Chapitre 13

Un peu d'algèbre linéaire

13.1. Présentation générale

La séquence réalisée avait pour objectif d'introduire le produit matriciel et de fixer une certaine pratique du calcul matriciel à travers une situation significative et permettant l'itération d'un processus algorithmique. On ne se contente donc pas d'effectuer un ou deux produits matriciels, mais on s'interroge sur l'évolution à long terme d'un « système dynamique linéaire » ([1]). Les élèves avaient déjà auparavant appris à calculer l'image d'un élément de $\mathbb{R}^2$ par [la transformation linéaire associée à] une matrice.

Les leçons ont été données à l'Ecole Decroly à Uccle. Plusieurs situations ont été soumises à M. Francis Michel, titulaire du cours de mathématique, dans une classe de 5e année (6 périodes de mathématique par semaine). L'énoncé retenu ([2]) est reproduit page suivante, tel qu'il fut soumis aux élèves :

Le problème présenté ne s'inscrit pas dans les habitudes des élèves du fait qu'il modélise une situation sinon réelle, tout au moins réaliste. On ne demande cependant pas aux élèves de modéliser eux-mêmes la situation. Le modèle — sous la forme d'un système d'équations linéaires — leur est fourni d'emblée.

Cinq heures de cours ont été consacrées à l'étude de cette situation les 12, 13 et 14 octobre 1998. La classe comporte 18 élèves qui ont avec leur professeur des rapports « détendus ». Ils ne sont surpris en aucune manière par la présence d'un observateur dans la classe et leur comportement ne s'en trouve donc pas modifié. Tous les élèves disposent d'une calculatrice *Hewlett-Packard 48 GX*. Ils sont également habitués au logiciel `Maple` et en particulier, ils en connaissent la syntaxe.

([1]) Ce vocabulaire n'a pas été utilisé en classe.
([2]) D'autres énoncés sont donnés en annexe.

```
                    Applications linéaires 3
                            Exercice

Dans une population d'oiseaux, soit:

x: nombre de jeunes (femelles)
y: nombre de femelles
a: proportion de jeunes qui ne sont pas adultes après un an
b: nombre de jeunes par femelles
c: proportion de jeunes devenant adultes
d: proportion de femelles survivantes

   x = a x + b y
   y = c x + d y

Le nombre de mâles est supposé égal au nombre de femelles, on
ne l'étudiera pas.

Etudier les cas particuliers suivants; donner chaque fois une
interprétation dans les termes du problème posé, rechercher
comment les populations de femelles et de jeunes évoluent et
si le rapport femelles/jeunes tend à se stabiliser

> T:= matrix([[0,2],[1,0]]);
> T:= matrix([[0,2],[1,1]]);
> T:= matrix([[0,2],[.3,.5]]);
> T:= matrix([[3/4,3/16],[1/4,1]]);

Dans le cas suivant réduire l'étude à une année sur deux,
un point tous les deux ans.

 > T:=matrix([[0,2],[.3,.5]]);

Les cas suivants sont des généralisations théoriques des cas
particuliers déjà étudiés; faire une analyse de chaque cas en
essayant de dégager une méthode générale.

 > T:= matrix([[0,b],[1,01]);
 > T:= matrix([[0,b],[1,1]]);
 > T:= matrix([[0,b],[c,d]]);
 > T:= matrix([[1-c,3*c/4],[c,1]]);
 > T:= matrix([[1-c,b],[c,1]]);
```

13.2. Déroulement des séances de cours

13.2.1 Première séance

Cette séance s'étale sur deux périodes de 50 minutes, sans interruption, le lundi 12 octobre. FM distribue aux élèves l'énoncé du problème. La seule consigne est de jeter un coup d'œil sur le texte.

Après une rapide lecture, FM écrit au tableau les formules

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Analyser un énoncé

tout en les expliquant par des exemples numériques. Il les justifie en se référant à ce qui peut se passer dans la réalité. Il remarque aussi que les notations x' et y' restent des x et y dans l'énoncé afin de coller aux habitudes de l'informatique.

Le but de l'exercice est *de voir comment la population va évoluer*.

Les élèves doivent étudier l'évolution de la population d'oiseaux dans les situations correspondant aux matrices *données* sur la feuille, en procédant à des calculs analogues à ceux réalisés précédemment au cours. (Lors d'exercices qui ne modélisaient aucune situation).

