ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE 2011

MATHÉMATIQUES

PISTES DIDACTIQUES

4e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ministère de la Fédération Wallonie-Bruxelles
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
Service général du Pilotage du système éducatif

SOMMAIRE

Ce document *Pistes didactiques* a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe 4e secondaire en mathématiques :

Charlotte ALEXANDRE, attachée au Service général du Pilotage du système éducatif ;
Edith BAETEN, conseillère pédagogique ;
Julie CAUET, chargée de mission au Service général du Pilotage du système éducatif ;
Eddy CORBISIER, enseignant ;
Guy DEBERG, enseignant ;
Isabelle DEMONTY, chercheuse au Service d'analyse des Systèmes et des pratiques d'enseignement de l'Université de Liège ;
Martine DUMONT, conseillère pédagogique ;
Sabine HAUSMANN, conseillère pédagogique ;
Carine HOLVOET, enseignante ;
Michèle HOORNAERT, inspectrice ;
Léopold KROEMMER, chargé de mission au Service général du Pilotage du système éducatif ;
Nicole LAMBELIN, inspectrice ;
Jules MIEWIS, conseiller pédagogique ;
Claude MOUCHETTE, enseignant ;
Martine MACHTELINGS, inspectrice ;
Patricia PELLEGRIMS, enseignante ;
Chantal RANDOUR, inspectrice ;
Christian VAN HOOSTE, conseiller pédagogique ;
Erna VAN PUYMBROECK, enseignante.

INTRODUCTION

Ce document fait suite aux résultats de l'évaluation externe en mathématiques menée en novembre 2011 dans les classes de 4e secondaire. Cette évaluation avait une visée essentiellement diagnostique et formative. L'épreuve avait en effet pour objectif d'établir un bilan de l'acquisition de certaines compétences en mathématiques et de déceler celles qui sont moins bien maitrisées et qui devraient faire l'objet d'une attention particulière.

C'est sur la base des constats présentés dans le document *Résultats et commentaires* que ce recueil de pistes didactiques a été élaboré. Y sont proposées des activités concrètes et des ressources didactiques dans certains domaines qui ont été pointés comme posant problème à de nombreux élèves.

Le document se présente en trois parties, chacune centrée sur un contenu évalué dans l'épreuve : les fonctions, la géométrie et le modèle proportionnel. En fonction des difficultés plus spécifiques de vos élèves, vous pourrez donc cibler l'un ou l'autre thème (fonction pour l'enseignement de transition et de technique & artistique de qualification ; modèle proportionnel pour l'enseignement technique & artistique de qualification et professionnel ; géométrie pour l'enseignement de transition).

Chacun des thèmes abordés se structure de la manière suivante :

- quelques grands constats issus de l'épreuve ;
- des propositions concrètes d'activités ; elles sont accompagnées de fiches à destination des élèves qui, nous l'espérons, vous donneront quelques idées pour développer, un peu différemment peut-être, ces domaines qui doivent encore être retravaillés pour garantir une meilleure maitrise de compétences essentielles à acquérir par les élèves.

L'épreuve ayant été soumise en début de 4e secondaire, certaines pistes sont plutôt destinées aux élèves de 3e secondaire et d'autres conviennent davantage aux élèves de 4e secondaire.

1 LES FONCTIONS 1^re APPROCHE

1.1 CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

L'épreuve centrée sur les fonctions avait pour but d'analyser les acquis et les faiblesses des élèves de l'enseignement de transition et de qualification (section technique et artistique) face au calcul d'éléments caractéristiques des fonctions. Certaines questions étaient envisagées dans des contextes de vie courante et d'autres portaient sur des aspects purement mathématiques. Pour affiner le diagnostic, des questions envisageaient la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes de deux équations à deux inconnues.

Dans l'enseignement de transition, la plupart des élèves parviennent à résoudre des équations variées du 1er degré à une inconnue. Ils sont également capables de déterminer si un point dont on donne la coordonnée appartient à une droite. Des difficultés importantes se manifestent dans le domaine des inéquations, principalement lorsque le coefficient de l'inconnue est négatif, ainsi que dans la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. Appréhender la fonction du premier degré dans son ensemble, en s'intéressant aux paramètres qui la déterminent, est également complexe pour une grande majorité d'élèves.

Dans l'enseignement de qualification, seule la résolution d'équations du premier degré à une inconnue ne nécessitant qu'une application immédiate de la procédure formelle semble être à la portée d'une majorité d'élèves. Les résultats sont nettement moins bons dans les résolutions d'équations moins directes, ainsi que dans les questions portant sur les fonctions, même lorsqu'il s'agit de déterminer si un point dont on donne la coordonnée appartient à une droite.

Il n'est pas possible dans ce document de proposer des pistes sur l'ensemble des éléments moins bien réussis par les élèves. Le groupe de travail a donc sélectionné deux aspects problématiques pour une majorité d'élèves et qui peuvent être travaillés tant en troisième qu'en quatrième secondaire :

- la réflexion sur le rôle des paramètres dans l'expression analytique des fonctions des premier et deuxième degrés ;
- la modélisation de phénomènes à partir de fonctions du premier ou du deuxième degré.

1.1.1 LA RÉFLEXION SUR LE RÔLE DES PARAMÈTRES DANS L'EXPRESSION ANALYTIQUE DES FONCTIONS DES PREMIER ET DEUXIÈME DEGRÉS

Sont bien réussies les questions où l'on donne l'expression analytique ou la représentation graphique d'une fonction et où l'on demande à l'élève :

- soit de déterminer la coordonnée d'un point ;
- soit de décider si un point appartient au graphique de la fonction.

Sont problématiques les questions où il s'agit de :

- déterminer si des droites dont on donne les équations sont parallèles aux axes ou comprennent l'origine du repère ;
- déterminer les expressions analytiques de fonctions du premier degré à partir d'informations diverses (représentation graphique, coordonnées de points appartenant au graphique, coefficient angulaire,...).

Plusieurs interprétations peuvent être avancées pour expliquer le contraste dans la réussite à ces deux types de questions.

- La première tient au fait que l'élève ne maitrise pas les différents statuts attribués à la lettre (inconnue, variable, paramètre). Ce problème n'empêche pas les élèves de réussir la première série d'exercices : la conception de « lettre-inconnue » suffit à trouver la réponse correcte. À l'inverse, dans la seconde série d'exercices, la conception de lettre-variable est indispensable pour donner sens aux questions posées, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Question 20

Une droite a pour équation $y = 2x+5$.

- **Détermine** *l'ordonnée du point qui appartient à cette droite et dont l'abscisse vaut 12.* ☐ 35

. . . .

- **Détermine** *l'abscisse du point qui appartient à cette droite et dont l'ordonnée vaut 9.* ☐ 36

. . . .

Pour répondre à cette question, une conception de lettre « inconnue » suffit : « x » désigne le nombre 12 dans l'équation et il s'agit de chercher la valeur inconnue de « y ». Pour répondre correctement à la question, l'élève peut penser que chaque lettre n'a qu'une seule valeur : il n'a pas besoin d'avoir intégré le fait qu'il est face à deux variables.

Question 27

Dans les cas suivants, détermine l'expression algébrique de la fonction f du premier degré si :

- le graphique de f comprend le point $A(1,1)$ et son coefficient angulaire (pente) est 2.

. . . . 57

À l'inverse, dans cette question, les lettres « x » et « y » prennent pleinement le statut de « variables » : non seulement, elles peuvent être remplacées par plusieurs valeurs mais en plus, il existe un lien entre les valeurs attribuées respectivement à « x » et « y » (notion de variable indépendante et dépendante).

- La seconde relève du vocabulaire, qui semble beaucoup plus technique dans le second ensemble de questions (coefficient angulaire, équation de droite, origine du repère) que dans le premier : les élèves comprennent-ils ces termes ? Les taux importants d'omissions à ces questions (de l'ordre de 40 %) nous font penser que les élèves ne savent pas comment s'y prendre pour répondre.

- Enfin une troisième explication relève de la manière d'appréhender la fonction du premier degré : le premier ensemble de questions vise à ce que les élèves concentrent leur attention sur des points particuliers, alors que dans le deuxième, il s'agit de porter un regard plus global, en s'intéressant cette fois à la fonction dans son ensemble.

Il semble indispensable d'amener davantage d'élèves à dépasser l'approche point par point des fonctions et à parvenir à appréhender la fonction dans son ensemble en réalisant une analyse sur les paramètres. C'est l'objet de la première série d'activités. Elle vise à organiser les fonctions du premier degré par familles, en s'intéressant à leurs diverses représentations (graphique, expression analytique et tableau de nombres). Cette approche par familles de fonctions est également proposée pour les fonctions du deuxième degré, matière dévolue à la quatrième secondaire.

1.1.2 LA MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES À PARTIR DE FONCTIONS DU PREMIER OU DU DEUXIÈME DEGRÉ

Deux situations impliquaient la modélisation des fonctions du premier degré en contexte.
L'une portait sur l'interprétation de graphiques présentant la distance parcourue par des sportifs lors d'une course à pied en fonction du temps. Les résultats sont dans tous les cas supérieurs à 50%, tant en transition qu'en technique et artistique de qualification.

L'autre situation portait sur l'exploitation d'un tableau à double entrée présentant des tarifs dégressifs en fonction du nombre de T-shirts commandés, chacun des tarifs pouvant se modéliser sous la forme d'une fonction affine.

Sarah souhaite faire imprimer des t-shirts pour l'ensemble des enfants et des animateurs d'un camp de vacances. Elle s'est renseignée sur les tarifs, qui sont dégressifs en fonction du nombre de t-shirts commandés. Dans tous les cas, un montant fixe de 49 € est demandé. S'ajoutent à ce montant le prix des t-shirts et le prix d'impression du logo, ces deux prix sont fonction du nombre de t-shirts commandés.

	Nombre de t-shirts commandés				
	De 1 à 36	De 37 à 72	De 73 à 144	De 145 à 288	De 289 à 576
Frais fixes de fabrication	49 €	49 €	49 €	49 €	49 €
Prix par t-shirt	6,95 €	6,55 €	5,95 €	5,75 €	5,45 €
Impression du logo par t-shirt	0,59 €	0,54 €	0,49 €	0,44 €	0,39 €

- **Si Sarah commande 70 t-shirts, combien paiera-t-elle ?**

  Elle paiera : . . . . €

- **Établis une formule qui permet de calculer le prix à payer (P) pour une commande inférieure ou égale à 36 t-shirts.**

  P = ...

- Sarah dispose d'un budget de 560 €. En appliquant les tarifs pour une commande de 37 à 72 t-shirts, elle peut acheter 72 t-shirts. Vu la diminution des prix pour une commande supérieure à 72 t-shirts, elle peut en obtenir plus.
  Quel est le nombre maximum de t-shirts qu'elle peut acheter avec 560 € ?

  Nombre maximum de t-shirts : . . . .

	réussite	échec	omission
Item 51 (4 Tr) / Item 49 (4TQ/AQ)			
4 Tr	66 %	30 %	4 %
4 TQ/AQ	46 %	45 %	9 %
Item 52 (4 Tr) / Item 50 (4TQ/AQ)			
4 Tr	43 %	41 %	16 %
4 TQ/AQ	19 %	54 %	27 %
Item 53 (4 Tr) / Item 51 (4TQ/AQ)			
4 Tr	49 %	34 %	17 %
4 TQ/AQ	25 %	48 %	27 %

La première question visait à appréhender une des relations décrites entre le nombre de t-shirts commandés et le prix à payer selon un mode numérique (calculer le prix à payer pour une commande de 70 t-shirts). Les pourcentages moyens de réussite nous amènent à penser que cette approche numérique de la situation est la plus accessible aux élèves (66 % de réussite en 4 Tr et 46 % de réussite en 4TQ/AQ).

D'après les résultats obtenus par les élèves aux deux autres questions, il semble que produire une formule relative au phénomène étudié est une activité nettement plus difficile à réaliser, quelle que soit la filière envisagée (43 % de réussite en 4 Tr et 19 % en 4TQ/AQ). De la même manière, résoudre un problème centré sur la comparaison de deux tarifs en cherchant un nombre maximum de t-shirts que l'on peut acheter pour une somme donnée est complexe pour une majorité d'élèves (49 % de réussite en 4 Tr et 25 % en 4TQ/AQ).

La seconde série d'activités développées dans ce document vise à aider les élèves à modéliser des situations à l'aide de fonctions présentées sous différentes formes (tableau de nombres, graphique, expression analytique). Ce travail est en général entamé au début de l'enseignement secondaire, souvent dans le contexte particulier de la production de formules. Il s'agit donc d'un prolongement de cette approche, qui permet de passer de la notion de formule à celle de fonction. L'accent sera mis dans ces activités sur l'existence d'un lien fonctionnel entre deux variables, l'une étant dépendante de l'autre.

1.2 RÔLE DES PARAMÈTRES

1.2.1 ENJEU DE L'ACTIVITÉ

L'activité a pour but d'amener les élèves à mieux comprendre le rôle des paramètres a et b dans les fonctions de la forme $f : x \to ax + b$ et celui des paramètres a, b et c dans les fonctions de la forme $f : x \to ax^2 + bx + c$. Cet objectif est réalisé au départ d'une organisation des fonctions par familles[1].

1.2.2 FONCTIONS DU PREMIER DEGRÉ (FICHES 1 À 4)

Dans un premier temps, les élèves reçoivent une première série de fonctions organisées en trois familles selon la valeur du paramètre b ($b > 0$; $b = 0$; $b < 0$) – voir fiche 1. On leur demande de compléter les tableaux de nombres et de relever les caractéristiques communes des fonctions appartenant à chaque famille. Ces caractéristiques devront être dégagées sur les différents supports des fonctions :

- les graphiques passent tous par un point (0 , b) ;
- le terme indépendant des expressions analytiques est b ;
- dans tous les tableaux de nombres, on retrouve une même coordonnée (0 , b).

Dans un deuxième temps, les élèves reçoivent une seconde série de fonctions organisées en trois familles selon la valeur du paramètre a ($a > 0$; $a = 0$; $a < 0$) – voir fiche 2. La consigne est la même que précédemment : compléter les tableaux de nombres et relever les similitudes entre les fonctions appartenant à chaque famille. Ces similitudes devront être dégagées sur les différents supports des fonctions :

- les graphiques sont des droites parallèles :
  - dans la première famille, ces droites représentent des fonctions croissantes ;
  - dans la deuxième, elles représentent des fonctions décroissantes ;
  - dans la troisième, elles sont parallèles à l'axe 0x.
- dans toutes les expressions analytiques, le coefficient de x est identique (3 pour la première famille, -2 pour la deuxième et 0 pour la troisième) ;
- l'analyse des tableaux de nombres doit amener à faire le lien entre le graphique et l'expression analytique (les accroissements sont chaque fois égaux au coefficient de x).

Les élèves réalisent ensuite une synthèse des similitudes dégagées, en vue de mettre en évidence les rôles respectifs des paramètres a et b. La fiche 3 peut servir de support pour une synthèse : elle reprend des esquisses de graphiques selon que a et/ou b sont positifs, nuls ou négatifs.

Par la suite, des exercices de synthèse peuvent leur être proposés (fiche 4).

1.2.3 FONCTIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ (FICHES 5 ET 6)

Les fonctions du deuxième degré peuvent également être organisées par familles, au départ de la fonction de référence $f : x \to x^2$.

Ce travail est exposé dans la fiche 5.

[1] Source : documents pédagogiques FeSEC

Il s'agit d'abord d'identifier les similitudes des fonctions de la forme $f : x \rightarrow ax^2$. Par la suite, on dégagera les similitudes des fonctions de la forme $f : x \rightarrow (x-k)^2$, puis $f : x \rightarrow x^2 + k$.

La famille de fonctions de la forme $f : x \rightarrow ax^2 + bx$ sera ensuite travaillée, en associant cette famille à la famille de fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :
$f : x \rightarrow x(ax + b)$.

Sur cette base, il devient plus aisé d'étudier la famille de fonction $f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$.

Cette étude peut déboucher sur les manipulations de graphiques, qui sont souvent source de difficultés pour les élèves de quatrième secondaire.

Par la suite (fiche 6), des exercices de synthèse sont proposés.

