FÉDÉRATION WALLONIE-BRUXELLES
ENSEIGNEMENT.BE

ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE 2014

MATHÉMATIQUES

PISTES DIDACTIQUES

4e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

TRANSITION

Général, technique et artistique

Table des matières

Ce document de pistes didactiques a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe non certificative en mathématiques pour la 4e secondaire (enseignement de transition) **:**

Marc ANNOYE, inspecteur ;
Edith BAETEN, conseillère pédagogique ;
Eric BONHOMME, conseiller pédagogique ;
Anne-Marie CHARON, enseignante ;
Florent CHENU, chercheur au Service d'analyse des Systèmes et Pratiques d'enseignement de l'ULg ;
Rudy COLLETTE, enseignant ;
Francine CORDIER, conseillère pédagogique ;
Linda DEWINCK, conseillère pédagogique ;
Virginie DUPONT, chercheuse au Service d'analyse des Systèmes et Pratiques d'enseignement de l'ULg ;
Christine GOTTI, enseignante ;
Sabine HAUSMANN, conseillère pédagogique ;
Honorine HUYSENTRUYT, enseignante ;
Léopold KROEMMER, chargé de mission au Service général du Pilotage du Système éducatif ;
Nicole LAMBELIN, inspectrice ;
Fabienne LEGRAIN, enseignante ;
Martine MACHTELINGS, inspectrice ;
Cédric PINCHART, conseiller pédagogique ;
Fabienne VANHAM, inspectrice.

Introduction

Ce document fait suite aux résultats de l'évaluation externe en mathématiques menée en octobre 2014 dans les classes de 4^{e} secondaire (enseignement de transition). Cette évaluation avait une visée essentiellement diagnostique et formative. L'épreuve avait en effet pour objectif d'établir un bilan de l'acquisition de certaines compétences en mathématiques et de déceler celles qui sont moins bien maitrisées et qui devraient faire l'objet d'une attention particulière.

C'est sur la base des constats présentés dans le document « Résultats et commentaires » que ce recueil de pistes didactiques a été élaboré. Y sont proposées des activités concrètes et des ressources didactiques relatives à certains aspects qui ont été pointés comme posant problème à de nombreux élèves.

Le document se présente en quatre parties : la mise en équation, la classification des équations, les solutions d'équations et la trigonométrie. En fonction des difficultés plus spécifiques de vos élèves, vous pourrez donc cibler l'une ou l'autre.

Chacun des thèmes abordés se structure de la manière suivante :

- quelques grands constats issus de l'épreuve ;
- les intentions et commentaires c'est-à-dire les objectifs fixés ;
- des propositions concrètes d'activités à destination des élèves. Ces dernières vous donneront quelques idées pour développer, un peu différemment peut-être, les éléments qui doivent encore être retravaillés pour garantir une meilleure maitrise de compétences essentielles à acquérir par les élèves.

L'épreuve ayant été soumise en début de 4^{e} secondaire, de nombreuses pistes sont plutôt destinées aux élèves de 3^{e} secondaire ; d'autres conviennent davantage aux élèves de 4^{e} secondaire.

La philosophie des fiches permet généralement leur adaptation à tous les niveaux d'études du secondaire.

1. Mise en équation

1.1 LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Parmi les questions composant l'épreuve administrée en 4S à l'automne 2014, plusieurs ciblaient la mise en équation, avec ou sans résolution complète d'un problème (respectivement les questions 1 et 2 et les questions 13 à 15).
Ces questions, ainsi que le tableau de résultats, sont présentés ci-dessous.

QUESTION 1

Sarah possède une tablette pouvant recevoir une carte SIM.
Elle hésite entre deux formules en promotion chez un opérateur :

	Formule A	Formule B
Cout mensuel fixe	10,00 €	aucun
Cout par mégabyte (MB) téléchargé	0,01 €/MB	0,05 €/MB

Au-delà de quel volume de téléchargement mensuel exprimé en mégabytes (MB), la formule A commencera-t-elle à être plus intéressante que la formule B ?

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

QUESTION 2

Un groupe d'amis organise un souper. Ils seront 18 adultes et 13 enfants.
Les frais s'élèvent à 336 €.
Les adultes paient une fois et demie le prix des enfants.

DÉTERMINE le tarif enfant et le tarif adulte.

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

QUESTION 13

Voici un problème :

Quel nombre augmenté de 12 est-il égal à son quadruple ?

Parmi les propositions suivantes, **COCHE** la mise en équation correcte :

☐ $(x + 12)\ 4 = x$

☐ $x + 12 = 4x$

☐ $x + 12 = 4$

☐ $4x + 12 = 4$

☐ $4x + 12 = 4x$

QUESTION 14

Voici un problème :

Un rectangle a un périmètre de 30 cm. Sa longueur est le triple de sa largeur. Détermine ses dimensions.

Tu ne dois pas résoudre ce problème.

ÉCRIS une équation à une inconnue qui traduit cet énoncé.

Équation : ______________________________

Que représente ton inconnue ? ______________________________

QUESTION 15

Le cout d'un tapis floral de 1 000 roses est de 1 620 €.
Ce tapis se compose de roses rouges à 1,50 € et de roses blanches à 1,80 €.

Sachant que x représente le nombre de roses rouges, **COCHE** l'équation qui traduit cet énoncé.

☐ $x \cdot 1{,}50 = (1\,620 - 1\,000)\,.\,1{,}80$

☐ $(1\,000 - x) \cdot 1{,}50 + x \cdot 1{,}80 = 1\,620$

☐ $(1\,000 - x) \cdot 1{,}80 + x \cdot 1{,}50 = 1\,620$

☐ $x \cdot 1{,}80 = (1\,620 - 1\,000) \cdot 1{,}50$

Résultats pour les questions faisant intervenir une mise en équation[1]				
Question	Code[2]	Pourcentage de réponses par code		
		Total FWB	*Hors ED*	*En ED*
1	1	15 %	16 %	7 %
	2	13 %	13 %	10 %
	8	4 %	4 %	3 %
	0	45 %	45 %	48 %
	9	23 %	22 %	32 %

[1] Les pourcentages ayant été arrondis, il arrive que les totaux ne fassent pas exactement 100 %.
[2] Rappel de la signification des codes : 1 : réponse correcte, 2 : réponse correcte trouvée par essais et erreurs, 8 : réponse partiellement correcte, 0 : réponse incorrecte, 9 : omission.

2	1	31%	34 %	15 %
	8	8 %	8 %	5 %
	0	45 %	43 %	56 %
	9	16 %	15 %	24 %
13	1	87 %	89 %	77 %
	0	12 %	11 %	21 %
	9	1 %	1 %	2 %
14	1	33 %	35 %	16 %
	8	7 %	8 %	6 %
	0	50 %	48 %	64 %
	9	9 %	9 %	14 %
15	1	53 %	54 %	39 %
	0	43 %	42 %	52 %
	9	4 %	4 %	9 %

Pour les deux premières questions, respectivement 28 % et 31 % des élèves ont obtenu la réponse correcte sans toutefois nécessairement utiliser la mise en équation.
Pour la question 1, par exemple, 13 % des élèves résolvent le problème par essais et erreurs. De plus, beaucoup de réponses sont fausses (45 % pour les questions 1 et 2) et un nombre important d'élèves ne fournissent pas de réponse (23 % pour la question 1 et 16 % pour la question 2).

Pour les questions qui portent uniquement sur la mise en équation (13 à 15), des résultats faibles sont observés. C'est notamment le cas lorsque la mise en équation nécessite d'exprimer une donnée en fonction d'une autre donnée, alors que cette relation n'est pas explicitement évoquée dans l'énoncé (ce qui est seulement le cas pour la question 13).

Par ailleurs, pour la question 14, il est probable que certains élèves soient mis en difficulté par la méconnaissance de la formule du périmètre et/ou la confusion avec celle de l'aire. Or ici, c'est grâce à cette ressource de périmètre qu'une donnée peut être exprimée en fonction d'une autre.

1.2 INTENTIONS ET COMMENTAIRES

L'intention des activités proposées dans les pages qui suivent est de mettre l'accent sur deux questions : 1) Pourquoi mettre en équation ? 2) Comment mettre en équation ?

1) Pourquoi mettre en équation ?

Un nombre non négligeable d'élèves ont résolu le problème de la question 1 par essais et erreurs. Face à un tel type de réponse, deux attitudes sont possibles : soit considérer que le but était de résoudre un problème et peu importe le moyen si le but est atteint, soit considérer qu'à partir d'un certain moment de la scolarité, la résolution de problèmes doit passer par une démarche formelle.
Dans le questionnaire adressé aux enseignants dont les classes faisaient partie de l'échantillon, la question suivante a été posée :

Pour la 1re question de l'épreuve, un code a été spécialement prévu pour repérer les élèves qui arriveraient à résoudre le problème par essais et erreurs. Nous voudrions savoir dans quelle proportion les enseignants du début du cycle supérieur considèrent comme valable une réponse trouvée par essais et erreurs. Dans cette optique, nous vous demandons de répondre à la question suivante :

Cochez la proposition qui correspond le mieux à votre point de vue.

Dans le cadre d'un exercice coté de résolution de problème :

- *J'attribue **autant de points** à un élève qui trouve la solution par essais et erreurs qu'à un élève qui met en place une démarche formelle (ex : démarche algébrique) ;*
- *J'attribue **moins de points (sans toutefois le mettre en échec)** à un élève qui trouve la solution par essais et erreurs qu'à un élève qui met en place une démarche formelle (ex : démarche algébrique) ;*
- *Je mets en **échec** (sans toutefois mettre zéro) un élève qui trouve la solution par essais et erreurs ;*
- *Je mets **zéro** à un élève qui trouve la solution par essais et erreurs.*

Voici comment se distribuent les réponses des 83 enseignants qui ont répondu à la question :

Réponse	**Nombre d'enseignants**	**Pourcentage d'enseignants**
Autant de points que la démarche formelle	6	7 %
Moins de points que la démarche formelle	43	52 %
Échec	31	37 %
Zéro	3	4 %

Pour une très nette majorité d'enseignants, une résolution par essais et erreurs ne mérite pas d'être valorisée au même titre qu'une démarche formelle de résolution.
41 % d'entre eux pensent même qu'elle ne peut être considérée comme réussie. L'analyse des résultats à la question 1 indique pourtant qu'en 4S presque autant d'élèves résolvent par essais et erreurs que par une démarche formelle.
Il semble donc important d'apprendre à ces élèves pourquoi résoudre un problème par une mise en équation. On montrera ainsi les limites de la démarche « essais-erreurs » en privilégiant des problèmes dont les solutions ne sont pas, par exemple, des nombres entiers.

2) Comment mettre en équation ?

Les questions présentées ci-dessus qui nécessitent ou ciblent une mise en équation, ont comme d'autres questions, été posées au prétest. Une analyse des réponses erronées à certaines de ces questions est instructive. Elle montre que les élèves sont souvent mis en difficulté lorsqu'il y a deux données à rechercher et que l'une doit être exprimée en fonction de l'autre. Les différents types de (débuts de) réponses erronées aux problèmes sont intéressants à décrire. Nous avons choisi de les illustrer par rapport au problème suivant posé au prétest :

Des tickets pour un spectacle coûtent 16 euros au prix plein et 10 euros au tarif étudiant.

650 tickets ont été vendus pour un montant total de 9782 euros.

Combien a-t-on vendu de tickets au tarif étudiant ?

Écris ton raisonnement et tes calculs.

Certaines réponses sont très lacunaires et donnent peu d'informations : des élèves les omettent complètement, d'autres se limitent à une réécriture des données, d'autres encore réalisent différents essais-erreurs qui n'aboutissent pas. Mais d'autres productions mettent bien en évidence que **c'est souvent le fait de devoir exprimer une donnée en fonction de l'autre qui pose problème dans la mise en équation**, surtout quand le lien entre les deux données n'est pas explicite[3].

[3] Les liens sont explicites pour les questions 2 et 13 ainsi que pour la 15 grâce à sa forme de QCM. Pour la question 14, où ce lien n'est pas explicite, les résultats sont les plus faibles.

En effet, certains élèves :

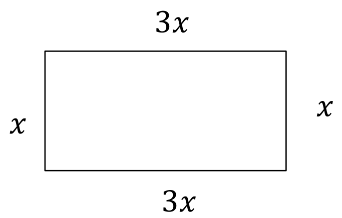
- utilisent deux inconnues dans une seule équation et ne parviennent pas à se débarrasser de l'une d'entre elles par la suite ;
  - Exemple : $x \cdot 16 + y \cdot 10 = 9782$

- utilisent la même inconnue pour les deux données ;
  - Exemple : $x \cdot 16 + x \cdot 10 = 9782$

- écrivent une ligne où seule une donnée est prise en compte, l'autre étant ignorée ;
  - Exemple 1 : $10 \cdot 650 = 6500$
  - Exemple 2 : $650 \cdot 16$

- traitent chaque donnée séparément, résolvent deux problèmes différents ne faisant intervenir qu'une seule donnée ;
  - Exemple : $9782 : 16 = 611$ tickets adultes
    $9782 : 10 = 978$ tickets enfants
- résolvent correctement mais inversent finalement les données au moment de répondre au problème.
  - Exemple : 547 entrées au tarif étudiant et 103 entrées au tarif adulte

L'analyse de la question 14 est également instructive. Elle semble mettre en évidence que, chez plusieurs élèves, la représentation du problème, par exemple sous la forme d'un dessin, peut constituer une étape intermédiaire aidant à la mise en équation correcte.