Le travail démarre avec la première matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

FM n'a *expressément* pas donné de conditions initiales pour la population. Une élève maligne demande d'emblée *de quel point il faut partir*.

Un élève dit :

> *Si on a une femelle pour deux jeunes, le rapport* $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$ *sera de* $\frac{1}{2}$.

Conjecturer, vérifier

FM lui suggère d'essayer de prouver son idée. L'ambiance est à la discussion entre élèves.

Une élève demande *s'il faut appliquer la matrice à un point particulier ou à un dessin* ([3]), et suggère même d'appliquer la matrice à un dessin d'oiseau (sic) ! FM lui demande ce que signifierait le point de départ choisi.

A partir d'un point de départ arbitraire (x_0, y_0), un élève calcule les valeurs de x et y pour les années suivantes et obtient un graphique en escalier.

Représenter graphiquement

FM trace deux axes au tableau et écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = 2y \\ y' = x \end{cases}$$

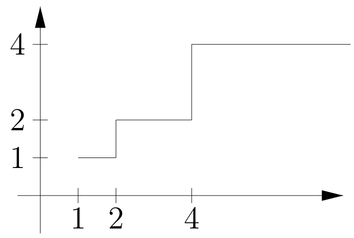
([3]) Comme les élèves l'avaient pratiqué auparavant, avec des dessins de maison, de cochon, ...

en s'assurant que tout le monde est arrivé à ce stade.

Un élève demande combien de points il faut dessiner, et FM répond « *de quoi voir si ça se stabilise* ». Il attire donc l'attention sur la question de stabilisation de la proportion $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$. FM fait également remarquer que x et y ne peuvent être négatifs.

Dans un premier temps, aucun élève ne part d'un point dont une des coordonnées est nulle. Puis, un élève part de $(0, 10)$.

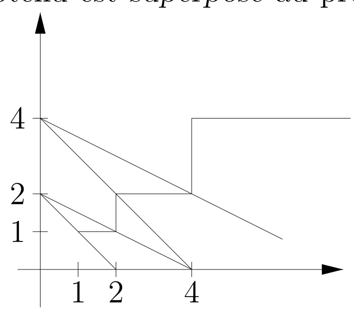
Enfin, FM reporte au tableau ce qu'il voit le plus souvent apparaître dans les cahiers, à savoir :



Se déroule alors une discussion en termes de réalité (retour à la population d'oiseaux) afin de valider les résultats. La conclusion (4) en est que, avec la matrice considérée ici, il n'y a aucune mortalité de jeune, et que tous les jeunes deviennent adultes. De plus, toutes les femelles meurent après avoir pondu.

Interpréter, valider

Pour la même matrice, les élèves essaient d'autres points de départ, comme par exemple $(0, 2)$. Le dessin obtenu est *superposé* au précédent, et des points d'intersection apparaissent.



FM demande aux élèves de *comparer les différents graphiques en fonction du point de départ*, dans le but d'en arriver à des points se trouvant sur la droite propre (5) par diminution successive de l'amplitude des oscillations.

Comparer

Pour ce faire, il suggère de raffiner le dessin en prenant une plus grande échelle et des points intermédiaires.

Changer d'échelle

(4) On ne fait là que vérifier ce que la matrice brute laisse supposer !
(5) Ce vocabulaire n'a pas été utilisé en classe.

Remarquons que les calculatrices ne servent que numériquement, et que leurs possibilités graphiques ou de programmation ne sont pas exploitées. De plus, il apparaîtra par après qu'elles ne fournissent pas vraiment d'aide à la compréhension lorsque les élèves ne sont pas guidés.

FM reformule sa demande :

> *de quel point partir pour que le rapport $\frac{\textit{femelles}}{\textit{jeunes}}$ reste constant année après année ?*

Il écrit au tableau l'évolution d'une population comprenant au départ 10 jeunes et 5 femelles, ainsi que la valeur du rapport $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$ durant les cinq premières années :

Jeunes (x)	Femelles (y)	Rapport $\frac{y}{x}$
10	5	$\frac{1}{2}$
10	10	1
20	10	$\frac{1}{2}$
20	20	1
40	20	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Un élève essaye le point $(1.5, 1)$ — vite converti en $(15, 10)$ pour cause de non-réalisme — qui donne une succession de rapports plus proches : $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Bref, on s'approche de plus en plus d'une droite.