1.2.4 QUELQUES OUTILS D'ÉVALUATION

Ce travail de réflexion par familles de fonctions peut être prolongé dans le cadre de la passation d'outils d'évaluations, qui peuvent être téléchargés gratuitement à l'adresse suivante :

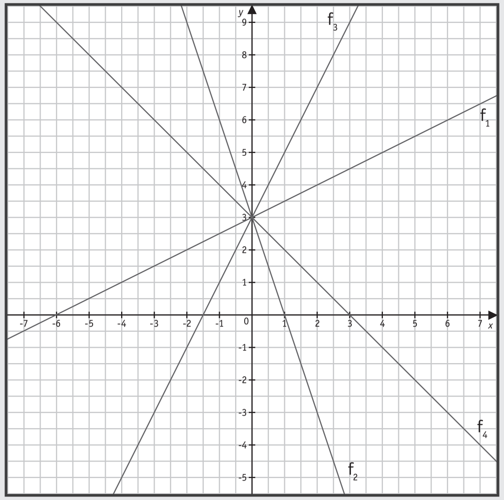
http://www.enseignement.be/index.php?page=24393&navi=2135

Trois outils semblent particulièrement adaptés : « Le premier degré dans tous ses états », « L'évaporation de l'eau » et « Tennis ».
Ces outils ont été construits sur base du référentiel *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques* pour les humanités générales et technologiques.
« Le premier degré dans tous ses états » appartient à la famille de tâches « organiser des savoirs » dans le domaine « grandeurs et fonctions ». Il s'adresse aux élèves de 3e année. L'exercice est proposé sous deux versions et consiste en un appariement, avec justification, de relations concrètes, d'expressions algébriques, de tableaux de valeurs et de graphiques.
« Évaporation colorée » appartient à la famille de tâches « résoudre un problème » dans le domaine « grandeurs et fonctions ». Il s'adresse également aux élèves de 3e année. Les résultats d'une expérience de chimie sont présentés sous les trois formes : graphique, tableau, formule, et à partir de ces éléments, l'élève doit répondre à deux questions.
« Tennis » appartient à la famille de tâche « résoudre un problème ». Il s'adresse aux élèves de 4e année. La résolution du problème passe par la modélisation de la trajectoire d'une balle de tennis par une parabole.

Fiche 1

Des fonctions du premier degré ont été regroupées en trois familles.

1. Complète les tableaux de nombres associés à chaque famille.
2. Pour chaque famille, décris les caractéristiques qui se dégagent de l'analyse des graphiques, des expressions analytiques et des tableaux de nombres.



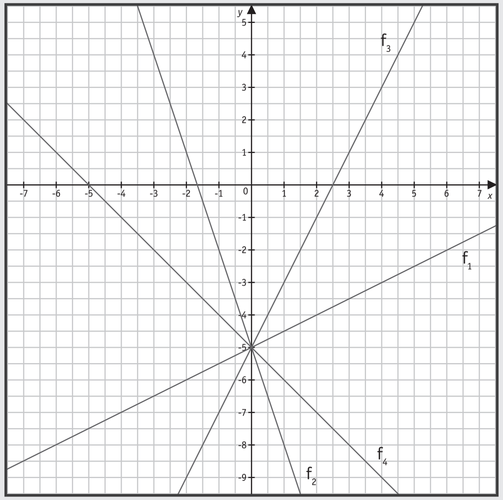
$f_1 : x \to 0,5\,x + 3$

$f_2 : x \to -\,3\,x + 3$

$f_3 : x \to 2\,x + 3$

$f_4 : x \to -\,x + 3$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
− 2				
− 1				
0				
1				
2				



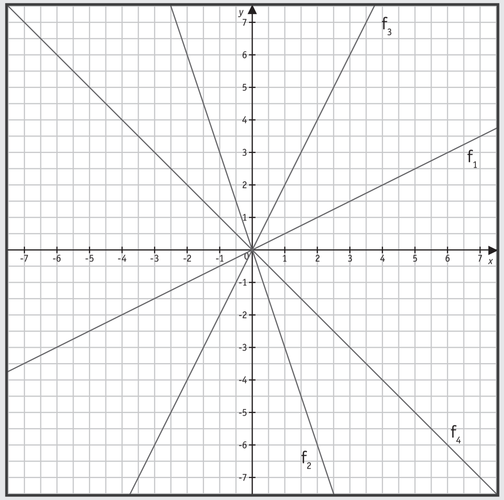
$f_1 : x \to 0,5\,x - 5$

$f_2 : x \to -\,3\,x - 5$

$f_3 : x \to 2\,x - 5$

$f_4 : x \to -\,x - 5$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
− 2				
− 1				
0				
1				
2				



$f_1 : x \to 0,5\,x$

$f_2 : x \to -\,3\,x$

$f_3 : x \to 2\,x$

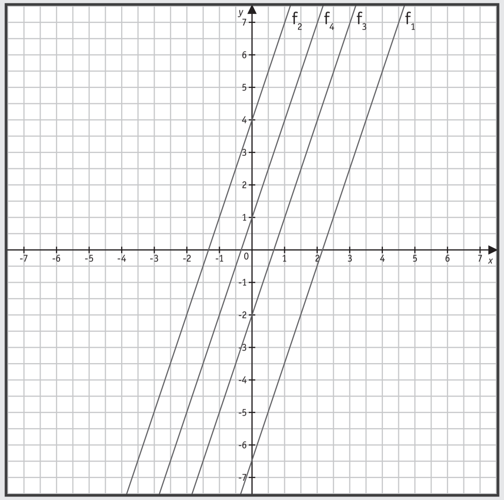
$f_4 : x \to -\,x$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
− 2				
− 1				
0				
1				
2				

Fiche 2

Réalise le même travail pour ces trois autres familles de fonctions.

1. Complète les tableaux de nombres associés à chaque famille.
2. Pour chaque famille, décris les caractéristiques qui se dégagent de l'analyse des graphiques, des expressions analytiques et des tableaux.



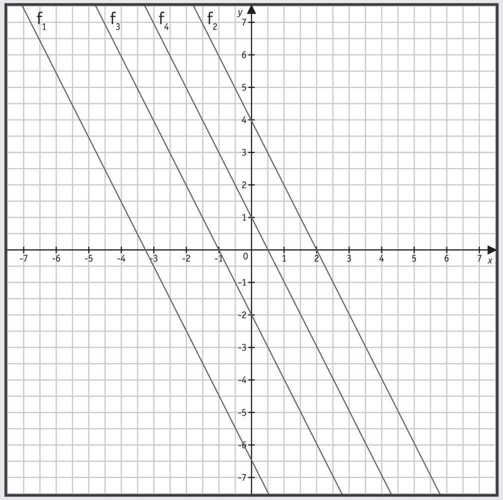
$f_1 : x \to 3x - 6{,}5$

$f_2 : x \to 3x + 4$

$f_3 : x \to 3x - 2$

$f_4 : x \to 3x + 1$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
− 2				
− 1				
0				
1				
2				



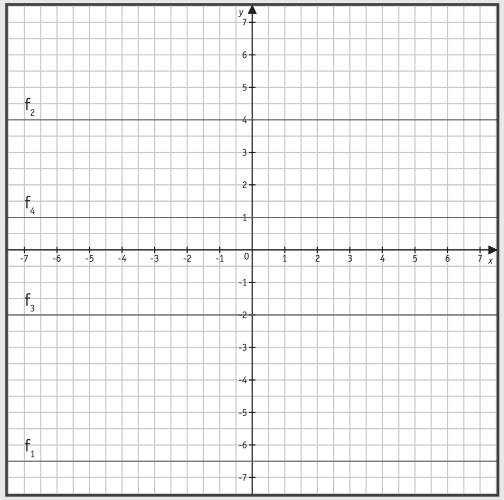
$f_1 : x \to -2x - 6{,}5$

$f_2 : x \to -2x + 4$

$f_3 : x \to -2x - 2$

$f_4 : x \to -2x + 1$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
− 2				
− 1				
0				
1				
2				



$f_1 : x \to -6{,}5$

$f_2 : x \to 4$

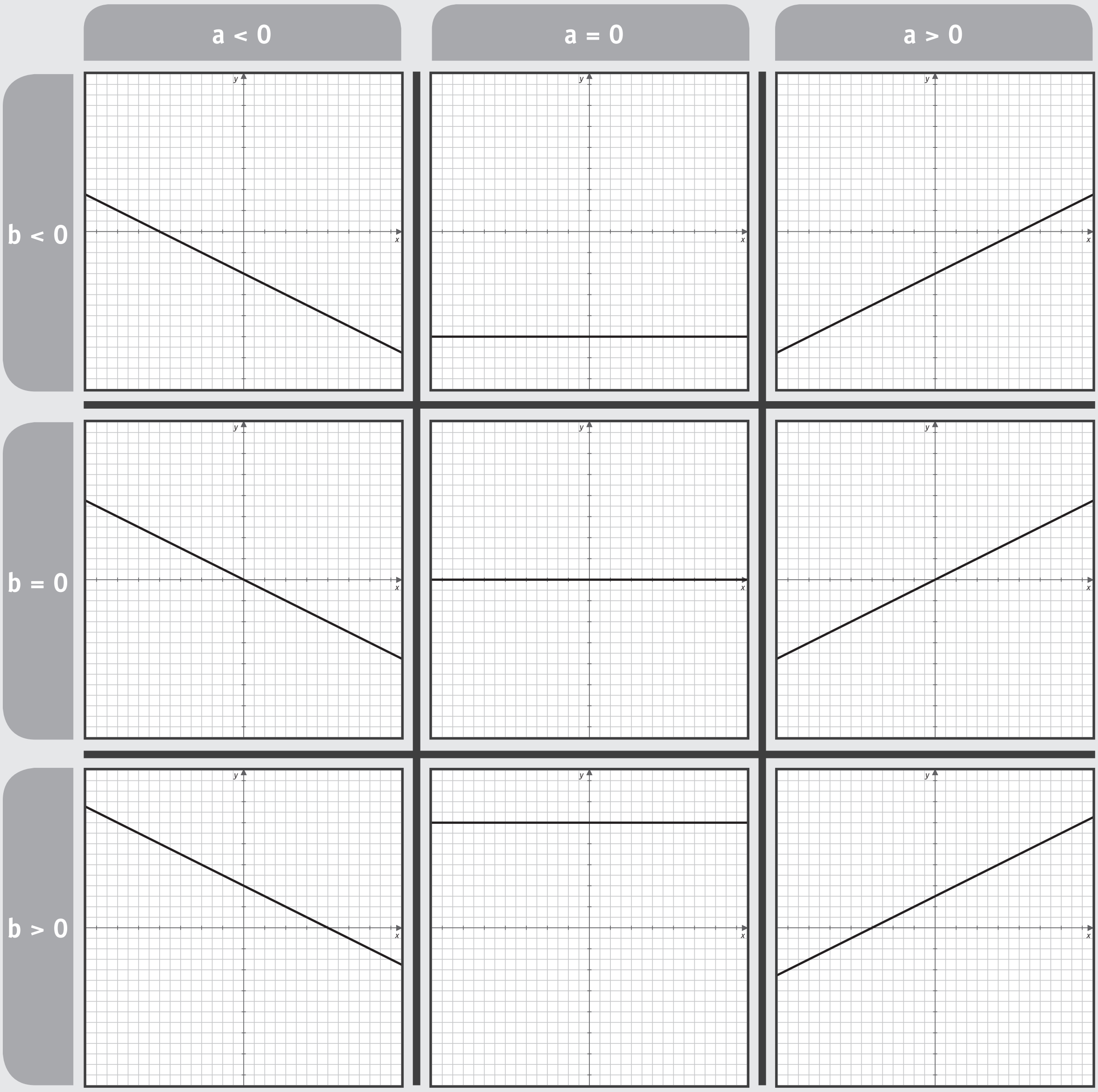
$f_3 : x \to -2$

$f_4 : x \to 1$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
− 2				
− 1				
0				
1				
2				

Fiche 3
Synthèse

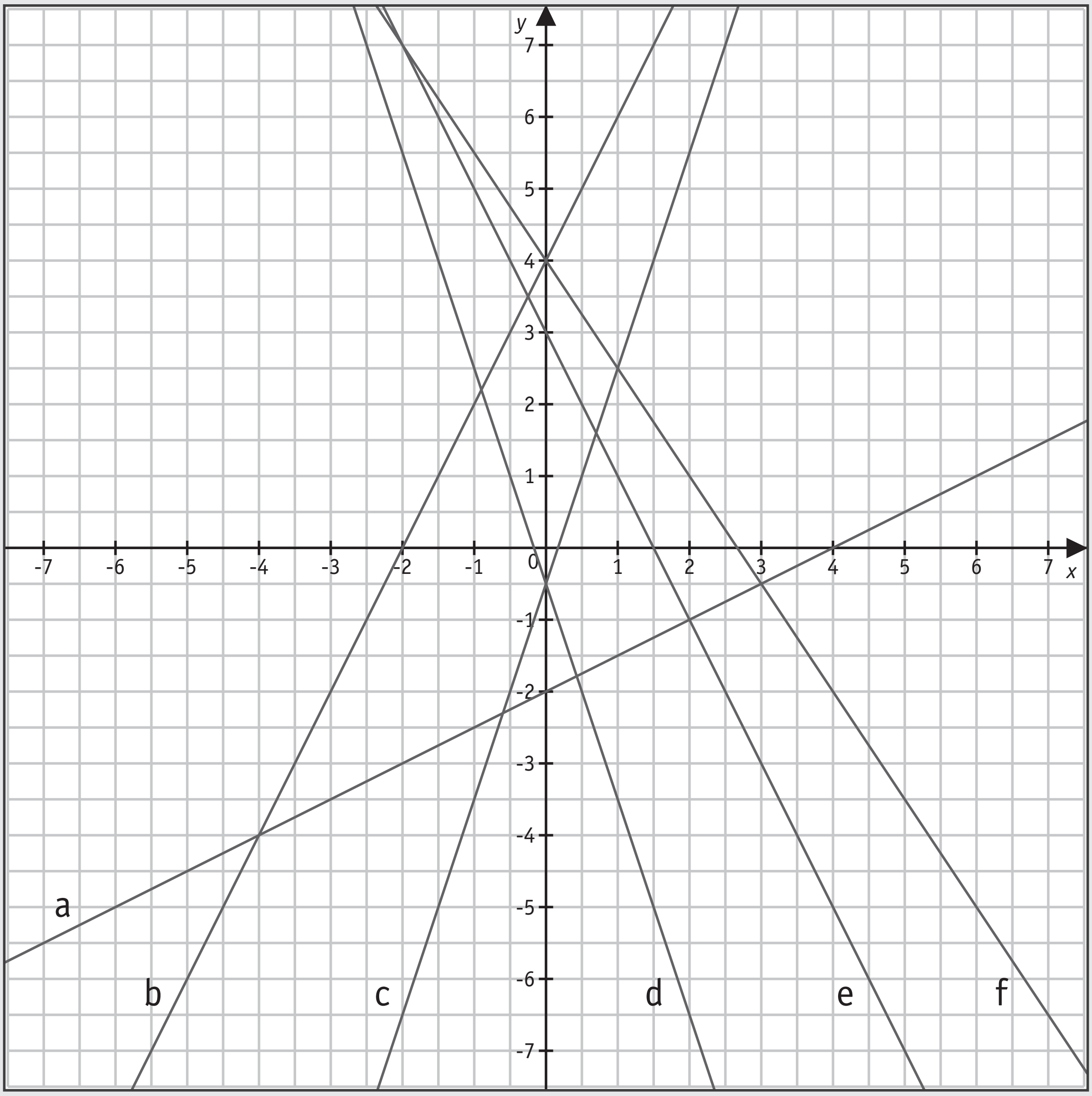
Graphique de la fonction $f : x \to ax + b$



