois items réussis à 30 %, 31 % et 40 % :

Question 9

COMPLÈTE les phrases suivantes.

- Le quadrilatère qui a pour unique caractéristique d'avoir ses côtés opposés de même longueur est un .... ☐ 20
- Le quadrilatère qui a quatre angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur est un .... ☐ 21
- Le quadrilatère qui a pour unique caractéristique quatre côtés de même longueur est un .... ☐ 22

Beaucoup d'élèves n'ont pas pu raisonner sur base de propriétés nécessaires et suffisantes. Pour l'item 20, le terme unique n'a pas été pris en compte : tous les quadrilatères sont cités. À l'item 21, on peut douter de la bonne compréhension du terme consécutif par les élèves qui se sont trompés : le rectangle est, de loin, la principale erreur. Pour l'item 22, une très large majorité de réponses erronées mentionnent le carré. Comme pour l'item 20, ils n'ont pas pris en compte le terme unique.

La question 30 comportait deux items réussis à 20 % et 51 %.

Question 30

Pour chacun des deux triangles suivants, **ENTOURE** la caractéristique correspondant à ses angles et la caractéristique correspondant à ses côtés.

- Un triangle qui a deux angles de 45° est un triangle… ☐ 54

Acutangle - Rectangle - Obtusangle

Scalène - Isocèle - Équilatéral

- Un triangle qui a tous ses côtés de même longueur est un triangle… ☐ 55

Acutangle - Rectangle - Obtusangle

Scalène - Isocèle - Équilatéral

Les erreurs les plus fréquentes à l'item 54 montrent que beaucoup d'élèves ne mènent pas le raisonnement qui leur permet d'affirmer que le triangle est rectangle. Les réponses incorrectes les plus fréquentes sont :

- acutangle isocèle ;
- acutangle ;
- isocèle.

À l'item 55, beaucoup d'élèves n'entourent qu'un terme : équilatéral ou isocèle.

1.2 INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Pierre et Dina Van Hiele (cités par Chenu & Detheux, 2000) proposent une théorie du développement de la pensée géométrique selon laquelle les élèves progressent à travers cinq niveaux depuis un niveau visuel jusqu'à des niveaux de plus en plus sophistiqués d'analyse, d'abstraction, de déduction et de rigueur mathématique. La description dépasse le contexte des apprentissages visés à l'étape 3 du curriculum, mais elle fournit une vue d'ensemble extrêmement intéressante, et elle alimente parfaitement notre propos, ainsi que certains constats issus de l'épreuve.

NIVEAU	DESCRIPTION	EXEMPLE
Niveau 1 de la visualisation	Les élèves perçoivent les objets géométriques en fonction de leur apparence physique. Ils raisonnent au moyen de considérations visuelles (prototypes visuels) sans utiliser explicitement les propriétés de ces objets.	Les élèves considèrent qu'un losange est un losange « parce qu'il est sur pointe » ou qu'une hauteur est une hauteur « parce qu'elle est verticale ».
Niveau 2 de l'analyse	Les élèves sont capables d'associer les objets géométriques à leurs propriétés. Cependant, ils utilisent une litanie de propriétés nécessaires pour l'identification et la description de ces objets.	Les élèves considèrent qu'un carré est un carré parce qu'il possède 4 côtés de même longueur, 4 angles droits et que ses côtés opposés sont parallèles.
Niveau 3 de l'abstraction	Les élèves sont capables d'ordonner les propriétés des objets géométriques, de construire des définitions abstraites, de distinguer les propriétés nécessaires des propriétés suffisantes pour la détermination d'un concept et de comprendre les déductions simples. Cependant, les démonstrations ne sont pas comprises.	Les élèves considèrent qu'un carré est un carré parce que c'est un rectangle ayant les 4 côtés de même longueur.
Niveau 4 de la déduction	Les élèves sont capables de comprendre le rôle des différents éléments d'une structure déductive et d'élaborer des démonstrations originales ou du moins de les comprendre.	Les élèves sont capables de démontrer qu'un parallélogramme ayant 2 côtés consécutifs de même longueur est un losange.
Niveau 5 de la rigueur	Les élèves sont capables de travailler dans des systèmes axiomatiques différents et d'étudier des géométries variées en l'absence de modèles concrets.	Les élèves sont capables de comprendre des géométries non-euclidiennes.

Source : Clements et Battista. Geometry and spatial reasoning. In Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York : Mac Millan Publishing Company, 1992, 420-463.

La réalisation de démonstrations formelles en géométrie constitue un objectif de la 3e année secondaire. Si cette compétence n'est pas à certifier au 1er degré de l'enseignement secondaire, on peut raisonnablement viser qu'à la fin de la 2e secondaire, les élèves soient capables d'articuler un nombre restreint de propriétés nécessaires et suffisantes pour justifier une proposition. Les niveaux des Van Hiele constituent une ressource précieuse dans cette perspective. En modélisant le développement de la pensée géométrique selon des niveaux allant de la visualisation à la déduction, ils permettent de dépasser une vision empirique de l'apprentissage de l'argumentation en géométrie qui consiste bien souvent à passer de l'étude de démonstrations établies en classe à la production de démonstrations originales en transitant éventuellement par des démonstrations « à compléter ».

1.3 ACTIVITÉS

C'est dans l'esprit de ce modèle que sont proposées les deux activités qui suivent. La première consiste en une adaptation du jeu *Qui est-ce ?* Les personnages à découvrir y sont remplacés par des figures géométriques. Selon l'une ou l'autre déclinaison du jeu, c'est tel ou tel niveau du modèle des Van Hiele qui est travaillé, entrainé voire mis au centre d'un conflit cognitif amenant à évoluer vers le niveau supérieur.

La deuxième activité est une séquence entièrement dédiée à la justification[2]. Elle est structurée selon trois idées-clés qui font écho aux stades des Van Hiele :

1. justifier, c'est utiliser une propriété (abandon du niveau de la visualisation pour celui de l'analyse) ;
2. justifier, c'est utiliser une propriété pertinente (travail au niveau de l'analyse) ;
3. justifier, c'est utiliser le caractère nécessaire et/ou suffisant des propriétés (abandon du niveau de l'analyse pour celui de l'abstraction).

Chaque idée est développée à travers une activité de découverte, un récapitulatif et des entrainements individuels. Le plus souvent, les documents à destination des élèves apparaissent sur la page de gauche tandis que les notes à destination des enseignants sont présentées sur la page de droite.

En fin de séquence, des activités sur les propriétés réciproques sont proposées.

[2] Il s'agit d'une séquence dont la construction avait été entreprise dans le cadre d'une recherche commanditée sur l'évaluation formative en géométrie (Chenu & Jehin, 2001) mais qui n'avait pas été finalisée. L'ensemble de cette séquence a été révisé et réaménagé par le groupe de travail.

Qui est-ce ?

Le jeu présenté ici permet de poursuivre de multiples objectifs :

- constituer un préalable à la justification en s'assurant que les élèves connaissent le vocabulaire approprié à la géométrie ;
- aller plus loin en intégrant un codage aux représentations des figures ou encore en représentant les médianes et les diagonales. Les élèves sont ainsi amenés à dépasser l'aspect visuel en faisant davantage référence aux propriétés des figures.

Si, en 2e année différenciée, cette activité permet d'entrainer les élèves à utiliser du vocabulaire approprié, de formuler des questions adéquates et de nommer les figures, en 2e année commune et complémentaire, elle permet de vérifier la maitrise des différents termes géométriques et leur association au codage ou à certaines propriétés des figures. Elle sert aussi à travailler la combinaison de propriétés pour définir un objet géométrique.

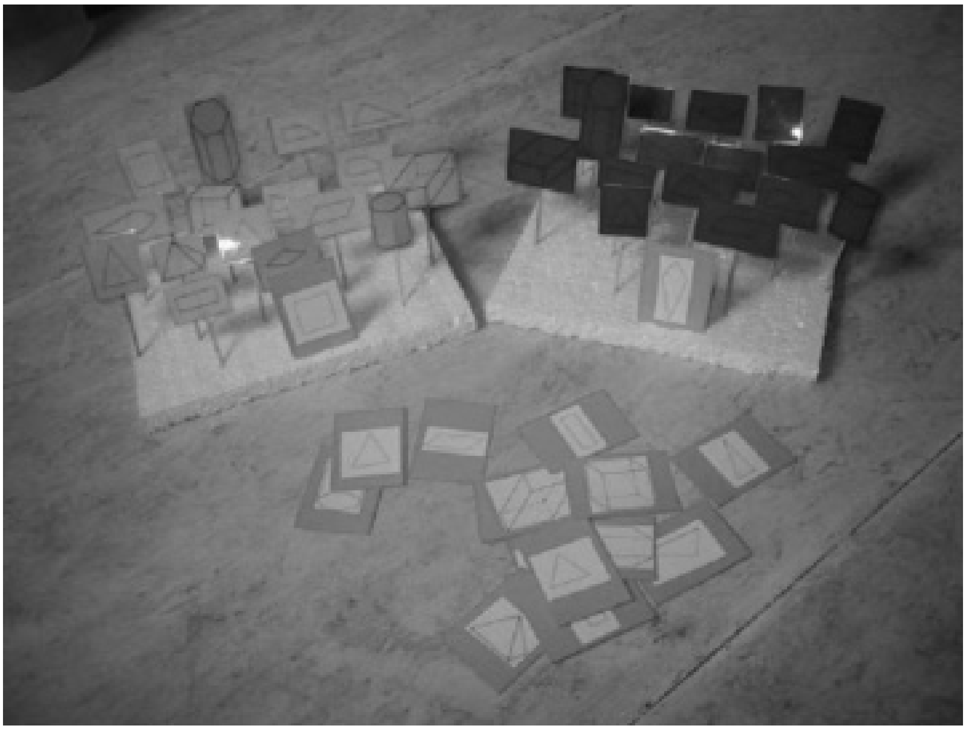
Les objectifs visés variant selon les classes et le contenu concerné, plusieurs déclinaisons du jeu sont possibles. Elles diffèrent en fonction des plaques de jeu mises à la disposition des élèves mais également en fonction des consignes données par l'enseignant. Nous en donnons quelques exemples plus bas, mais l'enseignant peut aussi lui-même décider des consignes qu'il donne. En raison de la grande variété d'opportunités qu'offre ce jeu, il peut être utilisé à divers moments de l'apprentissage.

MATÉRIEL

- Une planche de jeu pour chaque élève.
- Un exemplaire des cartes découpées.

RÈGLES DU JEU

Les élèves jouent par deux. Chacun reçoit une planche de jeu identique sur laquelle différentes figures sont représentées. Les cartes découpées sont retournées face contre le bureau. Chaque élève pêche une carte. Chacun doit deviner la figure géométrique (ou le solide) tirée par l'autre en posant des questions pertinentes auxquelles son interlocuteur ne peut répondre que par « *oui* » ou par « *non* ». En fonction de la réponse obtenue, on élimine la ou les figure(s) correspondante(s) au critère mentionné. Ceci peut se faire en les barrant sur la planche, en les retournant si les figures ont été préalablement découpées ou encore en les éliminant d'une table de jeu comme celle illustrée ci-après. Le gagnant est celui qui découvre la figure de l'autre en premier.



DIFFÉRENTES PLANCHES DE JEU

Plusieurs planches de jeu sont présentées dans ces pistes. Selon l'objectif poursuivi avec les élèves, il convient d'en choisir l'une ou l'autre.

- Planche 1 : figures avec leur nom
- Planche 2 : figures avec codage
- Planche 3 : figures et solides mélangés

DIFFÉRENTES CONSIGNES

De nouveau, en fonction de l'objectif recherché, l'enseignant peut donner des consignes différentes aux élèves. Si ce sont d'emblée des questions centrées sur les angles et les côtés qui viennent à l'esprit, l'enseignant pourrait, par exemple, imposer aux élèves de ne poser que des questions concernant les diagonales et les médianes des quadrilatères, et les droites remarquables des triangles. Dans un même ordre d'idées, on pourrait travailler essentiellement sur les axes et les centres de symétrie des figures.

Il est aussi possible d'imaginer que les élèves ne jouent pas par deux, mais que seul l'enseignant pêche une carte, et que tous les élèves posent des questions. Chaque élève dispose alors sa planche de jeu devant lui pour barrer les figures ne correspondant pas à la description.