Petit à petit, en partant du point $(14, 10)$, puis du point $(141, 100)$, ..., on s'approche du rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est le rapport cherché.

La méthode de raffinement dégagée par les élèves consiste à relier à chaque nouvelle étape les milieux des segments dessinés sur le graphique à l'étape précédente. De cette manière, on se rapproche d'une droite, et un élève pense au rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mais par pure intuition et il ne pourra se justifier.

Rédiger

FM décide d'arrêter les calculs et de commencer à rédiger ce qui a été trouvé. Il prend $\frac{1000}{1414}$ comme approximation de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et les élèves constatent qu'avec ce rapport, la proportion de jeunes dans la population est stable.

Enfin, FM demande de traiter la seconde matrice sur le même principe, mais le rapport de stabilité est évident à trouver puisqu'il s'agit de 1 (remarquons que des élèves dessinent une droite qui part de $(0, 0)$ et non pas de $(1, 1)$!).

Cet exercice sera laissé en préparation pour le lendemain, avec pour consigne de prendre des échelles très grandes, d'essayer divers points de départ et notamment le point $(10, 100)$ qu'impose FM. Il est permis aux élèves de ne plus faire de dessin vu la taille des échelles nécessaires.

Notons cependant — la séance a été longue — la disparition de la motivation, à savoir la recherche d'un « rapport de stabilité ».

13.2.2 Seconde séance

Cette séance ne s'étale que sur une seule période de 50 minutes. FM entame le cours en demandant de déterminer la pente de la direction de stabilité pour la matrice

Exploiter un acquis

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Les élèves entament le calcul et la réponse, obtenue sans grand délai, est écrite au tableau par Jérôme :

$$\frac{y}{x} \approx 0,532$$

FM enchaîne alors sur la question qui va tenir les élèves en haleine pendant presque toute la suite du cours :

> *Si on observe le phénomène, non pas tous les ans mais bien tous les **deux** ans, quelle est la matrice qui décrit la transformation correspondante ?*

Il s'ensuit une période de tâtonnements et de bricolages : l'un propose de multiplier tous les coefficients de la matrice par 2 pour obtenir donc

Chercher par essais et erreurs

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

un autre suggère d'élever tous les coefficients au carré et risque

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,09 & 0,25 \end{pmatrix}$$

La situation devient peu à peu chaotique. FM reprend donc la parole, et reformule la question, en l'illustrant par son interprétation graphique. Dans un premier temps, cela n'a pas d'effets notables. Pour une bonne moitié d'élèves, l'intervention de FM n'a fait que relancer une espèce de jeu de hasard. Mais pour d'autres, une idée nouvelle commence à faire son chemin : il doit y avoir un algorithme qui, au départ de la matrice originelle, permet de calculer la matrice demandée. Certains testent les matrices déjà proposées (cfr. ci-dessus), et observent qu'elles ne conviennent manifestement pas.

Le cours touche à sa fin, et FM propose le problème — toujours sans solution — comme préparation (travail à domicile) pour le lendemain. À ce moment, un élève signale qu'en introduisant la matrice dans sa calculatrice, et en « poussant sur la touche d'élévation au carré », il obtient une nouvelle matrice qui semble la bonne. Mais il est incapable de fournir la moindre signification à ce qu'il considère comme un « coup de veine » ! FM relance alors le sujet de la préparation pour le lendemain, en proposant que chacun essaie de comprendre ce que la machine a bien pu réaliser comme opération pour que « ça marche » ? Il suggère en particulier de s'interroger à partir des équations de la transformation sous-jacente …

Utiliser une calculatrice

13.2.3 Troisième et dernière séance

Cette séance s'étale à nouveau sur deux périodes de 50 minutes le mercredi 14 octobre. FM entame la séance en rappelant les conclusions obtenues la veille : pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$, la calculatrice a fourni comme carré $\begin{pmatrix} 0,6 & 1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$. Quelle méthode utilise-t-elle ? Plusieurs élèves ont réfléchi à la question, mais contrairement à la suggestion de FM n'ont pas cherché à exploiter les équations de la transformation. Ils ont néanmoins des choses à dire.