Fiche 4
Exercices de synthèse

1. Associer chaque fonction suivante à son graphique.

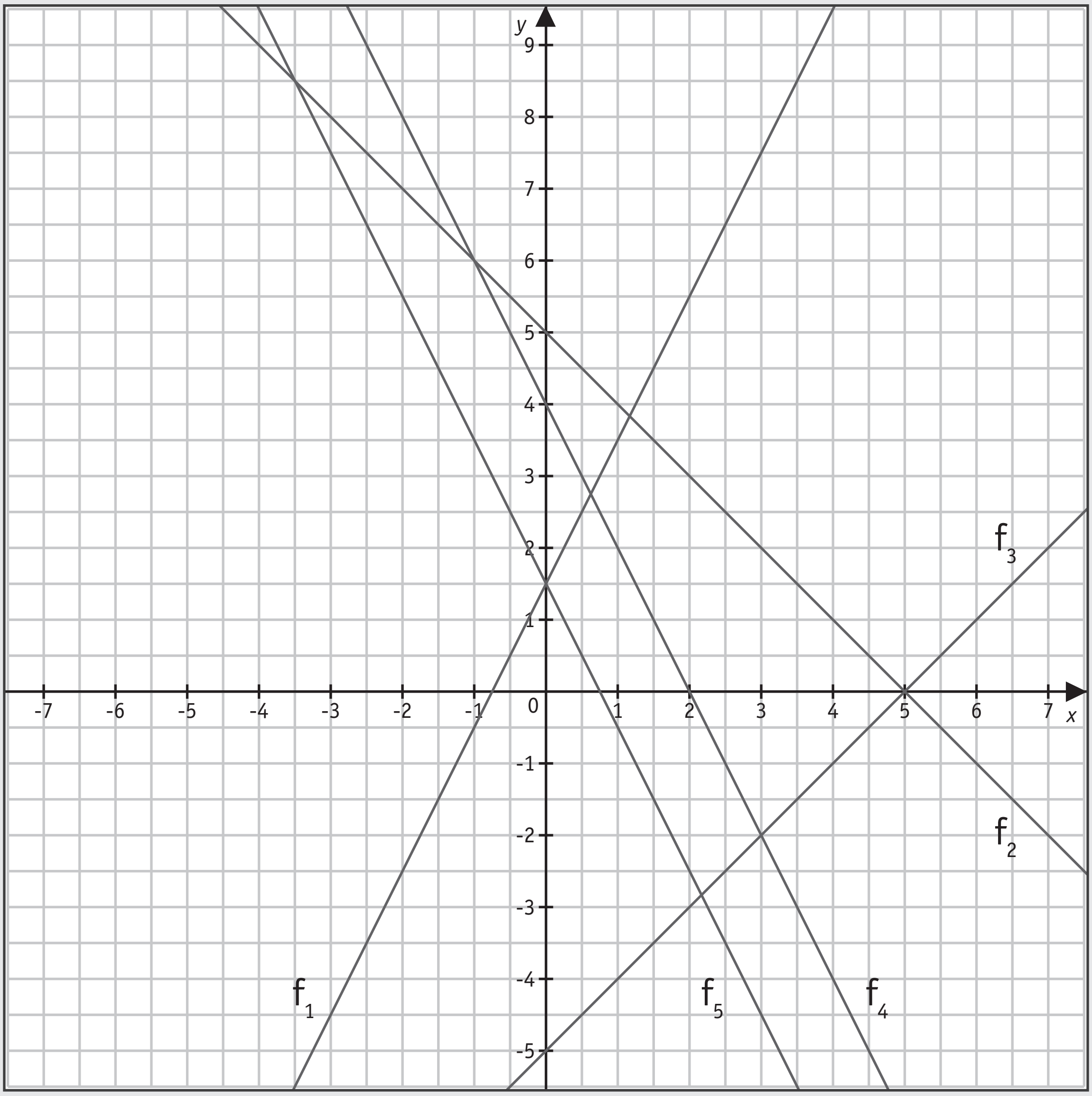
- $f_1 : x \to -2x + 3$
- $f_2 : x \to 0,5x - 2$
- $f_3 : x \to 3x - 0,5$
- $f_4 : x \to -1,5x + 4$
- $f_5 : x \to 2x + 4$
- $f_6 : x \to -3x - 0,5$



Fiche 4
Exercices de synthèse

2. Trouve les fonctions dont les graphiques sont représentés ci-dessous.

- $f_1 : x \rightarrow$
- $f_2 : x \rightarrow$
- $f_3 : x \rightarrow$
- $f_4 : x \rightarrow$
- $f_5 : x \rightarrow$



Fiche 4
Exercices de synthèse

3. Associer chaque tableau à une fonction :

x	image de x
− 2	7
− 1	5,5
0	4
1	2,5
2	1

x	image de x
− 2	− 3
− 1	− 2,5
0	− 2
1	− 1,5
2	− 1

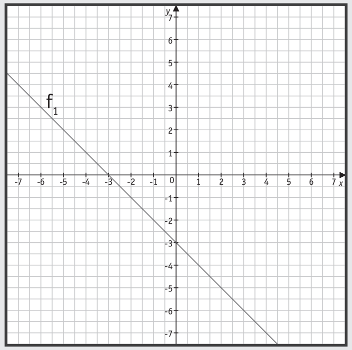
x	image de x
− 2	− 6,5
− 1	− 3,5
0	− 0,5
1	2,5
2	5,5

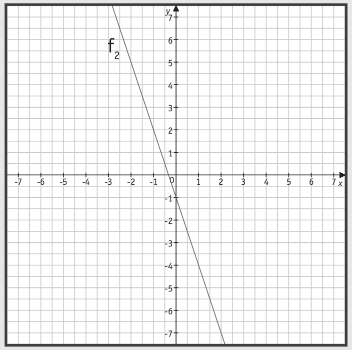
x	image de x
− 2	7
− 1	5
0	3
1	1
2	− 1

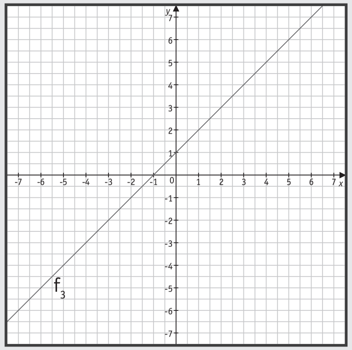
- $f_1 : x \rightarrow 3x - 0,5$
- $f_2 : x \rightarrow 2,5x + 4$
- $f_3 : x \rightarrow -2x - 0,5$
- $f_4 : x \rightarrow -1,5x + 4$
- $f_5 : x \rightarrow -2x + 3$
- $f_6 : x \rightarrow -1,5x - 2$
- $f_7 : x \rightarrow x + 3$
- $f_8 : x \rightarrow 0,5x - 2$

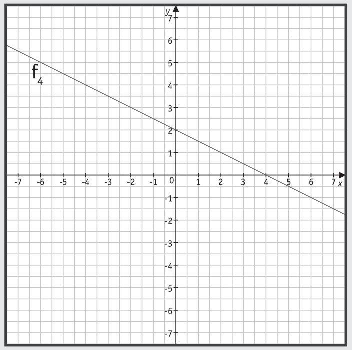
Fiche 4
Exercices de synthèse

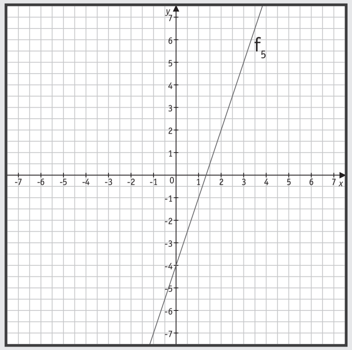
3. Associer chaque tableau au graphique de la fonction qui lui correspond :

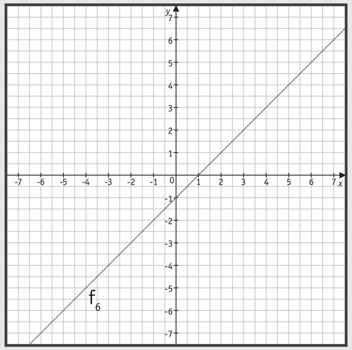












x	image de x
– 2	3
– 1	2,5
0	2
1	1,5
2	1

x	image de x
– 2	– 10
– 1	– 7
0	– 4
1	– 1
2	2

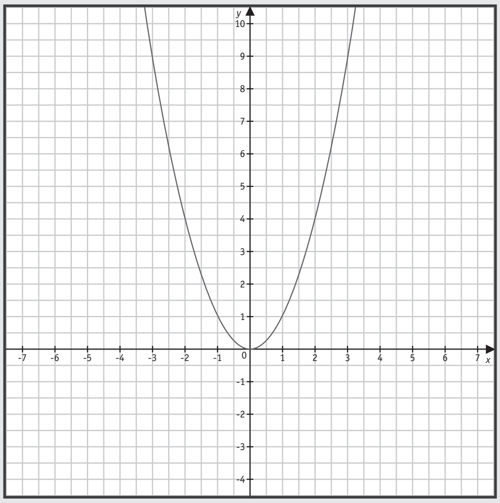
x	image de x
– 2	– 1
– 1	0
0	1
1	2
2	3

x	image de x
– 2	– 1
– 1	– 2
0	– 3
1	– 4
2	– 5

Fiche 5
Les fonctions du 2ᵉ degré

$$f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

1. ÉTUDE DE LA FONCTION DE RÉFÉRENCE $f : x \rightarrow x^2$

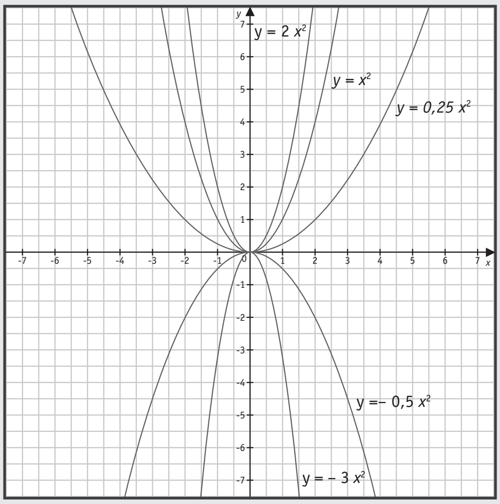


Le graphique de cette fonction est une **parabole**.

Son axe de symétrie est l'axe 0y.

Le point de coordonnée (0,0) en est le **sommet**.

2. ÉTUDE DE LA FAMILLE DE FONCTIONS $f : x \rightarrow ax^2$

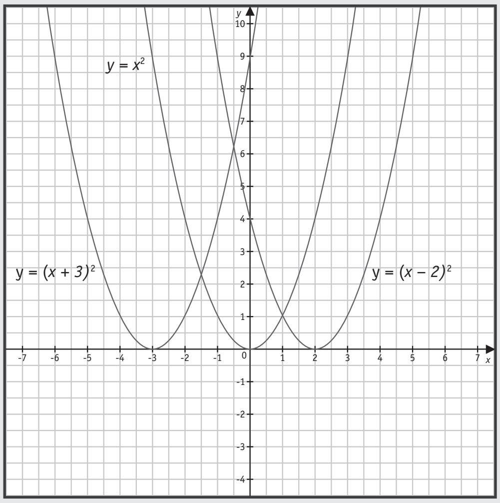


Tous les graphiques des fonctions $f : x \rightarrow ax^2$ sont des **paraboles** caractérisées par :

- un axe de symétrie d'équation x = 0 ;
- une concavité tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$;
- un sommet de coordonnée (0,0) qui correspond à un minimum si $a > 0$ et à un maximum si $a < 0$;
- dans un même repère, les graphiques des fonctions $f : x \rightarrow ax^2$ avec $a > 1$ sont plus « fermées » que la parabole d'équation $y = x^2$ et les graphiques des fonctions $f(x) = ax^2$ avec $0 < a < 1$ sont plus « ouvertes » que la parabole d'équation $y = x^2$.

Fiche 5
Les fonctions du 2e degré

3. ÉTUDE DE LA FAMILLE DE FONCTIONS $f : x \to (x - k)^2$

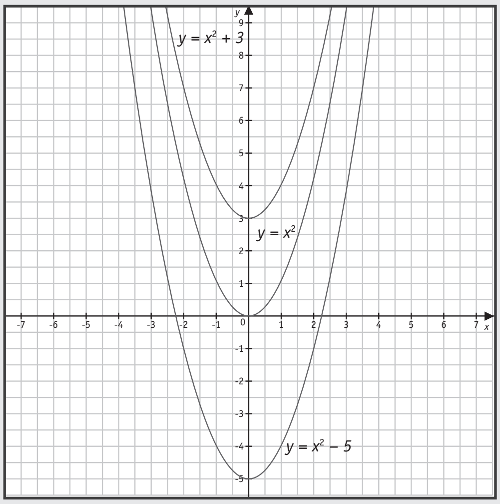


Tous les graphiques des fonctions $f : x \to (x - k)^2$ sont images de celui de $f : x \to x^2$ par une translation parallèle à l'axe des x (de vecteur $(k,0)$).

Dans un même repère, tous les graphiques des fonctions $f : x \to (x - k)^2$ sont des paraboles caractérisées par :

- un axe de symétrie d'équation $x = k$,
- un sommet de coordonnée $(k,0)$ qui correspond à un minimum.

4. ÉTUDE DE LA FAMILLE DE FONCTIONS $f : x \to x^2 + k$



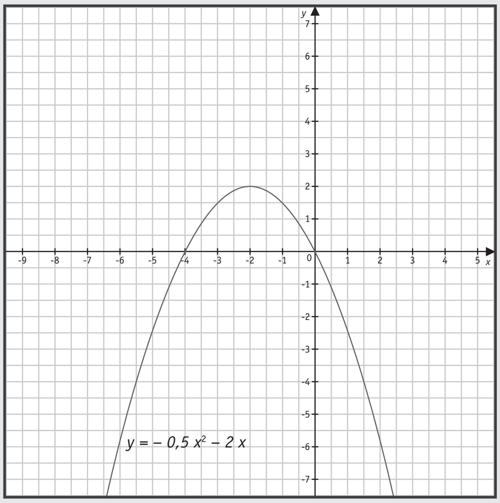
Tous les graphiques des fonctions $f : x \to x^2 + k$ sont images de celui de $f : x \to x^2$ par une translation parallèle à l'axe des y (de vecteur $(0, k)$).

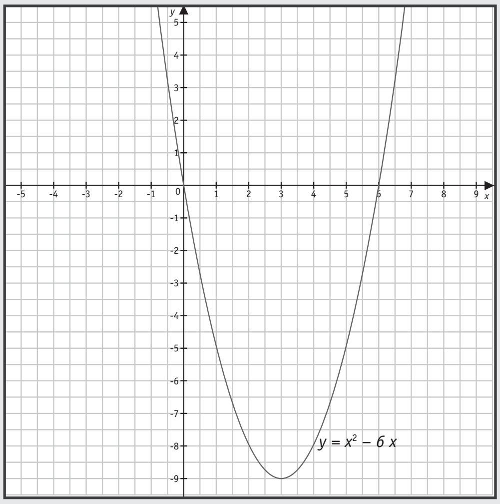
Dans un même repère, tous les graphiques des fonctions $f : x \to x^2 + k$ sont des paraboles caractérisées par :

- un axe de symétrie d'équation $x = 0$;
- un sommet de coordonnée $(0,k)$ qui correspond à un minimum.

Fiche 5
Les fonctions du 2e degré

5. ÉTUDE DE LA FAMILLE DE FONCTIONS $f : x \rightarrow ax^2 + bx$





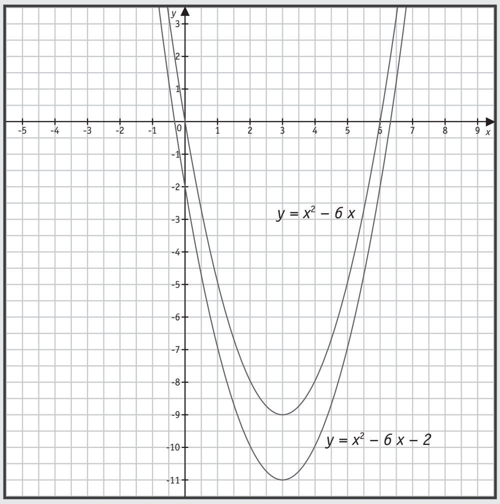
De la factorisation $ax^2 + bx = x\,(ax + b)$, on tire que les fonctions $f : x \rightarrow ax^2 + bx$ s'annulent en $x = 0$ et en $x = \frac{-b}{a}$. L'abscisse du sommet est donc $\frac{-b}{2a}$.