Planche 1
figures avec leur nom

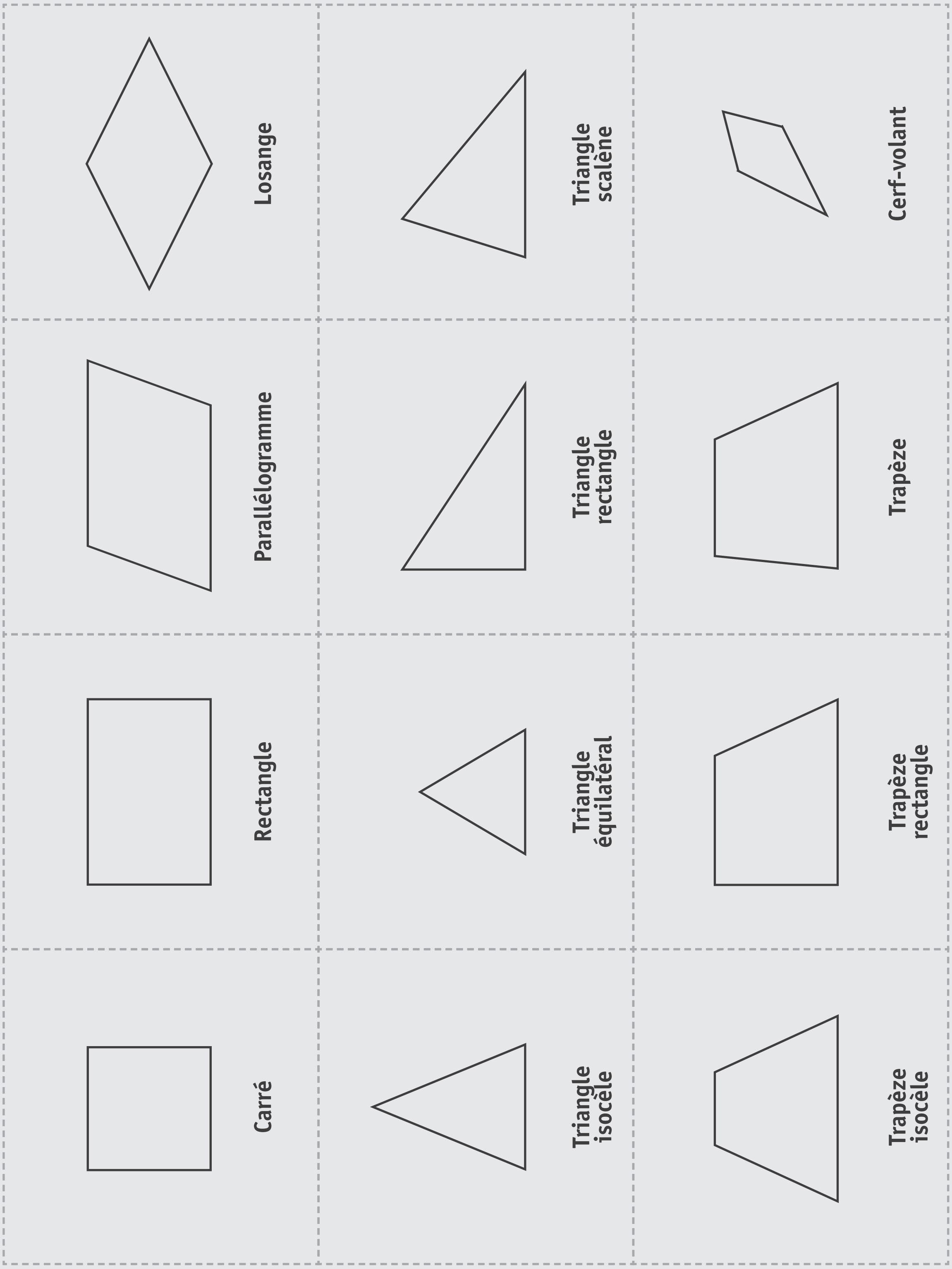


Planche 2
figures avec codage

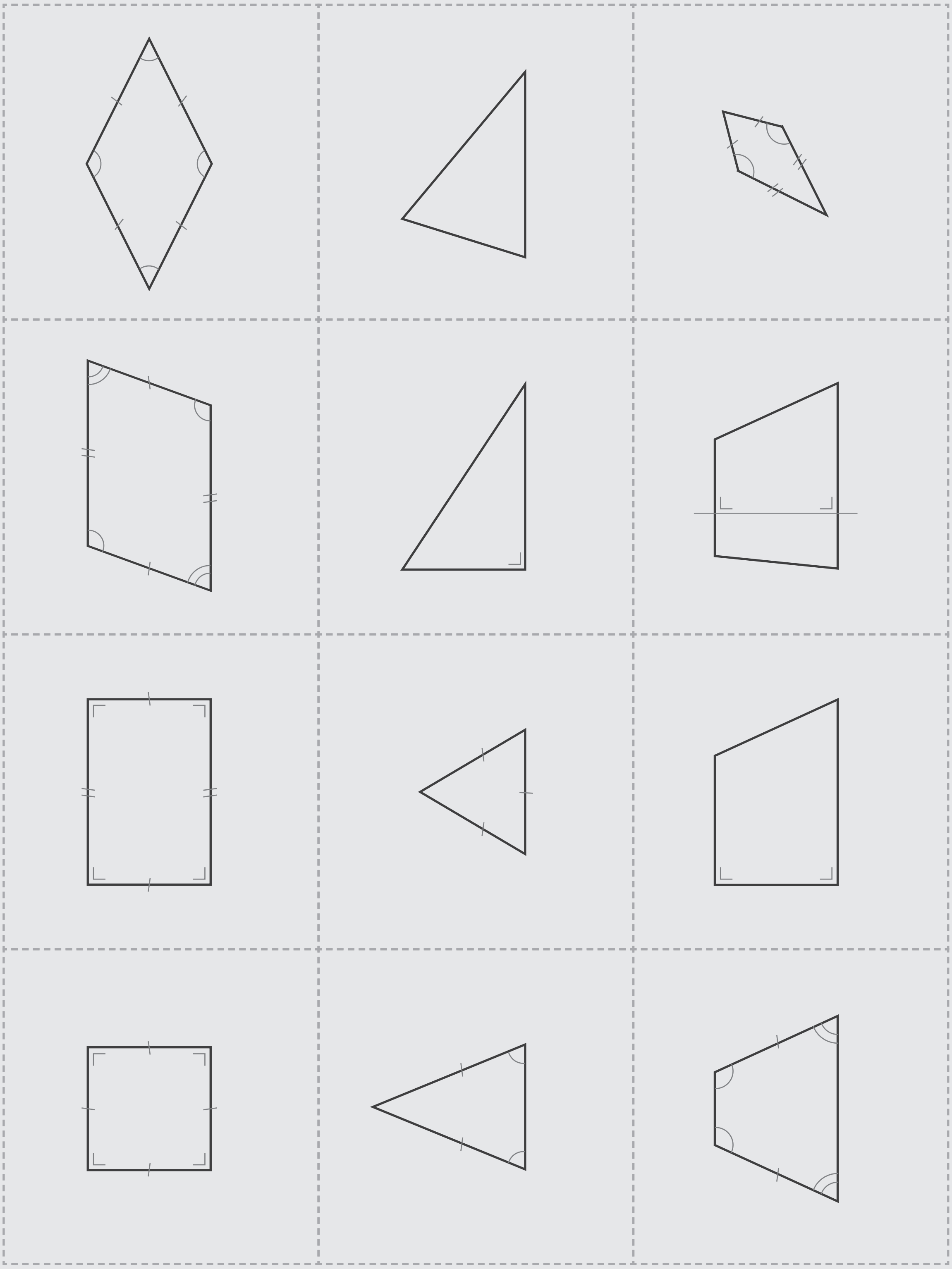
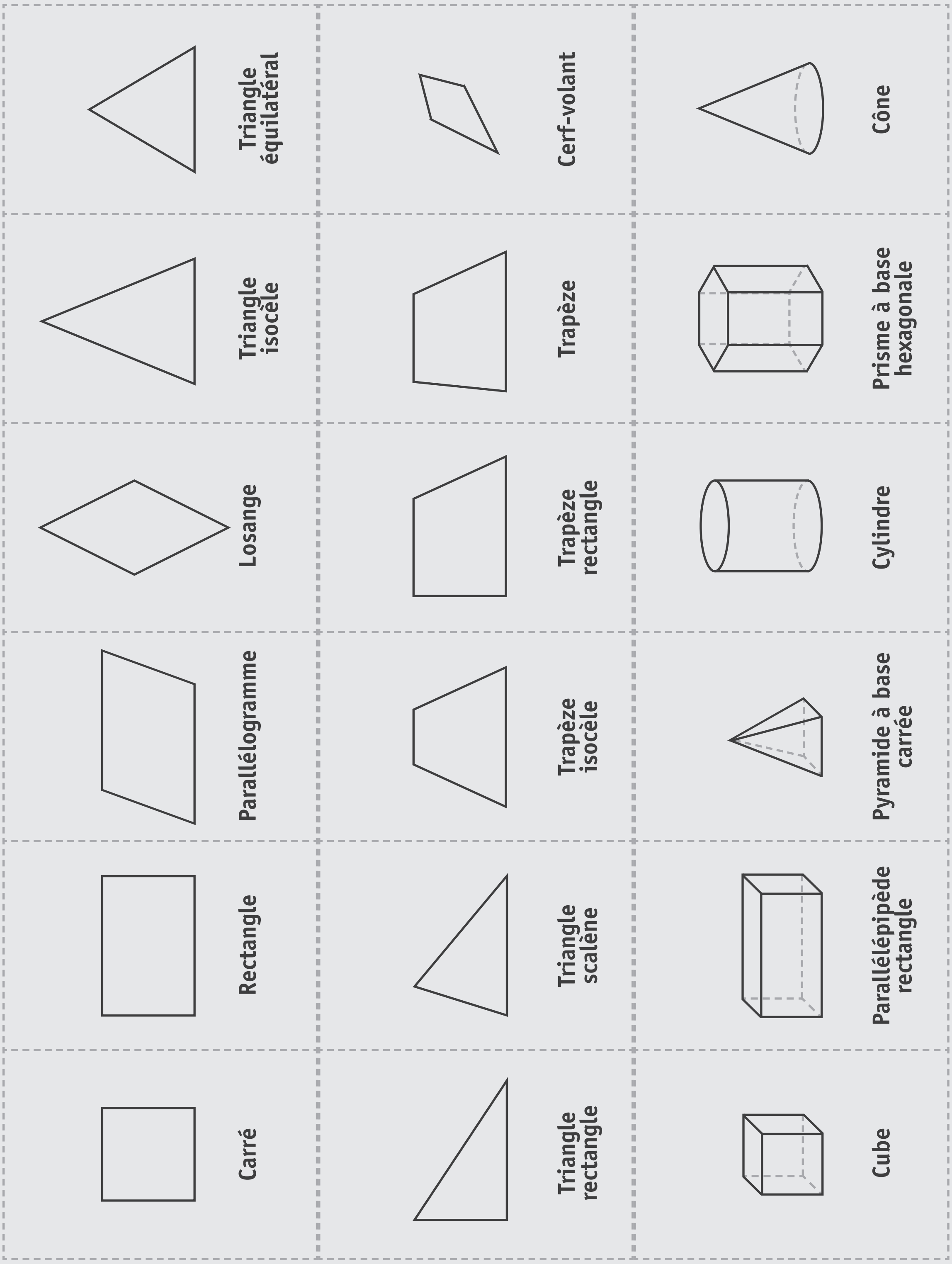


Planche 3
figures et solides mélangés



La justification en géométrie

Séquence d'apprentissage

Activité n°1
Travail individuel puis exploitation collective

Les triangles ci-dessous sont-ils isocèles ? Justifie.

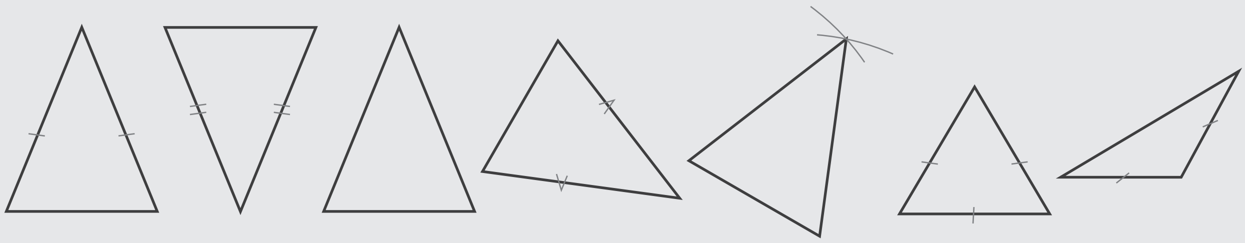


Figure n° 1 | Figure n° 2 | Figure n° 3 | Figure n° 4 | Figure n° 5 | Figure n° 6 | Figure n° 7

- **Figure n°1 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

- **Figure n°2 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

- **Figure n°3 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

- **Figure n°4 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

- **Figure n°5 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

- **Figure n°6 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

- **Figure n°7 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____

____

Lors de l'exploitation collective, l'enseignant fait un inventaire des réponses et justifications proposées par les élèves. Quatre types d'erreurs sont susceptibles d'apparaitre.

TYPE D'ERREUR	TRADUCTION CONCRÈTE	RÉGULATION
1. L'élève utilise la position **prototypique**[3] pour déterminer et justifier si un triangle est isocèle.	L'élève ne considère pas comme isocèles les triangles 2, 4 et 7 parce qu'ils ne sont pas dans une position prototypique.	Faire tourner la feuille pour que les triangles apparaissent dans une position prototypique. Faire admettre que les triangles obtenus sont isocèles et qu'ils le restent indépendamment de l'orientation de la feuille.
2. L'élève utilise la **mesure** pour justifier.	L'élève considère que le triangle 3 est isocèle après avoir mesuré les deux côtés isométriques. Éventuellement, il cite une mesure concrète dans sa justification (ex : il a deux côtés de 2,7 cm).	Montrer que la mesure n'est pas un argument fiable (une mesure est toujours imprécise). Par ailleurs, si des mesures concrètes sont proposées dans la justification, montrer qu'elles ne sont pas valables pour tous les triangles isocèles.
3. L'élève fait référence à l'utilisation d'un **instrument** dans sa justification.	L'élève considère le triangle 5 comme isocèle parce qu'il a été construit au compas avec la même ouverture.	Montrer que, comme la mesure, l'ouverture d'un compas n'est pas un argument suffisant. Il n'est pas sûr que les deux arcs de cercle ont des rayons de même longueur. Une trace de construction n'est pas un code conventionnel.
4. L'élève fait une **restriction inutile**.	L'élève ne considère pas le triangle 6 comme isocèle parce qu'il possède trois côtés isométriques (et pas uniquement deux). Les triangles sont isocèles lorsqu'ils possèdent uniquement deux côtés isométriques.	Attirer l'attention sur le fait que pour être triangle isocèle, il faut posséder au moins deux côtés de même longueur, et que le triangle équilatéral les possède. Le triangle équilatéral est un cas particulier du triangle isocèle.

Après avoir montré aux élèves la non-pertinence de ces formes d'argumentation, l'enseignant valide l'utilisation de propriétés pour justifier. Il fait remarquer que les propriétés sont traduites par des codes sur le dessin. Éventuellement, l'enseignant propose de déterminer si d'autres triangles, tracés à main levée, sont isocèles ou non et pourquoi.

[3] La figure 1 est dans ce que nous appelons une position *prototypique*.

Synthèse pour l'élève (étape 1)[4]

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ !

Une propriété est une caractéristique commune à une famille d'objets portant le même nom. Par exemple, si des triangles ont deux côtés isométriques (caractéristique commune), ce sont des triangles isocèles (famille d'objets portant le même nom). Certaines propriétés peuvent être codées par des signes conventionnels sur le dessin.

QU'EST-CE QUI N'EST PAS UNE PROPRIÉTÉ ?

- Une propriété ne peut pas faire référence à une **disposition ou à une apparence** visuelle (vertical, horizontal, penché, base, grand, petit, ...).
- Une propriété ne peut pas faire référence à des **mesures** particulières (5 cm, 27°) sauf si ces mesures sont les mêmes pour tous les objets de la famille (un angle de 90° pour les triangles rectangles).
- Une propriété ne peut pas faire référence aux **instruments** (compas, équerre, ...) utilisés pour construire.
- Une propriété ne peut pas comporter de **restrictions** abusives (2 côtés isométriques mais pas 3).

[4] La synthèse pour l'élève est établie à partir des éléments récapitulatifs destinés à l'enseignant. Au fur et à mesure de la progression à travers les étapes de la séquence, cette synthèse est complétée.

Éléments récapitulatifs n°1

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ !

Une propriété est une caractéristique commune à une famille d'objets portant le même nom. Par exemple, si des triangles ont deux côtés isométriques (caractéristique commune), ce sont des triangles isocèles (famille d'objets portant le même nom). Certaines propriétés peuvent être codées par des signes conventionnels sur le dessin.

QU'EST-CE QUI N'EST PAS UNE PROPRIÉTÉ ?