Un élève pose l'opération :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

et propose un calcul « colonne × ligne » :

Conjecturer

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \times (0 \quad 0,2) = 0 \times 0 + 2 \times 0,3 = 0,6$$

Il montre que ce calcul permet de trouver l'élément situé dans le coin supérieur gauche de la matrice résultat et qu'un même procédé permet de trouver les quatre éléments de celle-ci. Il ajoute « *c'est un truc, on aurait aussi pu faire ligne × colonne.* » Cette remarque en amène une autre de la part d'une autre élève : « *cela rappelle l'image d'un vecteur* ».

Exploiter une analogie

Un autre élève a demandé au logiciel `Maple` de calculer formellement le carré de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il a obtenu la réponse

Utiliser un ordinateur

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

ce qui le satisfait amplement puisque cette formule permet de confirmer les calculs numériques qui viennent d'être présentés.

Mais FM veut aller plus loin : il ne suffit pas de trouver la formule donnant le carré d'une matrice, il faut aussi la justifier. Il écrit au tableau

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

et demande le calcul de $\binom{x''}{y''}$, ce qui est réalisé après quelques hésitations :

Justifier par calcul

$$\begin{cases} x'' = a(ax + by) + b(cx + dy) \\ y'' = c(ax + by) + d(cx + dy) \end{cases} \text{car} \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

FM revient alors au problème de l'évolution de la population d'oiseaux et demande de trouver *de façon théorique* la droite de stabilité de la proportion $\frac{\text{femelles}}{\text{jeunes}}$. Il s'agit donc de déterminer quelle doit être cette proportion au départ pour qu'elle reste constante lors de chaque itération. FM rappelle que pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le rapport trouvé *expérimentalement* était proche de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La classe s'engage alors dans une période d'activité un peu confuse au cours de laquelle beaucoup d'élèves restent inactifs. La plupart de ceux qui sont dans ce cas n'ont en fait pas compris ce qui leur est demandé.

Cette incompréhension peut résulter de — ou être renforcée par — plusieurs facteurs, par exemple :

Coordination de cadres

- la situation est traitée simultanément dans deux cadres différents. D'une part on utilise un vocabulaire géométrique (trouver une droite stable), d'autre part un vocabulaire arithmético-algébrique (trouver un point de départ tel que la proportion soit conservée). Clairement certains élèves éprouvent des difficultés à passer d'un cadre à l'autre.
- dans le cas particulier auquel on se réfère, le « rapport de stabilité » est irrationnel : $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les dessins réalisés l'ont été en utilisant une valeur approchée : 0,714 ou 0,7. Les différents points calculés et représentés sur une figure ne sont pas parfaitement alignés, alors qu'on recherche une droite !

Pour faire avancer les choses, FM reprend alors le contrôle de la situation et réexplique qu'il s'agit de trouver x et y tels que

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \text{ sachant que } \begin{cases} x' = 2y \\ y' = x \end{cases}$$

Il transforme ensuite cet énoncé en

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

en montrant que c'est là une autre façon d'exprimer que les points $\binom{x'}{y'}$ et $\binom{x}{y}$ sont alignés avec l'origine et que λ est le facteur par lequel la population va être multipliée.

Il s'agit donc à présent de résoudre et discuter le système ci-dessus.

Résoudre et discuter

Bien que l'énoncé ait ainsi été éclairci, un temps non négligeable s'écoule ([6]) avant que quelques élèves écrivent le système sous la forme

$$\begin{cases} 2y = \lambda x \\ x' = \lambda y \end{cases}$$

Valider les résultats

puis éliminent la variable x, arrivant à $2y = \lambda^2 y$, d'où $\lambda^2 = 2$. Les valeurs de x, y (ainsi que x' et y') étant positives (ce sont des nombres d'oiseaux), la racine carrée négative est éliminée sans problème. Mais il s'agit encore de trouver $\frac{y}{x}$, c'est même l'objectif énoncé clairement, ce que certains avaient peut-être perdu de vue. On arrive finalement à $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, non sans devoir réexpliquer pourquoi $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le problème de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ étant ainsi épuisé, FM demande aux élèves d'effectuer le même travail pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Une partie de la classe va jusqu'à écrire et résoudre l'équation aux valeurs propres. Une autre partie semble quelque peu fatiguée.

(6) Il est apparu ultérieurement que les élèves n'avaient pas rencontré en 4e année de discussions de systèmes paramétriques.