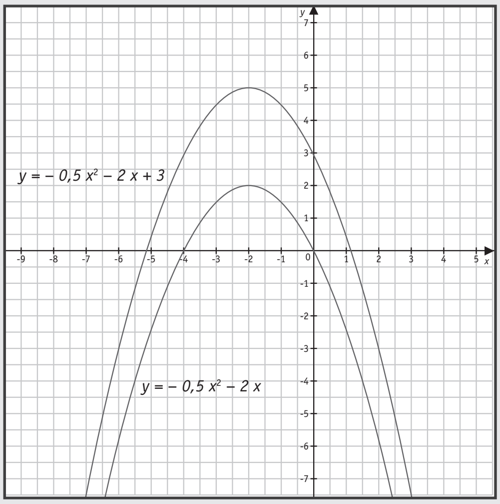
Tous les graphiques des fonctions $f : x \rightarrow ax^2 + bx$ sont des **paraboles** caractérisées par :

- un axe de symétrie en $x = \frac{-b}{2a}$,
- une concavité tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$,
- un sommet en $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a}\right)$ qui correspond à un minimum si $a > 0$ et à un maximum si $a < 0$.

Fiche 5
Les fonctions du 2ᵉ degré

6. ÉTUDE DE LA FAMILLE DE FONCTIONS $f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ À PARTIR DE L'ÉTUDE DE LA FAMILLE DE FONCTIONS $f : x \rightarrow ax^2 + bx$





Les graphiques des fonctions $f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ sont images des graphiques des fonctions $f : x \rightarrow ax^2 + bx$ par une translation parallèle à l'axe des y (de vecteur $(0,c)$). Les sommets ont donc une même abscisse, mais il faut ajouter k à l'ordonnée.

Tous les graphiques des fonctions $f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ sont des **paraboles** caractérisées par :

- un axe de symétrie en $x = \dfrac{-b}{2a}$,
- une concavité tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$,
- un sommet en $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$ qui correspond à un minimum si $a > 0$ et à un maximum si $a < 0$.

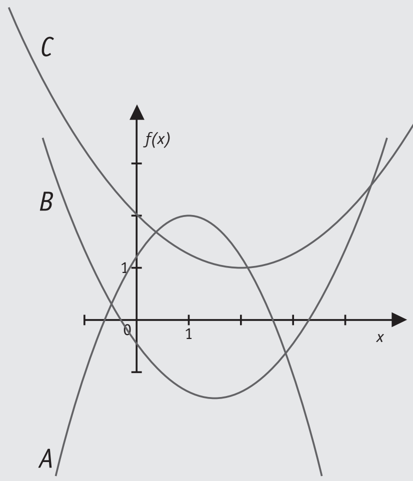
Fiche 6

QUESTION 1

a. Comment peut-on construire le graphique de la fonction $f : x \rightarrow -(x+1)^2$ à partir du graphique de $f : x \rightarrow x^2$?

b. Écrire deux fonctions du deuxième degré (différentes) qui admettent chacune les deux racines : $x = -2$ et $x = 0{,}5$.

c. Voici trois paraboles dont les graphiques sont appelés *A*, *B* et *C*.



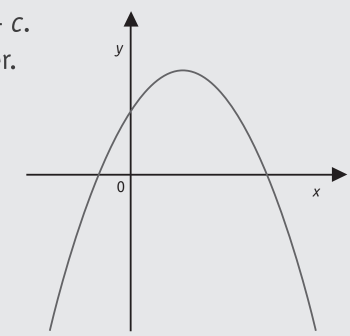
Les équations de ces paraboles sont de la forme $y = ax^2 + bx + c$, préciser le signe de *a*, de *c* et de $\triangle$.

Parabole	Signe de *a*	Signe de *c*	Signe de $\triangle$
A			
B			
C			

QUESTION 2

Le graphique ci-contre est une parabole d'équation $y = -0{,}5x^2 + bx + c$.
Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle ? Justifier.

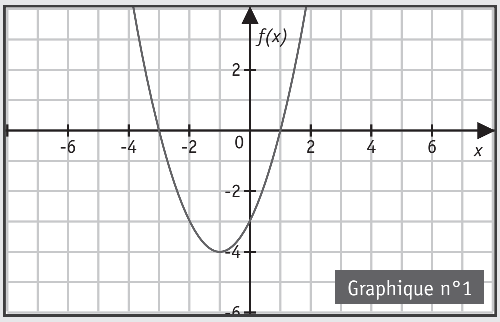
1. $b > 0$ et $c = 0$
2. $b > 0$ et $c < 0$
3. $b > 0$ et $c > 0$
4. $b < 0$ et $c > 0$
5. $b < 0$ et $c < 0$
6. $b = 0$ et $c < 0$



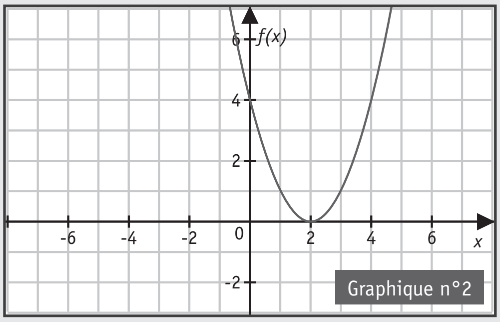
Fiche 6

QUESTION 3

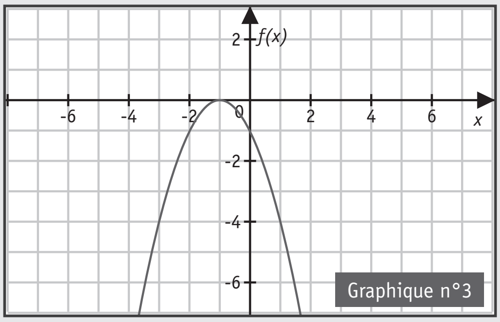
Compléter le tableau ci-après en associant un ou plusieurs graphique(s) à chaque affirmation.



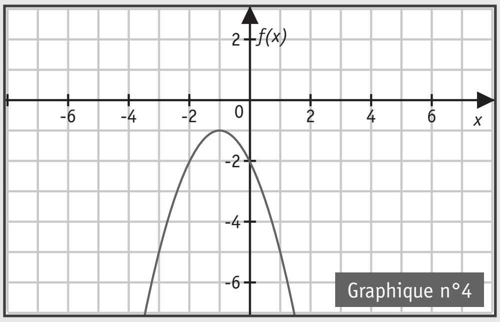
Graphique n°1



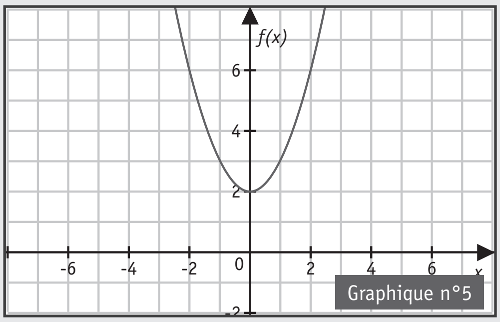
Graphique n°2



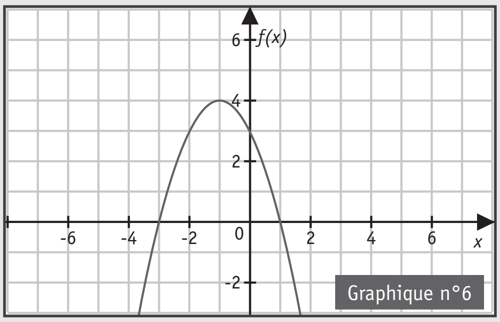
Graphique n°3



Graphique n°4



Graphique n°5



Graphique n°6

Affirmation	Graphique(s) n°
L'équation $f(x) = 0$ a pour solution $x = 2$.	
L'axe de symétrie de la courbe a pour équation $x = m$ avec $m > 0$.	
L'ensemble des solutions de $f(x) \neq 0$ est $\mathbb{R}$.	
L'ensemble des solutions de $f(x) \leq 0$ n'a pas de solution.	
L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions ; l'une d'elles est -3.	
La fonction est paire.	
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $]-3{,}1[$.	
L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution négative.	
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $\mathbb{R}$	

Fiche 6

QUESTION 4

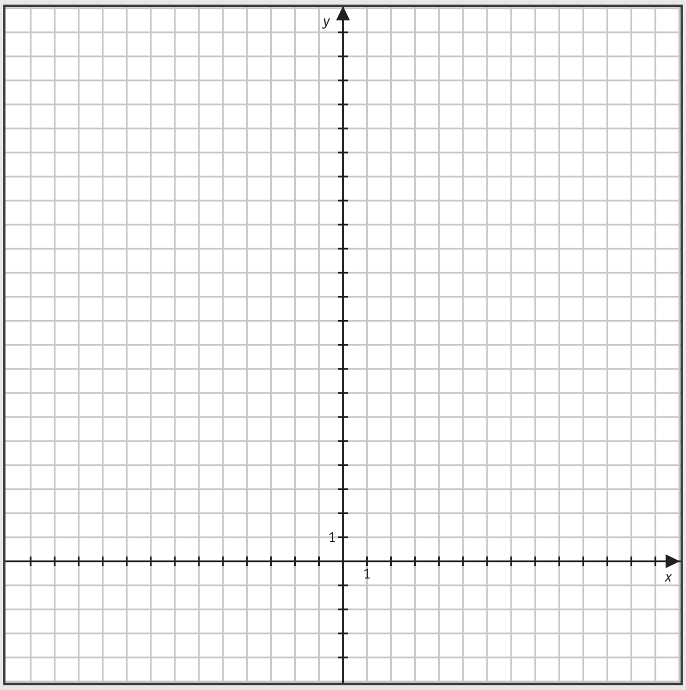
Une parabole admet le point $S(1,4)$ comme sommet et passe par le point $A(3,0)$.

- Quelle est l'autre racine ?
- Écrire une équation de cette parabole.

QUESTION 5

Soit la parabole $P \equiv y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ et la droite $D \equiv y = 2x + 3$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite avec la parabole.

- Graphiquement



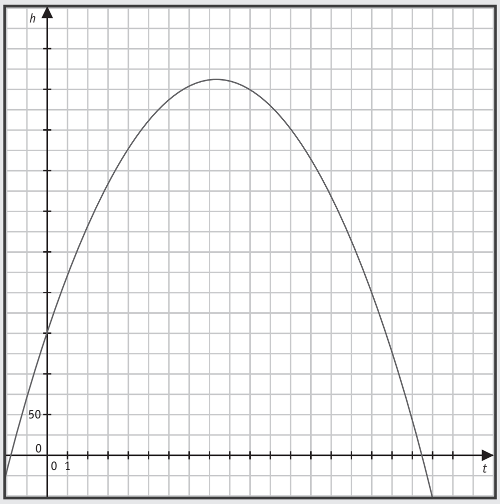
- Algébriquement

Fiche 6

QUESTION 6

Un projectile est lancé vers le haut à partir d'un endroit situé à 150 m au-dessus du sol. Après t secondes, sa hauteur h est donnée par la fonction.

$$h(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 75t + 150$$

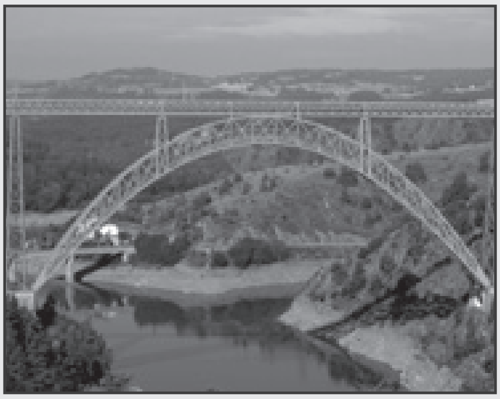


Utiliser le graphique de la fonction déjà représentée ci-contre pour répondre (approximativement) aux questions suivantes :

- À quel(s) moment(s) la hauteur est-elle de 400 m ?
- Quand le projectile sera-t-il situé à une hauteur supérieure à 400 m ?
- Quand le projectile arrive-t-il au sol ?
- Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?
- Répondre aux mêmes questions en donnant un résultat exact au dixième près.

QUESTION 7

Considérons le viaduc de Garabit (France) représenté ci-contre. La forme de l'arc de ce viaduc correspond approximativement à un arc de parabole. Sa portée (distance entre les piliers extérieurs) est de 170 m, il a une hauteur de 52 m. Les deux piliers de soutien intérieurs sont distants de 70 m.



- Esquisser le dessin de l'arc du viaduc dans un repère cartésien et y porter les données (échelle 1:1000).
- Déterminer l'équation de cette parabole dans le repère choisi.
- Calculer la hauteur des piliers de soutien intérieurs.

Fiche 6

QUESTION 8

Malika laisse tomber une pierre dans un puits et entend le « plouf » au bout de 4 secondes.

Quelle est la profondeur du puits ?

Indications :

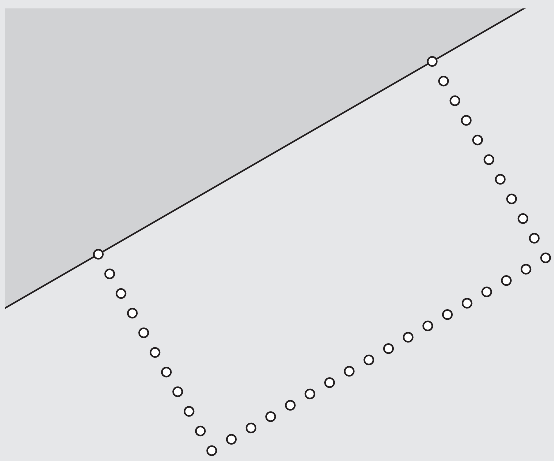
- la distance d (exprimée en mètres) parcourue par la pierre après une chute d'une durée de t secondes est donnée par $d = 5t^2$.
- la distance d' (exprimée en mètres) parcourue par le son sur une durée de t' secondes est donnée par $d' = 340t'$.

QUESTION 9

« Zone mer réservée »

Pour ses activités d'initiation, le club de voile a reçu l'autorisation de délimiter une zone de la mer qui borde la plage.
La plage est parfaitement rectiligne à l'endroit imposé, la zone doit être de forme rectangulaire et le club dispose de 300 mètres de filin avec bouées flottantes pour délimiter cette zone.
Bien évidemment, le responsable du club souhaite que cette zone ait la plus grande surface possible.

Si cet objectif est atteint, quelles seront les dimensions de la zone ?



1.3 MODÉLISATION

1.3.1 ENJEU DES ACTIVITÉS

Les activités présentées ici visent à construire des modélisations de situations à l'aide de fonctions en utilisant des tableaux de nombres.

Ce type d'approche est déjà travaillé au début de l'enseignement secondaire, lors de la généralisation de suites arithmétiques à l'aide de formules (pour des exemples d'activités dans ce contexte, voir *Pistes didactiques* de 2008 - 2e secondaire (http://www.enseignement.be/download.php?do_id=4353&do_check=). Ces activités ont pour but d'amener les élèves à donner du sens aux expressions algébriques, en les reliant de manière explicite aux situations numériques dont elles sont issues.

Continuer dans cette logique pour appréhender les fonctions nous semble intéressant dans la mesure où l'élève dispose, à ce niveau de l'apprentissage, de différentes représentations des fonctions (tableaux de nombres, graphiques et expressions analytiques). Le recours à des logiciels graphiques peut aider à faire des liens entre ces différentes représentations.

1.3.2 MODÉLISATION D'UN PHÉNOMÈNE

Dans la première situation proposée (Maria prépare le thé – voir fiche 7), il s'agit d'exprimer l'évolution de la température d'une quantité donnée d'eau en fonction du temps de cuisson. Les élèves disposent d'un tableau de nombres dont les données doivent être représentées sous une forme graphique, puis sous la forme d'une expression analytique en vue d'identifier le moment où la température atteint 100 °C.

La deuxième situation (naissance de deux fonctions du premier degré – voir fiche 8) amène les élèves à exprimer à partir d'une longueur variable, le périmètre de deux figures géométriques construites au départ d'un triangle rectangle. La modélisation des deux périmètres conduit à deux fonctions du premier degré, l'une linéaire et l'autre affine. Cette activité peut également être réalisée au départ des aires des deux figures. Dans ce cas, la modélisation aboutira à l'élaboration de deux fonctions du deuxième degré.