- Une propriété ne peut pas faire référence à une **disposition ou à une apparence** visuelle.

Dans une propriété, il ne peut pas y avoir les mots…	parce que…
Vertical	en tournant la feuille, il n'y a plus de vertical.
Horizontal	en tournant la feuille, il n'y a plus d'horizontal.
Oblique, incliné, penché	ce qui est oblique dépend de l'orientation de la feuille.
Base	base, c'est le côté horizontal et horizontal est interdit.
Grand	« Que veut dire grand ? » 10 cm ? 1 m ? 1 km ?
Petit	« Que veut dire grand ? » 1 cm ? 1 mm ? 0,5 mm ?

- Une propriété ne peut pas faire référence à des **mesures** particulières sauf si ces mesures sont les mêmes pour tous les objets de la famille.

On ne peut pas dire que…	parce que…	On dira plutôt que…
un triangle est isocèle parce qu'il possède deux côtés de 5 cm.	tous les triangles isocèles n'ont pas deux côtés de 5 cm.	tous les triangles isocèles possèdent deux côtés de même longueur.
un triangle est isocèle parce qu'il possède deux angles de 30°.	tous les triangles isocèles n'ont pas deux angles de 30°.	tous les triangles isocèles possèdent deux angles de même amplitude.

Par contre on peut dire que…	parce que…
un triangle rectangle possède un angle de 90°.	tous les triangles rectangles possèdent un angle de 90°.
la somme des amplitudes des angles d'un triangle fait 180°.	dans tous les triangles, la somme des amplitudes des angles vaut 180°.

- Une propriété ne peut pas faire référence aux **instruments** utilisés pour construire.

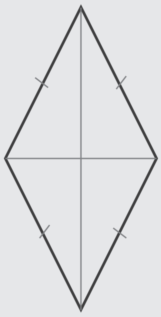
On ne peut pas dire que…	parce que…
un triangle est isocèle parce qu'il a deux côtés tracés au compas.	il n'est pas certain que l'ouverture du compas soit identique.

- Une propriété ne peut pas comporter de **restrictions** abusives.

On ne peut pas dire que…	parce que…
un triangle isocèle possède deux côtés de même longueur mais pas trois.	le triangle équilatéral appartient aussi à la famille des triangles isocèles car il possède au moins deux côtés de même longueur.
un parallélogramme possède des côtés opposés parallèles mais pas d'angle droit.	le rectangle appartient aussi à la famille des parallélogrammes tout en ayant quatre angles droits.

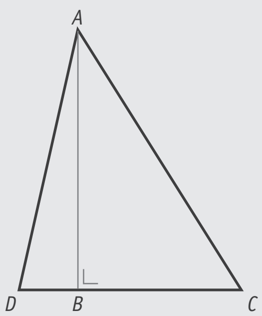
Entrainement n°1
Exercices individuels - Correction individuelle ou collective

Pour chacune des situations ci-dessous, souligne le nom de l'élève qui donne la justification correcte.



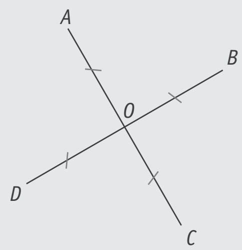
Quatre élèves justifient que ce quadrilatère est un losange.

Pierre dit : « Il a quatre côtés de même longueur. »
Ali dit : « Il est sur sa pointe. »
Sarah dit : « Il a une grande et une petite diagonale. »
Karl dit : « J'ai mesuré et tous ses côtés font 2,2 cm. »



Cinq élèves justifient que le segment [*AB*] est une hauteur du triangle *ACD*.

Zoé dit : « Il est vertical. »
Kim dit : « Il est situé à l'intérieur du triangle. »
Tom dit : « Il est perpendiculaire à un côté et passe par le sommet opposé à ce côté. »
Jeanne dit : « On l'utilise pour calculer l'aire du triangle. »
Renaud dit : « Parce que ce n'est pas la médiane. »



Cinq élèves justifient que le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

Medhi dit : « Si on relie, on le voit. »
Syriac dit : « Il possède deux longueurs et deux largeurs. »
Marc dit : « [*AC*] et [*BD*] sont ses diagonales. »
Marion dit : « Les diagonales [*AC*] et [*BD*] se coupent en leur milieu et sont de même longueur. »
Kevin dit : « J'ai mesuré [*OA*], [*OB*], [*OC*] et [*OD*]. Ils mesurent 1,9 cm. »

Il est intéressant que l'enseignant fasse une correction collective de ces exercices en examinant chacune des solutions proposées. L'idée est de préciser avec les élèves en quoi elles peuvent ou ne peuvent pas constituer des justifications.

Activité n°2
Travail individuel puis exploitation collective

Les triangles ci-dessous sont-ils isocèles ? Justifie.

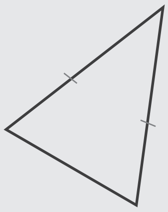


Figure n° 1

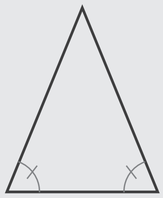


Figure n° 2

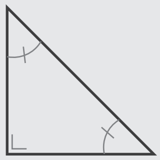


Figure n° 3

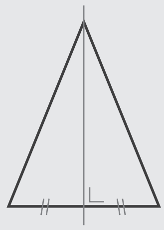


Figure n° 4

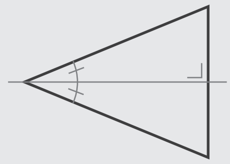


Figure n° 5

- **Figure n°1 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____________________

- **Figure n°2 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____________________

- **Figure n°3 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____________________

- **Figure n°4 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____________________

- **Figure n°5 : triangle isocèle ? OUI – NON** (entoure)
- Justification : ____________________

Lors de l'exploitation collective, l'enseignant fait un inventaire des réponses et justifications proposées par les élèves. L'erreur la plus probable consiste à utiliser la propriété de l'égalité des mesures de deux côtés, quelle que soit la situation de départ. Il s'agit, lors de l'exploitation collective de montrer qu'aucun code sur le dessin (sauf pour le triangle 1) ne permet d'énoncer cette propriété et que d'autres propriétés doivent être utilisées.

Les justifications correctes sont les suivantes : le triangle est isocèle parce que…

Figure n°1 :
- il possède deux côtés isométriques.

Figure n°2 :
- il possède deux angles de même amplitude.

Figure n° 3 :
- il possède deux angles de même amplitude (faire remarquer qu'il n'est pas nécessaire de prouver que le triangle est rectangle et que, dès lors, la présence de l'angle droit est une donnée à ne pas prendre en compte).

Figure n° 4 :
- une hauteur et une médiane sont confondues ;
- une hauteur et une médiatrice sont confondues ;
- une médiatrice et une médiane sont confondues ;
- il possède un axe de symétrie.

Figure n°5 :
- une hauteur et une bissectrice sont confondues.

Synthèse pour l'élève (étapes 1 & 2)

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ !

Une propriété est une caractéristique commune à une famille d'objets portant le même nom. Par exemple, si des triangles ont deux côtés isométriques (caractéristique commune), ce sont des triangles isocèles (famille d'objets portant le même nom). Certaines propriétés peuvent être codées par des signes conventionnels sur le dessin.

QU'EST-CE QUI N'EST PAS UNE PROPRIÉTÉ ?

- Une propriété ne peut pas faire référence à une disposition ou à une apparence visuelle (vertical, horizontal, penché, base, grand, petit, ...).
- Une propriété ne peut pas faire référence à des mesures particulières (5 cm, 27°) sauf si ces mesures sont les mêmes pour tous les objets de la famille (un angle de 90° pour les triangles rectangles).
- Une propriété ne peut pas faire référence aux instruments (compas, équerre, ...) utilisés pour construire.
- Une propriété ne peut pas comporter de restrictions abusives (2 côtés isométriques mais pas 3).

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ PERTINENTE !

- Les informations sont données par un énoncé et/ou codées sur un dessin.
- Une propriété pertinente, c'est une propriété qui se base sur ces informations ou sur un élément qui a déjà été justifié.

Éléments récapitulatifs n°2

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ PERTINENTE !

On ne peut pas utiliser n'importe quelle propriété pour justifier. Il faut que la propriété soit pertinente. Une propriété pertinente, c'est une propriété que l'on peut associer à la situation de départ ou à un élément qui a déjà été justifié. Pour commencer, il faut partir de ce qui est indiqué dans l'énoncé et/ou codé dans le dessin.

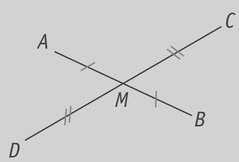
EN RÉSUMÉ :
Les informations sont données par un énoncé et/ou codées sur un dessin.
Une propriété pertinente, c'est une propriété qui se base sur ces informations ou sur un élément qui a déjà été justifié.

Voici un exemple pour mieux comprendre ce que sont les données et les propriétés pertinentes.

Enoncé :
Le point *M* est le milieu des segments [*AB*] et [*CD*].
Justifie que le quadrilatère *ACBD* est un parallélogramme.

Les données sont :
Le point *M* est le milieu des segments [*AB*] et [*CD*].

Dessin :



Les données sont codées sur le dessin par les signes / et //. Ils montrent que [*AB*] et [*CD*] se coupent en leur milieu *M*.

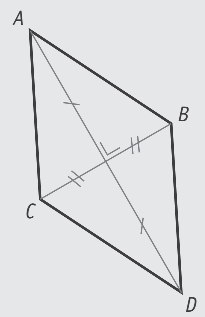
Justification :
Pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il existe plusieurs propriétés :
- les côtés opposés sont parallèles ;
- les côtés opposés sont de même longueur ;
- les angles opposés sont de même amplitude ;
- il y a un centre de symétrie ;
- les diagonales se coupent en leur milieu.

Dans le cas présent, seule la dernière propriété est pertinente : c'est la seule qui peut être liée aux données. Les autres ne sont pas pertinentes ici. On justifie donc comme ceci :
Le quadrilatère *ACBD* est un parallélogramme car ses diagonales [*AB*] et [*CD*] se coupent en leur milieu *M*.

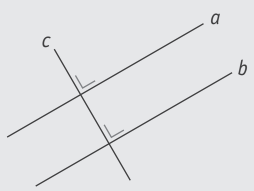
Entrainement n°2
Exercices individuels - Correction individuelle ou collective

Quatre exercices sont proposés. Les deux premiers portent sur le codage d'informations dans un dessin. Pour l'exercice 1, il est important lors de l'exploitation collective, de faire distinguer aux élèves les données de départ de ce qui constitue une étape plus avancée : il faut leur dire que la réponse 3 de chaque exercice n'est pas la réponse attendue mais constitue déjà une étape ultérieure du raisonnement. Lorsqu'ils devront démontrer, les élèves devront s'efforcer de passer d'abord par ce qui est mis en évidence sur le dessin (solutions 1 et 4) puis seulement déduire.

1. Pour chaque dessin, entoure la proposition qui traduit l'ensemble des données codées sur celui-ci.



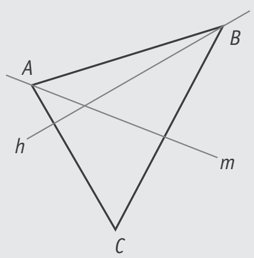
- Le quadrilatère *ABCD* possède quatre côtés de même longueur.
- Le quadrilatère *ABCD* possède des diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu.
- Le quadrilatère *ABCD* est un losange.
- Le quadrilatère *ABCD* a des côtés opposés parallèles et deux côtés consécutifs de même longueur.



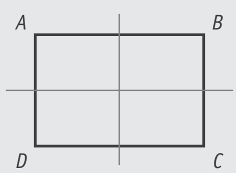
- Les droites *a* et *b* sont de même longueur et sont parallèles.
- Les droites *a*, *b* et *c* sont toutes parallèles ou perpendiculaires.
- Les droites *a* et *b* sont parallèles.
- Les droites *a* et *b* sont perpendiculaires à *c*.

2. Code les données sur la figure.

a. Dans le triangle *ABC* ci-dessous, *h* est une hauteur et *m* une médiane.



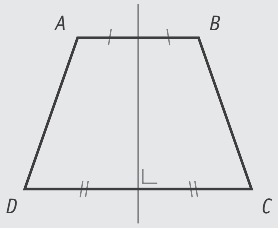
b. Le quadrilatère *ABCD* possède deux axes de symétrie.



Entrainement n°2
Exercices individuels - Correction individuelle ou collective

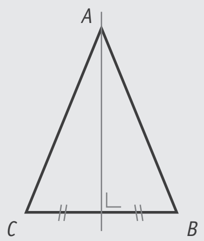
3. Entoure la propriété pertinente pour…

… justifier que le trapèze *ABCD* est isocèle.



- Un trapèze isocèle est une partie de triangle isocèle.
- Un trapèze qui possède deux côtés opposés isométriques est isocèle.
- Un trapèze dont les diagonales sont de même longueur est isocèle.
- Un trapèze qui possède un axe de symétrie est isocèle.

…justifier que le triangle *ABC* est isocèle.



- Un triangle qui possède deux côtés de même longueur est isocèle.
- Un triangle dont une bissectrice et une hauteur sont confondues est isocèle.
- Un triangle dont une médiane et une hauteur sont confondues est isocèle.
- Un triangle dont une bissectrice et une médiane sont confondues est isocèle.

4. On donne l'énoncé suivant :

Deux segments [AB] et [CD] se coupent en leur milieu.

Réalise la figure et code les données.

Donne, **dans l'ordre**, les numéros des deux propriétés qui vont te permettre de justifier que les segments [*AC*] et [*BD*] sont isométriques :

- Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
- Un quadrilatère dont les côtés opposés sont isométriques est un parallélogramme.
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles est un parallélogramme.
- Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Activité n°3
Travail individuel puis exploitation collective

Trace ci-contre un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur et au moins un angle droit.

- De quel quadrilatère s'agit-il ? ____________________
- Déduis une définition de ce quadrilatère **qui correspond à ta construction :** ____________________

____

____

Trace ci-contre un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, de même longueur et se coupent en leur milieu.

- De quel quadrilatère s'agit-il ? ____________________
- Déduis une définition de ce quadrilatère **qui correspond à ta construction :** ____________________

____

____

Trace ci-contre un quadrilatère qui possède au moins trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur.

- De quel quadrilatère s'agit-il ? ____________________
- Déduis une définition de ce quadrilatère **qui correspond à ta construction :** ____________________

____

____

Idéalement, il faudrait exploiter cette activité avec un géoplan (planche à clous, élastiques) ou avec un logiciel de géométrie. Parmi ceux-ci, citons :

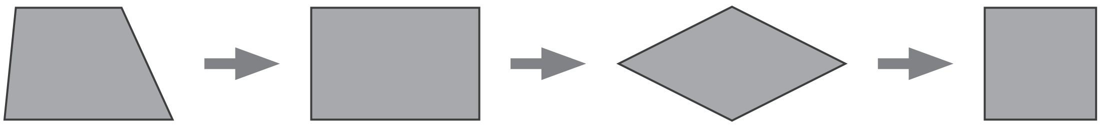
- GeoGébra ;
- Cabri ;
- Déclic ;
- ...