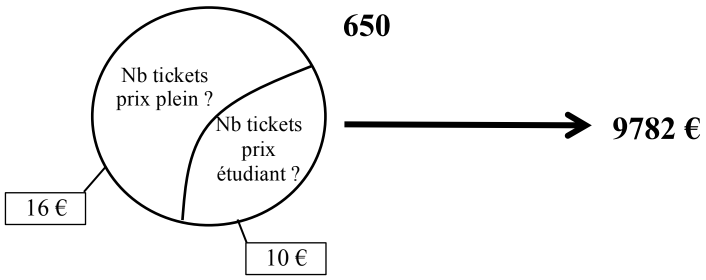
$$8x = 30$$

Ce constat rejoint les propos de Demonty, Fagnant et Lejong tenus dans le cadre de leur manuel relatif[4] à la résolution de problèmes dans l'enseignement primaire : « **L'étape de représentation est déterminante car elle conditionne la réussite des étapes ultérieures. Apprendre aux élèves à se représenter un problème est une activité qui doit être enseignée. On pourra ainsi amener les élèves à utiliser les outils qui leur permettront de mieux comprendre les problèmes qu'ils rencontreront. La construction d'une représentation appropriée est l'ingrédient essentiel d'une résolution**. » (2005, p. 16).

Certes le manuel évoqué porte sur la résolution de problèmes entre 10 et 12 ans et certes la question 14 se prêtait particulièrement bien à une représentation, mais il nous paraît intéressant de transposer la démarche et de nous demander si, pour d'autres problèmes de niveau 3S ou 4S, une représentation ne permettrait pas de faciliter la mise en équation.
De plus, l'utilisation de couleurs dans la représentation en lien avec l'énoncé pourrait constituer une aide à la résolution du problème (Ex : utiliser une même couleur pour les grandeurs de même unité).

[4] Demonty, I., Fagnant, A. & Lejong, M. (2005). *Résoudre des problèmes: pas de problème. Guide méthodologique et documents reproductibles: cycle 10-12 ans.* Bruxelles: De Boeck

Une telle représentation pourrait prendre la forme suivante pour la question sur les tickets de spectacle.



Une autre représentation pourrait être la suivante :

	Prix unitaire	*Quantité*	*Prix total*
Tickets prix plein	*16 €*		
Tickets tarif étudiant	*10 €*		
Ensemble des tickets		*650*	*9782 €*

Sur la base de telles représentations, il est possible que les élèves pensent à se poser successivement les questions suivantes :

- « Comment calculer le nombre de tickets au tarif étudiant s'il y avait 100, 200, 300 tickets prix plein ? » (Réponse : en faisant 650 – 100 = 550,…)
- « Comment calculer le nombre de tickets au tarif étudiant si on connait le nombre de tickets au prix plein ? » (Réponse : le nombre de tickets au tarif étudiant est égal à 650 moins le nombre connu de tickets au prix plein)
- « Comment écrire/noter mathématiquement le nombre de tickets au tarif étudiant si on désigne par x le nombre de tickets au prix plein ? » (Réponse : 650 – x)

Raisonner à partir de représentations est une voie intéressante pour amener à la mise en équation, notamment parce que ces représentations permettent de faire le point sur les informations dont on dispose, les informations recherchées et les relations qui les lient.

Les représentations proposées ci-dessus l'ont été à titre d'exemples : il ne s'agit pas de les fournir et encore moins de les faire apprendre aux élèves.

Il est préférable de partir des représentations, des schémas que les élèves sont capables de produire eux-mêmes, de discuter collectivement de leur pertinence, de leur exactitude puis de raisonner sur cette base. D'une manière générale, s'intéresser aux représentations personnelles des élèves est instructif. Cela permet de comprendre finement des procédures de résolution mathématique erronées qui semblent opaques à priori.

Les problèmes faisant intervenir une mise en équation peuvent être classés selon le nombre d'inconnues recherchées.
S'il n'y en a qu'une à rechercher, le problème fournit une information qui permet d'écrire l'équation à une inconnue.
S'il y en a deux, deux informations sont fournies. Ces informations permettent alors soit d'écrire une seule équation où une des informations est utilisée pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre, l'autre information permettant d'écrire l'équation, soit d'écrire un système de deux équations à deux inconnues. Remarquons que l'équation ainsi écrite n'est en fait que le résultat d'une procédure de substitution dans le système que l'on n'écrit pas.

1.3 ACTIVITÉS

Nous avons envisagé de travailler la mise en équation à différents niveaux. Le schéma suivant présente comment se structure notre approche.

1. Pourquoi mettre en équation ?

2. Comment mettre en équation ?

    a. L'entraînement aux traductions

    Représentation
    Dessin - Schéma

    b. Mises en équation : où seule une donnée est recherchée

    c. Mises en équation où deux données sont recherchées…

        c.1 … où l'une est exprimée en fonction de l'autre
        c.2. … où une ressource sert à exprimer une donnée en fonction de l'autre

    d. Mises en équation : activités de dépassement

<u>Activité 1 (Fiche 1)</u>
Le but de cette première activité est de comparer une démarche formelle de résolution avec une démarche de résolution par essais et erreurs. Les questions à propos du caractère correct, facile et rapide des résolutions de Xavier et Medhi doivent faire l'objet d'une discussion collective après que les élèves y ont réfléchi individuellement ou en petits groupes.

La question relative à l'application de ces démarches à d'autres données est particulièrement importante. C'est en effet la sollicitation de cette analyse qui va permettre de montrer que les essais et erreurs ont une efficacité limitée. Encore une fois, il est intéressant de mettre en évidence cette conclusion au niveau de l'ensemble de la classe après que les élèves y ont réfléchi individuellement ou en petits groupes.

La question relative au problème de carburant a pour but de faire remarquer que pour certains problèmes, une résolution arithmétique (qui ne passe pas par une démarche formelle de mise en équation) peut s'avérer tout aussi efficace et plus rapide.

Cette activité donne aussi l'occasion d'entraîner les compétences transversales « communiquer » et « argumenter » en faisant appel à la verbalisation écrite (individuelle ou en sous-groupes) puis orale (débat au sein de la classe) pour analyser les avantages et les désavantages des différentes méthodes et observer que si la résolution par équation permet de résoudre de nombreuses catégories de problèmes, elle n'est pas forcément toujours la plus adéquate.

Finalement, ce qu'il importe de retenir de cette activité, c'est qu'une démarche formelle de mise en équation a une efficacité générale que n'ont pas d'autres démarches (essais et erreurs, démarche arithmétique) mais que pour certains problèmes, ces démarches non formelles peuvent s'avérer efficaces et plus rapides.

<u>Activité 2a (Fiche 2)</u>
L'activité porte sur la maîtrise de vocabulaire élémentaire. Même si les termes utilisés sont très simples, il n'est pas impossible que des élèves, en particulier maîtrisant peu la langue française, soient mis en difficulté par ces nuances.

Le premier exercice cible la traduction dans un contexte arithmétique. Le deuxième exercice se centre sur la traduction par la symbolisation algébrique. Le dernier exercice a pour but de faire le point sur l'équivalence / la synonymie des différents éléments de langage. Il est opportun de faire le point de manière collective après que chacun des trois exercices a été résolu individuellement.

Activité 2b (Fiche 3)
Même si d'autres démarches sont parfois plus faciles ou plus rapides, il est important que les élèves considèrent la mise en équation comme un outil efficace de résolution de problèmes. Ainsi, l'activité 2b est une activité de mise en équation de problèmes ne faisant intervenir qu'une seule inconnue. Les problèmes sont variés. Ils sont repris (et éventuellement aménagés) des CE1D de 2010, 2013 et 2014. Pour le problème n°2, il serait intéressant de demander d'abord aux élèves d'en faire une représentation (par exemple sous la forme d'un schéma) et d'exploiter les différentes représentations ainsi obtenues.

D'une manière générale, la confrontation collective ou en sous-groupes des productions individuelles d'élèves permet de les valider ou les invalider et peut-être de montrer l'équivalence de différentes formes d'une même équation.

Activité 2c1 (Fiche 4)
L'activité 2c1 est composée d'exercices de mise en équation de problèmes faisant intervenir deux inconnues dont l'une d'entre elles doit être exprimée en fonction de l'autre. Dans les deux premiers problèmes, ce lien est très explicite. Il l'est un peu moins dans les trois problèmes suivants.

Il est intéressant de faire comparer les équations pour les problèmes 1 et 2 (éventuellement en les ayant répartis au sein de la classe) et de faire déceler que selon la question posée, le choix d'une inconnue plutôt qu'une autre peut s'avérer plus judicieux sans toutefois être indispensable.

Activité 2c2 (Fiche 5)
La spécificité de l'activité 2c2 est de faire intervenir, en plus d'une mise en équation, une ressource (savoir / savoir-faire). Cela augmente le degré de complexité de l'exercice. Les ressources sont :

- pour l'exercice 1, la notion de moyenne ;
- pour l'exercice 2, la notion de nombres opposés (et la notion de triple) ;
- pour l'exercice 3, le théorème de Pythagore ;
- pour l'exercice 4, la propriété de la hauteur relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle et la moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (relation métrique).

Le professeur devra donc être attentif à l'origine des erreurs éventuelles, soit la mise en équation, soit la méconnaissance de la ressource.

Activité 2d (Fiche 6)
L'activité 2d est composée de deux exercices plus complexes faisant intervenir des équations.
Le premier nécessite de se baser sur le motif visuel pour calculer le nombre de boules et de figurines : 6 boules pour 1 figurine + 2 boules et 1 figurine en fin de guirlande. L'équation est donc :

$$x \cdot 0{,}9 + 6x \cdot 0{,}65 + 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}65 = 30$$

x représente le nombre de « motifs » reproduits

Une autre manière de résoudre le problème est de poser l'inconnue comme étant la longueur de tissu que l'on peut garnir avec le budget de 30 € :

$$2 \cdot \left(\frac{x}{5}\right) \cdot 0{,}65 + \left(\frac{x}{15}\right) \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}65 + 0{,}90 = 30$$

x représente la longueur de tissu que l'on peut garnir avec le budget de 30 €

Le deuxième exercice est un exercice dont les relations plus complexes entre inconnues rend hautement préférable le recours à un système de deux équations.

Fiche 1 : Démarche formelle ou essais-erreurs ?

Un professeur a demandé aux élèves d'une de ses classes de résoudre un problème.
Xavier et Medhi l'ont résolu de manières différentes.

LIS attentivement l'énoncé de ce problème et les résolutions des deux élèves.

Sarah possède une tablette pouvant recevoir une carte SIM.
Elle hésite entre deux formules en promotion chez un opérateur.

	Formule A	*Formule B*
Cout mensuel fixe	*10,00 €*	*Aucun*
Cout par mégabyte (MB) téléchargé	*0,01 € / MB*	*0,05 € / MB*

Au-delà de quel volume de téléchargement mensuel exprimé en mégabytes (MB) la formule A commencera-t-elle à être plus intéressante que la formule B ?
***ÉCRIS** ton raisonnement et tes calculs.*

Résolution de Xavier	Résolution de Medhi
Soit x le nombre de mégabytes téléchargés $10 + 0{,}01 \cdot x = 0{,}05 \cdot x$ $10 = 0{,}05 \cdot x - 0{,}01 \cdot x$ $10 = 0{,}04 \cdot x$ $0{,}04 \cdot x = 10$ $x = 10 : 0{,}04$ $x = 250$ *La formule deviendra plus intéressante au-delà de 250 MB téléchargés.*	***Pour 100 MB :*** *Formule A :* $10 + (0{,}01 \times 100) = 10 + 1 = 11$ € *Formule B :* $0{,}05 \times 100 = 5$ € *La formule A est plus chère que la B* ***Pour 200 MB :*** *Formule A :* $10 + (0{,}01 \times 200) = 10 + 2 = 12$ € *Formule B :* $0{,}05 \times 200 = 10$ € *La formule A est plus chère que la B* ***Pour 300 MB :*** *Formule A :* $10 + (0{,}01 \times 300) = 10 + 3 = 13$ € *Formule B :* $0{,}05 \times 300 = 15$ € *La formule B est plus chère que la A* ***Pour 250 MB :*** *Formule A :* $10 + (0{,}01 \times 250) = 10 + 2{,}5 = 12{,}5$ *Formule B :* $0{,}05 \times 250 = 12{,}5$ € *La formule deviendra plus intéressante au-delà de 250 MB téléchargés.*

COMPARE ces résolutions. Sont-elles correctes, faciles et rapides ?
ÉCRIS ce que tu en penses.

	Résolution de Xavier	Résolution de Medhi
Correcte	……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………	……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………
Facile	……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………	……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………
Rapide	……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………	……………………………………………………………… ……………………………………………………………… ………………………………………………………………

CHOISIS la méthode la plus appropriée pour résoudre le problème si les données étaient les suivantes.
RÉSOUS et **ÉCRIS** ton raisonnement.

	Formule A	*Formule B*
Cout mensuel fixe	*12,80 €*	*Aucun*
Cout par mégabyte (MB) téléchargé	*0,03 € / MB*	*0,07 € / MB*

………

………

………

………

EXAMINE le problème suivant.
COMPARE les résolutions de Dylan et Morgane.
ÉCRIS tes observations.