La troisième situation proposée (Mattias lance le ballon – voir fiche 9) amène les élèves à modéliser, sur la base d'un tableau de nombres, la hauteur atteinte par un ballon lancé du sol par un enfant en fonction du temps. Il s'agit d'explorer ici la modélisation d'une fonction du deuxième degré.

Par la suite, quelques exercices de modélisation de fonctions du premier degré sont proposés. Ils concernent l'allongement d'un ressort (fiche 10), une réflexion au départ de données relatives à l'espérance de vie en Belgique (fiche 11) ainsi que l'analyse de graphiques présentant des résultats d'un triathlon (fiche 12).

Fiche 7
Maria prépare le thé

BUTS

- Rechercher une fonction du premier degré qui modélise un phénomène.
- Utiliser cette fonction pour prévoir un résultat.

CONSIGNE

Pour préparer un thé, Maria verse 300 ml d'eau dans une bouilloire électrique. Elle met la bouilloire sous tension et, avec un thermomètre, elle mesure la température de l'eau à différents moments.
Le tableau ci-dessous donne les mesures obtenues à intervalles de temps réguliers.

Temps (en seconde)	Température (en °C)
0	18
16	22,8
32	27,4
48	32,8
64	37,8
80	43,7

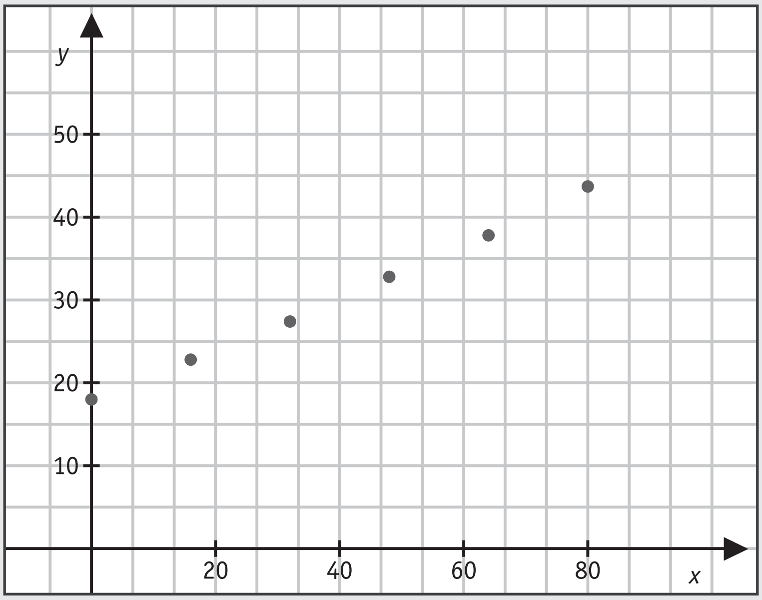
IL T'EST DEMANDÉ :

- de représenter les données du tableau dans le plan muni d'un repère orthogonal ;
- de déterminer une fonction qui modélise le phénomène ;
- de représenter la fonction obtenue dans le repère ;
- de comparer les mesures théoriques fournies par ton modèle avec les mesures réelles obtenues par Maria ;
- de critiquer ton modèle, c'est-à-dire de préciser s'il respecte le critère de qualité suivant : les écarts entre mesures théoriques et mesures réelles ne doivent pas excéder 0,75 ;
- de déterminer éventuellement une autre fonction qui modélise le phénomène et qui respecte le critère de qualité énoncé ci-dessus ;
- enfin, d'estimer à quel moment l'eau va atteindre 100 °C.

TRAITEMENT

1. L'élève représente les données.

Un repère orthonormé n'est pas nécessaire puisque les abscisses et les ordonnées sont des mesures de grandeurs de natures différentes.



2. L'élève cherche une fonction qui modélise le phénomène.

Les points placés dans le plan ont l'air plus ou moins alignés.
On pourrait donc modéliser le phénomène à l'aide d'une fonction du premier degré.
La première idée sera sans doute d'utiliser les points extrêmes pour construire cette fonction.

Soit la fonction

$$f : x \rightarrow ax + b$$

Pour que les couples (0,18) et (80;43,7) proviennent de cette fonction, il faut que l'on ait

$$\begin{cases} b = 18 \\ 80a + b = 43{,}7 \end{cases}$$

De là, vient

$$a = \frac{43{,}7 - 18}{80} = \frac{25{,}7}{80}$$

Alors, la fonction modélisante est

$$f : x \rightarrow \frac{25{,}7}{80}x + 18$$

3. L'élève vérifie la validité de regard du critère énoncé.

Temps (en seconde)	Température réelle (en °C)	Température théorique (en °C)	Écart
0	18	18	0
16	22,8	23,14	0,34
32	27,4	28,28	0,88
48	32,8	33,42	0,62
64	37,8	38,56	0,76
80	43,7	43,7	0

Comme le critère n'est pas respecté en deux points, la fonction trouvée n'est pas satisfaisante.

4. L'élève recommence la procédure jusqu'à obtenir des écarts entre les températures théoriques et réelles inférieures à 0,75.

Une fonction modélisante qui vérifie le critère de qualité : $f(x) = \frac{5}{16}x + 18$

5. L'élève calcule, avec la fonction modélisante qu'il a trouvée, à quel moment l'eau va atteindre 100 °C.

Avec la fonction modélisante ci-dessus, nous avons

$$\frac{5}{16}x + 18 = 100$$

d'où, nous tirons

$$x = \frac{16 \cdot (100 - 18)}{5} = 262{,}4$$

Il faut donc 262,4 secondes, soit à peu près 4 minutes et 22 secondes, pour que l'eau arrive à 100 °C.

Fiche 8
Naissance de 2 fonctions

CONSIGNE

Soit un triangle *ABC*, rectangle en *A*, tel que :

$$|AB| = 15 \text{ et } |AC| = 20$$

Par un point P appartenant à la hauteur [*AH*] de ce triangle, on trace un segment [*UV*] parallèle à l'hypoténuse ; les points *U* et *V* appartiennent respectivement aux côtés [*AB*] et [*AC*].
Ce faisant, on obtient, d'une part, un triangle *AUV* rectangle en *A* et, d'autre part, un trapèze *BCVU*.

Estimer pour quelle(s) valeur(s) de |*AP*| le périmètre du triangle *AUV* est égal au périmètre du trapèze *BCVU*.

TRAITEMENT

1. Remplir le tableau ci-dessous (à l'aide d'un logiciel ou d'un mesurage).

|*AP*|	Périmètre de *AUV*	Périmètre de *BCVU*
2		
4		
6		
8		
10		

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, placer les points :
- (en bleu) qui ont pour abscisse |*AP*| et pour ordonnée le périmètre de *ABC* ;
- (en vert) qui ont pour abscisse |*AP*| et pour ordonnée le périmètre de *BCVU*.

3. Observer les deux ensembles de points ainsi construits.
À quel type de ligne ces points semblent-ils appartenir ?

Déterminer les deux fonctions qui modélisent l'évolution des périmètres du triangle et du trapèze.

4. Estimer pour quelle(s) valeur(s) de |*AP*| les périmètres du triangle *AUV* et du trapèze *BCVU* sont égaux.

À titre d'information, vous trouverez ci-dessous un traitement mathématique rigoureux de la situation.

1. Calculons la longueur de l'hypoténuse du triangle *ABC*.
En vertu du théorème de PYTHAGORE, nous avons

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 15^2 + 20^2 = 625$$

De là, il vient

$$|BC| = \sqrt{625} = 25$$

2. Calculons la hauteur du triangle ABC relative à l'hypoténuse.
En calculant l'aire du triangle *ABC* de deux manières différentes, nous avons

$$\frac{1}{2}\ |AH|\ |BC| \ = \ \frac{1}{2}\ |AB|\ |AC|$$

Périmètre de *ABC*

Périmètre de *ABC* = 15 + 20 + 25 = 60

Périmètre de *AUV*

Périmètre de AUV = $\frac{|AP|}{12}$. 60 = 5 $|AP|$ (par Thalès)

Périmètre de |*BCVU*|

$$\begin{aligned}\text{Périmètre de } |BCVU| &= 60 - 5\ |AP| + 2\ |UV| \\ &= 60 - 5\ |AP| + 2 \cdot \frac{|AP|}{12} \cdot 25 \\ &= 60 - \frac{5}{6|AP|}\end{aligned}$$

Ainsi, les périmètres des deux polygones dépendent de manière évidente de $x = |AP|$
Cette dépendance donne naissance à deux fonctions

$$f : x \to 5x \qquad et \qquad g : x \to 60 - \frac{5x}{6}$$

Dans notre problème, on ne peut pas attribuer n'importe quelle valeur à la variable x.

Ainsi, les fonctions f et g ne sont définies que sur [0, 12] c'est-à-dire pour

$$0 \leq x \leq 12$$

Ainsi, les fonctions qui décrivent les périmètres des deux polygones sont plus précisément

$$f : x \to 5x \text{ (pour } x \in [0,12])$$

$$g : x \to 60 - \frac{5x}{6} \text{ (pour } x \in [0,12])$$

Les périmètres des deux polygones, triangle *AUV* et trapèze *BCVU* sont égaux, si et seulement si

$$f(x) = g(x)$$

C'est-à-dire pour

$$x = \frac{72}{7}$$

Ainsi, les deux périmètres sont égaux lorsque $|AP| = \frac{72}{7}$ (valeur comprise entre 0 et 12).

Remarque : ce problème peut également être exploité dans un cadre géométrique (application de Thalès)

Fiche 9
Mattias lance son ballon

CONSIGNE

Mattias joue dans le jardin, il lance son ballon au-dessus de lui.
Son grand-père en profite pour le filmer avec sa nouvelle caméra numérique.
Mathilde, la grande soeur de Mattias, passionnée de mathématiques, regarde l'enregistrement et, grâce à la fonction « arrêt sur image », parvient à recueillir les données présentées dans le tableau ci-dessous.

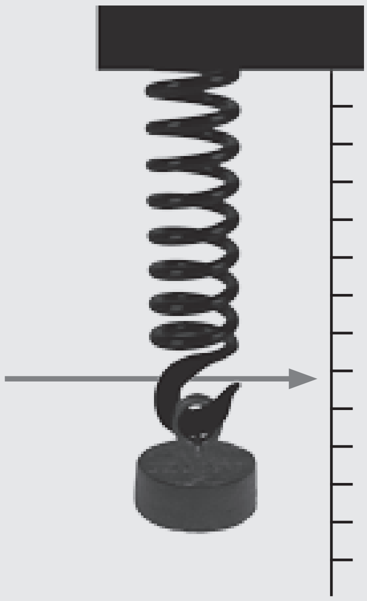
Temps (en s)	Hauteur du ballon par rapport au sol (en cm)
0	85
0,2	150
0,4	180
0,6	165
0,8	125
1	35

IL T'EST DEMANDÉ :

- de représenter les données du tableau dans le plan muni d'un repère orthogonal ;
- de déterminer une fonction qui modélise le phénomène ;
- de représenter la fonction obtenue dans le repère ;
- de comparer les mesures théoriques fournies par ton modèle avec les mesures recueillies par Mathilde ;
- de critiquer ton modèle, c'est-à-dire de préciser s'il respecte le critère de qualité suivant : les écarts relatifs entre mesures théoriques et mesures effectives ne doivent pas excéder 2 % ;
- de déterminer éventuellement une autre fonction qui modélise le phénomène et qui respecte le critère de qualité énoncé ci-dessus ;
- enfin, d'estimer la hauteur maximale atteinte par le ballon.

Fiche 10
Allongement d'un ressort

Pour tester l'efficacité d'un ressort, des élèves réalisent une expérience en laboratoire. À ce ressort, on suspend différentes masses et on mesure à chaque fois la longueur du ressort allongé.



On obtient les résultats suivants :

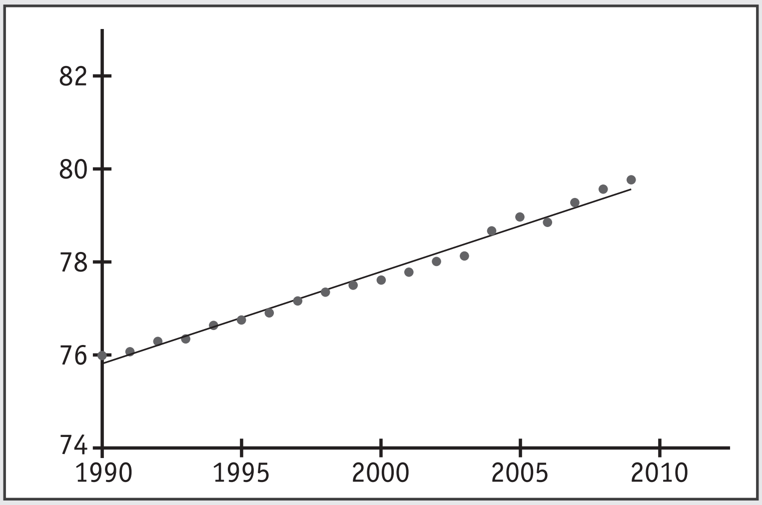
Masse (en g)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Longueur du ressort (en mm)	11,1	12,3	13,5	14,7	15,7	17,0	18,0	19,3	20,4	21,6

On peut modéliser ce phénomène à l'aide d'une fonction du premier degré.

- Réalise un graphique de la longueur du ressort en fonction de la masse suspendue.
- Détermine une expression analytique de cette fonction.
- Le ressort reprend sa longueur initiale dès que la masse qui y était suspendue est enlevée. La masse maximale que l'on peut appliquer au ressort sans qu'il ne perde son efficacité s'élève à 3 kg. Quelle sera la longueur maximale du ressort si cette masse de 3 kg lui était appliquée ?

Fiche 11
L'espérance de vie en Belgique

Comme le montre le graphique ci-dessous, l'évolution de l'espérance de vie en Belgique de 1990 à 2008 suit une progression linéaire qui peut être représentée par une droite.



Voici les données de la droite qui modélise ce phénomène.

Année	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Espérance de vie (en années)	75,9	76,3	76,7	77,1	77,5	77,9	78,3	78,7	79,1	79,5

Utilise les données fournies par le tableau pour répondre aux questions suivantes.

- À combien s'élève l'augmentation annuelle de l'espérance de vie ?

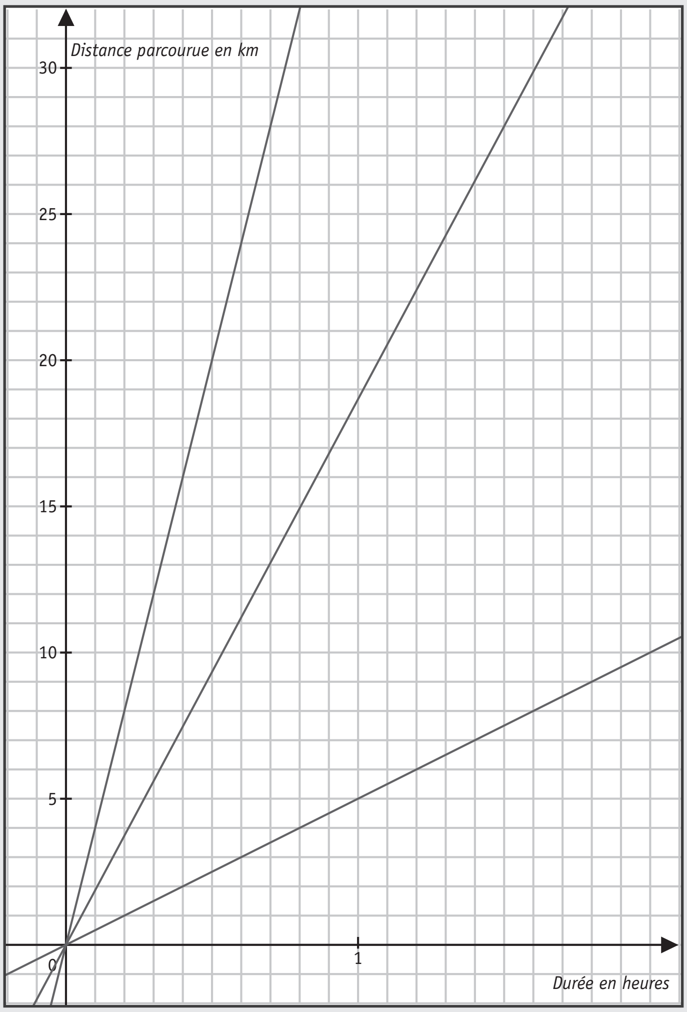
- Si l'espérance de vie continue à augmenter de la même façon, quelle sera l'espérance de vie des belges en 2012 ?