Le but est de montrer qu'à partir d'un certain moment, il n'y a plus besoin d'ajouter des propriétés pour prouver qu'un quadrilatère est un carré (montrer par exemple que pour le cas n°2, on n'a pas besoin de parler de l'égalité des côtés). La figure est « bloquée » et les propriétés sont suffisantes. Il n'est pas nécessaire d'en fournir d'autres.

Il est important de faire remarquer qu'il n'existe pas UNE définition du carré mais qu'on peut combiner un certain nombre de propriétés pour définir ce qu'est un carré. Cela est vrai pour toutes les figures (demander aux élèves d'envisager les différentes définitions du triangle isocèle). Il existe donc un lien étroit entre définition et propriétés.

Enfin, un exercice comme le suivant est également intéressant à faire avec les élèves, éventuellement en utilisant un logiciel ou un géoplan :

Kè-Drol est un trapèze quelconque qui aspire à évoluer. Dans sa longue quête vers la perfection, il va passer par plusieurs stades :



Parmi les propriétés des diagonales des quadrilatères, quelle(s) est(sont) celle(s) qu'il faut ajouter ou retirer pour passer d'un stade à l'autre ?

Une animation GeoGébra correspondante peut être consultée à l'adresse suivante :

http://www.geogebratube.org/student/m6988

Synthèse pour l'élève (étapes 1, 2 et 3)

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ !

Une propriété est une caractéristique commune à une famille d'objets portant le même nom. Par exemple, si des triangles ont deux côtés isométriques (caractéristique commune), ce sont des triangles isocèles (famille d'objets portant le même nom). Certaines propriétés peuvent être codées par des signes conventionnels sur le dessin.

QU'EST-CE QUI N'EST PAS UNE PROPRIÉTÉ ?

- Une propriété ne peut pas faire référence à une disposition ou à une apparence visuelle (vertical, horizontal, penché, base, grand, petit, ...).
- Une propriété ne peut pas faire référence à des mesures particulières (5 cm, 27°) sauf si ces mesures sont les mêmes pour tous les objets de la famille (un angle de 90° pour les triangles rectangles).
- Une propriété ne peut pas faire référence aux instruments (compas, équerre, ...) utilisés pour construire.
- Une propriété ne peut pas comporter de restrictions abusives (2 côtés isométriques mais pas 3).

JUSTIFIER, C'EST UTILISER UNE PROPRIÉTÉ PERTINENTE !

- Les informations sont données par un énoncé et/ou codées sur un dessin.
- Une propriété pertinente, c'est une propriété qui se base sur ces informations ou sur un élément qui a déjà été justifié.

JUSTIFIER, C'EST UTILISER LE CARACTÈRE NÉCESSAIRE ET SUFFISANT DES PROPRIÉTÉS PERTINENTES.

Pour justifier l'identification d'une figure (c'est-à-dire la définir), il n'y a pas besoin de citer toutes ses propriétés. On ne cite que les propriétés qu'on appelle nécessaires et suffisantes.

Des propriétés sont nécessaires et suffisantes quand on a **juste celles qu'il faut** pour définir la figure.

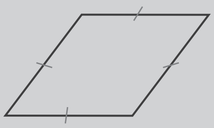
Une fois qu'il est prouvé qu'une figure donnée est un carré, elle possède toutes les propriétés du carré. Celles-ci peuvent alors être utilisées.

Éléments récapitulatifs n°3

JUSTIFIER, C'EST UTILISER LE CARACTÈRE NÉCESSAIRE ET SUFFISANT DES PROPRIÉTÉS PERTINENTES.

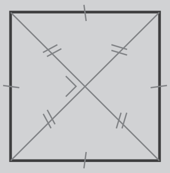
Pour justifier l'identification d'une figure (c'est-à-dire la définir), il n'y a pas besoin de citer toutes ses propriétés. On ne cite que les propriétés qu'on appelle *nécessaires et suffisantes*. Des propriétés sont nécessaires et suffisantes quand on a juste celles qu'il faut pour définir la figure.

Voici un exemple pour t'aider à comprendre



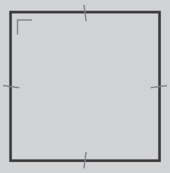
Un quadrilatère est un carré si
- il possède quatre côtés isométriques.

La propriété à elle seule n'est **pas suffisante car, si on ne donne pas assez** de propriétés pour définir un carré, on peut avoir un losange.



Un quadrilatère est un carré si :
- il a quatre côtés isométriques ;
- il a quatre angles droits ;
- ses diagonales sont isométriques ;
- ses diagonales se coupent en leur milieu ;
- ses diagonales sont perpendiculaires ;
- il a quatre axes de symétrie.

Ici, certaines propriétés ne sont **pas nécessaires : on en donne trop**. Il n'y a pas besoin d'en donner autant pour prouver que le quadrilatère est un carré.



Un quadrilatère est un carré si
- il a quatre côtés isométriques ;
- il a un angle droit.

Ici, les propriétés sont **nécessaires et suffisantes** : on a juste ce qu'il faut : ni trop, ni trop peu.

Autre exemple : un quadrilatère est un carré s'il possède quatre axes de symétrie.

Il est très important de savoir justifier le caractère nécessaire et suffisant parce qu'il n'est pas utile de vérifier, par exemple, toutes les propriétés du carré pour qu'une figure soit un carré.

Une fois qu'il est prouvé qu'une figure donnée est un carré, elle possède toutes les propriétés du carré. Celles-ci peuvent alors être utilisées.

Entrainement n°3
Exercices individuels - Correction individuelle ou collective

Trois exercices sont proposés. Le 1er est l'occasion de faire remarquer aux élèves qu'une même figure peut être définie par différentes propriétés. On peut également mettre en évidence pour le carré, qu'il s'agit des mêmes propriétés qui sont proposées dans un ordre différent. Pour l'exercice 2, la façon de justifier est laissée libre. L'élève peut corriger la phrase ou fournir un contre-exemple.

1. Lis les propriétés <u>les unes après les autres</u>. Arrête-toi quand tu as les propriétés nécessaires et suffisantes pour définir le quadrilatère demandé. Barre les propriétés restantes.

• **Un rectangle**
- Il possède quatre angles droits.
- Les côtés opposés sont parallèles.
- Les côtés opposés sont de même longueur.
- Les diagonales sont de même longueur.
- Les diagonales se coupent en leur milieu.

• **Un losange**
- Les côtés opposés sont parallèles.
- Deux côtés consécutifs ont la même longueur.
- Les quatre côtés ont la même longueur.
- Les diagonales sont perpendiculaires.
- Les diagonales se coupent en leur milieu.

• **Un losange**
- Les diagonales sont perpendiculaires.
- Les côtés opposés sont parallèles.
- les diagonales se coupent en leur milieu.
- Deux côtés consécutifs ont la même longueur.
- Les quatre côtés ont la même longueur.

• **Un parallélogramme**
- Les diagonales se coupent en leur milieu.
- Les côtés opposés sont parallèles.
- Les côtés opposés sont de même longueur.
- Les angles opposés ont la même amplitude.
- Il possède un centre de symétrie.

• **Un carré**
- Les diagonales se coupent en leur milieu.
- Les diagonales sont isométriques.
- Les diagonales sont perpendiculaires.
- Les côtés sont isométriques.
- Il a quatre angles droits.

• **Un carré**
- Il a quatre angles droits.
- Les diagonales sont perpendiculaires.
- Les diagonales se coupent en leur milieu.
- Les diagonales sont isométriques.
- Les côtés sont isométriques.

**2. Les informations fournies sont-elles suffisantes pour définir la figure donnée ?
Coche oui ou non. Si la réponse est non, corrige la phrase ou cite un contre-exemple.**

• **Un quadrilatère est un rectangle si ses diagonales se coupent en leur milieu.**

☐ Oui | ☐ Non : ____________________

• **Un trapèze est isocèle s'il possède un axe de symétrie.**

☐ Oui | ☐ Non : ____________________

• **Un parallélogramme est un carré s'il possède des côtés de même longueur.**

☐ Oui | ☐ Non : ____________________

• **Un triangle est équilatéral s'il possède un angle de 60°.**

☐ Oui | ☐ Non : ____________________

Entrainement n°3
Exercices individuels - Correction individuelle ou collective

3. Dans les propositions suivantes, les renseignements sont-ils trop nombreux, trop peu nombreux ou nécessaires et suffisants pour dire que le quadrilatère considéré est un ...

• rectangle ?
Ce quadrilatère a quatre angles droits et des côtés opposés de même longueur.
☐ Trop peu nombreux | ☐ Nécessaires et suffisants | ☐ Trop nombreux

Transforme, **si nécessaire**, la définition pour qu'elle contienne les propriétés nécessaires et suffisantes.
Nouvelle définition : ____

____

• carré ?
Les diagonales de ce quadrilatère se coupent en leur milieu et sont de même longueur.
☐ Trop peu nombreux | ☐ Nécessaires et suffisants | ☐ Trop nombreux

Transforme, **si nécessaire**, la définition pour qu'elle contienne les propriétés nécessaires et suffisantes.
Nouvelle définition : ____

____

• losange ?
Les diagonales de ce quadrilatère se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires entre elles.
☐ Trop peu nombreux | ☐ Nécessaires et suffisants | ☐ Trop nombreux

Transforme, **si nécessaire**, la définition pour qu'elle contienne les propriétés nécessaires et suffisantes.
Nouvelle définition : ____

____

• parallélogramme ?
Les côtés opposés de ce quadrilatère sont parallèles et de même longueur.
☐ Trop peu nombreux | ☐ Nécessaires et suffisants | ☐ Trop nombreux

Transforme, **si nécessaire**, la définition pour qu'elle contienne les propriétés nécessaires et suffisantes.
Nouvelle définition : ____

____

PROPRIÉTÉ ET RÉCIPROQUE

Voici une propriété : Si un quadrilatère est un losange, alors les diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.	**Voici une autre propriété :** Si un quadrilatère est un carré, alors c'est aussi un rectangle.
Voici la propriété réciproque : Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors c'est un losange.	**Voici sa propriété réciproque :** Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est aussi un carré.

LA RÉCIPROQUE D'UNE PROPRIÉTÉ VRAIE N'EST PAS TOUJOURS VRAIE !

Exercice 1

La propriété réciproque de la propriété écrite est-elle vraie ou fausse ?

- PROPRIÉTÉ 1
  Si un quadrilatère est un rectangle, alors il a quatre angles droits.

- PROPRIÉTÉ 2
  Si M est le milieu du segment $[AB]$, alors M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

- PROPRIÉTÉ 3
  Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $|IA| = |IB|$.

- PROPRIÉTÉ 4
  Si un quadrilatère est un carré, alors il a quatre côtés de même longueur.

- PROPRIÉTÉ 5
  Si un triangle possède un angle droit alors il est rectangle.

Exercice 2

Pour chaque propriété :

1. **Écris si elle est vraie.**
2. **Écris la réciproque.**
3. **Cette réciproque est-elle vraie ?**

- PROPRIÉTÉ 1
  Si un triangle est équilatéral alors il a trois angles de même amplitude.

- PROPRIÉTÉ 2
  Si un triangle est isocèle alors il est équilatéral.

- PROPRIÉTÉ 3
  Si un triangle est rectangle alors il est isocèle.

  PROPRIÉTÉ 4
  Si $|AB| = |BC| = |CD|$ alors *ABCD* est un losange.

- PROPRIÉTÉ 5
  Si un quadrilatère est un carré alors c'est aussi un rectangle.

- PROPRIÉTÉ 6
  Si un quadrilatère est un parallélogramme alors il possède deux axes de symétrie.

- PROPRIÉTÉ 7
  Si un quadrilatère a ses diagonales et ses médianes comme axes de symétrie alors c'est un carré.

- PROPRIÉTÉ 8
  Si les points *A*, *B* et *C* sont alignés alors *B* appartient au segment [*AC*].

- PROPRIÉTÉ 9
  Si on double le rayon d'un cercle alors son périmètre est doublé.

- PROPRIÉTÉ 10
  Si [*AB*] est un diamètre d'un cercle de centre *O* alors $|OA| = |OB|$.

- PROPRIÉTÉ 11
  Si on double les longueurs des côtés d'un triangle alors les amplitudes des angles sont aussi doublées.

- PROPRIÉTÉ 12
  Si on triple la longueur des côtés d'un carré alors son périmètre est triplé.

2 PROPORTIONS ET POURCENTAGES

2.1 LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Les taux de réussite des items de l'épreuve qui portent sur les calculs de pourcentages sont de 58 % en 2e commune et complémentaire, et de 20 % en 2e différenciée. Il a donc été décidé d'y consacrer une partie du présent document. Même si les résultats observés sont meilleurs (65 % en 2e commune et complémentaire, pas testé en 2e différenciée), la notion de proportionnalité a également fait l'objet d'une attention particulière.

L'analyse des réponses à quelques items de l'épreuve de 2e commune et complémentaire est instructive. Elle met en évidence que les difficultés ne résident pas uniquement dans des erreurs de calcul.

Question 13

CHOISIS l'offre la plus intéressante si on achète quatre objets à 12 € pièce et **JUSTIFIE**.

Offre 1 : 3 + 1 gratuit

Offre 2 : 30 % de réduction sur le total des achats

Réponse : Offre n° . . . . . ☐ 28

Justification :

. . . .

Par exemple, pour la question 13, l'analyse met en évidence que plusieurs réponses erronées sont liées :

- à la notion de *gratuité* ou de *réduction* :
  - dans un cas, il y a une réduction et pas dans l'autre – l'offre avec la réduction est donc plus intéressante ;
  - avoir quelque chose gratuitement est d'office plus intéressant ;
- à la compréhension de l'expression 12 € pièce : plusieurs élèves considèrent qu'un objet coute 3 ;
- à la comparaison de la réduction pour la deuxième offre (et non le prix réduit) avec le prix de la première offre ;
- à la compréhension de *3 + 1 gratuit* qui est parfois interprété comme 3 dont 1 gratuit.

Si certains élèves sont capables de réaliser des calculs corrects, ils ne comparent pas in fine les deux offres pour émettre un avis. Enfin, certains élèves ne justifient rien.

Question 14

Un magasin spécialisé en informatique fait des promotions. Il accorde une réduction de 20 % sur un ordinateur portable vendu à 920 €.