Le réservoir d'une automobile contient 54 litres de carburant. Sa consommation est de 7 litres aux 100 km. Quelle distance pourra-t-elle parcourir avant d'entamer la réserve de 5 litres ?

Résolution de Dylan	Résolution de Morgane
$54 - 5 = 49$ $49 : 7 = 7$ $7 \times 100 = 700$ $700\ km$	Soit x la distance parcourue $x = \dfrac{(54-5)}{\frac{7}{100}}$ $x = \dfrac{49 \times 100}{7}$ $x = \dfrac{4900}{7}$ $x = 700$ $700\ km$

……

……

Fiche élèves

Fiche 2 : Question de vocabulaire !

Vinciane a donné 6 € pour les sans-abris.

COMPLÈTE les phrases suivantes par un nombre.

1. Malik en a donné 3 en plus. Malik a donné ....
2. Malik en a donné 3 de plus. Malik a donné ....
3. Malik en a donné 3 fois plus. Malik a donné ....
4. Malik en a donné 3 de moins. Malik a donné ....
5. Malik en a donné 3 en moins. Malik a donné ....
6. Malik en a donné le triple. Malik a donné ....
7. Malik en a donné le tiers. Malik a donné ....

Vinciane a donné x € pour les sans-abris.

COMPLÈTE les phrases suivantes par une expression littérale.

1. Malik en a donné 3 en plus. Malik a donné ....
2. Malik en a donné 3 de plus. Malik a donné ....
3. Malik en a donné 3 fois plus. Malik a donné ....
4. Malik en a donné 3 de moins. Malik a donné ....
5. Malik en a donné 3 en moins. Malik a donné ....
6. Malik en a donné le triple. Malik a donné ....
7. Malik en a donné le tiers. Malik a donné ....
8. Malik a donné la même chose que Vinciane augmenté de 3. Malik a donné ....
9. Malik a donné la même chose que Vinciane multiplié par 3. Malik a donné ....
10. Malik a donné la même chose que Vinciane diminué de 3. Malik a donné ....
11. Malik a donné la même chose que Vinciane divisé par 3. Malik a donné ....

DÉTERMINE les propositions équivalentes.

Numéros : ....

Numéros : ....

Numéros : ....

Numéros : ....

Fiche 3 : Mise en équation

(Problèmes repris ou aménagés des CE1D 2010, 2013 et 2014)

ÉCRIS, pour chaque problème, une équation qui permet de le résoudre.
PRÉCISE ce que représente ton inconnue.

1. Un nombre est égal à son triple diminué de 19.
   DÉTERMINE ce nombre.

   Inconnue : ……………………………………………………………………………………………

   Équation : ……………………………………………………………………………………………

2. À midi, des élèves ont acheté chacun un sandwich à 3 € et le groupe a acheté en plus une grappe de raisins à 2 € qu'ils se partagent.
   Ils ont payé en tout 23 €.
   DÉTERMINE le nombre d'élèves.

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………..

   Équation : ……………………………………………………………………………………………

3. Une tempête s'est abattue sur une forêt et 25 % des arbres ont été déracinés.
   En deux mois, les bucherons ont emporté un cinquième des arbres déracinés à la scierie.
   Avant la tempête, il y avait 10 000 arbres dans cette forêt.
   DÉTERMINE le nombre d'arbres déracinés que les bucherons doivent encore emporter.

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………..

   Équation : ……………………………………………………………………………………………

4. Marina souhaite peindre les murs de sa chambre.
   L'aire totale des murs est de 36 m^2.
   Un litre de peinture permet de couvrir 4 m^2.Un pot de 3 litres de peinture coute 45 €**.**
   DÉTERMINE le montant à payer pour peindre les murs de la chambre.

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………..

   Équation : ……………………………………………………………………………………………

5. Edith adore le cocktail de fruits « Bora Bora » que prépare sa tante.
   Ce cocktail est composé pour moitié de jus d'ananas, pour un tiers de jus de fruits de la passion, pour un dixième de jus de citron et le reste est de la grenadine.
   DÉTERMINE la part de grenadine contenue dans le cocktail.

   Inconnue : ……………………………………………………………………………………………

   Équation : ……………………………………………………………………………………………

6. Un jardinier livre de la terre pour combler 17 trous de 0,5 m^3 chacun.
   Il prévoit 25 % de volume supplémentaire car la terre se tasse avec le temps.
   DÉTERMINE le volume de terre à livrer.

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………..

   Équation : ……………………………………………………………………………………………

Fiche 4 : Mise en équation

ÉCRIS, pour chaque problème, une équation qui permet de le résoudre.
PRÉCISE ce que représente ton inconnue.

1. Une entreprise occupe 320 personnes. Il y a trois fois plus d'hommes que de femmes.
   DÉTERMINE le nombre d'hommes employés dans cette entreprise.

   Inconnue : ……………………………..…………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………………..

2. Une entreprise occupe 320 personnes. Il y a trois fois plus d'hommes que de femmes.
   DÉTERMINE le nombre de femmes employées dans cette entreprise.

   Inconnue : ……………………………..…………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………………..

3. Thomas a reçu 50 € d'étrennes.
   Il décide d'en dépenser la moitié pour de bonnes œuvres ; il veut acheter des bougies Amnesty International qui coûtent chacune 1,1 € et des autocollants CAP 48 qui coûtent chacun 0,15 €.
   Il compte acheter autant de bougies que d'autocollants.
   DÉTERMINE le nombre de bougies achetées.

   Inconnue : ……………………………..…………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………………..

4. Un commerçant se rend à la banque pour changer 270 euros en billets de 5 euros et de 20 euros.
   On lui donne 30 billets.
   DÉTERMINE le nombre de billets de chaque sorte qu'il a reçus.

   Inconnue : ……………………………..…………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………………..

5. Un couple a contracté un prêt pour acheter une maison. La mensualité qu'ils remboursent représente un tiers de leurs revenus.
   Les revenus du couple s'élèvent à 3465 € par mois.
   Un des salaires permet de payer les trois quarts de la mensualité.
   DÉTERMINE les deux salaires de ce couple.

   Inconnue : ……………………………..…………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………………..

Fiche 5 : Mise en équation

ÉCRIS, pour chaque problème, une équation qui permet de le résoudre.
PRÉCISE ce que représente ton inconnue.

1. Béatrice a eu deux notes en mathématiques.
   Entre les deux, elle a progressé de quatre points et sa moyenne est de 13.

   ***DÉTERMINE** ces deux notes.*

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………..

2. La somme d'un nombre et de son triple vaut l'opposé de ce nombre.

   ***DÉTERMINE** ce nombre.*

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………..

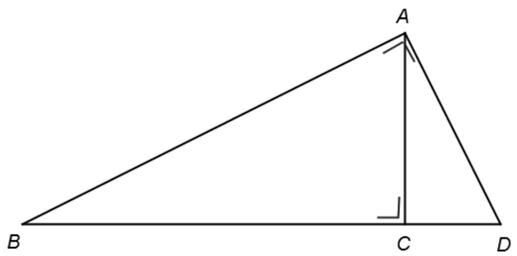
3. L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 9 cm et un des deux autres côtés est 2 cm plus long que l'autre.

   DÉTERMINE la longueur des deux côtés de l'angle droit.

   Inconnue : …………………………………………………………………………………………………

   Équation : ………………………………………………………………………………………………..

4. Dans le triangle rectangle ci-dessous, [BD] mesure 10 cm et [AC] mesure 4 cm.
   DÉTERMINE les mesures de [BC] et [CD].



   Inconnue : …………………………………………………………………………………………………

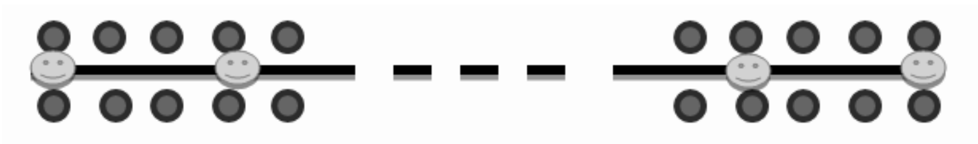
   Équation : ………………………………………………………………………………………………..

Fiche élèves

Fiche 6 : Mise en équation

ÉCRIS, pour chaque problème, une équation qui permet de le résoudre.
PRÉCISE ce que représente ton inconnue.

Marion réalise une guirlande de Noël qu'elle a vue dans un livre de décoration.



Cette guirlande est composée d'un morceau de tissu sur lequel on accroche, tous les 5 cm deux petites boules de Noël et tous les 15 cm une figurine de renne (en plus des deux boules).
Chaque extrémité de la guirlande doit comporter deux boules et une figurine (et respecter les espacements prévus).
Marion dispose déjà de tissu en grande quantité. Pour le reste, elle dispose d'un budget de 30 €.

DÉTERMINE la longueur maximale de sa guirlande si une boule coûte 0,65 € et une figurine 0,90 € ?

Inconnue : ……………………………………………………………………………………………………

Équation : ……………………………………………………………………………………………………

Samuel demande à Marie l'âge de son père. Celle-ci n'a pas envie de lui répondre directement et lui donne deux indices :
"Aujourd'hui, l'âge de mon père dépasse de 5 ans le double de mon âge."
"Dans 3 ans, la somme de nos âges sera de 74 ans."

DÉTERMINE l'âge du père de Marie.

Inconnues: ……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

Système d'équations : ……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………..

2. Classification des équations

2.1 CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Parmi les questions composant l'épreuve administrée en 4S à l'automne 2014, plusieurs ciblaient la résolution d'équations.

QUESTION 8	Difficultés ciblées :
RÉSOUS.	
$1 + 4x = 7 - 3x$ ☐ 8a	
$1 - (2x - 3) = 4x + 4$ ☐ 8b	- parenthèses précédées d'un signe «-»
$16 \cdot 1{,}5x + 4x = 350$ ☐ 8c	- nombres décimaux
$\frac{1 - 3x}{5} = \frac{x + 3}{2}$ ☐ 8d	- écriture fractionnaire, distributivité…
$3x\,(2x - 5)\,(x - 4) = 0$ ☐ 8e	- expressions factorisées
$5\,(x - 3) - x\,(x - 3) = 0$ ☐ 8f	- expressions à factoriser

Quest	Item	Code[5]	Pourcentage de réponses par code		
			Total FWB	*Hors ED*	*En ED*
8	8a	1	86 %	87 %	75 %
		8	0 %	0 %	1 %
		0	13 %	12 %	21 %
		9	1 %	0 %	3 %
8	8b	1	46 %	47 %	39 %
		8	5 %	5 %	5 %
		0	47 %	46 %	50 %
		9	3 %	3 %	7 %
8	8c	1	56 %	59 %	35 %
		8	4 %	4 %	3 %
		0	34 %	32 %	45 %
		9	7 %	5 %	17 %

[5] Rappel de la signification des codes : 1 : réponse correcte, 8 : réponse partiellement correcte, 0 : réponse incorrecte, 9 : omission.

8	8d	1	58 %	59 %	47 %
		8	1 %	1 %	0 %
		0	33 %	33 %	34 %
		9	9 %	7 %	19 %
8	8e	1	16 %	17 %	14 %
		8	8 %	8 %	4 %
		0	59 %	60 %	55 %
		9	17 %	15 %	27 %
8	8f	1	13 %	13 %	7 %
		8	5 %	5 %	1 %
		0	68 %	68%	69 %
		9	15 %	14 %	23 %

L'analyse des résultats de cette question permet de constater qu'une large majorité d'élèves (86 %) résolvent correctement l'équation $1 + 4x = 7 - 3x$ qui est exprimée sous une forme « simple ». Dès que l'équation est présentée sous une autre forme, les difficultés semblent plus importantes.

QUESTION 5

RÉSOUS.

$x^2 - 16 = 0$ ☐ 5

QUESTION 12

RÉSOUS.

$x^2 = 25$ ☐ 12

Résultats					
Quest	Item	Code	Pourcentage de réponses par code		
			Total FWB	*Hors ED*	*En ED*
5	8	1	31 %	32 %	25 %
		8	55 %	56 %	48 %
		0	11 %	11 %	18 %
		9	2 %	1 %	8 %
12	12	1	25 %	26 %	18 %
		8	68 %	68 %	65 %
		0	5 %	4 %	11 %
		9	2 %	2 %	6 %

Ces questions paraissent a priori semblables. Toutefois, l'analyse des résultats montre que ce n'est pas si évident :

Croisement des taux de réussite entre les questions 5 et 12		Question 12 $x^2 = 25$		
		Échoué	*Réussi*	
Question 5 $x^2 - 16 = 0$	*Échoué*	65 %	**4 %**	70 %
	Réussi	**10 %**	22 %	31 %
		75 %	25 %	

Le taux de réussite à la question 5 est supérieur à celui de la question 12.

Deux hypothèses peuvent être formulées quant à cette différence de résultats.

D'une part, beaucoup d'élèves ne fournissent qu'une seule réponse car les racines carrées sont souvent introduites dans le contexte du théorème de Pythagore. Comme il s'agit alors de la recherche d'une longueur, on ne prend en compte que la racine carrée positive.

C'est principalement le cas pour la question 12 que l'on peut aisément transformer en $x^2 - 25 = 0$, équation semblable à celle de la question 5. Mais une telle modification n'est pas spontanée chez tous les élèves. On peut supposer que certains élèves voient $x^2 = 25$ comme une équation semblable à celles qu'ils ont couramment rencontrées en appliquant le théorème de Pythagore.