- Si l'espérance de vie continue à augmenter de la même façon, en quelle année l'espérance de vie dépassera-t-elle 90 ans ?

Fiche 12
Résultats du triathlon

ÉNONCÉ

Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue en fonction du temps d'un triathlète aux jeux olympiques suivant qu'il coure, qu'il nage ou qu'il fasse du vélo. Il s'agit bien évidemment de moyennes.



- À quel sport correspond chacune des droites ?

- Combien de temps faut-il au triathlète pour parcourir 10 km à pied ? À la nage ? En vélo ?

- En 45 minutes, combien de km le triathlète peut-il faire à pied ? À la nage ? En vélo ?

- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
  Justifie tes choix.
  - Le triathlète va deux fois plus vite à vélo qu'à pied.
  - Le triathlète va quatre fois plus vite à pied qu'à la nage.
  - Le triathlète va sept fois plus vite en vélo qu'à la nage.

- Quelle est la vitesse du triathlète dans chacun des sports ?

- Si la compétition se déroule de la façon suivante : 1 500 m à la nage, 40 km à vélo et 10 km à pied, après combien de temps aura-t-il terminé ?

- Réalise un graphique présentant l'espace parcouru en fonction du temps, lors de ce triathlon.

2 LE MODÈLE PROPORTIONNEL

2.1 CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

L'épreuve centrée sur le modèle proportionnel concernait les élèves de l'enseignement technique et artistique de qualification ainsi que ceux de l'enseignement professionnel. Trois éléments se dégagent de l'analyse des résultats :

- la notion de rapport impliquant une multiplication semble être acquise par une majorité d'élèves ;
- les élèves fréquentant l'enseignement professionnel éprouvent des difficultés à manipuler les nombres fractionnaires ;
- tant dans l'enseignement technique et artistique de qualification que dans l'enseignement professionnel, les élèves ont des difficultés à identifier dans quel(s) cas le modèle proportionnel peut s'appliquer.

2.1.1 UN RAPPORT PROPORTIONNEL IMPLIQUE UNE MULTIPLICATION : UNE NOTION ACQUISE PAR UNE MAJORITÉ

La plupart des élèves semblent avoir conscience que le modèle proportionnel implique un rapport multiplicatif. Ce constat repose sur l'analyse des pourcentages de réussite aux questions ci-dessous. Ils éprouvent en revanche des difficultés à expliquer pourquoi un tableau présentant une régularité numérique n'est pas un tableau de proportionnalité (cf résultats à la troisième question présentée ci-dessous : l'analyse des réponses fournies par une dizaine de classes montre que beaucoup d'élèves entourent « NON », sans justifier leur choix).

- **Entoure** VRAI ou FAUX.

« Pour 4 personnes, il faut 6 cuillères à soupe de lait. *Si je veux faire un gâteau pour 3 personnes de plus, il suffit de rajouter 3 cuillères à soupe de lait. »*	VRAI - FAUX

	réussite	échec	omission
4 TQ	92 %	7 %	1 %
4 P	83 %	13 %	4 %

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?
Dans chaque cas, **entoure** OUI ou NON

Tableau A

6	2
15	5
33	11
48	16

OUI - NON

Tableau B

1	2
2	3
3	4
4	5

OUI - NON

	réussite	échec	omission
4 TQ	72 %	27 %	1 %
4 P	67 %	31 %	2 %

- Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

  Entoure OUI ou NON.

1	4	7	19
6	9	12	24

OUI - NON

- **Prouve** ta réponse (par exemple, par calcul).

	réussite	échec	omission
4 TQ	39 %	56 %	6 %
4 P	24 %	67 %	9 %

- Dans le magasin *Iconéa*, le prix est directement proportionnel au nombre de photos imprimées.

  Les calculs suivants permettent-ils de trouver le prix à payer pour 150 photos ? Dans chaque cas, **entoure** ta réponse.

4,25 + 8,50	OUI - NON

	réussite	échec	omission
4 TQ	83 %	15 %	2 %
4 P	75 %	21 %	4 %

2.1.2 DES DIFFICULTÉS À MANIPULER LES NOMBRES FRACTIONNAIRES, SURTOUT DANS L'ENSEIGNEMENT PROFESSIONNEL

D'autres questions visaient à analyser la capacité des élèves à calculer un élément intervenant dans une situation de proportionnalité. Certaines questions étaient envisagées dans des situations de vie courante et d'autres, dans des domaines purement mathématiques. L'analyse des réponses nous amène à penser que ce n'est pas le contexte en soi qui est révélateur de difficultés, mais plutôt la nature des nombres impliqués dans le modèle.

Pour les élèves de l'enseignement professionnel et les élèves les plus faibles de technique et artistique de qualification, manipuler des nombres fractionnaires est source de difficultés. Les résultats des élèves obtenus à ces deux questions illustrent ce phénomène. Les deux premières sont centrées sur le rapport « $\frac{4}{5}$ » et les deux autres, sur le rapport « $\frac{6}{4}$ ». Que la question soit ou non intégrée dans un contexte, les pourcentages de réussite sont assez comparables (32 % et 33 % dans un cas, 58 % et 63 % dans l'autre cas).

Le tableau suivant présente quelques relevés réalisés lors de mes derniers trajets en ville.

Longueur du trajet	Durée affichée sur mon GPS
8 km	0:10 h
12 km	0:15 h
28 km	0:35 h

- **Quelle est la vitesse en km par heure estimée pour déterminer la durée de ces trois trajets ?**

  Réponse : . . . . km/h

	réussite	échec	omission
4 P	32 %	30 %	28 %

Voici deux tableaux de proportionnalité.
Complète en indiquant dans chaque cas le rapport de proportionnalité.

. . . .

4	5
8	10
12	15
28	35

	réussite	échec	omission
4 P	33 %	33 %	34 %

$250 \times \frac{6}{4} = ?$

? = ...

	réussite	échec	omission
4 P	58 %	20 %	22 %

Pour réaliser un gâteau pour 4 personnes, on a besoin des ingrédients suivants :
- 4 œufs ;
- 250 g de sucre fin ;
- 125 g de beurre ;
- 6 cuillères à soupe de lait ;
- 250 g de farine.

- On veut réaliser un tel gâteau pour 6 personnes.
  Quelle quantité de sucre fin faut-il prévoir ?

  Réponse : . . . . g

20

	réussite	échec	omission
4 P	63 %	29 %	9 %

2.1.3 DES RAISONNEMENTS PROPORTIONNELS INAPPROPRIÉS, TANT DANS LA FILIÈRE TECHNIQUE ET ARTISTIQUE DE QUALIFICATION QUE DANS LA FILIÈRE PROFESSIONNELLE

Selon Freudenthal (1983, cité par Van Dooren et al, 2005[2]), la proportionnalité est une propriété tellement évidente qu'on est tenté de l'appliquer dans n'importe quelle relation entre les grandeurs. Les résultats obtenus à la question suivante illustrent ce phénomène.

VRAI ou FAUX ?

Entoure ce qui convient.

❶	En fin de journée, un restaurateur partage les pourboires entre ses garçons de salle proportionnellement aux heures prestées. Jean a travaillé six heures, Alain a travaillé deux heures. Jean recevra une somme trois fois plus grande que celle d'Alain.	VRAI - FAUX
❷	Si on multiplie la longueur et la largeur d'un rectangle par 3, son aire est aussi multipliée par 3.	VRAI - FAUX
❸	Une planche de 2 mètres de long pèse 3,96 kg. Une planche de même largeur et même épaisseur mais dont la longueur est trois fois plus grande pèsera trois fois plus.	VRAI - FAUX
❹	Trois maçons construisent un mur en 2 heures. Si le même travail est fait par six maçons, il faudra prévoir 2 fois plus de temps.	VRAI - FAUX
❺	Un enfant mesure 92 cm à 3 ans. À 9 ans, il mesurera 3 fois plus.	VRAI - FAUX

La question était un peu différente en 4P et en 4TQ : la deuxième situation n'était pas présente dans l'épreuve de 4P. Il est donc erroné de comparer les résultats des deux filières à ces questions.

Identification des situations proportionnelles

	réussite	échec	omission
4 TQ	60 %	39 %	1 %
4 P	56 %	42 %	3 %

Identification des situations non proportionnelles

	réussite	échec	omission
4 TQ	42 %	57 %	1 %
4 P	59 %	38 %	2 %

[2] W. Van Dooren, D. De Bock, F. Depaepe, D. Janssens & L. Verschaffel, (2005) *L'illusion de la linéarité parmi les élèves du secondaire : extension au calcul des probabilités* in Crahay, M., Verschaffel, L., de Corte, E. & Grégoire, J. *Enseignement et apprentissage des mathématiques : que disent les recherches psychopédagogiques ?* De Boeck : Bruxelles.

L'ajout dans l'épreuve de qualification du deuxième problème (portant sur la comparaison d'aires de rectangles semblables) explique probablement le contraste des résultats observés entre les deux groupes d'élèves pour les situations non proportionnelles : à peine 42% des élèves du qualifiant parviennent à identifier l'ensemble des situations non proportionnelles. En filière professionnelle, ils sont 59 % dans ce cas mais cette situation ne leur avait pas été proposée. Cette hypothèse est confirmée par bon nombre d'études sur le sujet (Van Dooren et al, 2005).

Deux pistes pour travailler le modèle proportionnel sont proposées dans cette partie.

- La première propose une exploitation immédiate des résultats aux questions les moins bien réussies de l'épreuve, qui pourrait donner lieu à des activités de remédiation : vous y trouverez des idées pour travailler les éléments spécifiques qui ont posé particulièrement problèmes aux élèves de l'enseignement professionnel.

- La seconde est destinée à approcher le modèle proportionnel : l'activité « le pain quotidien » propose un support permettant de travailler le modèle proportionnel dans un contexte de pourcentage. La dernière situation « classement de problèmes » vise à engager un débat avec les élèves en vue de mettre en évidence des caractéristiques de situations proportionnelles.

2.2 RETOUR SUR LES QUESTIONS DE L'ÉPREUVE DE 4e PROFESSIONNELLE

2.2.1 ENJEUX

La **proportionnalité** est la seule partie de l'épreuve externe non certificative présentée aux élèves de 4e année de l'enseignement professionnel. Elle se composait de 10 questions et 30 items. En 4e année de l'enseignement technique et artistique de qualification, elle ne constituait qu'une partie de l'épreuve (11 questions et 36 items).
Dans l'ensemble, les questions étaient mieux réussies par les élèves de l'enseignement technique et artistique de qualification que par ceux de l'enseignement professionnel. Dans les pistes qui suivent, nous avons privilégié les problèmes rencontrés par les élèves de l'enseignement professionnel pour chacun des items où le pourcentage de réussite était inférieur à 50 %. Pour réaliser le lien avec les mêmes questions posées dans l'enseignement technique et artistique de qualification, nous avons repris les pourcentages correspondants de réussite et d'omission à chacun des items analysés. Les enseignants de 4e année de l'enseignement technique et artistique de qualification peuvent ainsi prendre connaissance de pistes envisagées pour des questions, certes, mieux réussies mais qui ont posé problème pour certains de leurs élèves.

Ce document propose un éclairage sur les difficultés ainsi que quelques pistes pour travailler les éléments qui posent problème aux élèves.

$$\frac{100}{200} = \frac{605}{?} \qquad \boxed{? = \ldots\ldots\ldots}$$

	réussite	échec	omission
4 P	48 %	33 %	29 %
4 TQ	70 %	19 %	11 %

Les élèves sont peut-être interloqués par le fait qu'il n'existe pas de multiplicateur naturel pour passer directement du nombre 100 au nombre 605 alors que pour d'autres exercices du même type, ce cheminement est possible ?

QUELQUES HYPOTHÈSES PERMETTANT DE MIEUX COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

- Certains ne possèdent peut-être pas de calculatrice alors que son utilisation était autorisée.
- Les nombres supérieurs à la centaine dans des écritures de fractions ne sont peut-être pas suffisamment travaillés dans les classes.
- Les élèves n'ont peut-être pas pensé à passer par la simplification de la fraction initiale pour obtenir l'écriture de la fraction irréductible correspondante afin de retrouver un cas plus habituel.

$$\frac{100}{200} = \frac{605}{7} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{605}{?}$$

PISTES

- Présenter des égalités où le passage de l'écriture d'une fraction à une autre ne s'effectue pas de manière automatique. Forcer l'écriture de la fraction irréductible avant de passer à la fraction incomplète.

$$\frac{25}{35} = \frac{15}{?} \rightarrow \frac{25}{35} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{15}{?} \rightarrow \frac{25}{35} = \frac{5}{7} = \frac{15}{?} \rightarrow \frac{25}{35} = \frac{5}{7} = \frac{15}{21}$$

- Présenter des égalités où les termes des fractions sont supérieurs à 100.

$$\frac{150}{450} = \frac{210}{?} \rightarrow \frac{150}{450} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{210}{?} \rightarrow \frac{150}{450} = \frac{1}{3} = \frac{210}{?} \rightarrow \frac{150}{450} = \frac{1}{3} = \frac{210}{630}$$

$$\frac{225}{400} = \frac{54}{?} \rightarrow \frac{225}{400} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{54}{?} \rightarrow \frac{225}{400} = \frac{9}{16} = \frac{54}{?} \rightarrow \frac{225}{400} = \frac{9}{16} = \frac{54}{96}$$

$$\frac{176}{165} = \frac{?}{75} \rightarrow \frac{176}{165} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{?}{75} \rightarrow \frac{176}{165} = \frac{16}{15} = \frac{?}{75} \rightarrow \frac{176}{165} = \frac{16}{15} = \frac{80}{75}$$

- Effectuer l'exercice proposé comme suit :

$$\begin{tikzcd} 100 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot ?"'] & 605 \arrow[d, bend left, "\cdot ?"] \\ 200 \arrow[r] & ? \end{tikzcd}$$

devient alors

$$\begin{tikzcd} 100 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot 2"'] & 605 \arrow[d, bend left, "\cdot 2"] \\ 200 \arrow[r] & 1\ 210 \end{tikzcd}$$

- Proposer des problèmes de vie quotidienne qui nécessitent une écriture semblable à l'énoncé imposé :

  - Avec une citerne de 8 **m³**, je peux prévoir 40 arrosages. Combien d'arrosages identiques, pourrais-je alors réaliser avec une citerne de 5 **m³** ?

  - Avec 120 **g** de matières actives, je peux réaliser 180 doses de produit. Quelle est la masse nécessaire de matières actives (en **g**) pour réaliser 270 doses identiques de produit ?

  - Pour réaliser 6 encadrements, j'ai besoin de 20,52 **m** de lattes de bois. Quelle est la mesure de la longueur exprimée en **m**, des lattes nécessaires pour réaliser 11 encadrements identiques ?

Remarque : il serait utile d'adapter ce type d'exercice à la filière professionnelle concernée.

Voici deux tableaux de proportionnalité.
Complète en indiquant dans chaque cas le rapport de proportionnalité.

....

4	5
8	10
12	15
28	35

	réussite	échec	omission
4 P	33 %	33 %	34 %
4 TQ	59 %	26 %	15 %

QUELQUES HYPOTHÈSES PERMETTANT DE MIEUX COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

La difficulté ne semble pas être liée à la mise en correspondance des couples de nombres (4 est à 5, comme 8 est à 10, …), car d'autres items présentant les données sous cette forme sont beaucoup mieux réussis.

On demande un rapport de proportionnalité. Les élèves comprennent-ils ce que l'expression « **rapport de proportionnalité** » signifie ?