CALCULE le nouveau prix de l'ordinateur portable après réduction.
ÉCRIS tous tes calculs.

Réponse : .... €

29

Pour la question 14, les erreurs les plus fréquentes consistent à se limiter au calcul du montant de la réduction. Par ailleurs, plusieurs élèves, qui ont bien calculé le pourcentage, se trompent lorsqu'ils doivent réaliser la soustraction. Concernant le calcul de pourcentage lui-même, plusieurs erreurs-types peuvent être repérées :

- – 20 % = – 20 € ou – 0.20 €
- 20 % = 1/20 ou 1/3 ou 1/4 ou 1/2
- Pour calculer 20 %, on fait x 100 : 20
- 20 % = 1/5 donc 20 % = – 5 €
- ...

Question 17

Lors des soldes, un commerçant annonce 30 % de réduction sur tous les articles. Sur une étiquette, on peut voir l'ancien prix 45 € et le nouveau prix 30 €.
Le commerçant a-t-il bien calculé la réduction ? **ENTOURE** la bonne réponse et **JUSTIFIE**.

Réponse : OUI - NON 34

Justification :

....

....

Dans le même sens, la question 17 met en évidence que, pour beaucoup d'élèves, 30 % = 1/3.

Question 18

On annonce une augmentation du prix du pain de 2 %, dès demain.
En sachant qu'un pain blanc de 800 g coute aujourd'hui 1,80 €,
CALCULE le prix qui sera affiché à la boulangerie dès demain.
ÉCRIS tous tes calculs.

Réponse : .... € 35

La question 18 permet de constater qu'en plus des types d'erreurs décris plus haut, certains élèves calculent un prix réduit lorsqu'on leur demande quel sera le prix d'un pain de 1,80 € s'il augmente de 2 %.

Question 38

Pour télécharger 3 chansons sur internet, il faut environ une minute.
COMPLÈTE le tableau de proportionnalité suivant :

Nombre de chansons	.....	9	.....
Durée (en secondes)	120	.....	360

☐ 67

☐ 68

☐ 69

CALCULE le nombre de chansons que tu pourrais, à la même vitesse, télécharger en une heure. ☐ 70

Réponse : .... chansons

En ce qui concerne la proportionnalité, la question 38 semblait relativement simple apriori.

Les taux de réussite varient de 55 % à 69 % selon les items. L'examen des réponses erronées permet de constater qu'un nombre non négligeable d'élèves calculent le nombre de minutes en fonction du nombre de secondes, plutôt que le nombre de chansons en fonction du nombre de secondes. Concrètement, ils répondent : « 2 », « 540 », « 6 », « 60 ». Plusieurs élèves dont le tableau comporte 6 et 9 dans la première ligne, répondent 12 dans la dernière cellule de cette ligne, comme s'il devait y avoir un « pas » régulier entre les différentes valeurs présentées.

Question 37

Trois brouettes de gravier permettent de couvrir 4 m². Sachant qu'une brouette en contient 50 kg, **CALCULE** la quantité de gravier dont on aura besoin pour couvrir 20 m².
ÉCRIS tous tes calculs.

Réponse : .... kg ☐ 66

Enfin, l'analyse des erreurs de la question 37 confirme que de nombreux élèves éprouvent des difficultés dès que le problème posé fait intervenir une double relation de proportionnalité. Une très large majorité de réponses erronées mentionnent 250 kg. Les élèves mettent ainsi en relation le 4 m² et le 50 kg avec le 20 m² sans se soucier des 3 brouettes : comme il faut multiplier 4 m^2 par 5 pour obtenir 20 m^2, on fait simplement la même chose avec les 50 kg.

En 2e différenciée, si les élèves associent le calcul d'un pourcentage au fait d'ajouter ou de retrancher un nombre d'une quantité de départ, ce nombre ne semble pas correspondre à quelque chose de bien défini. De plus, associer un pourcentage à une fraction pose également problème. Un certain nombre d'élèves prennent simplement le numérateur de la fraction comme pourcentage (ex : $\frac{2}{5}$ = 2 %).

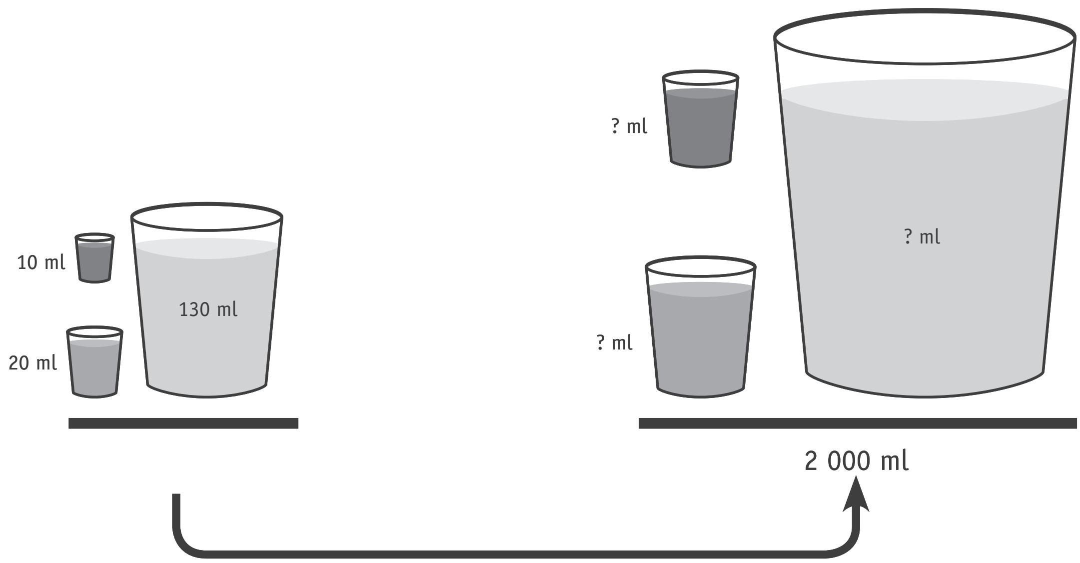
2.2 INTENTIONS ET COMMENTAIRES

2.2.1 PROPORTIONNALITÉ

Passer par une représentation préalable est toujours un moyen efficace d'aborder un problème. Les problèmes de proportionnalité comme celui proposé ci-dessous s'y prêtent particulièrement bien.

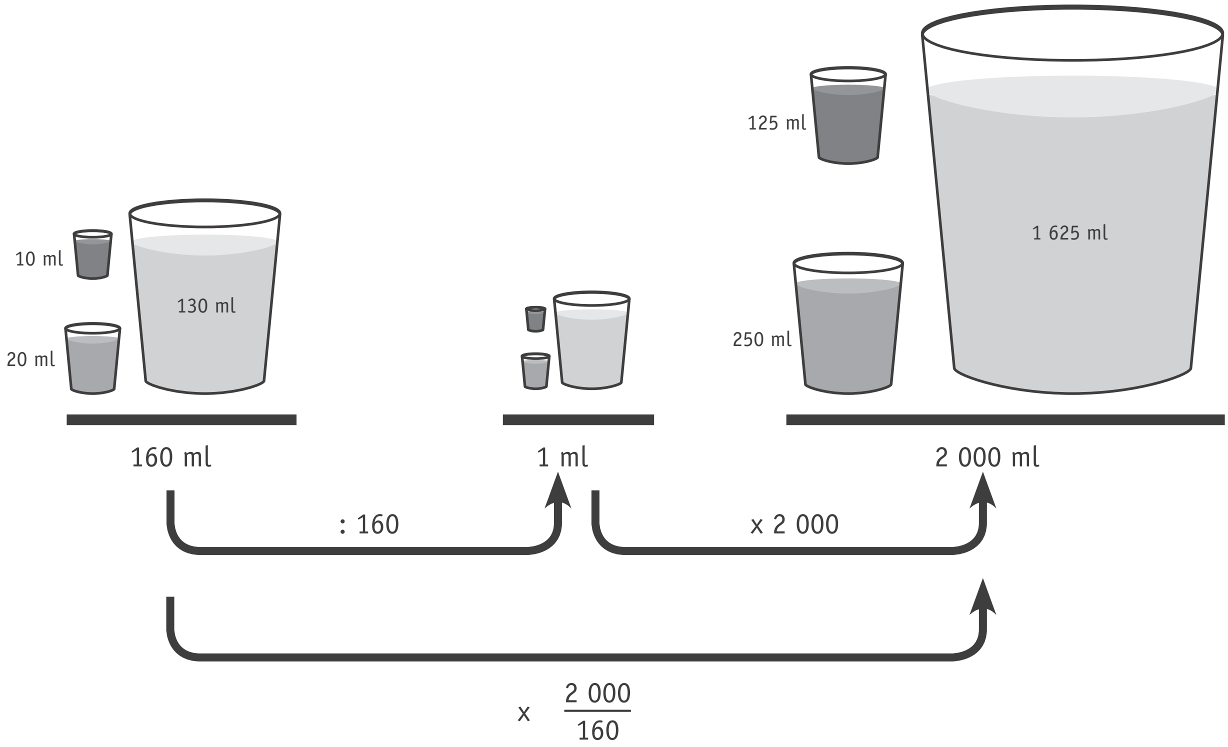
Pour un verre de limonade maison, il faut 130 ml d'eau gazeuse, 20 ml de jus de citron et 10 ml de sirop de sucre de canne. On veut préparer environ deux litres de cette limonade. Quelle quantité de chaque ingrédient faut-il prévoir ?

Après avoir laissé réfléchir individuellement les élèves, l'idée est de commencer une discussion collective en esquissant une représentation du verre et des différents composants de la limonade. On dessine ensuite le récipient auquel on voudrait aboutir (2 000 ml).



Après avoir établi la capacité totale du verre (160 ml), on met en évidence qu'on ne pourrait pas mettre un nombre entier de verres de 160 ml pour remplir complètement le récipient de 2l. Certains élèves auront d'ailleurs sans doute procédé par tâtonnements lors de la phase individuelle pour déterminer qu'il faut entre 12 et 13 verres (voire 12 verres et demi). On discute alors de la capacité des verres qu'on pourrait utiliser pour remplir parfaitement le grand récipient et on met en évidence que, si on pouvait répartir le verre de 160 ml dans ces autres verres (plus petits), le problème serait résolu. On explique alors qu'en général, on utilise l'unité (ici 1 ml).

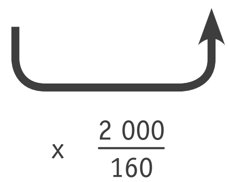
Au fur et à mesure des échanges, le schéma est complété et devient finalement celui-ci.



On peut ensuite transformer les schémas en tableaux et montrer qu'il suffit de connaitre une quantité pour les deux colonnes afin de calculer toutes les autres valeurs du tableau.

	Verre	**Cruche**
Eau gazeuse	130 ml	? ml
Citron	20 ml	? ml
Sirop	10 ml	? ml
Total	**160 ml**	**2 000 ml**

	Verre	**Cruche**
Eau gazeuse	130 ml	1 625 ml
Citron	20 ml	250 ml
Sirop	10 ml	125 ml
Total	**160 ml**	**2 000 ml**



Montrer et faire retenir que retrouver systématiquement le même rapport de proportionnalité (résultat de l'opération × 2000/160) entre les quantités est essentiel. Selon les démarches mises en œuvre par les élèves, on peut aussi éventuellement parler de coefficient de proportionnalité (12,5) qui, une fois établi à partir des deux quantités (2000/160 = 25/2 = 12,5), peut être appliqué à toutes les autres valeurs. Enfin il est intéressant de remarquer qu'utiliser les rapports internes de proportionnalité peut simplifier les calculs : pour passer de la ligne 160 ml du mélange à celle de 20 ml de citron, on divise par 8 et donc le mélange de 2 000 ml contiendra 2 000 : 8 soit 250 ml de citron. Ensuite le mélange contient 2 fois moins de sirop... le seul calcul un peu plus complexe concerne l'eau gazeuse, 13 fois plus que la quantité de sirop.

2.2.2 POURCENTAGES

Les pages qui suivent comportent un grand nombre d'activités présentées en plusieurs séries. La première série introduit le concept de pourcentage à travers le coloriage d'aires. Les fiches 1 et 2 présentent des activités d'apprentissage et de découverte tandis que les fiches 3 à 5 sont des supports à la systématisation et à l'approfondissement.

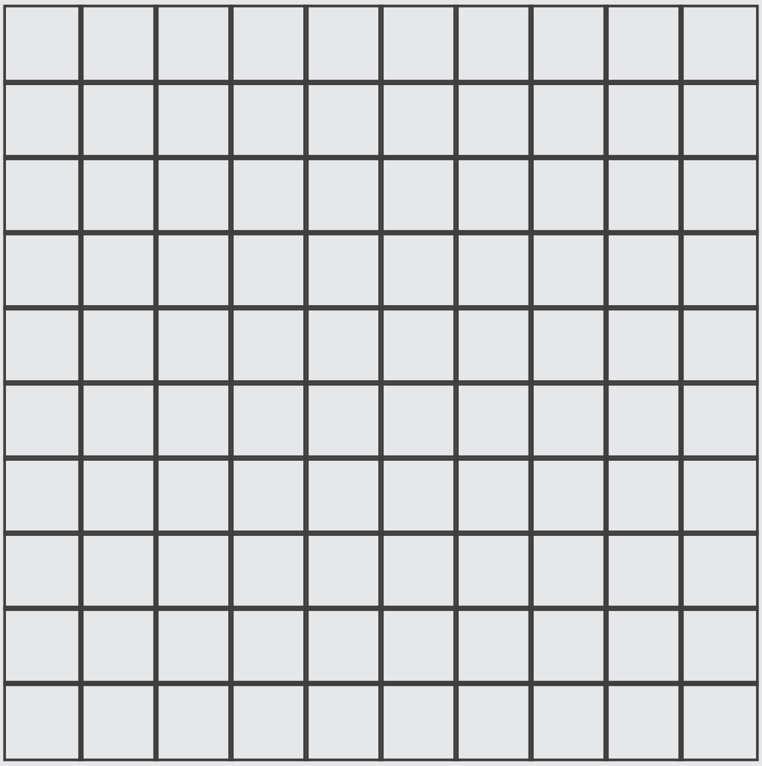
Après cette première partie, une synthèse relative à la notion de pourcentage est établie. Elle est inspirée de Demonty & al. (2007), *Faire des maths comme des pros*.

2.3 ACTIVITÉS

Fiche 1
Carrés, aires et pourcentages

Ce carré de 1 dm^2 est découpé en 100 carrés de 1 cm^2. L'aire d'un petit carré vaut donc 1/100 de l'aire du grand carré. Ceci peut aussi s'écrire : 1 cm^2 = 1 % de 1 dm^2.

COLORIE 25 CARRÉS.