On fait allusion ici à des situations analogues à celle de la question 18 :
« *Calcule la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 3 cm et 4 cm.* ». Pour répondre à une telle question, des élèves travaillent de manière analogue à

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

Cela leur permet de conclure que la longueur de l'hypoténuse est 5. Dans ce problème, x est la longueur de l'hypoténuse et est donc positif, d'où il n'y a pas lieu d'envisager le cas où x serait égal à -5.

Si un certain nombre d'élèves n'ont à ce stade pas encore vu le point du programme de 4e concernant les solutions des équations du type $x^2 = a$, qui leur permettrait de donner immédiatement les deux solutions de l'équation $x^2 = 25$, c'est-à-dire 5 et -5, il y a d'autres occasions de rencontrer de telles équations :

- la résolution d'équations à factoriser pour utiliser la règle du produit nul ;
- la recherche des conditions d'existence de fractions rationnelles ;
- la résolution d'équations fractionnaires.

D'autre part, on peut aussi supposer que l'énoncé de la question 5 étant présenté sous la forme d'une expression factorisable donnée égale à 0, les élèves ont plus facilement associé un tel exercice à des démarches vues en 3e : factoriser, puis appliquer la règle du produit nul.

$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x+4)(x-4) = 0$$
$$x+4=0 \; ou \; x-4=0$$
$$x=-4 \; ou \; x=4$$
$$S=\{-4;4\}$$

C'est notamment en travaillant la résolution d'équations factorisables, la recherche des conditions d'existence de fractions rationnelles et la résolution d'équations fractionnaires que l'élève pourra trouver du sens à la factorisation.

3.2 INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, un nombre important d'élèves ne semblent pas capables de porter un regard analytique préalable à la résolution des équations auxquelles ils sont confrontés. Ainsi, ils appliquent le même traitement automatique quel que soit le type d'équation qu'ils doivent résoudre : ils distribuent d'office là où il faudrait appliquer la règle du produit nul, ils ne recherchent qu'une et une seule solution quand il s'agit d'une équation du second degré. L'enseignant devrait donc amener les élèves à analyser l'équation dans sa globalité afin de reconnaître à quelle famille elle appartient.

3.3 ACTIVITÉS PROPOSÉES

ENJEU DE L'ACTIVITE [6]

L'activité a pour but d'amener les élèves à utiliser la méthode de résolution la mieux adaptée.
Cet objectif est réalisé au départ d'une organisation des équations par familles selon des critères suggérés par les élèves.
Cette méthodologie de classification peut être transférée à d'autres moments de l'apprentissage de l'élève.

CLASSEMENT DES ÉQUATIONS PAR FAMILLES

1° étape (en groupes)

- Distribuer une liste de 40 équations (fiche 7).
- Consigne : sans résoudre, regrouper les équations qui se ressemblent et déterminer sur quels critères se baser.
- Chaque groupe rédige une synthèse à afficher dans la classe.

2° étape (toute la classe)

À partir des productions, l'enseignant rédige avec la classe une synthèse, par exemple sous forme d'un tableau où sont rangées les 40 équations (Annexe 1).

STRATÉGIES DE RÉSOLUTION

1° étape

- Chaque groupe résout les équations de la première colonne et en déduit une stratégie qui sera communiquée à la classe.

[6] Cette activité a été testée dans une classe de 24 élèves de 4° Générale

On procède de la même façon pour chaque colonne sachant qu'au cours de la résolution, une équation peut changer de famille.
- À partir des propositions des élèves, l'enseignant réalise ensuite une synthèse sous forme d'organigramme.

2° étape
- Distribuer une nouvelle série de 20 équations (Fiche 8).
- Consigne : Où classer chaque équation dans l'organigramme ? L'enseignant rassemble les différentes propositions et vérifie s'il y a consensus.

3° étape
- Les élèves complètent l'organigramme par des exemples (Annexe 2).

CONSEILS MÉTHODOLOGIQUES

La difficulté des élèves, dans ce type de démarches, n'est pas de lister des critères de classification mais bien de les hiérarchiser pour une résolution efficace.
À partir des productions des élèves, l'enseignant met en évidence les méthodes les plus rapides, sources de moins d'erreurs.
L'organigramme construit avec la classe sera un outil disponible et utilisable tout au long du parcours de l'élève.
Cette présentation permet une lecture aussi bien linéaire que globale.

Fiche élèves

Fiche 7 : classement d'équations

1. $3x = 2$
2. $1 - x = \frac{2x+3}{4}$
3. $x^2 - 25 = 0$
4. $2(x+1) - 5(x+1) = 0$
5. $-5x + 2x^2 = 0$
6. $3 - 2x = 1$
7. $5x + 3 = 2$
8. $x^2 = 5$
9. $\frac{3x^2}{2} = \frac{2}{3}$
10. $2x - 3 = 5 - 6x$
11. $\frac{6x+2}{4} = 2x$
12. $3 - (2x+5) = 0$
13. $x = \frac{1+x}{2} + \frac{x+3}{4} + \frac{3}{4}$
14. $x^2(1-3x) - 4(1-3x) = 0$
15. $-2x^2 = 7x$
16. $7x(x-1)(2x+5) = 0$
17. $\frac{2x}{3} - 1 = -7$
18. $9 - (2x+5)^2 = 0$
19. $-2x = 1$
20. $-\frac{x-12}{4} + \frac{3x-1}{5} = 2$
21. $3x^2 - 2x = 0$
22. $5(1-x) - 3(x-1) = 0$
23. $\frac{x}{3} = 0$
24. $2x(x+1) - 5(x+1) = 0$
25. $\frac{1-2x}{3} = \frac{2x+1}{2}$
26. $-2x = 0$
27. $(1-2x)x(x+3) = 0$
28. $\frac{x}{3} = \frac{-x}{5}$
29. $(2x-3)(x+2) = 0$
30. $\frac{x^3}{2} = \frac{3x^2}{7}$
31. $2x(x+1) - 5(x+1) = 2$
32. $5x + 3x = 2$
33. $x^2 - 1 = 24$
34. $x + 7 = 5$
35. $2(x+1) - 5(x+1) = 2$
36. $1 - (x-2) = 4 - (3x+2)$
37. $\frac{3x}{2} = \frac{x^2}{5}$
38. $x^3(x+1) - 5x^2(x+1) = 0$
39. $7 = 21x$
40. $(x-3)^2 - 4 =$

Annexe 1 (production de la classe de 4e testée)

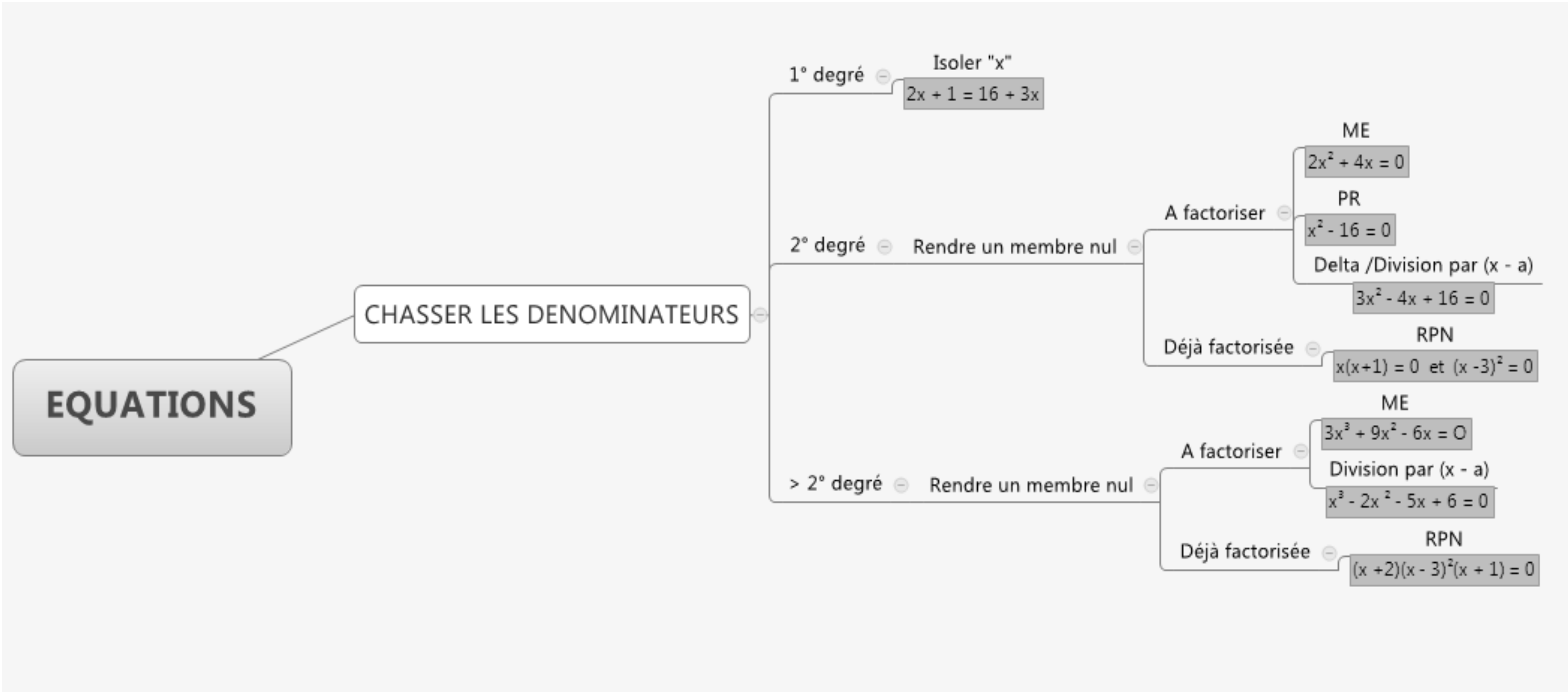
Équations de base, simples, du premier degré	Équations avec fractions	Équations factorisables	Équations produit
Isoler x	Réduire au même dénominateur	Factoriser	Appliquer la règle du produit nul
1, 6, 7, 10, 12, 19, 23, 26, 32, 34, 36, 39 $3x = 2$ $3 - 2x = 1$ $5x + 3 = 2$ $2x - 3 = 5 - 6x$ $3 - (2x + 5) = 0$ $-2x = 1$ $\frac{x}{3} = 0$ $-2x = 0$ $5x + 3x = 2$ $x + 7 = 5$ $1 - (x - 2) = 4 - (3x + 2)$ $7 = 21x$	2, 9, 11, 13, 17, 20, 25, 28, 30, 37 $1 - x = \frac{2x + 3}{4}$ $\frac{3x^2}{2} = \frac{2}{3}$ $x = \frac{1 + x}{2} + \frac{x + 3}{4} + \frac{3}{4}$ $\frac{2x}{3} - 1 = -7$ $-\frac{x - 12}{4} + \frac{3x - 1}{5} = 2$ $\frac{1 - 2x}{3} = \frac{2x + 1}{2}$ $\frac{x}{3} = \frac{-x}{5}$ $\frac{x^3}{2} = \frac{3x^2}{7}$ $\frac{3x}{2} = \frac{x^2}{5}$ $\frac{6x + 2}{4} = 2x$	**<u>ME (mise en évidence)</u>** 4, 5, 14, 15, 21, 22, 24, 35, 38 $2(x + 1) - 5(x + 1) = 0$ $-5x + 2x^2 = 0$ $x^2(1 - 3x) - 4(1 - 3x) = 0$ $-2x^2 = 7x$ $3x^2 - 2x = 0$ $5(1 - x) - 3(x - 1) = O$ $2x(x + 1) - 5(x + 1) = 0$ $2(x + 1) - 5(x + 1) = 2$ $x^3(x + 1) - 5x^2(x + 1) = 0$ **<u>PR (règle du produit nul)</u>** 3, 8, 18, 33, 40 $x^2 - 25 = 0$ $x^2 = 5$ $9 - (2x + 5)^2 = 0$ $x^2 - 1 = 24$ $(x - 3)^2 - 4 = 0$ **<u>Delta</u>** 31 $2x(x + 1) - 5(x + 1) = 2$	16, 27, 29 $7x(x - 1)(2x + 5) = 0$ $(1 - 2x)x(x + 3) = 0$ $(2x - 3)(x + 2) = 0$

Fiche élèves

Fiche 8 : classement d'équations

1. $\frac{x}{2} = 25$
2. $1+\frac{x}{2}+\frac{x}{5} = 4$
3. $3-(2x+5) = 4x$
4. $7x^3 = 0$
5. $\frac{x}{5} = \frac{7}{2} - \frac{3x-1}{10}$
6. $-7x = -3$
7. $6x-3 = 3(5x-2)$
8. $(x+3)^2 = 7(x+3)$
9. $3-2x = 1+x$
10. $-143 = \frac{x}{7}$
11. $x^2 = \frac{1-x}{2} + \frac{3}{2}$
12. $x^3 = 9x$
13. $x(x+1) = 2x+2$
14. $x^3 + 2x^2 - 5x = 6x$
15. $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{7}{6}$
16. $x(x+1) = 2x+1$
17. $(-x+1)^2 = 225$
18. $x = -\frac{x+1}{3} - \frac{x+1}{9} - \frac{4}{27}$
19. $(x-9)^2 = 16$
20. $-\frac{5(x-1)}{7} = \frac{5}{49}$

Annexe 2 (production des élèves de la classe testée)



ME = mise en évidence

PR = produit remarquable

RPN = règle du produit nul

3. Solutions d’équations

3.1. LES CONSTATS ISSUS DE L’ÉPREUVE

L’analyse de certaines questions de l’évaluation externe non certificative de 4e secondaire met en évidence un problème lié au sens donné par les élèves au concept de « solution d’une équation ». Plus précisément, les résultats aux questions 6, 7, 9 et 11 révèlent les difficultés des élèves quant à la compréhension des notions d’équation indéterminée, d’équation impossible mais également quant à l’expression « est solution de ».