Les élèves sont-ils bloqués par le fait que l'on obtient une fraction qui n'est pas équivalente à un nombre naturel comme dans l'exercice précédent ? De ce fait, recherchent-ils une « **autre solution naturelle** » ? Ce cas n'est peut-être pas très souvent rencontré dans les exercices présentés en classe dans l'enseignement professionnel ?

PISTES

- Insister, même dans l'enseignement professionnel, sur la compréhension de certaines notions que l'on peut facilement faire apparaitre dans des situations contextualisées, où l'on ne travaille pas exclusivement sur des nombres naturels ?

À partir de l'étal d'un maraîcher

Masse des pommes de terre achetées en vrac (kg)	1,5	2	2,5	3	3,5
Montant total à payer (€)	6	8	10	12	14

Quel est le rapport de proportionnalité ? À quoi correspond-il dans la vie quotidienne ?

Dans un magasin du quartier

quantité (l)	montant à payer (€)
4	6
6	6
7	10,50
10	15
11	16,50

quantité (m)	montant à payer (€)
2,5	3,75
3	10,50
4,5	6,75
5	7,50
7,24	10,86

Quel est le rapport de proportionnalité ? À quoi correspond-il dans la vie quotidienne ?

- Présenter des tableaux de nombres qui représentent des situations de proportionnalité, aussi bien horizontalement que verticalement.

- Présenter des problèmes issus du quotidien, des cours techniques ou de pratique professionnelle pour donner du sens à la notion mathématique étudiée ou revue.

- Utiliser des rapports de proportionnalité du genre :

$$\frac{\text{prix total à payer}}{\text{quantité}} = \text{prix unitaire} \quad \textbf{ou} \quad \frac{\text{distance parcourue (km)}}{\text{durée (h)}} = \text{vitesse moyenne (km/h)}$$

- Disposer d'une calculatrice et l'**utiliser** dans la résolution de certains problèmes rencontrés.

- Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

Entoure OUI ou NON.

1	4	7	19
6	9	12	24

OUI - NON

- **Prouve** ta réponse (par exemple, par calcul).

. . . .

. . . .

	réussite	échec	omission
4 P	24 %	67 %	9 %
4 TQ	39 %	55 %	6 %

QUELQUES HYPOTHÈSES PERMETTANT DE MIEUX COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

Les élèves ont-ils eu des problèmes à comprendre le sens du mot « proportionnalité », ont-ils entouré « oui » à cause de la régularité numérique « +5 » qui se dégageait dans les quatre couples de nombres proposés ?

Les élèves de l'enseignement professionnel seraient-ils trop souvent confrontés à des données de la vie quotidienne ? Ici, les élèves n'avaient pas cette possibilité de se raccrocher à la réalité.

La présentation horizontale du tableau a-t-elle été source de difficultés ?

Les élèves ont-il des difficultés à exprimer, voire même ici à prouver une affirmation par écrit ? Lors de l'analyse des résultats d'une dizaine de classes à cette question, il apparait que beaucoup d'entre eux ont simplement entouré *non*, sans justification.

PISTES

- Partir de situations concrètes qui interpellent les élèves dans leur quotidien, dans l'école à partir d'éléments des cours techniques ou de pratique professionnelle, par exemple. Les faire réfléchir sur des exercices qui ont du sens et qui leur permettraient plus facilement une utilisation concrète de notions mathématiques.

Voici des tableaux de nombres. Indique s'il représente un tableau de proportionnalité ou non.
Justifie ta réponse par une phrase et/ou des calculs.

Quantité (m)	13	23	39	47	56
Montant total à payer (€)	16,12	28,52	48,36	58,27	69,44

Quantité (kg)	17	29	37	48	59
Montant total à payer (€)	42,50	72,50	92,50	120	147,50

Partir de ce type d'exemple impose l'utilisation de la calculatrice et la vérification précise de chacun des rapports. L'écriture d'une fraction serait donc une écriture habituelle et non plus épisodique. Il y aurait en outre l'obligation de passer en revue, pas à pas, l'ensemble des éléments du tableau, et non plus de donner une réponse rapide en un coup d'œil avec des exemples où la réponse s'impose d'emblée.

- Passer ensuite à des tableaux de nombres où la référence aux grandeurs n'est plus explicite. On envisage de la sorte une forme de généralisation.

Pour réaliser un gâteau pour 4 personnes, on a besoin des ingrédients suivants :

- 4 œufs ;
- 250 g de sucre fin ;
- 125 g de beurre ;
- 6 cuillères à soupe de lait ;
- 250 g de farine.

■ Il me reste :

- 8 œufs ;
- 1 kg de sucre fin ;
- 150 g de beurre ;
- 1 litre de lait ;
- 1 kg de farine.

Pourrais-je réaliser un gâteau pour 8 personnes en respectant toutes les proportions ?
Entoure ta réponse et **justifie**.

OUI - NON

parce que ....

	réussite	échec	omission
4 P	49 %	44 %	7 %
4 TQ	62 %	34 %	4 %

QUELQUES HYPOTHÈSES PERMETTANT DE MIEUX COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

- Les données de l'exercice proposé ne sont plus installées dans un tableau, elles ne sont donc pas mises en correspondance, même si elles sont placées dans le même ordre.
- Il ne s'agit pas ici d'un problème d'application directe du modèle proportionnel. L'élève doit ici appliquer le rapport proportionnel puis vérifier qu'il y a suffisamment d'ingrédients dans les 3 premiers cas au moins.
- La transformation d'unité peut ici intervenir (comparaison de g et de kg, comparaison d'un litre de lait avec 12 cuillères à soupe de lait,...)

PISTES

Apprendre aux élèves à résoudre des problèmes où les différents renseignements sont à rechercher sur une page d'énoncé, installer une démarche en vue de résoudre ce type de problème.

- Replacer ces informations en concordance, face à face.
- Rechercher le rapport de proportionnalité à appliquer.
- Calculer les nouvelles quantités à partir de ce rapport de proportionnalité.
- Vérifier si les nouvelles quantités à utiliser sont bien mises à notre disposition pour réaliser le nouveau travail demandé et en tirer une conclusion.

Sur mon GPS, je peux avoir une information sur la longueur du trajet programmé ainsi que sur sa durée, comme l'indique la flèche ci-contre.

Le tableau suivant présente quelques relevés réalisés lors de mes derniers trajets en ville.

Longueur du trajet	Durée affichée sur mon GPS
8 km	0:10 h
12 km	0:15 h
28 km	0:35 h

- D'après ces données, il semble que la durée soit proportionnelle à la longueur du trajet. **Justifie** cette phrase par des calculs.

	réussite	échec	omission
4 P	15 % (1/1) 6 % (0,5/1)	32 %	47 %
4 TQ	30 % (1/1) 8 % (0,5/1)	38 %	24 %

Le taux élevé d'omissions est interpellant : près d'un élève de la filière professionnelle sur deux ne répond pas à la question.

QUELQUES HYPOTHÈSES PERMETTANT DE MIEUX COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

- Est-ce le terme « justifie » qui pose problème ? La proportion de réponses partiellement correctes nous amène à penser que bon nombre ne parviennent pas à réaliser cette démarche de vérification.
- La présentation de la durée sous cette forme inhabituelle a-t-elle posé problème ?

PISTES

- Convertir des durées qui ne sont pas toujours écrites sous forme conventionnelle.
- Présenter aux élèves des exercices où les durées sont exprimées de manières différentes.

$\frac{1}{4}$ **h** ; 15 **min** ; 0,25 **h** ; 0:15 **h** ou encore 0:15:00 **h**

- Leur faire **justifier par écrit** leur raisonnement et réaliser un apprentissage centré sur la démarche de preuve, même en contexte numérique.

Sur mon GPS, je peux avoir une information sur la longueur du trajet programmé ainsi que sur sa durée, comme l'indique la flèche ci-contre.

Le tableau suivant présente quelques relevés réalisés lors de mes derniers trajets en ville.

Longueur du trajet	Durée affichée sur mon GPS
8 km	0:10 h
12 km	0:15 h
28 km	0:35 h

- **Quelle est la vitesse en km par heure estimée pour déterminer la durée de ces trois trajets ?**

Réponse : .... km/h

	réussite	échec	omission
4 P	32 %	30 %	38 %
4 TQ	45 %	32 %	23 %

Le taux important d'omission interpelle également ici : contrairement à l'item précédent où l'élève devait produire une justification, dans ce cas, seul un nombre était requis. Cela ne peut donc être imputé à une difficulté dans la rédaction de la réponse.

QUELQUES HYPOTHÈSES PERMETTANT DE MIEUX COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

- La conversion de mesures est essentielle ici : les élèves ont peut-être éprouvé de réelles difficultés dans ce domaine.
- Les élèves comprennent-ils le concept de vitesse (en km par heure) ? Ont-ils pensé qu'il s'agissait de mobiliser un raisonnement proportionnel qui pouvait être assez direct, s'ils prenaient 10 minutes ou 15 minutes comme point de départ ?

PISTES

- Convertir des durées mais qui ne sont pas toujours écrites sous forme conventionnelle.
- Retravailler le concept de vitesse moyenne.
- Présenter aux élèves des exercices où les durées sont exprimées de manières différentes.
- Résoudre des problèmes de proportionnalité par l'utilisation d'éléments de matière vue précédemment comme la **règle de trois**.

L'analyse réalisée ci-avant nous amène à penser que pour beaucoup d'élèves, le concept de fraction n'est pas acquis. La recherche d'un rapport de proportionnalité est complexe pour bon nombre d'élèves de l'enseignement professionnel lorsque la lecture horizontale des données ne lui donne pas une valeur naturelle immédiate. Il serait utile de les amener à explorer des situations où le rapport fractionnaire peut être simplifié dans un premier temps puis écrit sous la forme décimale dans un deuxième temps à l'aide, éventuellement, d'une calculatrice.

2.3 ACTIVITÉS

2.3.1 ENJEUX

Deux situations sont proposées dans cette partie : « Le pain quotidien » et « Proportionnel ou non proportionnel ? ».

Fiche 13
Le pain quotidien

Cette activité se propose d'exploiter un article de journal présentant de manière originale la répartition des frais liés à la production et à la vente d'un pain. Les élèves sont amenés à élaborer un graphique sectoriel présentant les diverses données.

Cette activité se base sur un article de presse diffusant des informations à caractère statistique.

Dans un premier temps, il s'agit d'amener les élèves à transférer les informations fournies dans le texte dans un graphique sectoriel.

On pourra également lire et interpréter les informations recueillies dans le document.

Exemples :
- Dans quelle rubrique place-t-on le loyer de la boulangerie ?
- Quelle est la TVA appliquée sur les denrées alimentaires ?
- Quel est le bénéfice en € sur un pain ?
- Si le boulanger vend 250 pains, quel sera le cout hors TVA ?
- Quel sera le bénéfice au bout d'une journée si le boulanger vend 341 pains ?
- Peut-on dire que la main d'œuvre représente presque la moitié du cout d'un pain ? Explique.

VOTRE PAIN QUOTIDIEN

Chaque matin, le boulanger propose du pain frais. Il a pétri la pâte avec amour et cuit des centaines de miches toute la nuit. Mais qu'est-ce qui détermine le prix de votre pain quotidien ?

14,7 %

FRAIS GÉNÉRAUX

€ 0,31

Aménagement de la boulangerie et de l'espace commercial. Ce qui comprend également le loyer ou le prêt hypothécaire.

4,7 %

ÉNERGIE

€ 0,1

Cuire demande de l'énergie. Un boulanger indépendant peut cuire jusqu'à 250 pains dans son four.

4,6 %

BÉNÉFICE

€ 0,1

Après déduction de toutes les autres charges, le boulanger retrouve ce pourcentage dans sa caisse.

46,5 %

SALAIRES

€ 0,98

Les frais de personnel – que sont le salaire du boulanger indépendant lui-même et celui de son personnel – s'élèvent presque à la moitié du prix de revient d'un pain.

23,5 %

INGRÉDIENTS DE BASE

€ 0,48

Farine, eau, sel, levure et adjuvants pour pain. Le froment, produit de base, représente moins de 10 % du prix de revient total d'un pain.

6 %

TVA

€ 0,13

En magasin, le boulanger doit appliquer le taux de TVA en vigueur pour les denrées alimentaires, soit 6 %.

€ 2,10

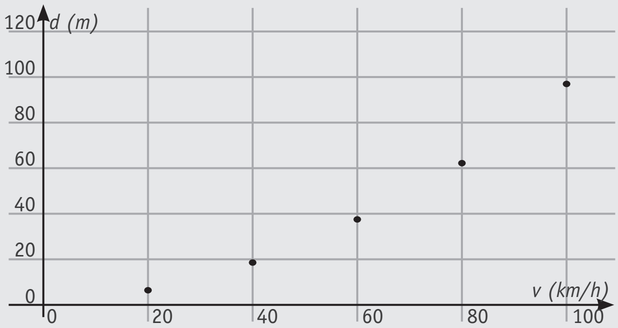
Nos remerciements à la Fédération flamande des boulangers (VeBIC)

Source. : Magazine Belfius

Fiche 14
Proportionnel ou non proportionnel ?

Inspirée d'un document présenté par le CREM[3], cette activité a pour but de faire réfléchir les élèves sur une série de situations présentées à l'aide de différents supports : textes, tableaux, graphiques, dessins. Il s'agit de dégager les situations qui pourraient être traitées avec le modèle proportionnel et d'argumenter son choix. Si la réflexion peut être menée individuellement dans un premier temps, l'objectif est de réaliser un débat centré sur les contradictions entre les choix réalisés par les élèves en vue de valider leurs propositions initiales.

SITUATION 1
Distance de freinage d'un véhicule.



SITUATION 2

Prix en EUR	Prix en Dollars américains
10	13,325
50	66,625
100	133,25
200	266,50
500	666,25
1000	1332,5

SITUATION 3
Jean court le 100 m en 13 secondes, le 200 m en 29 secondes et le 400 m en 65 secondes.

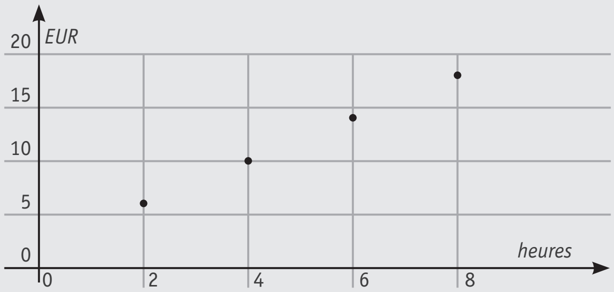
SITUATION 4
Pierre et Marc sont deux frères ; on a indiqué dans le tableau ci-dessous leurs âges respectifs à différentes dates.

Âge de Pierre	1	3	8	15
Âge de Marc	4	6	11	18

SITUATION 5
Impressions et copies (papier standard 80 g blanc inclus, TVA 21 % incl.

Formats	Quantités			
	1	50	100	250
A4	0,20	0,15	0,10	0,09
A3	0,30	0,25	0,20	0,17

SITUATION 6
Prix pour la location d'un VTT.



SITUATION 7
Pour la rentrée scolaire, un supermarché annonce des prix sacrifiés sur les fournitures scolaires :
- 1 bloc de feuille pour 1,50 EUR ;
- 5 blocs de feuille pour 6 EUR ;
- 10 blocs de feuille pour 12 EUR.

SITUATION 8
On roule à bicyclette. Notons N le nombre de tours de roue et d la distance parcourue en mètres.

N	5	10	23	30
d	11	22	50,6	66

[3] Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur. www.crem.be

3 GÉOMÉTRIE

3.1 CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

L'épreuve de géométrie, proposée uniquement aux élèves de l'enseignement de transition comportait deux parties. La première très courte demandait de mobiliser les formules relatives au théorème de Pythagore, au théorème de Thalès et à la résolution des triangles rectangles, ainsi que d'énoncer les trois cas de similitudes des triangles. Si l'énoncé en français de ces trois cas a posé problèmes à une majorité, les pourcentages de réussite aux autres questions de cette partie théorique attestaient d'une connaissance suffisante des formules par une majorité d'élèves.

Pour la deuxième partie, les élèves disposaient d'un aide mémoire reprenant formules et propriétés. Le questionnaire portait cette fois soit sur la mobilisation directe d'une formule, soit sur des situations comportant au moins deux étapes dans la résolution, soit enfin sur des activités d'argumentation déductive.