- **Exprime ta réponse à l'aide d'une fraction dont le dénominateur est 100.**
  La partie coloriée correspond à ______ de 1 dm^2.

- **Exprime ta réponse à l'aide d'une fraction irréductible.**
  La partie coloriée correspond à ______ du grand carré.

Cette activité peut être étendue à d'autres nombres de petits carrés (ou de rectangles) à colorier : 60, 50, 30, 125 (prévoir deux carrés) , ...

- **Exprime ta réponse à l'aide d'un nombre décimal :**

  25 cm² = ______ dm²

- **Exprime ta réponse en pourcentage :**

  L'aire coloriée représente ______ de 1 dm²

- **Complète la phrase :**

  L'aire de 50 carrés correspond à — de 1 dm² ; ce qui peut aussi s'écrire ______ % de 1 dm²

COMPLÈTE LE TABLEAU SUIVANT.

Pourcentage d'une grandeur	Fraction de cette grandeur en centièmes	Fraction irréductible de cette grandeur	Écriture décimale de cette partie de grandeur
15 %	______	______	______
______	$\frac{45}{100}$	______	______
______	______	______	0,6
______	$\frac{150}{100}$	______	______

Fiche 2
Rectangles, aires et pourcentages

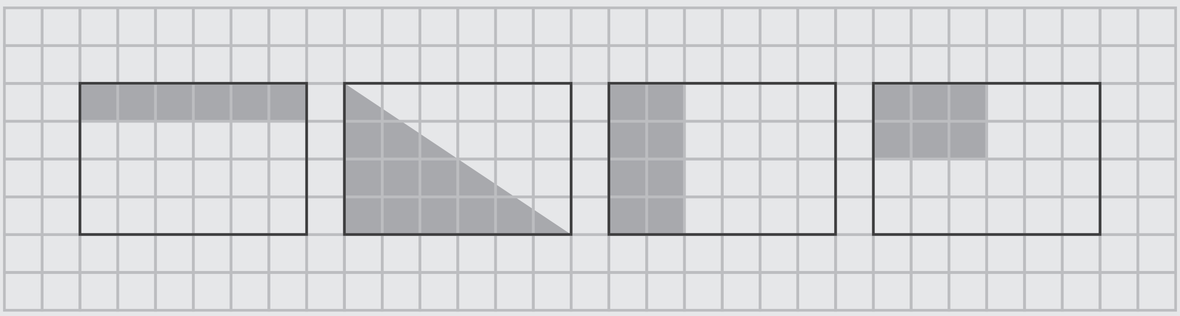
**1. Ci-dessous, le rectangle est chaque fois découpé en 10 rectangles de même aire.
Dans chaque cas, quel est le pourcentage de l'aire totale du rectangle qui est grisée ?**

Cas n° 1

Cas n° 2

Cas n° 3
(partie grisée par rapport à l'aire totale d'un rectangle)

**2. Détermine la fraction qui exprime la partie coloriée de ces rectangles.
Transforme ces fractions en pourcentage.**

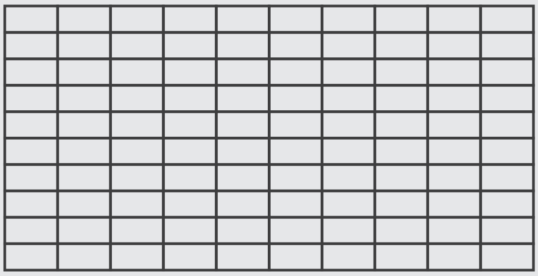


Fiche 3
Quelques exercices sur les aires et les pourcentages

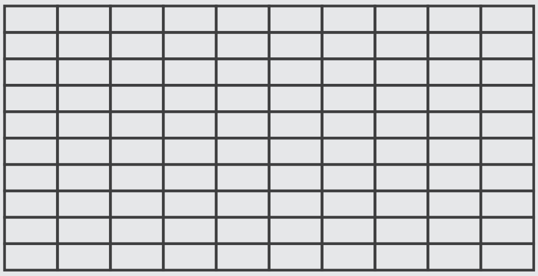
Dans chaque figure, colorie le pourcentage demandé.

1. Figure 1 : un rectangle de 10 sur 10

30 % du rectangle

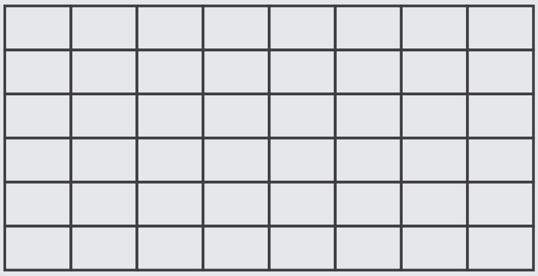


45 % du rectangle

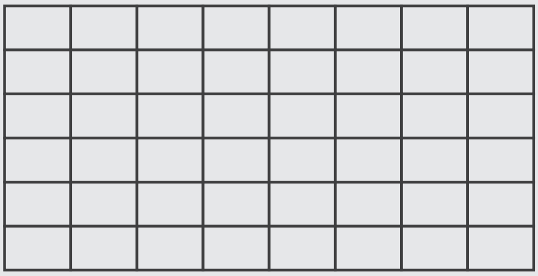


2. Figure 2 : un rectangle de 6 sur 8

75 % du rectangle



50 % du rectangle



3. À partir des coloriages effectués, complète le tableau ci-dessous :

	Pourcentage demandé	Fraction équivalente ayant pour dénominateur 100	Fraction irréductible	Rapport $\frac{\text{aire colorée}}{\text{aire totale}}$
Figure 1	30 %	______	______	______
	45 %	______	______	______
Figure 2	75 %	______	______	______
	50 %	______	______	______

Fiche 4
Aires de figures inhabituelles et pourcentages

1. Dans chacune des figures ci-dessous, exprime en pourcentage, la part colorée de la figure.

Figure 1 : un disque

Figure 2 : un carré

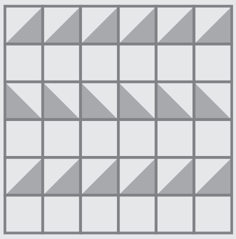
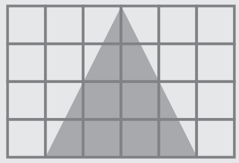


Figure 3 : un rectangle



2. Pour chaque figure, complète le tableau ci-dessous.

	Rapport $\dfrac{\text{partie colorée}}{\text{partie totale}}$	**Fraction irréductible**	**Fraction équivalente ayant pour dénominateur 100**	**Pourcentage**
Figure 1				
Figure 2				
Figure 3				

Fiche 5
Partage de figures et pourcentages

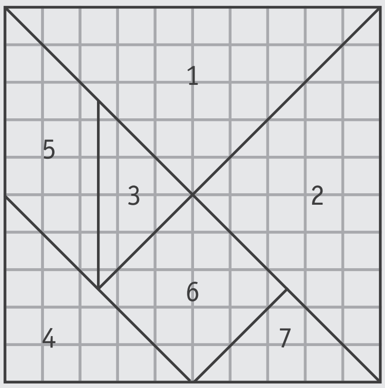
1. Figure 1 : un rectangle de 5 cm sur 4 cm

Partage ces rectangles de 4 manières différentes pour pouvoir en colorier 25 % à chaque fois.

2. Figure 2 : le Tangram

Quel pourcentage de l'aire totale est représenté par....

- la pièce 1 ? ______
- la pièce 2 ? ______
- la pièce 3 ? ______
- la pièce 4 ? ______
- la pièce 5 ? ______
- la pièce 6 ? ______
- la pièce 7 ? ______



Vérifie si le total est cohérent.

LE POURCENTAGE, C'EST ...

Le pourcentage est une notion mathématique qui permet de comparer entre elles deux grandeurs de même nature exprimées avec la même unité, pour s'en faire une représentation plus parlante.

Par exemple, on sait que la surface de la terre est de 510 100 000 km^2 et que la surface occupée par les océans est de 360 700 000 km^2.
On pourrait alors se demander si les océans occupent une place très importante de la surface terrestre. Le rapport entre les deux correspond à 360 700 000/510 100 000. Exprimé de cette façon, les nombres sont tellement grands que ce rapport ne nous évoque pas grand chose.
Par contre, s'il est exprimé en pourcentage, cela est beaucoup plus parlant : on peut alors dire que les océans occupent environ 71 % de la surface terrestre.

Un pourcentage, c'est un rapport entre deux grandeurs de même nature exprimées avec la même unité. Ce rapport s'exprime sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 100. Un pourcentage s'écrit avec un nombre suivi du signe %.

<u>Pour trouver ce nombre, il faut :</u>

1. **diviser les deux nombres à comparer entre eux ;**
2. **multiplier le résultat par 100.**

Exemples :

- Pourcentage de la place occupée par les océans sur la terre, sachant que la terre a une superficie de 510 100 000 km² et les océans occupent une superficie de 360 700 000 km² :
    - diviser les deux nombres à comparer entre eux :
      360 700 000 : 510 100 000 ≅ 0,71
    - multiplier le résultat par 100 :
      0,71 x 100 = 71 ce qui donne 71 %.

- Pour un entretien d'embauche, j'ai dû passer un test, j'ai un total de 271 sur 359… Est-ce un bon résultat ? Exprimé de cette manière, il n'est pas évident de répondre. Par contre, exprimé en pourcentage, cela donne un résultat de (271 : 359) x 100 = 75. En fait, 75 %, ce n'est pas mal du tout !!!

<u>Pour calculer 15 % de 3 600, il faut :</u>

multiplier 3 600 par 15 et diviser le tout par 100.

$$15\ \%\ \text{de}\ 3\,600 = \left(\frac{3\,600 \times 15}{100}\right) = 540$$

L'intention de la deuxième série d'activités est de faire acquérir des techniques de calcul de pourcentages à travers des situations et exercices simples. Cette série est articulée autour d'un classement des situations de calcul de pourcentages en quatre catégories.

1. **Déterminer par un pourcentage ce que représente une grandeur par rapport à une autre ;**
2. **Calculer le pourcentage d'une grandeur donnée ;**
3. **Ajouter à une grandeur un pourcentage d'elle-même ;**
4. **Soustraire à une grandeur un pourcentage d'elle-même.**

Commencer par décrire ces catégories aux élèves, notamment en illustrant chacune par des exemples est important.

- **Déterminer par un pourcentage ce que représente une grandeur par rapport à une autre.**
  Lors des élections communales de 2006 à Viroinval, 317 bulletins sur 4 192 étaient blancs ou nuls. À quel pourcentage cela correspond-il ?

- **Calculer le pourcentage d'une grandeur donnée.**
  Quelle quantité de matière grasse contient un fromage de 200 g dont on dit qu'il comporte 45 % de matière grasse ?

- **Ajouter à une grandeur un pourcentage d'elle-même.**
  En 2010, 742 personnes ont été tuées sur les routes. L'Institut Belge pour la Sécurité Routière explique qu'il y a eu une augmentation de 3,8 % en 2011. Combien y a-t-il eu de tués sur les routes en 2011 ?

- **Soustraire à une grandeur un pourcentage d'elle-même.**
  Quel est le prix d'un GSM de 65 € avec une réduction de 20 % ?

Après avoir discuté collectivement de ces différents cas, la fiche 6 peut être proposée aux élèves. Nous avons fait le choix de faire figurer dans les problèmes des notions et des termes de la vie quotidienne auxquels les élèves sont peu habitués (index, solde, arrhes, TVA, amputer,...). Les problèmes constituent donc une opportunité de les aborder, même très brièvement.

Les fiches 7, 8 et 9 mettent le tableau de proportionnalité au service de la notion de pourcentage. L'idée est notamment de montrer aux élèves qu'un pourcentage n'est qu'une manière particulière de remplir un tableau de proportionnalité où une grandeur vaut 100 %.

	Verre	Pourcentage
Eau gazeuse	130 ml	81,25 %
Citron	20 ml	12,5 %
Sirop	10 ml	6,25 %
Total	**160 ml**	**100 %**

: 160 x 100

Une des premières questions à se poser quand on calcule un pourcentage est : **à quoi correspondent les 100 % ?** Faire acquérir cette habitude aux élèves est essentiel. Il est tout aussi important de réfléchir sur la **plausibilité** d'un résultat, ne fut-ce qu'en se demandant s'il est normal qu'il soit inférieur ou supérieur aux 100 %.

Pour la **fiche 9**, il est important de montrer que deux démarches sont systématiquement possibles pour calculer une augmentation ou une réduction d'un pourcentage : soit calculer le pourcentage de la grandeur puis l'ajouter ou la soustraire, soit calculer la grandeur avec le pourcentage soustrait ou ajouté. Deux tableaux sur les trois sont donc systématiquement corrects.

Les fiches peuvent d'abord être réalisées individuellement ou en groupes puis exploitées collectivement. **Après les fiches 7, 8 et 9, les problèmes de la fiche 6 peuvent être résolus.**

Au fur et à mesure de l'utilisation de ces fiches, il est important d'attirer l'attention des élèves sur les remarques suivantes.

1. Le pourcentage n'est que l'écriture d'un nombre décimal qui rend compte d'une suite d'opérations :

$$\boxed{12\ \% = \frac{12}{100} = 0{,}12}$$

L'écriture rend compte de la suite d'opérations $\boxed{\text{x12 :100 ou :100 x12}}$

12 % de 50 € se calcule en effectuant l'opération $\boxed{\text{12 \% x 50 €}}$

$$\boxed{\frac{12}{100} \text{ x } 50 \text{ €} = 0{,}12 \text{ x } 50 \text{ €} = 6 \text{ €}}$$

2. Le signe % n'est pas une unité. Le signe signifie seulement qu'on divise par 100 (c'est d'ailleurs ce que fait cette touche sur une calculatrice).

3. En cas d'une réduction ou d'une augmentation exprimée sous la forme d'un pourcentage, il ne faut pas se limiter au seul calcul du pourcentage mais bien calculer la quantité réduite ou augmentée.

4. Une augmentation d'un pourcentage n'est pas compensée par une diminution du même pourcentage puisque la base de calcul (100 %) a changé.

Enfin, un fichier GeoGébra à propos de la variation de l'aire d'un rectangle en fonction de la majoration des dimensions du rectangle peut être consulté : http://www.geogebratube.org/student/m6990

Fiche 6
C'est quel problème ?

Le calcul de pourcentages intervient dans plusieurs catégories de situations.

A. Déterminer par un pourcentage ce que représente une grandeur par rapport à une autre ;

B. Calculer le pourcentage d'une grandeur donnée ;

C. Ajouter à une grandeur un pourcentage d'elle-même ;

D. Soustraire à une grandeur un pourcentage d'elle-même.

Question 1
Pour chacun des problèmes ci-dessous, entoure la lettre de la catégorie principalement concernée.