QUESTION 6

COCHE la proposition correcte

Une équation impossible est une équation qui

☐ admet une seule solution.

☐ admet une infinité de solutions.

☐ n’admet aucune solution.

☐ 6

QUESTION 7

Pour <u>chacune</u> des propositions, **ENTOURE** OUI ou NON.

2 est solution de			
$12x - 4 = 10x$	OUI	NON	☐ 7a
$x + 2 = 2$	OUI	NON	☐ 7b
$x - 2 = -(x - 2)$	OUI	NON	☐ 7c
$0x = 0$	OUI	NON	☐ 7d
$\frac{x}{2} = 0$	OUI	NON	☐ 7e

QUESTION 9

Pour chacune des équations, **COCHE** la proposition correcte.

$0x = 0$	
☐ a une infinité de solutions.	
☐ a 0 pour seule solution.	
☐ a 1 pour seule solution.	☐ 9a
☐ a une seule solution qui n'est ni 0, ni 1.	
☐ n'a pas de solution.	

$2x = 2$	
☐ a une infinité de solutions.	
☐ a 0 pour seule solution.	
☐ a 1 pour seule solution.	☐ 9b
☐ a une seule solution qui n'est ni 0, ni 1.	
☐ n'a pas de solution.	

$0x = -7$	
☐ a une infinité de solutions.	
☐ a 0 pour seule solution.	
☐ a 1 pour seule solution.	☐ 9c
☐ a une seule solution qui n'est ni 0, ni 1.	
☐ n'a pas de solution.	

$5x = 0$	
☐ a une infinité de solutions.	
☐ a 0 pour seule solution.	
☐ a 1 pour seule solution.	☐ 9d
☐ a une seule solution qui n'est ni 0, ni 1.	
☐ n'a pas de solution.	

$3\ (x - 1) = 0$	
☐ a une infinité de solutions.	
☐ a 0 pour seule solution.	
☐ a 1 pour seule solution.	☐ 9e
☐ a une seule solution qui n'est ni 0, ni 1.	
☐ n'a pas de solution.	

QUESTION 11

COCHE la proposition correcte.

Une équation indéterminée est une équation qui

☐ admet une seule solution.

☐ admet une infinité de solutions. ☐ 11

☐ n'admet aucune solution.

Les items 6, 9a, 9c et 11 permettent d'évaluer distinctement la connaissance des définitions de notions d'équation impossible (item 6) et d'équation indéterminée (item 11) ainsi que la compréhension de ce type d'équations (items 9a et 9c). Les deux tableaux ci-dessous croisent certains résultats à ces items.

Tableau 4.2 a – Croisement des taux de réussite entre la connaissance de la définition d'une équation impossible et son application		Compréhension de la notion (item 9c)		
		Échoué	*Réussi*	
Connaissance définition (Item 6)	*Échoué*	3 %	5 %	8 %
	Réussi	22 %	70 %	**92 %**
		25 %	**75 %**	

Si 92 % des élèves sont capables de préciser qu'une équation impossible n'a pas de solution, ceux capables de dire que $0x - 7 = 0$ n'a pas de solution ne sont que 76 %. Près d'un quart des élèves (22 %) peuvent reconnaitre la définition d'une équation impossible sans être capables d'en identifier une.

Tableau 4.2 b – Croisement des taux de réussite entre la connaissance de la définition d'une équation indéterminée et son application		Compréhension de la notion (item 9a)		
		Échoué	*Réussi*	
Connaissance définition (Item 11)	*Échoué*	8 %	3 %	11 %
	Réussi	49 %	40 %	**89 %**
		57 %	**43 %**	

On retrouve le même type de constat pour la notion d'équation indéterminée. Si 89 % des élèves sont capables de préciser sa définition, ceux qui sont capables de dire que $0x = 0$ a une infinité de solutions ne sont que 43 %. La moitié des élèves reconnaissent la définition d'une équation indéterminée sans être capables d'en identifier une.
Ce constat rejoint l'analyse des résultats aux questions 7 et 9.

Item	Code	Pourcentage de réponses par code		
		Total FWB	*Hors ED*	*En ED*
7a	1	**79 %**	81 %	69 %
7b	1	**93 %**	93 %	89 %
7c	1	**63 %**	64 %	57 %
7d	1	**49 %**	48 %	50 %
7e	1	**78 %**	78 %	78 %

Item	Code	Pourcentage de réponses par code		
		Total FWB	*Hors ED*	*En ED*
9a	1	**43 %**	44 %	36 %
9b	1	**89 %**	90 %	81 %
9c	1	**75 %**	77 %	67 %
9d	1	**80 %**	80 %	78 %
9e	1	**69 %**	72 %	52 %

Pour les items 7a, 7b et 7e, remplacer x par 2 et voir si l'équation est vérifiée ne semble pas trop mettre les élèves en difficulté.

Cela semble moins évident pour l'équation 7c dans laquelle, si on remplace directement x par 2, on obtient $0 = -0$. Cela ne semble pas clair pour les élèves que 0 soit égal à son opposé.

Quant à l'équation 7d pour laquelle seuls 49 % des élèves estiment que 2 en est solution, il est opportun de se demander ce qui a posé problème.
À la question 9, on constate aussi que le seul item qui a véritablement posé problème porte sur une équation indéterminée (item 9a).
D'ailleurs, si l'on croise les résultats à l'item 7d qui demandait si *2* est solution de $0x = 0$ avec ceux de l'item 9a, seulement 28 % réussissent l'ensemble.

3.2. INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Deux axes seront privilégiés dans les activités proposées dans cette partie. D'une part, les notions d'équations impossibles et d'équations indéterminées et, d'autre part, le sens donné à l'expression « est solution de ».

<u>Équation impossible et équation indéterminée</u>

Si les élèves peuvent reconnaitre les définitions d'équation impossible et d'équation indéterminée (questions 6 et 11), les choses se compliquent lorsqu'il s'agit de répondre à des questions relatives aux solutions d'équations de ce type (question 9).

Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble des nombres qui la transforment en une égalité vraie.
Pour les équations du type $0x = a$, l'élève doit se rappeler que « 0 » est absorbant pour la multiplication et que, dès lors, quelle que soit la valeur de l'inconnue x le résultat de son produit par « 0 » est toujours nul.
Dans le cas de l'équation indéterminée $0x = 0$, l'égalité est donc toujours vraie. Il peut donc conclure qu'il y a une infinité de solutions, il indiquera $S = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ suivant les cas).
Dans le cas de l'équation impossible $0x = a$ avec $a \neq 0$, aucune valeur de l'inconnue ne transforme l'équation en une égalité vraie. L'élève peut donc conclure qu'il n'y a pas de solution, il indiquera $S = \varnothing$.

Il va de soi que les notions, procédures ou notations telles que :

- solution(s) d'une équation,
- ensemble des solutions,
- vérifier si un nombre est solution d'une équation,
- la signification de « 0 est absorbant pour la multiplication »,
- la notation de l'ensemble vide ($\varnothing = \{ \}$ et $\varnothing \neq \{0\}$)

devraient être maitrisées à la fin du premier degré et réactivées dans le deuxième.

L'élève devrait régulièrement être amené à verbaliser son raisonnement.

Cela permettrait de faire réfléchir l'élève sur la différence entre « *on ne peut pas diviser par 0* » et « *l'équation est impossible* ».

Pour ne pas que les équations impossibles et indéterminées apparaissent seulement en fin d'apprentissage comme des équations particulières, ne faudrait-il pas dès le début de l'apprentissage intégrer des mises en équation avec ces cas de figure ?

Dans la classification habituelle des équations, ces deux cas sont considérés comme des cas particuliers de l'équation générale $ax + b = 0$.

On pourrait envisager une autre classification des équations, par exemple en fonction du nombre de solutions qu'elles admettent :

Combien de solutions a une équation de la forme : $ax + b = 0$?

1er cas : l'équation n'admet **aucune solution**

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors

$$S = \varnothing$$

L'équation est impossible car aucun nombre ne peut la transformer en une égalité vraie.

2e cas : l'équation admet **une seule solution**

Si $a \neq 0$, alors

$$S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$$

L'équation admet $\frac{-b}{a}$ comme seule solution car seul ce nombre la transforme en une égalité vraie

3e cas : l'équation admet **une infinité de solutions**

Si $a = 0$ et $b = 0$, alors

$$S = \mathrm{R}$$

L'équation est indéterminée car tous les nombres la transforment en une égalité vraie.

Les équations seraient ainsi classées en fonction du nombre de solutions qu'elles admettent, tout comme celles du second degré.

Cette classification ne permet néanmoins pas de faire ressortir le cas de la solution $S = \{0\}$, qui est parfois confondue avec $S = \varnothing$ dans l'esprit des élèves.

On peut alors proposer une autre classification en fonction des valeurs des coefficients *a* et *b* :

$ax + b = 0$	Si $b = 0$	Si $b \neq 0$
Si $a = 0$	$S = \mathrm{R}$	$S = \varnothing$
Si $a \neq 0$	$S = \{0\}$	$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Ces deux classifications ne sont pas incompatibles, l'une n'excluant pas l'autre.

Compréhension « est solution de »

Est-ce le fait de « remplacer x par 2 » et de voir si « $0 \cdot 2 = 0$ » ou est-ce le fait de se dire que $0x = 0$ est une équation particulière qui admet une infinité de solutions qui a posé problème ?
Les élèves n'ont-ils pas confondu « *2 est solution de* » avec « *2 est **la** seule solution de* » ? Font-ils bien la nuance entre ces deux questions ?
Certains élèves interprètent peut-être que « *2 est-il solution de ... ?* » comme « *2 est-il la réponse attendue par le professeur quand il demande de résoudre l'équation ...?* ». Dans ce cas, l'élève estime que R est solution de l'équation $0 \cdot x = 0$ mais que 2 ne l'est pas.
Il est donc judicieux de se demander si l'expression « *est solution de* » est bien comprise par les élèves.

Pour tous les items de la question 7, on peut également supposer que certains élèves n'auraient pas remplacé x par 2 et auraient résolu les différentes équations. Dans le cas de l'item 7d), cette méthode aurait conduit à un ensemble de solution $S = \mathrm{R}$ où on ne voit pas clairement apparaître la solution 2.
La verbalisation par l'enseignant et les élèves des objectifs et résultats de la démarche effectuée nous paraît importante pour dépasser le côté uniquement technique de la résolution d'équations.
Il paraît dès lors judicieux de faire régulièrement en classe avec les élèves la vérification des solutions des équations. Cela rend du sens à la notion de « être solution de … ».

3.3 ACTIVITÉS

L'objectif des deux premières activités (Fiche 9) est de faire réfléchir l'élève sur le nombre de solutions de différentes équations sans les résoudre et ainsi de bien distinguer les équations indéterminées et les équations impossibles des autres équations.

Les élèves réaliseront ce travail individuellement puis une discussion collective enrichira leurs réflexions.

L'activité 1 propose, sans les résoudre totalement, de déterminer le nombre de solutions d'équations du premier degré de manière à bien distinguer équation impossible, équation indéterminée et équation admettant une seule solution**.**

L'activité 2 demande de déterminer, sans les résoudre totalement, le nombre de solutions d'équations du premier ou du deuxième degré.

Dans le cadre de la résolution de problèmes, il est intéressant d'insérer des problèmes dont la mise en équation débouche sur une équation impossible ou indéterminée. La fiche 10 propose de tels problèmes.

La fiche 11 propose d'écrire des équations sur base de leurs solutions au travers de trois activités distinctes.

La fiche 12 est un exercice du même type que celui de la question 7 de l'épreuve.

Une activité intéressante à faire avec les élèves est de ne pas se limiter à « résoudre l'équation » mais de mener une véritable réflexion centrée sur les transformations algébriques.
Pour cela, nous proposons l'annexe 3 qui reprend l'entretien du « faire faux » repris des pistes didactiques de l'évaluation externe non certificative en 2e année de l'enseignement secondaire (2008).

Enfin, en annexe 4, vous trouverez une analyse relative au repérage d'une erreur (question 10 de l'épreuve).

Fiche 9 : Nombre de solutions d'une équation

Sans résoudre complètement ces équations du premier degré, détermine le nombre de solutions qu'elles admettent.

$0x = 0$

$4(x - 2) = 0$

$5x = 0$

$0x = -9$

$5x = 5$

$2x + x + 4 = 3x - 2$

$x = 2$

$3x + 1 = 0$

$3(x + 1) = 0$

$5x - 2 = 9$

$x + 2 = x + 3$

$4x + 4 = 3x + x - 1 + 5$

$5x = 7x - 2x$

Sans résoudre complètement ces équations, détermine le nombre de solutions qu'elles admettent.