Rappelons brièvement les principaux constats qui se dégagent des analyses.

- L'application directe du théorème de Pythagore est réussie par la majorité des élèves (items 11 et 17). En revanche, les acquis s'avèrent très fragiles lorsqu'il s'agit de le mobiliser dans le cadre de la résolution d'un problème à deux étapes (items 18, 20 et 22) ou d'une justification (items 19 et 21).
- La trigonométrie dans le triangle rectangle s'avère problématique, que ce soit dans ses applications les plus directes (items 12, 15 et 16) ou dans la résolution d'un problème à plusieurs étapes (items 22 et 23). Seul un item d'application directe est mieux réussi (item 14), celui où l'énoncé de la question fait directement référence au sinus.
- En ce qui concerne les triangles semblables et le théorème de Thalès, les applications directes et les problèmes sont moyennement réussis (items 13, 24, 25 et 26). La démonstration a posé problème à une majorité d'élèves, tant dans l'énoncé des hypothèses et de la thèse (item 27) que dans la justification d'une affirmation par une propriété (items 28, 29 et 30 – distinction entre la proportion d'élèves qui obtiennent le crédit partiel et le crédit total).

En référence à ce thème, le groupe de travail a choisi de développer une réflexion sur les difficultés des élèves face à la lecture et à l'écriture des énoncés (Piste 1). Par la suite, trois énoncés de démonstrations géométriques sont proposés et développés (Piste 2).

3.2 LECTURE ET RÉDACTION D'ÉNONCÉS

La lecture d'un énoncé nécessite certaines stratégies pour repérer les informations pertinentes.
Les difficultés peuvent provenir de plusieurs sources :

- caractère peu familier de la situation ;
- complexité de la phrase (certains mots ou expressions non compris) ;
- ordre des données différent de celui du traitement ;
- présence de données inutiles ;
- formulation des informations (texte continu, tableau, graphiques...) ;
- complexité du problème (nombre d'étapes avant la solution) ;
- références notionnelles (notions mal maitrisées).

Pour résoudre un problème, il s'agit non seulement de comprendre tous les mots et toutes les phrases de l'énoncé, mais aussi de pouvoir faire les liens entre la situation proposée et les concepts ou processus mathématiques à mobiliser.

Les difficultés peuvent provenir de diverses sources, comme par exemple :

- la fragilité des préalables (concepts mal assimilés) ;
- l'incapacité à faire des analogies avec d'autres situations présentées antérieurement ;
- le manque de structure logique (mauvaise identification des connecteurs logiques : or, donc, car...).

Celles-ci dépendent en premier lieu de la capacité à reformuler, c'est-à-dire, de la capacité que doivent acquérir les élèves à pouvoir exprimer une phrase française en un langage plus symbolique.

Tout comme dans un entretien, la reformulation sert à montrer que l'on a compris ce qui vient d'être dit, sans rien interpéter ni introduire de différences.

Ici, la reformulation vise à remplacer petit à petit l'énoncé initial par une série d'informations susceptibles d'être traitées de façon mathématique tout en restant fidèle à l'énoncé.

Il semble donc que la capacité à résoudre un problème soit notamment liée à la lecture et l'écriture du texte mathématique.

Il en va de même pour la démonstration.

Pour établir une démonstration, l'élève va d'abord devoir décoder l'énoncé.

Voici 3 types d'énoncés de propriétés géométriques :

1. la droite passant par les milieux de 2 côtés d'un triangle est parallèle au 3^{e} côté ;
2. si un triangle est rectangle, alors le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés ;
3. si un triangle ABC est rectangle en B, alors $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$.

Les trois exemples présentés montrent que, suivant sa rédaction, l'élève sera confronté à des difficultés plus ou moins grandes.

Ces trois énoncés ont été classés par ordre décroissant de difficulté de décodage :

1. aucune indication ni pour le repérage des hypothèses et de la thèse, ni pour la réalisation d'un dessin ;
2. indication claire de l'hypothèse (si) et de la thèse (alors), mais pas d'indication pour le dessin, ni le choix des lettres ;
3. indication à la fois pour le repérage hypothèse, thèse et pour le dessin.

La lecture n'est pas la simple transcription orale de ce qui est écrit ; il s'agit de la traduction de ce qui est écrit sous forme mathématique en français.

Exemples :

- $a > 5$ se lit a supérieur à 5, transcription simple.
- $0 < a < 10$ se lit d'abord 0 strictement plus petit que a, strictement plus petit que 10 et doit être reformulé en « a compris entre 0 et 10 », l'ordre de lecture a donc été modifié ainsi que la formulation du symbole.
- $\forall\, a \in \mathbb{N}, \exists\, b \in \mathbb{N} \mid b > a$ deviendra après reformulation « quel que soit le nombre naturel choisi, il en existe toujours un qui lui est supérieur ».

La lecture mathématique demande une vue d'ensemble, une compréhension, car l'élève ne peut se limiter à une transcription « pas à pas ».

La question qui se pose donc est d'amener les élèves à surmonter les difficultés de décodage.

Dans les cours ou les manuels, repérer une définition, un théorème n'est pas toujours facile. Les définitions ne sont pas toujours annoncées comme telles aux élèves : parfois, la présence des mots « désigne », « est appelé », l'indique clairement, mais ce n'est pas toujours le cas.

Parfois aussi, un même objet est introduit de plusieurs façons différentes. Ainsi, par exemple, l'hypoténuse d'un triangle rectangle peut être définie de deux façons : il s'agit soit du plus grand côté soit du côté opposé à l'angle droit. Les élèves comprennent-ils que ces deux définitions sont équivalentes ?

Quant aux théorèmes, ils exigent une précision parfaite.
Les élèves ont-il conscience de l'importance de chaque hypothèse ? Lorsqu'ils utilisent les théorèmes vérifient-ils si les hypothèses sont rencontrées ? Insiste-t-on suffisamment sur la validité ou non des réciproques (différence entre condition nécessaire et condition suffisante) ?

Comprendre l'énoncé est un grand pas en avant vers la résolution du problème ; de même, poser correctement les hypothèses et la thèse est primordial pour envisager la démonstration.

Quand celles-ci seront correctement posées, l'élève devra encore sélectionner les théorèmes « utilisables » pour chaque étape de son argumentation. Là aussi, nous pensons que deux principes de base peuvent être dégagés :

- l'impossibilité d'utiliser un théorème dont le « Si » ne correspond pas à la situation ;
- l'inutilité d'utiliser un théorème dont le « Alors » ne correspond pas à la thèse.

Pour terminer le travail, il devra encore pouvoir articuler les différentes parties par les connecteurs logiques (or, donc, car, étant donné que…).
En conclusion, si l'élève peut lire correctement son énoncé, s'il maitrise bien les connecteurs et s'il possède les concepts nécessaires, on peut penser qu'il dispose de tous les outils pour établir son argumentation ou résoudre le problème.
À notre enseignement donc de développer ces capacités et d'y consacrer le temps nécessaire.

Exercice n°1
Le Triangle d'Or

ENJEUX

- Utiliser un des critères de similitude des triangles.
- Pour les triangles concernés, rechercher les éléments non apparents, mais nécessaires pour appliquer le critère.

CONSIGNE

Soit un triangle isocèle *ABC* de sommet principal *A*.
L'angle *BAC* mesure 36°.
La bissectrice intérieure issue du sommet *B* coupe le côté [*AC*] en *D*.
Démontrer que les triangles *BCD* et *ABC* sont semblables.

TRAITEMENT

1. L'élève réalise une figure.

Dans le cas présent, il est possible d'obtenir immédiatement une figure exacte.
Les différentes informations fournies dans l'énoncé sont portées sur la figure.

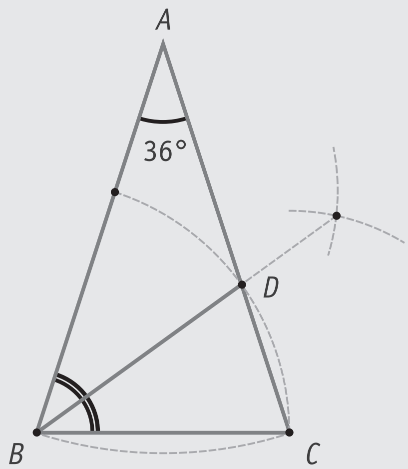
2. L'élève écrit les hypothèses et la thèse.

HYPOTHÈSES

ABC est un triangle isocèle ($|AB| = |AC|$)
$\widehat{BAC} = 36°$
D $\notin$ [*AC*]
BD est la bissectrice issue de *B*

THÈSE

BCD et *ABC* sont des triangles isométriques



3. L'élève cherche la démonstration.

Au vu des informations fournies dans l'énoncé, il est à prévoir qu'il faut utiliser le critère de similitude relatif aux angles.

Aussi, calculons les amplitudes des angles des triangles *BCD* et *ABC*.

Dans le triangle isocèle *ABC*, nous avons :

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$

Comme *BD* est bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, il s'ensuit que :

$$\widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{72°}{2} = 36°$$

Cela étant, les triangles BCD et ABC ont deux angles homologues de même amplitude :

- $\widehat{BCA}$ et lui-même (angle commun aux deux triangles) ;
- $\widehat{CBD} = \widehat{BAC} = 36°$

Ces deux triangles sont donc semblables.

Exercice n°2
Orthocentre, centre de similitude dans un triangle

ENJEUX

- Parmi de nombreuses paires de triangles semblables, repérer une paire utile pour obtenir une égalité entre longueurs de segments.
- Utiliser un des critères de similitude des triangles.

CONSIGNE

Soit un triangle convexe *ABC*.
Son orthocentre est noté *H* ; les pieds des hauteurs issues des sommets *A*, *B*, *C* sont respectivement notés *A'*, *B'*, *C'*.

Démontrer que :

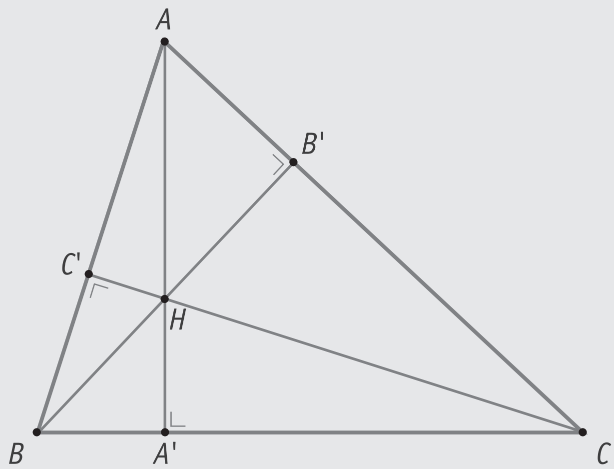
$$|HA|\ |HA'| = |HB|\ |HB'| = |HC|\ |HC'|$$

TRAITEMENT

1. L'élève trace une figure.

Il n'y a aucun obstacle à ce que celle-ci soit faite avec exactitude.

2. L'élève écrit les hypothèses et la thèse.



HYPOTHÈSES

ABC est un triangle
$AA' \perp BC$
$BB' \perp AC$
$CC' \perp AB$
$A' \in [BC]$
$B' \in [AC]$
$C' \in [AB]$
H est l'orthocentre de ABC

THÈSE

$$|HA|\ |HA'| = |HB|\ |HB'| = |HC|\ |HC'|$$

3. L'élève cherche la démonstration.

La première étape pourrait consister à repérer les ensembles de triangles semblables :

- *A'AB, A'HC, C'CB* et *C'HA* ;
- *A'AC, A'HB, B'BC* et *B'HA* ;
- *B'BA, B'HC, C'CA* et *C'HB*.

Ensuite, parmi ces ensembles, extraire une paire utile, c'est-à-dire une paire qui va nous permettre de trouver une des deux égalités à démontrer.

Les triangles *A'HA* et *B'HA* ont deux angles homologues de même amplitude :

- $\widehat{BHA'} = \widehat{AHB'}$ (angles opposés par le sommet),
- $\widehat{BA'H} = \widehat{HB'A} = 90°$

Ces triangles sont donc semblables.

Cela étant, les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles.

$$\frac{|A'H|}{|B'H|} = \frac{|HB|}{|HA|}$$

Le troisième rapport n'est pas écrit car ne sert pas dans notre démonstration.
De cette égalité, nous tirons :

$$|HA|\ |HA'| = |HB|\ |HB'|$$

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Puis, en considérant la paire de triangles semblables CHB' et BHC' et en travaillant de la même manière, nous obtenons une seconde égalité :

$$|HB|\ |HB'| = |HC|\ |HC'|$$

L'égalité des deux premiers rapports donne :

$$|HA|\ |HA'| = |HB|\ |HB'| = |HC|\ |HC'|$$

Exercice n°3
Similitude de triangles dans un quadrilatère

ENJEUX

- D'une part, utiliser deux critères différents de similitude.
- D'autre part, exploiter le fait que des triangles sont semblables.

CONSIGNE

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$.
Ses diagonales se coupent en I.
Les angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{CDI}$ ont la même amplitude.
Démontrer que les triangles IAD et IBC sont alors semblables.

TRAITEMENT

1. L'élève réalise une figure.

Il n'est pas nécessaire que celle-ci soit « exacte » ; il suffit qu'elle traduise suffisamment bien la description énoncée. On peut éventuellement se servir d'un logiciel de géométrie pour cela.
Un codage est utilisé pour marquer l'égalité d'amplitude d'angles.

2. L'élève écrit les hypothèses et la thèse.

HYPOTHÈSES

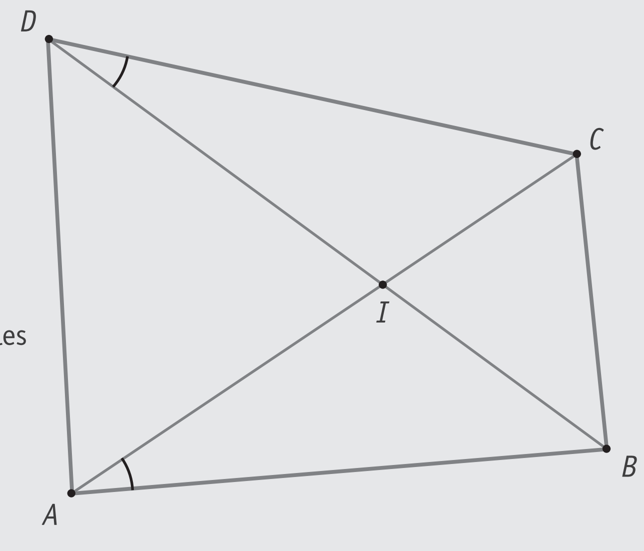
$ABCD$ est un quadrilatère convexe

$AC \cap BD = \{ I \}$

$\widehat{IAB} = \widehat{CDI}$

THÈSE

IAD et IBC sont des triangles semblables



3. L'élève cherche la démonstration.

Les triangles AIB et DIC ont deux angles homologues de même amplitude :

- $\widehat{IAB}$ et $\widehat{IDC}$ (angles opposés par le sommet) ;
- $\widehat{IAB}$ et $\widehat{CDI}$ (par hypothèse).

Cela étant, ces deux triangles sont semblables.

Ce ne sont pas les deux triangles figurant dans la thèse. Il faut donc aller plus loin.

Comme les triangles AIB et DIC sont semblables, les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles :

$$\frac{|IA|}{|ID|} = \frac{|IB|}{|IC|} = \frac{|AB|}{|DC|}$$

L'égalité des deux premiers rapports donnent une information concernant les triangles visés dans la thèse. Nous allons pouvoir conclure.

Les triangles IAD et IBC ont un angle de même amplitude compris entre des côtés de longueurs proportionnelles :

- $\widehat{IAB} = \widehat{BIC}$ (opposés par le sommet) ;
- $\dfrac{|IA|}{|ID|} = \dfrac{|IB|}{|IC|}$ (égalité obtenue plus haut).

Par conséquent, ces triangles sont semblables.

S4

FÉDÉRATION
WALLONIE-BRUXELLES

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
Boulevard du Jardin Botanique, 20-22 – 1000 Bruxelles

D/2011/9208/45

La « Fédération Wallonie-Bruxelles » est l'appellation désignant usuellement la « Communauté française » visée à l'article 2 de la Constitution