1	Le prix du litre de diésel en janvier 2011 était de 1,358 €. Jusque janvier 2012, il a augmenté de 1,14 %. Combien coutait-il en janvier 2012 ?	A B C D
2	Quel est le prix d'une chemise de 40 € soldée « –25 % » ?	A B C D
3	Le loyer de la famille Jeunot va être indexé de 3 %. L'an passé, elle payait 520 € par mois. Combien va-t-elle payer mensuellement cette année ?	A B C D
4	La famille Gérard veut réserver un appartement pendant deux semaines à la côte belge. Cela revient à 1 300 € et il y a 20 % d'arrhes à payer tout de suite. Quel est le montant des arrhes ?	A B C D
5	Combien y a-t-il de filles dans une école de 1 248 élèves qui compte 49 % de garçons ?	A B C D
6	Le prix hors TVA d'un casque USB sur un site de vente en ligne est de 65,5 €. En Belgique, la TVA est de 21 %. Combien ce casque va-t-il couter ?	A B C D
7	J'ai eu 17/20 à l'examen de math en juin. Quel est mon pourcentage ?	A B C D
8	Un joueur à l'Euromillions a gagné 162 256 622 €. Il décide de placer son argent à la banque et de dépenser uniquement les intérêts. Avec un taux d'intérêt annuel de 3,4 %, quel montant pourra-t-il dépenser chaque année ?	A B C D
9	Sur un échantillon de 2004 élèves qui ont passé les évaluations externes en mathématiques, 1 363 élèves ont réussi la question 1. Quel pourcentage d'élèves a répondu correctement ?	A B C D
10	En moyenne, un Belge gagne un salaire moyen de 3 004 € brut. Il faut amputer ce montant de 36,5 % pour trouver le salaire net. Quel est le montant de ce salaire net ?	A B C D

Question 2
Invente un problème pour chaque catégorie.

Fiche 7
Des pourcentages en tableaux

Complète le tableau de proportionnalité puis la phrase qui s'y rapporte.

1.

15 m	______
30 m	100 %

15 m, c'est ______ % de 30 m

2.

______	20 %
50 kg	100 %

______ kg, c'est 20 % de 50 kg

3.

6 s	______
24 s	100 %

6 s c'est ______ de ______

4.

______	33,33... %
24 h	100 %

______ c'est ______ de 24 h

5.

______	25 %
200 €	100 %

______ c'est ______ de ______

6.

______	200 %
70 ha	100 %

______ c'est ______ de ______

7.

18 l	______
45 l	100 %

______ c'est ______ de ______

Fiche 8
À chaque pourcentage son tableau

Dans chaque situation, complète le tableau de proportionnalité.

1. 30 % de 40 kg de pommes

2. 25 % de 112 élèves

3. 40 % de 12 millions d'habitants

4. 5 % de 700 litres

5. 45 % de 225 g

6. 7 % de 20 €

7. 43 % de 100 quilles

Fiche 9
Des pourcentages en tableaux

Pour chaque problème, choisis un tableau qui convient pour répondre, complète-le, calcule et présente la solution.

- Un restaurant chinois propose différents menus. Si ces menus sont emportés, le prix est réduit de 10 %. Que coute le menu Shangaï à 40 € s'il est emporté ?

______	10 %
40 €	100 %

______	110 %
40 €	100 %

______	90 %
40 €	100 %

Présente ta solution : ______________________________

- J'ai un abonnement Proxistar pour mon GSM. Pour les fêtes, 25 % de SMS supplémentaires sont offerts en décembre pour tous les forfaits. Mon forfait me donne habituellement droit à 500 SMS gratuits. Combien puis-je en envoyer gratuitement en décembre ?

______	25 %
500 SMS	100 %

______	125 %
500 SMS	100 %

______	75 %
500 SMS	100 %

Présente ta solution : ______________________________

- J'ai utilisé 71 % de la batterie de mon ordinateur portable qui a une autonomie de 120 minutes. Combien de temps environ puis-je encore l'utiliser ?

______	71 %
120 min	100 %

______	171 %
120 min	100 %

______	29 %
120 min	100 %

Présente ta solution : ______________________________

Dans cette troisième partie, l'intention est de proposer une démarche de résolution des problèmes de pourcentages. La démarche est accompagnée d'exemples d'exercices correspondant à chaque situation rencontrée. Par la suite, dans une optique de progression, plusieurs problèmes dans lesquels il est possible de combiner différentes situations sont décrits.

DÉMARCHE PROPOSÉE POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

1. Lire l'énoncé pour relever la question ;
2. Dans la question, formuler le plus précisément possible la grandeur à rechercher ;
3. Relire l'énoncé en se posant, pour chaque donnée, la question suivante : « Si je modifie cette donnée, est-ce que la grandeur recherchée change ? »
    - Si non, on peut négliger l'information,
    - Si oui, on liste l'information ;
4. Dans cette liste, on identifie l'expression qui lie la grandeur recherchée à une autre grandeur.

- Situation 1 : l'expression met en relation des grandeurs.

  - Prendre le pourcentage d'un nombre (ex : 30 % de 120 = 36)

La batterie de mon GSM a une autonomie de 24h. J'en ai utilisé 30 %. À quelle durée cela correspond-il ?

  - Majorer un nombre d'un pourcentage donné (ex : $400 \times 1{,}20 = 480$ ou $400 + \frac{20}{100} \times 400 = 480$)

Robert vend du matériel de pêche. Les boites d'hameçons qu'il vend habituellement contiennent 150 hameçons. Il les vend 22 €. Sur les boites qui viennent de rentrer en stock, il est indiqué « +30 % gratuit ». Combien contiennent-elles d'hameçons ?

  - Minorer un nombre d'un pourcentage donné (ex : $400 \times 0{,}80 = 320$ ou $400 - \frac{20}{100} \times 400 = 320$)

Topho hall propose l'appareil photo digital Kadok en promotion. Une remise de 25 % est proposée pour cet appareil qui coute normalement 270 €. Quel est le prix de l'appareil photo en promotion ?

- Situation 2 : l'expression explique comment passer d'une grandeur à une autre.

Dans un centre sportif de 250 membres, 75 suivent le cours de fitness. Quel est le pourcentage correspondant ?

DANS UNE OPTIQUE DE PROGRESSION....

Six œufs coutent 2,10 €. Combien coutent huit œufs ?

Giovanna doit commander des bouteilles de soda pour les 25 ans de sa sœur. Elle prévoit une bouteille pour 3 personnes. On lui conseille d'en prévoir 10 % de plus. Il y aura 57 personnes invitées à la fête. Quelle quantité de bouteilles doit-elle commander ?

Chloé réalise des bijoux qu'elle vend. La semaine passée, elle a vendu un bijou dont le prix de revient était de 15 €. Elle a réalisé un bénéfice de 30 %. À quel prix a-t-elle vendu le bijou ?

En juin, les prix des maillots de bain augmentent de 15 %. En septembre, ils diminuent de 15 %. Tom dit que les maillots de bains sont moins chers en septembre qu'en juin. A-t-il raison ?

3 AIRES ET PÉRIMÈTRES

3.1 LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Les taux de réussite pour la compétence *Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes* sont de 46 % en 2e commune et complémentaire et de 34 % en 2e différenciée. Même si les *Pistes didactiques* de 2008 ont déjà ciblé cette compétence, les résultats mettent en évidence la nécessité d'insister sur ce point.

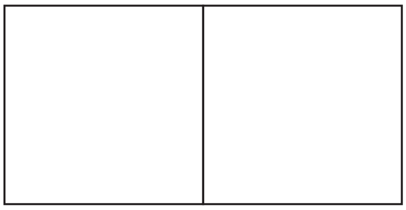
L'analyse des réponses à quelques items de l'épreuve de 2e commune et complémentaire permet de comprendre en quoi les élèves ne maitrisent pas les notions d'aires et de périmètres. Concernant le périmètre, l'analyse des questions 40 et 44 amène plusieurs constats concernant les erreurs de calcul :

- lorsque les élèves doivent calculer le périmètre de deux carrés accolés dont on connait le périmètre, la grande majorité des élèves qui se trompent multiplient le périmètre du carré par deux ;
- lorsque des données sont mentionnées sur le dessin, les élèves se contentent d'additionner celles-ci sans se soucier de les reporter aux autres côtés (pour la question 44, ils répondent 180) ;
- lorsqu'une figure apparait aux yeux des élèves comme une figure familière dont la surface est réduite (voir le rectangle de la question 44), ils pensent d'emblée qu'il faut une réduction du périmètre.

Ces erreurs montrent que certains élèves n'ont pas compris le concept de périmètre et que le traitement des données sur un dessin n'est pas aisé.

Question 40

Le rectangle ci-dessous est formé de deux carrés juxtaposés.
Le périmètre de chaque carré est de 28 cm.
CALCULE le périmètre du rectangle.

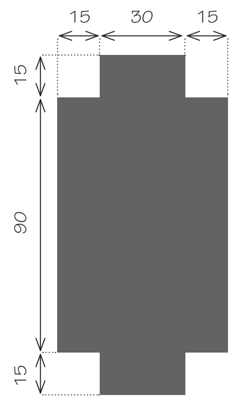


Réponse : . . . . cm

☐ 76

Question 44

CALCULE le périmètre de la figure suivante dont les données sont exprimées en centimètres.



Réponse : . . . . cm

☐ 80

Les réponses des élèves à la question 42 ont également été analysées. Cet item n'a été réussi que par 46 % des élèves.

Question 42

M. et M^{me} Dubois souhaitent repeindre la façade rectangulaire de leur garage. La façade mesure 4,50 mètres de large et 3 mètres de haut et la porte du garage, qui n'est pas à peindre, mesure 3 mètres de large et 2 mètres de haut.

CALCULE l'aire de la surface à peindre.

Réponse : .... m^2 ☐ 78

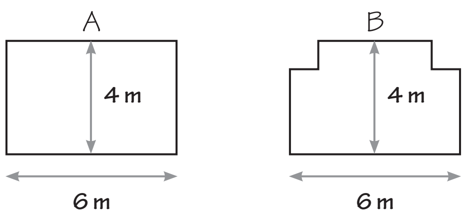
Deux erreurs majeures apparaissent dans la résolution de cet item. La première est la non prise en compte du fait que la porte du garage n'est pas à peindre : les élèves calculent l'aire totale du garage en multipliant 4,5 m par 3 m. L'autre erreur récurrente consiste à multiplier la différence des largeurs (4,5 m – 3 m) par la différence des hauteurs (3 m – 2 m).

Dans ce problème, les erreurs résultent moins d'une méconnaissance de la formule du calcul d'aire du rectangle que de la difficulté à calculer l'aire d'une partie de figure donnée.

En 2^e différenciée, il semble que les difficultés des élèves résident essentiellement dans la méconnaissance des formules d'aires et de périmètres. On constate en effet qu'un certain nombre d'élèves se contentent d'additionner les valeurs apparaissant dans la figure. Par exemple, dans le cas de la question 3, ils additionnent 4 et 6 et répondent 10.

Question 3

Observe ces figures.



COMPLÈTE les phrases.

La figure A a un **périmètre** de .... m. ☐ 7

La figure B a un **périmètre** de .... m. ☐ 8

3.2 INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Les *Pistes didactiques* de 2008 proposent une série conséquente d'activités permettant de travailler les concepts de périmètres et d'aires. Nous y renvoyons donc le lecteur plutôt que d'en développer de nouvelles. Toutefois, nous pensons qu'il est utile de rappeler certains points essentiels dans le développement et le travail de la compétence *Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires, des périmètres et des volumes*.

3.3 ACTIVITÉS

Tout d'abord, il parait nécessaire de vérifier que les élèves différencient bien le concept d'aire de celui de périmètre. Les élèves ont tendance à s'arrêter à l'aspect visuel, à une intuition immédiate que leur donnent certaines figures. Pour s'attaquer à ces intuitions immédiates qui sont souvent erronées, les *Pistes didactiques* de 2008 fournissent plusieurs exercices portant sur la comparaison d'aires et de périmètres. Nous reprenons l'un d'eux à titre d'exemple (fiche 10).

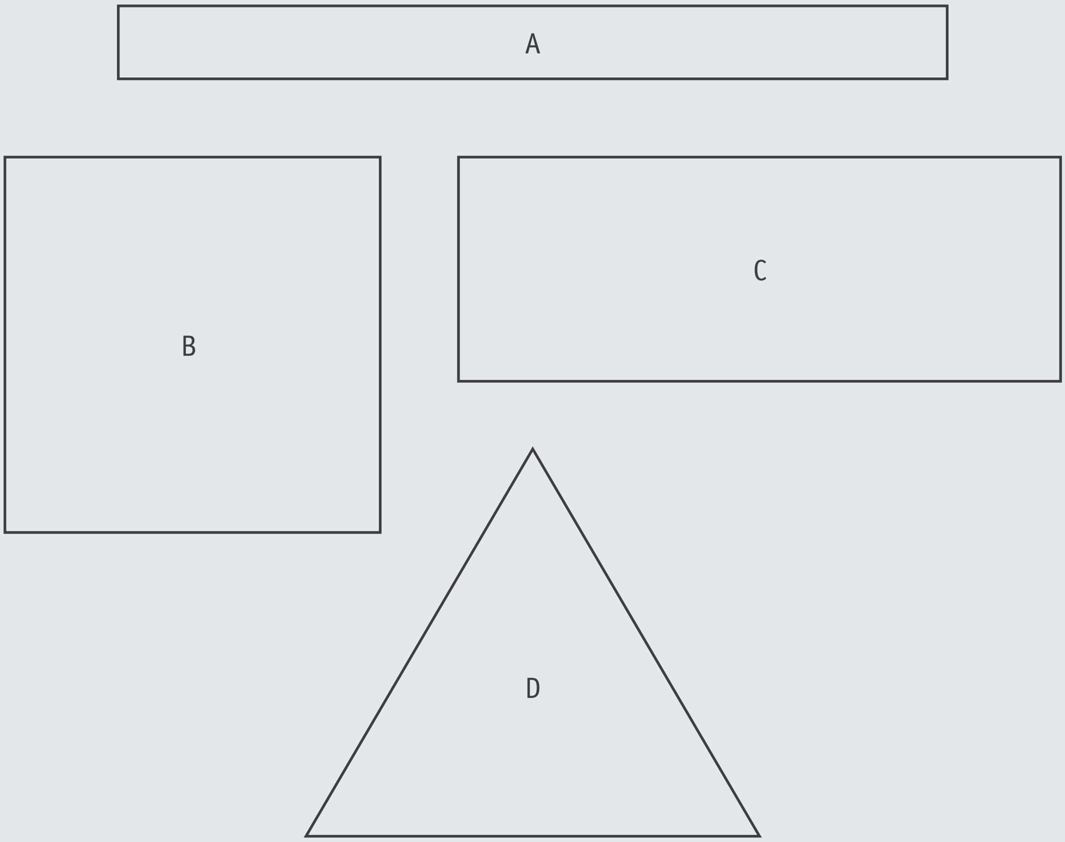
Il est également essentiel de provoquer des mises en relation entre les démarches de recherche d'aires et les formules qui les accompagnent afin notamment de faire émerger le principe général suivant : la recherche de l'aire de tout polygone implique l'utilisation de deux dimensions perpendiculaires au moins. Pour ce faire, on peut partir du rectangle pour lequel on peut supposer qu'en 2e différenciée, la formule a été construite et intériorisée. Des activités telles que présentées à la fiche 11 favorisent un travail très utile d'analyse et de comparaison de figures.