13.3. Commentaires

Analysant cette séquence d'enseignement, il convient d'abord de se demander quelle a été — sur les plans didactique et mathématique — l'activité des élèves, et constater qu'elle a été fort variée. C'est souvent le cas lors d'une activité de résolution de problème, même si, comme c'était le cas ici, les élèves n'ont pas eu à modéliser la situation, et si leur activité a été contrôlée d'assez près par l'enseignant.

La classe est passée par des phases de recherche, de découverte et de mise au point. Elle a eu à effectuer des travaux techniques (résoudre une équation du second degré, résoudre et discuter un système d'équations, multiplier une matrice 2×2 par une colonne, ...). Une partie de son activité relevait de l'heuristique (simuler l'évolution d'une situation sur calculatrice programmable ou sur ordinateur, découvrir à l'aide d'un logiciel la formule donnant le carré d'une matrice 2×2, reformuler un problème dans un cadre différent du cadre d'origine, ...). Une autre partie encore consistait en des justifications raisonnées (justifier la formule fournie par l'ordinateur, retrouver par un raisonnement les valeurs trouvées expérimentalement, ...).

Au cours de ces activités, ce sont des compétences de natures diverses qui ont été sollicitées. Le caractère global de la situation étudiée rend malaisé d'en dresser une liste qui ne saurait de toutes façons être que qualitative. Il serait en effet totalement impossible de préciser la part réservée à chaque type d'activité par les élèves puisque cette part peut avoir été très différente d'un élève à l'autre.

Sur le plan mathématique, les élèves ont rencontré des notions nouvelles : produit matriciel dans le cas du carré d'une matrice, droite invariante par une transformation linéaire, vecteur propre et valeur propre, suites de nombres et suites de vecteurs, convergence d'une suite. Ces notions n'ont été que rencontrées, et manipulées le plus souvent à un niveau essentiellement procédural. Le passage au stade structural nécessitera des activités supplémentaires après lesquelles on pourra considérer que les notions sont à peu près fixées. Ce n'est qu'à ce moment qu'on peut espérer qu'elles deviennent réellement opérationnelles.

13.4. Des énoncés supplémentaires

PROBLÈME 13.4.1 *Une entreprise fabrique des biens de consommation qui peuvent être soit immédiatement vendus, soit stockés en prévision des ventes ultérieures. La gestion de cette fabrication dans le cas d'un produit donné s'élabore suivant le modèle (simplifié) suivant.*

- *La quantité à vendre du produit pendant l'année à venir est estimée à partir de l'indice marginal de consommation de ce produit, c'est-à-dire le rapport — supposé constant, et noté β — entre la quantité vendue pendant une année et la quantité produite durant l'année précédente.*
- *Une partie de la fabrication de l'année à venir est orientée vers la vente au cours de cette année. L'autre partie est consacrée à la reconstitution du stock, et est supposée égale à la différence — positive ou négative — entre la quantité qui sera vendue durant l'année à venir et la quantité vendue durant l'année précédente. (Ce principe essaie de prendre en compte l'effet des fluctuations de la demande dans la gestion du stock et donc de la production globale.)*

Dans un tel modèle, comment évoluent le stock et la quantité vendue du produit en fonction du temps ? En particulier, comment évolue le rapport

$$\frac{\textit{quantité stockée du produit}}{\textit{quantité vendue du produit}}$$

lorsqu'on estime que $\beta = 0,5$? Ces résultats dépendent-ils de la valeur particulière attribuée à β (avec $0 < \beta < 1$) ?

PROBLÈME 13.4.2 *Un modèle élémentaire de transmission de l'information se décrit de la manière suivante. Un message est transmis en le codant à l'aide de deux types de signaux, notés S_1 et S_2. On suppose quele signal S_1 nécessite exactement le temps t_1, et que le signal S_2 nécessite exactement le temps t_2 pour être transmis.*

On demande de calculer le nombre N_t de messages qu'il est possible d'envoyer en fonction de la durée t de ces messages, si par exemple $t_1 = 1$ et $t_2 = 2$.