$-2x+7=4(x-5)+(-6x)$

$5x-(3x+12)=(-2)\cdot(6-x)$

$-3x+7=(-2)\cdot(6-x)$

$2\cdot(3x-4)=6x+8$

$x(2-x)=1$

$x(2-x)=0$

$x^2=49$

$x^2=0$

$x^2=-49$

$(x+2)^2=0$

$2x^2=0$

Fiche élèves

Fiche 10 : Résolution de problèmes

- Le quintuple d'un nombre augmenté de 5 égale la somme de son triple et de son double.
  DÉTERMINE ce nombre.

- **DÉTERMINE** la mesure d'une longueur si, en la soustrayant de son quadruple, on obtient la même mesure que si on l'ajoute à son double.

- **DÉTERMINE** les nombres dont le produit par 0 vaut -7.

- Raphaël dit que le quadruple de l'âge qu'il aura dans 12 ans vaut 50 ans de plus que le quadruple de l'âge qu'il avait il y a 2 ans.
  DÉTERMINE l'âge de Raphaël.

Fiche élèves

Fiche 11 : Écrire une équation

1. **ÉCRIS** deux équations du premier degré à une inconnue dont la solution est

   a) 0

   b) -4

   c) 8

   d) $1{,}8$

   e) $\frac{7}{9}$

2. **ÉCRIS** une équation du premier degré dont tous les nombres proposés dans l'activité précédente sont solutions.

3. **ÉCRIS** une équation qui

   a) admet 1 et 3 comme seules solutions ;

   b) admet 1 et 3 comme solutions ;

   c) admet une infinité de solutions ;

   d) admet pour ensemble de solutions $S = \{0;3;-4\}$;

   e) n'admet pas de solution ;

   f) admet exactement 2 solutions distinctes ;

   g) admet -5 comme solution.

Fiche élèves

Fiche 12 : Solution de l'équation ?

Pour chacune des équations suivantes, **RÉPONDS** aux questions a, b, c ci-dessous

a) Admet-elle -3 comme solution ? Justifie.
b) Admet-elle -3 comme unique solution ? Justifie.
c) Admet-elle 0 comme solution ? Justifie.

$x^2 - 9 = 0$

$0x = 0$

$3x = 0$

$2x + 6 = 0$

$3x - 5 = 2x - 8$

$9 - 5x = 7 - 3x$

$x - 3 = 0$

$x^2 = x^2$

$x - 1 = -(x + 2) + 1$

Annexe 3 L'entretien du « faire faux »[7]: véritable réflexion centrée sur les transformations algébriques.

La technique d'entretien du *faire faux* a été développée par une équipe d'enseignants-chercheurs français : Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997).

L'entretien s'organise en deux étapes.

- Tout d'abord, on propose à l'élève une expression algébrique à développer et on lui demande de produire une expression qui, à coup sûr, ne sera pas égale à celle proposée par l'enseignant.

- Ensuite, on lui demande si ce qu'il a proposé est toujours faux. Et à ce moment, s'enclenche un dialogue entre l'élève et l'enseignant basé sur un calcul de valeur numérique ou la résolution d'équation.

Exemple de dialogue :

(P est l'enseignant, E est l'élève)

P : *Donne-moi un peu une expression qui n'est jamais égale à* $3\cdot(x+4)$.

E : $4\cdot(x+4)$

P : *Est-ce que l'égalité fausse que tu as produite est toujours fausse ?*

E : *Euh, oui, puisque dans un cas, on en prend 3 et dans l'autre, 4. Si par exemple* x *vaut 1, on a 3 fois 5 d'un côté et 4 fois 5 de l'autre.*

P : *N'est-il jamais possible de prendre 3 fois un nombre et 4 fois un nombre et d'obtenir la même chose ?*

E : *C'est presque toujours le cas, sauf si on prend 0 : 3 fois 0 et 4 fois 0, c'est quand même 0.*

P : *Et donc, quelle valeur dois-tu donner à* x *pour que les deux expressions soient égales ?*

E : *Bien euh,* -4*, comme ça* $x+4$*, ça donnera bien 0.*

Cette technique d'entretien présente plusieurs intérêts :

1) Le fait de demander aux élèves de produire quelque chose de faux plonge l'élève dans une situation tout à fait nouvelle : habituellement, il justifie les transformations algébriques en citant une règle apprise (on n'additionne que des termes semblables, il faut distribuer le facteur sur chacun des termes,…) ; or, dans ce cas, l'élève n'a jamais appris à produire quelque chose de faux. Il est donc obligé de rentrer pleinement dans une réflexion mathématique (très souvent, la première réponse produite par l'élève consiste à modifier un signe d'opération ou un coefficient numérique). Dans l'extrait d'entretien ci-dessus, on voit que s'enclenche très vite une réflexion mathématique (sur le rôle du zéro dans la multiplication, puis, par la suite sur la résolution d'une équation).

2) Les élèves doivent pleinement donner du sens aux expressions algébriques. Ils rencontrent, lors de cet entretien, deux statuts différents de la lettre. Dans un premier temps, la lettre a un statut d'indéterminée. Ensuite, lorsqu'il se pose la question de savoir si l'égalité produite sera toujours fausse, la lettre acquiert le statut d'inconnue spécifique, on cherche alors la valeur de l'inconnue qui rendra l'égalité vraie.

[7] Extrait des pistes didactiques 2e secondaire mathématiques 2008

3) Cette technique peut amener les élèves à verbaliser que les transformations algébriques correctes ont cette particularité de conserver l'égalité dans tous les cas, quelles que soient les valeurs attribuées à la lettre. A l'inverse, dans les équations, l'égalité n'est conservée que pour certaines valeurs attribuées aux lettres. Cette connaissance, si elle peut paraître élémentaire aux enseignants, est loin d'être une évidence pour les élèves débutant en algèbre.

Toutefois, cet entretien du faire faux n'est pas la panacée. Les auteurs soulignent d'ailleurs à cet égard que « pour certains élèves, ça ne donne rien ». Il faut en effet que l'élève accepte en quelque sorte de « jouer le jeu » : il est amené, dans ce type de situation, à devoir penser par lui-même, sans avoir une démarche à laquelle se raccrocher d'emblée. Le rôle de l'enseignant est ici primordial car il doit vraiment adapter ses interventions aux réactions de l'élève : il s'agit de le laisser penser et d'accompagner l'élève pour que lui-même apprenne à s'observer penser et agir, ce qui, nous l'espérons, l'amènera vers une plus grande autonomie de pensée…

Il s'agit donc d'un entretien qui peut réellement donner ses fruits en situation de remédiation individualisée. Il n'est évidemment pas incompatible avec des démarches d'apprentissage plus collectives mais, à partir du moment où les interventions de l'enseignant suivent véritablement la pensée de l'élève, il est difficile de généraliser ce type d'approche à une classe entière.

Annexe 4 **Repérage d'une erreur de résolution**

QUESTION 10

Un élève a commis une erreur dans la résolution de l'équation ci-dessous.
ENTOURE la ligne où il s'est trompé.
Attention, on ne te demande pas de résoudre cette équation !

$$3x + 6 - 2 = 5x + 8$$

$$3x + 4 = 5x + 8$$

$$3x + 4 - 5x = 5x + 8 - 5x$$

$$-2x + 4 = 8$$

$$-2x = 8 - 4$$

$$-2x = 4$$

$$x = 4 + 2$$

$$x = 6$$

Question	Item	Code 1	Total[8] FWB	Hors ED	ED
10	10	1	64 %	67 %	41 %
		0	35 %	32 %	59 %
		9	0 %	0 %	0 %

La question 10 demandait de repérer une erreur dans la démarche de résolution d'équation : $-2x = 4$ devient $x + 4 = 2$. Seulement 64% des élèves repèrent bien l'erreur. Une analyse des productions au prétest indique qu'un nombre non négligeable d'élèves considèrent comme erroné le fait de soustraire un même terme littéral de chaque membre.

Le fait que de nombreux élèves entourent la deuxième ligne après celle de l'énoncé mérite réflexion. Il est probable que, s'ils avaient dû résoudre cette équation, la plupart des élèves auraient spontanément écrit cette ligne comme suit :

$$3x + 4 - 5x = 8$$

En soi, ce n'est pas critiquable : cela prouve qu'ils ont automatisé une procédure. Ce qui serait plus gênant, c'est que des élèves appliquent une telle procédure sans être capables de la comprendre et de la justifier.
Les élèves qui ont entouré la deuxième ligne comme comportant une faute sont probablement dans ce cas.

Encore qu'il faille rester prudent : certains élèves ont pu simplement considérer que dans une telle équation il y a lieu d'appliquer la procédure acquise, directe et efficace. Ils ont pu en effet estimer qu'une telle manipulation plus lourde serait le reflet d'un manque de connaissance de la procédure, amenant un détour « inutile » qui constitue en soi une « faute ».

[8] Les pourcentages ayant été arrondis, il arrive que les totaux ne fassent pas exactement 100 %.

Nous pouvons encore ajouter que lorsque l'inconnue se trouve dans les deux membres de l'équation, l'élève doit effectuer des neutralisations avec des expressions littérales alors que lors de l'apprentissage de la résolution, les neutralisations se limitent à du calcul numérique.

Généralement, l'apprentissage de la technique de résolution d'équation s'effectue en trois étapes :

- $x + a = b$, l'élève apprend à neutraliser a en ajoutant son opposé aux deux membres de l'équation.

  Malheureusement, la verbalisation de cette manipulation devient à tort : « *lorsqu'un nombre change de membre alors il change de signe*».

- $ax = b$, l'élève apprend à neutraliser a en multipliant les deux membres de l'équation par l'inverse de a ou en divisant les deux membres par a.

- $ax + b = c$, l'élève doit neutraliser le terme et ensuite le facteur, cet ordre étant la conséquence des règles de priorités.

Dans tous les cas, l'élève « neutralise » avec des nombres et non avec des expressions littérales. Il serait utile de rapidement le confronter à des équations comportant l'inconnue dans les deux membres.

Comment expliquer que certains élèves n'ont pas identifié la ligne fautive ?
Ceux qui n'ont pas été habitués à reconnaitre que, dans la première égalité reprise ci-dessous, -2 est un facteur et, dans la seconde, 2 est un terme, continueront donc à appliquer : « *lorsqu'un nombre change de membre alors il change de signe*» et poursuivront à écrire

$$-2x = 4$$

$$x = 4 + 2$$

Il ressort donc que si la verbalisation est importante lors de la résolution d'équation, il faut qu'elle soit correcte !
L'élève pourrait d'abord analyser s'il « neutralise » un terme ou un facteur, puis en déduire la procédure.

L'expression inappropriée : « *lorsqu'un nombre change de membre alors il change de signe*» devrait être abandonnée. Il y a d'autres expressions encore plus floues souvent utilisées par certains élèves qui donnent encore moins d'éclairage sur les opérations mathématiques utilisées :

- « *On fait passer le nombre de l'autre côté* ». Le « *faire passer* » peut signifier à la fois additionner, soustraire, multiplier ou diviser.

- « *Faire passer le nombre au-dessus*». Cela signifie pour certains élèves : « *transformer une puissance au dénominateur en une puissance avec un exposant négatif* ».

- «*Faire passer le nombre devant* » au lieu de « *mettre en évidence* ».

4. Trigonométrie

4.1 CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Parmi les questions composant l'épreuve administrée en 4S à l'automne 2014, plusieurs ciblaient la trigonométrie, D'une part, des exercices ciblaient le théorème de Pythagore et, d'autre part, des questions ciblaient les nombres trigonométriques dans un triangle rectangle.

Voici ces différentes questions suivies de leurs résultats.

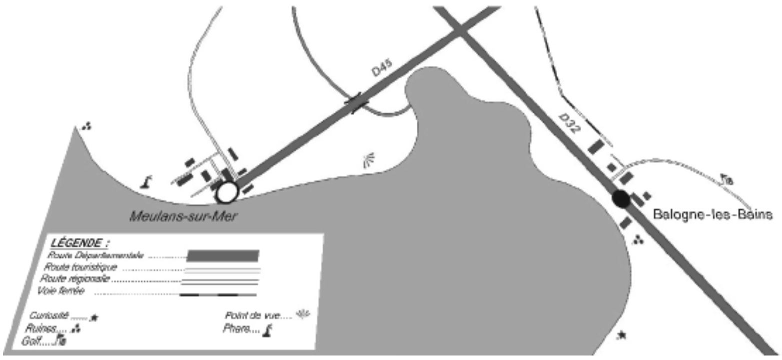
QUESTION 3

Pierre doit aller de la station balnéaire de Balogne-les-Bains à celle de Meulans-sur-Mer.
Pour ce faire il hésite à prendre son vélo ou son bateau à moteur.

Avec son vélo, il doit prendre la route D32 sur 6 km, puis la route D45 sur 8 km.
Ces deux routes se croisent à angle droit.

À vélo, il roule en moyenne à du 20 km/h.

Avec son bateau, il peut faire le déplacement en ligne droite, mais il n'avance qu'à la vitesse de 12 km/h.



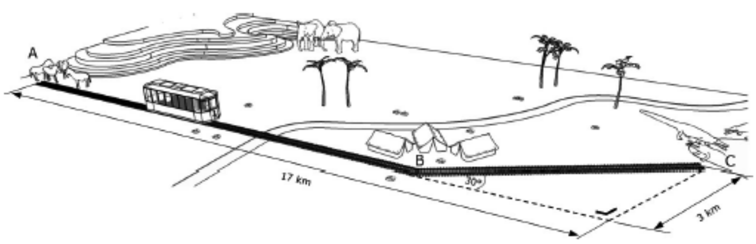
Avec lequel de ces deux moyens de déplacement arrivera-t-il le plus vite ? ☐ 3a

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs. ☐ 3b

QUESTION 4

Au parc naturel d'Arthurville, un projet de voie ferrée est à l'étude.