L'utilisation des concepts d'aire et de périmètre dans des contextes plus proches de la réalité (telle que dans la question 42 de l'épreuve) est également primordiale car elle permet la mise en relation de compétences dans différents domaines mathématiques : Mettre en œuvre des stratégies de résolution problèmes, identifier et effectuer des opérations dans des situations variées et bien sûr construire et utiliser des démarches pour calculer des aires et des périmètres.

Enfin, au premier degré commun, on sait que peu de temps peut être consacré aux notions d'aires et de périmètres en tant que telles. Toutefois, au vu des résultats observés lors de l'évaluation externe non certificative il semble important de continuer à mobiliser ces notions si on ne veut pas qu'elles s'oublient. L'apprentissage de l'algèbre par la géométrie a cet avantage de faire d'une pierre deux coups : développer des apprentissages algébriques tout en rappelant les principes et formules de calculs d'aires et de périmètres. Le type d'activité présenté ci-dessous convient particulièrement bien (fiche 12). Signalons qu'il n'est pas obligatoire d'atteindre d'emblée un tel niveau de difficulté. Au départ, il est préférable d'aborder des calculs de périmètres ou d'aires de figures plus simples (carré, rectangle,...).

Fiche 10
Comparer des figures

1. Mesure (avec de la ficelle ou avec ta règle graduée) le périmètre des figures A, B, C et D. Indique ce que tu as observé.



2. Compare deux à deux les figures A, B, C et D selon leur aire. Utilise les signes < , > .

Aire de A ______ Aire de B	Aire de A ______ Aire de C	Aire de A ______ Aire de D
Aire de B ______ Aire de C	Aire de B ______ Aire de D	
Aire de C ______ Aire de D		

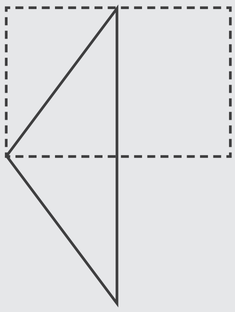
3. Classe, d'après leur aire, ces figures de la plus petite à la plus grande.

Aire de ______ < Aire de ______< Aire de ______< Aire de ______

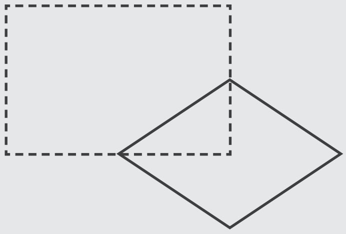
Fiche 11
Rechercher l'aire

1. Recherche l'aire des figures en trait plein en les comparant aux figures en pointillés.

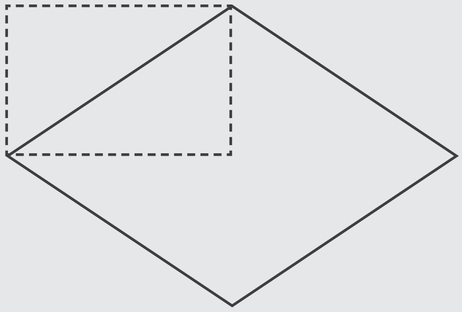
Aire du rectangle en pointillé : 6 cm²



Aire de la figure en cm² : ___

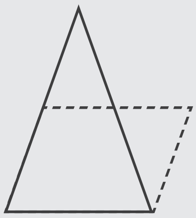


Aire de la figure en cm² : ___



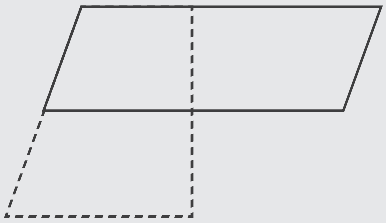
Aire de la figure en cm² : ___

Aire du parallélogramme en pointillé : 4 cm²



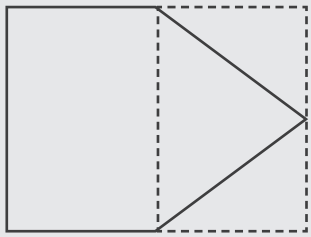
Aire de la figure en cm² : ___

Aire du trapèze en pointillé : 5 cm²



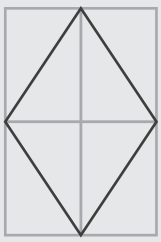
Aire de la figure en cm² : ___

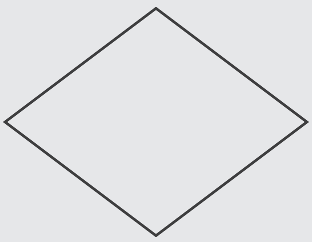
Aire du rectangle en pointillé : 4 cm²



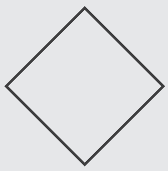
Aire de la figure en cm² : ___

2. Trace les droites dont tu as besoin puis mesure pour calculer l'aire des figures en cm². Dans les trois derniers cas, tu peux d'abord décomposer la figure en deux autres figures pour pouvoir calculer l'aire.

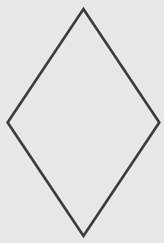




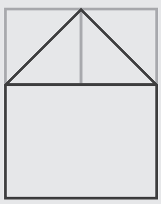
Aire de la figure en cm² : ___

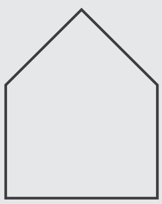


Aire de la figure en cm² : ___

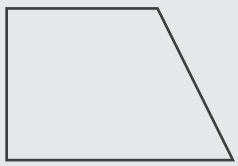


Aire de la figure en cm² : ___

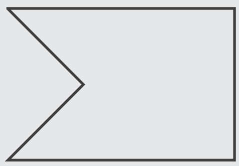




Aire de la figure en cm² : ___



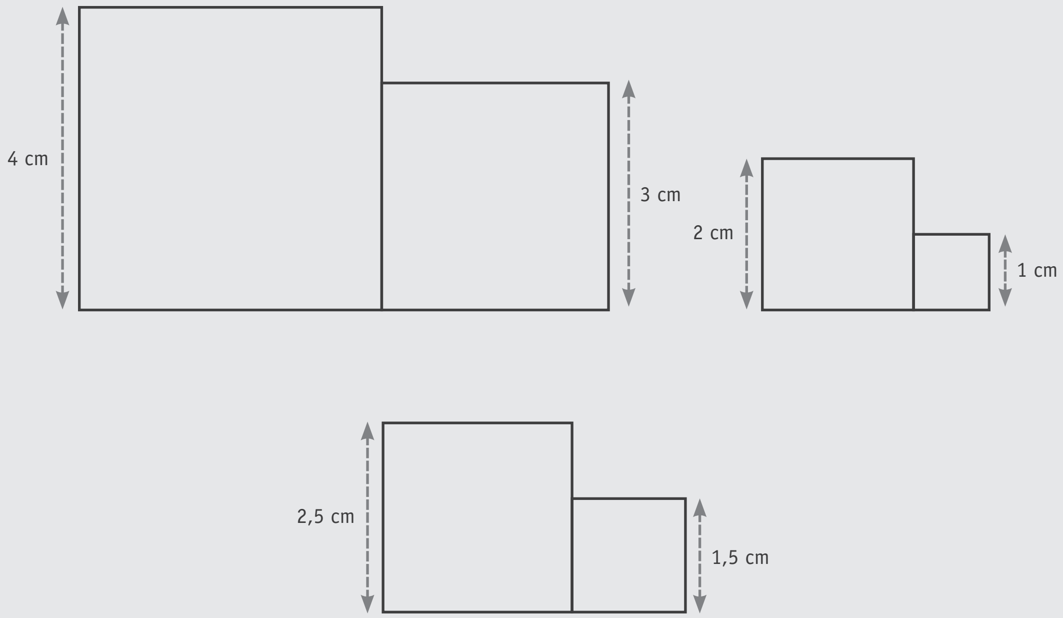
Aire de la figure en cm² : ___



Aire de la figure en cm² : ___

Fiche 12
Les carrés accolés

Observe les figures suivantes : elles sont chaque fois composées de deux carrés dont les longueurs des côtés diffèrent de 1 cm.



1. Recherche le périmètre d'une figure dont le grand carré a une longueur de :

- 10 cm : ____

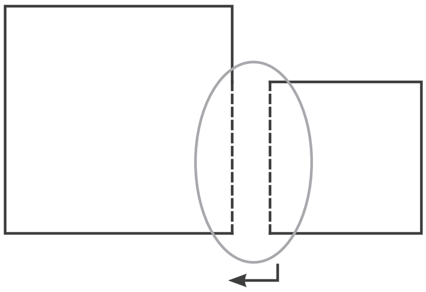
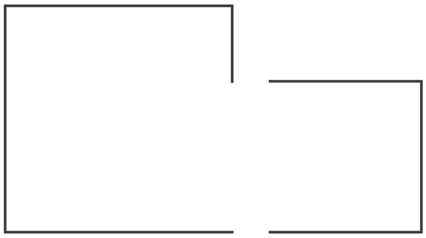
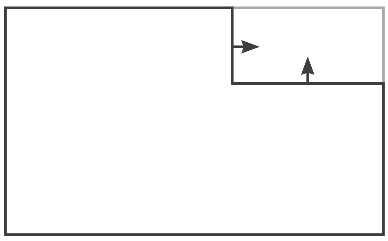
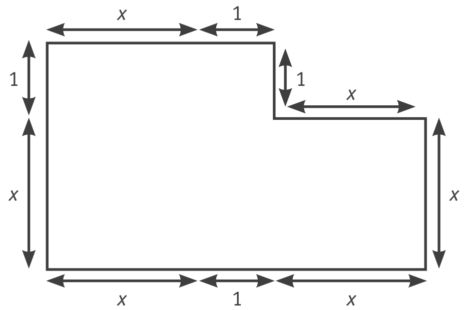
- 56 cm : ____

2. Trouve un moyen qui permettrait de calculer le périmètre de n'importe quelle figure construite sur le même modèle en connaissant la longueur du grand carré.

- Décris ce moyen avec tes mots.

- Exprime ce moyen à l'aide d'une formule.

Quelques exemples de solutions pour la situation « les carrés accolés »

VISUALISATION DU PÉRIMÈTRE DE LA FIGURE	DESCRIPTION DU MOYEN EN MOTS	FORMULE (*x* désigne la longueur du petit carré)
	On prend le périmètre du grand carré et on additionne le périmètre du petit carré. Il faut soustraire à cela la longueur du petit carré.	$(x+1) \cdot 4 + 4x - 2x$
	On prend 3 fois la longueur du grand carré, trois fois celle du petit et on ajoute 1 cm.	$3(x + 1) + 3x + 1$
	Le périmètre de la figure est le même que le périmètre d'un rectangle qui a une longueur de x+1+x et une largeur de x+1.	$2(x + 1 + x) + 2(x + 1)$ ou $(x + 1 + x + x + 1) \cdot 2$
	Pour calculer le périmètre de la figure, il faut additionner la longueur de 6 segments de longueur x et de 4 cm.	$6x + 4$

La validation de ces expressions algébriques peut se faire soit en référence directe à la situation (colonne 1 du tableau), soit par substitution numérique, soit encore en appliquant les transformations d'expressions algébriques. Les élèves sont alors amenés à transformer des expressions complexes nécessitant de mobiliser plusieurs procédures (réduction de termes semblables, distributivité simple).

On peut également amener les élèves à mieux comprendre leurs erreurs de transformations algébriques en comparant deux expressions qui ont été validées en référence à la situation (colonne 1 du tableau).

Par exemple, l'expression $3(x + 1) + 3x + 1$ est égale à $6x + 4$, c'est un fait puisque les deux démarches dont elles découlent ont été validées par la classe (colonne 1 du tableau).

Dès lors, les élèves qui pensent que $3(x+1)$ est égal à $3x + 1$ (erreur que l'on constate fréquemment) peuvent trouver ici un autre type de justification.
En appliquant leur procédure, ils aboutiront à $6x + 2$, ce qui est faux, il faut obtenir $6x + 4$: on ne pourra l'obtenir qu'en distribuant le facteur 3 sur le terme 1 et en ajoutant 1 à ce résultat ($3 \cdot 1 + 1 = 4$). Dès lors, $3(x + 1)$ est bien égal à $3x + 3$ et non à $3x + 1$.

Quelques exemples de solutions pour la situation « les carrés accolés

EXEMPLE NUMÉRIQUE	**DESCRIPTION DU MOYEN EN MOTS**	**FORMULE** (x désigne le plus petit nombre et y, le plus grand)
8 + 13 = 21 21 : 2 = 10,5	Le nombre est en réalité la moyenne arithmétique des deux nombres de départ.	$\frac{x+y}{2}$
13 – 8 = 5 5 : 2 = 2,5 2,5 + 8 = 10,5	Pour retrouver ce nombre, j'additionne la moitié de l'écart entre les deux nombres au plus petit des deux nombres.	$x + \frac{x-y}{2}$
13 – 8 = 5 5 : 2 = 2,5 13 – 2,5 = 10,5	Pour retrouver ce nombre, il faut soustraire du plus grand des deux nombres la moitié de l'écart entre les deux nombres	$y - \frac{y-x}{2}$

4 BIBLIOGRAPHIE

DETHEUX M. et CHENU F., *Comment évaluer le raisonnement géométrique ? Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale* (3-4/2000), Université de Liège, 2000

DEMONTY I. et DEUM M., *Faire des maths comme des pros ! Collection Recherche en pédagogie*, Ministère de la Communauté Française, 2009

VAN HIELE-GELDOF, *The didactics of geometry in the lowest class of secondary school*. In D. FUYS, D. GEDDES et R. TISCHLER (Eds), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. New York : Brooklyn, 1-214, 1984

S2

FÉDÉRATION
WALLONIE-BRUXELLES

Ministère de la Fédération Wallonie-Bruxelles
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
Boulevard du Jardin Botanique, 20-22 – 1000 Bruxelles

D/2012/9208/44