PROBLÈME 13.4.3 *On étudie l'évolution du taux de pollution dans deux bassins — notés « bassin 1 » et « bassin 2 » dans la figure ci-dessous — de volumes respectifs V_1 et V_2.*

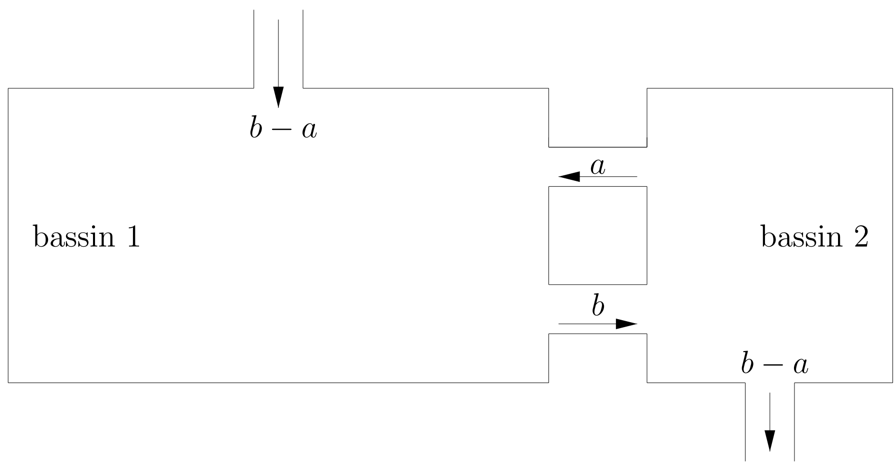
Au moment de l'ouverture des vannes de communication

- *le bassin 1 contient un mélange homogène d'eau et d'un certain polluant, celui-ci sous une concentration c,*
- *le bassin 2 ne contient que de l'eau pure.*

En régime de fonctionnement,

- *la vanne du bassin 2 vers le bassin 1 a un débit de a ℓ/s, la vanne du bassin 1 vers le bassin 2 a un débit de b ℓ/s, et on sait que $b > a$,*
- *une vanne d'alimentation déverse de l'eau pure dans le bassin 1 sous un débit de $(b-a)$ ℓ/s,*
- *une vanne d'évacuation élimine le trop-plein du bassin 2 sous un débit de $(b-a)$ ℓ/s.*

On demande de décrire l'évolution de la concentration de polluant dans chacun des bassins en fonction du temps. On fait l'hypothèse simplificatrice que le polluant a une densité proche de celle de l'eau, et qu'à tout instant les mélanges d'eau pure et de polluant sont homogènes.



Problème 13.4.4 *On considère une question d'un sondage dont les seules réponses sont « oui » ou « non ». On dit qu'une personne interrogée est dans l'« état 1 » si elle répond « oui » et qu'elle est dans l'« état 2 » si elle répond « non » à la question.*

Il peut se révéler intéressant d'effectuer plusieurs fois le même sondage sur les mêmes personnes. Mais une personne interrogée peut changer d'avis entre deux sondages. On admettra dans la suite que de tels changements d'avis sont aléatoires : par exemple, dans le cas d'une politique de lutte contre le chômage, c'est le cas si, entre les deux sondages, aucune décision politique significative en matière d'emploi n'intervient.

On suppose donc que les changements d'avis sont décrits par le tableau de probabilités suivant :

Passage de l'état . . .	*. . .à l'état . . .*	*. . .avec la probabilité*
1	*1*	$1-\alpha$
1	*2*	α
2	*1*	β
2	*2*	$1-\beta$

où $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *et* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$*.*

Si lors du premier sondage, la répartition « oui/non » était 50/50, comment évolue-t-elle lorsqu'on estime que $\alpha = 0,2$ *et* $\beta = 0,3$ *?*

Problème 13.4.5 *Dans l'étude épidémiologique d'une maladie infectieuse telle que la rougeole, on partage la population concernée en trois groupes :*

- *les sensibles : ils n'ont pas encore contracté la maladie, et ne sont pas immunisés,*
- *les malades : ils sont malades et surtout contagieux,*
- *les immunisés : ils ont déjà été malades et sont donc immunisés.*

La durée moyenne de la maladie est de 14 jours. On fait de plus les hypothèses suivantes :

- *la variation journalière du nombre de personnes immunisées ne dépend que du nombre de personnes malades le jour précédent,*
- *la variation journalière du nombre de personnes sensibles ne dépend que du nombre de personnes malades et du nombre de personnes sensibles le jour précédent,*
- *la population totale est stable.*

On demande de fournir un modèle de l'évolution de la maladie en fonction du temps pour chacun des trois groupes définis plus haut.

Références

[23], [25], [79], [46].