La voie reliera l'enclos des ânes (A), le bivouac (B) et la fosse aux crocodiles (C) comme indiqué sur le croquis ci-dessous.

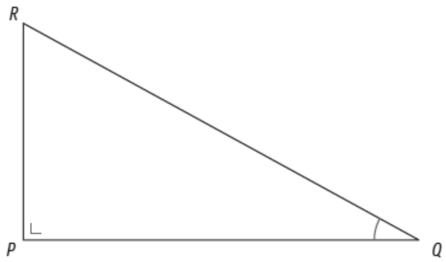


☐ 4a

DÉTERMINE la longueur de la voie ferrée (donne la valeur arrondie au dixième de km près). ☐ 4b

ÉCRIS ton raisonnement et tes calculs.

QUESTION 16



COCHE la bonne réponse parmi les six propositions données.

sin $\hat{Q}$					
$\frac{\lvert PQ\rvert}{\lvert RQ\rvert}$	$\frac{\lvert PQ\rvert}{\lvert PR\rvert}$	$\frac{\lvert PR\rvert}{\lvert PQ\rvert}$	$\frac{\lvert PR\rvert}{\lvert RQ\rvert}$	$\frac{\lvert RQ\rvert}{\lvert PQ\rvert}$	$\frac{\lvert RQ\rvert}{\lvert PR\rvert}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

☐ 16a

cos $\hat{Q}$					
$\frac{\lvert PQ\rvert}{\lvert RQ\rvert}$	$\frac{\lvert PQ\rvert}{\lvert PR\rvert}$	$\frac{\lvert PR\rvert}{\lvert PQ\rvert}$	$\frac{\lvert PR\rvert}{\lvert RQ\rvert}$	$\frac{\lvert RQ\rvert}{\lvert PQ\rvert}$	$\frac{\lvert RQ\rvert}{\lvert PR\rvert}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

☐ 16b

tan $\hat{Q}$					
$\frac{\lvert PQ\rvert}{\lvert RQ\rvert}$	$\frac{\lvert PQ\rvert}{\lvert PR\rvert}$	$\frac{\lvert PR\rvert}{\lvert PQ\rvert}$	$\frac{\lvert PR\rvert}{\lvert RQ\rvert}$	$\frac{\lvert RQ\rvert}{\lvert PQ\rvert}$	$\frac{\lvert RQ\rvert}{\lvert PR\rvert}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

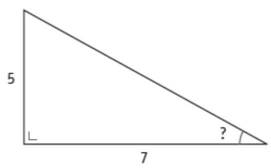
☐ 16c

QUESTION 17

Attention : dans les figures suivantes, les mesures ne sont pas respectées.

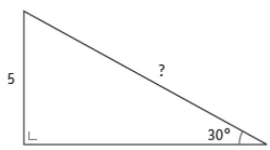
Pour chacune des figures suivantes, **CALCULE** l'élément inconnu réprésenté par « ? ».

ÉCRIS tes réponses au centième près.



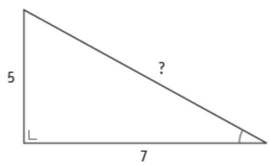
Réponse : ____ , ____ °

☐ 17a



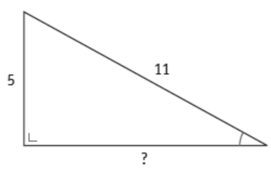
Réponse : ________

☐ 17b



Réponse : ________

☐ 17c



Réponse : ________

☐ 17d

QUESTION 18

CALCULE la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 3 cm et 4 cm. ☐ 18

QUESTION 19

Dans un triangle rectangle, **CALCULE** l'amplitude de l'angle opposé à un côté de 1 cm de longueur, si l'on sait que la longueur de l'hypoténuse est de 3 cm. ☐ 19

Résultats pour les items faisant intervenir le théorème de Pythagore ou la trigonométrie du triangle rectangle[9]					
Quest	Item	Code[10]	Pourcentage de réponses par code		
			Total FWB	*Hors ED*	*En ED*
3	3a	1	52 %	55 %	27 %
		0	30 %	29 %	38 %
		9	19 %	17 %	35 %
	3b	1	41 %	44 %	19 %
		8	13 %	13 %	14 %
		0	27 %	27 %	31 %
		9	19 %	16 %	35 %
4	4a	1	24 %	26 %	11 %
		0	29 %	30 %	24 %
		9	46 %	44 %	65 %
	4b	1	16 %	18 %	4 %
		8	3 %	3 %	3 %
		0	30 %	31 %	22 %
		9	51 %	48 %	72 %
16	16a	1	68 %	70 %	49 %
		0	22 %	22 %	27 %
		9	10 %	8 %	25 %
	16b	1	68 %	70 %	49 %
		0	22 %	22%	25 %
		9	10 %	8 %	26 %
	16c	1	67 %	69 %	48 %
		0	22 %	22 %	26 %
		9	11 %	9 %	25 %

[9] Tous les pourcentages présentés ont été arrondis et il arrive que leur somme ne soit pas exactement 100 %.
[10] Rappel de la signification des codes : 1 : réponse correcte, 8 : réponse partiellement correcte, 0 : réponse incorrecte, 9 : omission.

17	17a	1	32 %	33 %	22 %
		8	4 %	4 %	2 %
		0	32 %	33 %	28 %
		9	32 %	30 %	47 %
	17b	1	29 %	31 %	14 %
		8	3 %	4 %	0 %
		0	27 %	27 %	26 %
		9	41 %	38 %	25 %
	17c	1	58 %	61 %	38 %
		8	1 %	2 %	1 %
		0	21 %	21 %	20 %
		9	20 %	17 %	41 %
	17d	1	54 %	56 %	37 %
		8	1 %	1 %	2 %
		0	22 %	23 %	20 %
		9	22 %	20 %	41 %
18	18	1	77 %	78 %	66 %
		8	2 %	2 %	3 %
		0	12 %	12 %	16 %
		9	8 %	7 %	16 %
19	19	1	28 %	29 %	16 %
		8	6 %	6 %	1 %
		0	32 %	33 %	28 %
		9	34 %	32 %	55 %

Si le théorème de Pythagore a été globalement assimilé par les élèves, les nombres trigonométriques dans le triangle rectangle posent problème.

En analysant plus finement les résultats et en comparant ceux obtenus pour le sinus - item 16a, item 17b, item19 - c'est-à-dire connaitre la formule, savoir l'appliquer hors contexte, savoir l'appliquer en contexte – le groupe de travail a constaté que parmi ceux qui connaissent la formule, 41 % savent l'appliquer hors contexte et 39 % savent l'appliquer en contexte. Seuls 26 % savent l'appliquer dans les deux cas.

De même, en comparant les résultats obtenus pour la tangente - item 16 c, item 17 a c'est-à-dire connaitre la formule, savoir l'appliquer hors contexte - seuls 44 % des élèves qui connaissaient la formule ont pu l'appliquer hors contexte.

Un certain nombre d'élèves savent appliquer la formule calculant des nombres trigonométriques mais éprouvent des difficultés à déterminer l'amplitude de l'angle.

Concernant l'exercice 4, seulement 16 % des élèves ont su résoudre la totalité du problème. Quelques-uns ont mal interprété le schéma (mauvaise lecture des 17 km).

4.2 INTENTIONS ET COMMENTAIRES

À l'analyse, plusieurs difficultés peuvent être mises en évidence :

- une incompréhension des formules (notion de côté opposé, de côté adjacent ou problème des situations non prototypiques, variété des représentations) ;
- des difficultés de mémorisation des formules (confusion entre les nombres trigonométriques) ;
- des difficultés de rechercher l'amplitude d'un angle dont on connait un de ses nombres trigonométriques ;
- des difficultés de transformation de formules (isoler l'inconnue) ;
- des difficultés à les appliquer dans un problème simple ;
- des difficultés à comprendre un problème complexe.

C'est sur ces difficultés que se centrent les activités proposées ci-dessous.

4.3 ACTIVITÉS PROPOSÉES

Les fiches 13 à 18 concernent les triangles rectangles. La fiche 19 est relative aux triangles quelconques.

La fiche 13 propose de travailler les termes utilisés dans la définition des nombres trigonométriques (côté opposé, coté adjacent, hypoténuse)

La fiche 14 permet de travailler la définition des nombres trigonométriques dans des situations non prototypiques.

Dans ces deux premières fiches, on a varié, d'une part, les notations utilisées pour les angles, les côtés, les sommets et, d'autre part, les positions des triangles rectangles (situations non prototypiques).

La fiche 15 propose de rechercher l'amplitude d'un angle connaissant les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle. Elle débute par un exercice de recherche de l'amplitude d'un angle dont on connait un de ses nombres trigonométriques.

La fiche 16 porte sur la recherche de la longueur d'un côté connaissant l'amplitude d'un angle et la longueur d'un côté de l'angle droit ou de l'hypoténuse. Elle commence par des exercices de transformation de formules utiles à la résolution de triangles.

Les fiches 17 et 18 proposent des exercices de résolution de problèmes.

Pour ces deux dernières fiches, il est important, d'**aider les étudiants qui n'ont pas pu résoudre un problème complexe.** A cette fin, le professeur peut leur demander de

1. réfléchir au problème qui a été posé sans le support de l'énoncé ;
2. le raconter ;
3. relire l'énoncé et le comprendre mentalement ;
4. le raconter ;
5. écrire les données importantes ;
6. verbaliser ce qui est demandé et faire un schéma l'illustrant ;
7. élaborer une tactique de résolution sans faire le moindre calcul mais en écrivant les formules qui seront utilisées ;
8. écrire cette tactique ;
9. calculer chaque élément et les assembler si nécessaire.

Lors d'une remédiation en petit groupe, il est intéressant d'aider l'élève à identifier ses faiblesses. Pour ce faire, il peut être opportun de lui donner la fiche outil[11] lors de l'étape 3 et de lui proposer de cocher les propositions qui lui correspondent. De plus, cet outil peut permettre au professeur de dégager des pistes afin d'aider l'élève à surmonter ses difficultés.

Enfin, la fiche 19 propose une extension aux triangles quelconques.

Les démarches de résolution de problèmes ci-dessus peuvent s'appliquer à tout problème.

---

[11] Cette fiche outil est une adaptation d'une feuille produite par Monsieur Escoyez, professeur à l'Institut technique libre d'Ath.

Fiche 13 : Notion de côté opposé, de côté adjacent et d'hypoténuse

ENTOURE, dans la liste suivante, les mots qui te semblent être synonymes du terme « Opposé ».

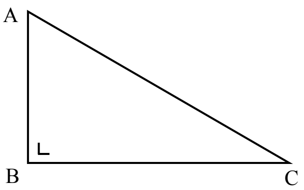
Vis-à-vis	Contigu
Attenant	Inverse
Identique	Contraire
Voisin	Côte à côte
Collé	En contact
Proche	Éloigné

ENTOURE, dans la liste suivante, les mots qui te semblent être synonymes du terme « Adjacent ».

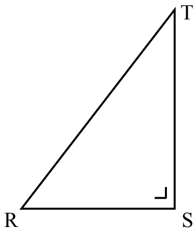
Avoisinant	À côté de
À l'écart	Proche
Attenant	Distant
Voisin	Côte à côte
Collé	En contact
Contigu	Éloigné

Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le côté opposé à

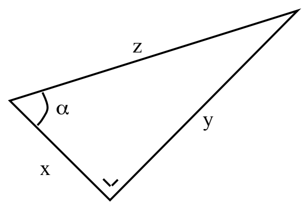
l'angle $\hat{A}$:



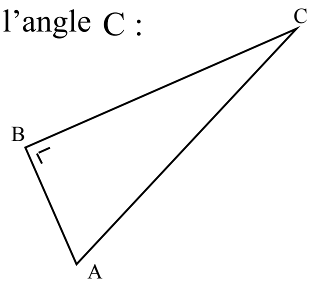
l'angle $\widehat{RTS}$:



l'angle α :

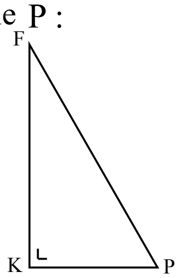


l'angle $\hat{C}$:

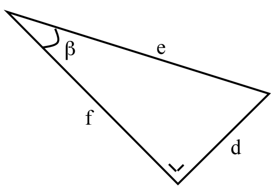


Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le côté adjacent à

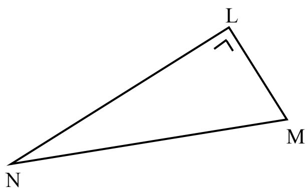
l'angle $\hat{P}$:



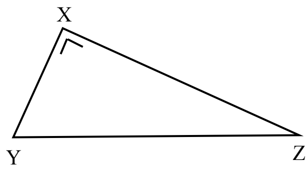
l'angle β :



l'angle $\widehat{LMN}$:



l'angle $\hat{Z}$:

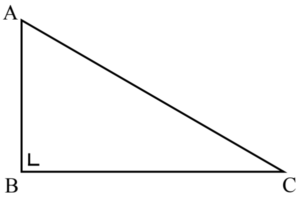


Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE**

l'hypoténuse :

le côté opposé à $\hat{C}$:

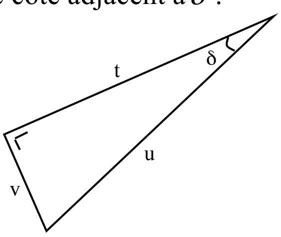
le côté adjacent à $\hat{C}$:



l'hypoténuse :

le côté opposé à δ :

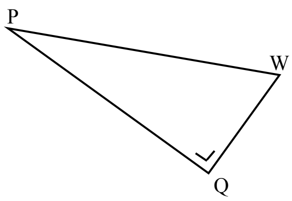
le côté adjacent à δ :



l'hypoténuse :

le côté opposé à $\hat{W}$:

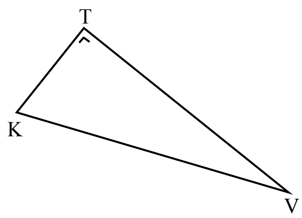
le côté adjacent à $\hat{W}$:



l'hypoténuse :

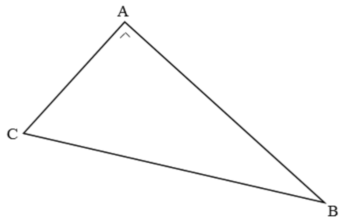
le côté opposé à $\widehat{TVK}$:

le côté adjacent à $\widehat{TVK}$:



Fiche 14 : Nombres trigonométriques dans des situations non nécessairement prototypiques

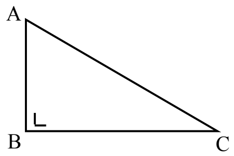
Dans le triangle ci-contre, lequel des rapports $\frac{|AB|}{|AC|}, \frac{|AC|}{|AB|}, \frac{|AB|}{|BC|}, \frac{|BC|}{|AB|}, \frac{|AC|}{|BC|}, \frac{|BC|}{|AC|}$ est égal à



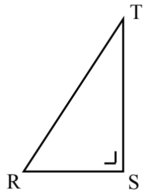
$\sin \hat{C}$?	$\cos \hat{C}$?	$\text{tg}\, \hat{C}$?

Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le sinus, le cosinus et la tangente de

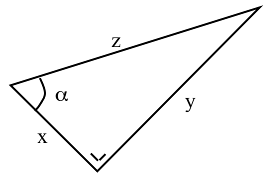
l'angle $\hat{A}$



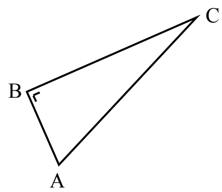
l'angle $\widehat{RTS}$



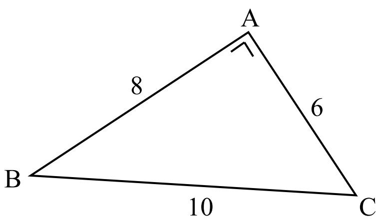
l'angle α



l'angle $\hat{C}$

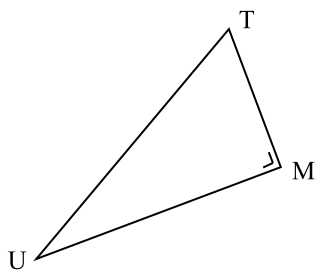


Dans les triangles rectangles suivants, **BARRE** les réponses incorrectes :



$\cos \hat{C}$ est égal à

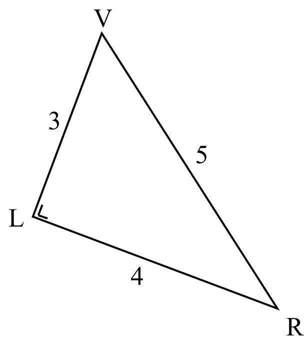
1,3 ; 53° ; 37° ; 0,8 ; 0,6 ; $\sin \hat{B}$



$|MU| = 12 ; |MT| = 5 ; |UT| = 13$

$\sin \hat{T}$ est égal à

$\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 20° ; $\frac{13}{12}$; $\cos \hat{U}$; 1,04



$\text{tg}\, \hat{V}$ est égal à

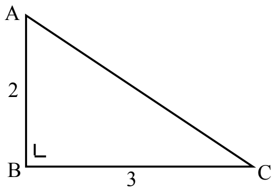
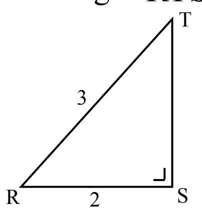
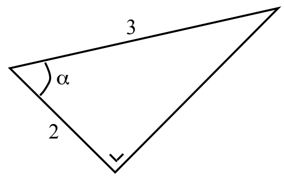
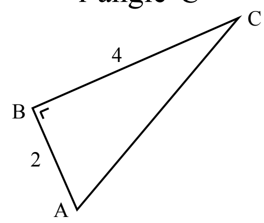
0,8 ; 42° ; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{\sin \hat{V}}{\cos \hat{V}}$; $\frac{\cos \hat{R}}{\sin \hat{R}}$

Fiche 15 : Recherche de l'amplitude d'un angle en connaissant un de ses nombres trigonométriques ou les longueurs de deux côtés.

CALCULE α ($\alpha \in [0°,90°]$)

$\text{Sin } \alpha = 0{,}8$	$\text{Cos } \alpha = \dfrac{1}{3}$	$\text{Tg } \alpha = \dfrac{5}{3}$

Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE** le sinus, le cosinus et la tangente de

l'angle $\hat{A}$	l'angle $\widehat{RTS}$	l'angle $\hat{\alpha}$	l'angle $\hat{C}$
			

Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 15 et 20, quelles sont les amplitudes des deux autres angles ?	Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 20 et un côté de l'angle droit mesure 15, quelles sont les amplitudes des deux autres angles ?	Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse et un côté de l'angle droit mesurent respectivement 35 et 20, quelles sont les amplitudes des deux autres angles ?

Fiche élèves

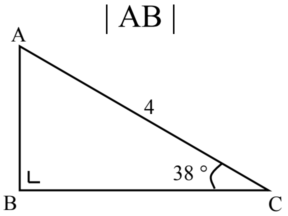
Fiche 16 : Recherche la longueur d'un côté en connaissant l'amplitude d'un angle et la longueur d'un côté ou de l'hypoténuse

ISOLE x

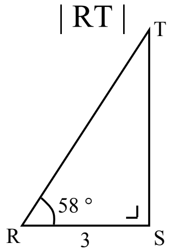
$a\,x = b$	$\dfrac{x}{a} = b \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{a}{x} = b \quad (x \neq 0)$

Dans les triangles rectangles suivants, **DÉTERMINE**

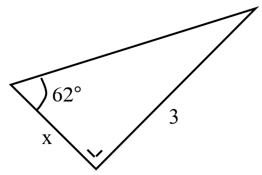
| AB |



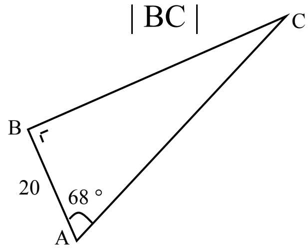
| RT |



x



| BC |



Dans un triangle rectangle, l'amplitude d'un angle est 73° et son côté opposé mesure 27, que mesurent l'hypoténuse et le troisième côté ?	Dans un triangle rectangle, l'amplitude d'un angle est 18° et son côté adjacent mesure 42, que mesurent l'hypoténuse et le troisième côté ?

Fiche élèves

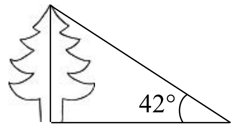
Fiche 17 : Résolution de problèmes

1. Quelle est l’amplitude de l’angle que fait un rayon lumineux avec l’horizontale lorsque l’ombre d’un poteau vertical mesure les $\frac{7}{5}$ de sa hauteur ?

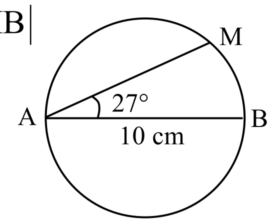
2. Un chemin sépare deux maisons. Une échelle de 8 m appuyée sur la façade de l’une d’elles fait un angle de 72° avec le sol. Sans bouger les pieds de l’échelle, on l’appuie sur l’autre façade, elle fait alors un angle de 76° avec le sol. Quelle est la largeur du chemin ?

Fiche 18 : Résolution de problèmes

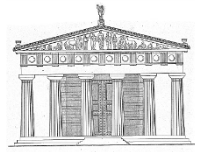
1. Le rayon solaire passant par le sommet d'un sapin forme un angle de 42° avec le sol horizontal. Quelle est la hauteur du sapin sachant que son ombre a une longueur de 33 m ?



2. Calculer $|MB|$

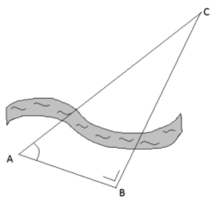


3. Le fronton d'un temple grec a la forme d'un triangle isocèle dont la base mesure 25 m. Calcule la longueur des deux autres côtés ainsi que l'amplitude des angles à la base sachant que la hauteur relative à cette base mesure 5,2 m.



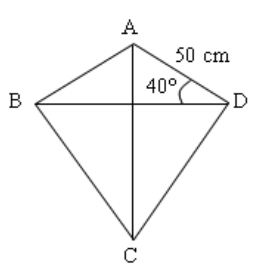
4. Un cycliste monte un col. Il démarre à une altitude de 340 m. Il monte pendant 15 km sur une route qui fait un angle de 7° avec l'horizontale. À quelle altitude arrivera-t-il au sommet ?

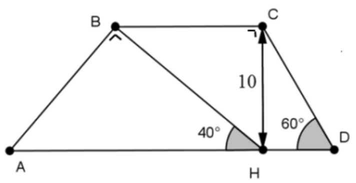
5. Deux immeubles se trouvent de part et d'autre d'une rue. Du bâtiment dont la hauteur vaut 240 m, on observe le sommet du second sous un angle de 25° par rapport à l'horizontale. Réalise un schéma de la situation. La hauteur du second immeuble vaut 360 m. Calcule la distance séparant ces deux immeubles.

6. 

Une ligne à haute tension reliant les villages A et C franchit une rivière. Si tu sais que B est un angle droit, |AB| = 94 m et |BÂC| = 72°, calcule la distance séparant les deux villes.

7. Manon veut construire un cerf-volant selon les dimensions suivantes et sachant que $\hat{B}$ et $\hat{D}$ sont des angles droits. Quelles sont les longueurs des baguettes formant la structure du cerf-volant (les diagonales) ?

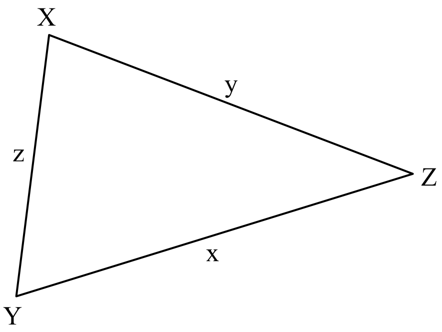


8. 

En tenant compte des informations données sur le dessin, calcule la longueur des quatre côtés, le périmètre et l'aire du trapèze ABCD.

Fiche 19 : Extension aux triangles quelconques

1. Dans le triangle quelconque suivant, barre les expressions incorrectes.



$$\frac{x}{\sin \hat{X}} = \frac{y}{\sin \hat{Y}} = \frac{z}{\sin \hat{Z}}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cos \hat{Z}$$

$$|XZ|^2 = |YX|^2 + |YZ|^2 - 2\,|YX|\,.\,|YZ|\,.\,\sin \hat{Y}$$

$$\frac{\sin \hat{Y}}{\sin \hat{X}} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\sin \hat{X}}{|YZ|} = \frac{\sin \hat{Y}}{|XZ|} = \frac{\sin \hat{Z}}{|XY|}$$

$$\frac{\sin \hat{Z}}{\sin \hat{Y}} = \frac{|XZ|}{|XY|}$$

$$|YZ|^2 = |YX|^2 + |XZ|^2 + 2\,|YX|\,.\,|XZ|\,.\,\cos \hat{X}$$

$$y^2 - x^2 = z^2 - 2\,x\,z \cos \hat{Y}$$

$$|XY|^2 = |ZX|^2 + |YZ|^2 - 2\,|YX|\,.\,|XZ|\,.\,\cos \hat{Z}$$

$$\frac{\sin \hat{X}}{\sin \hat{Z}} = \frac{x}{z}$$

2. Résous les triangles quelconques PQR suivants :
   a) |PQ| = 10 et |PR| = 5 et |QR| = 7
   b) |PQ| = 4 et |QR| = 3 et $\hat{Q} = 20°$
   c) |PQ| = 4 et |QR| = 3 et $\hat{P} = 20°$
   d) |PQ| = 5 et $\hat{P} = 70°$ et $\hat{R} = 50°$

3. Leila et Antoine se trouvent à l'extrémité de deux brise-lames. Ils sont distants de 100 m. Ils voient une bouée ancrée au large. Antoine voit Leila et la bouée sous un angle de 60° ; Leila voit Antoine et la bouée sous un angle de 75°.
   Détermine la distance entre chacun d'eux et la bouée.

4. Lors d'une fête de printemps dans un village, on construit un plan incliné qui fait un angle de 10° avec le sol (horizontal). A sa base, on installe un poteau vertical qui projette une ombre de 3m sur le plan incliné lorsque l'angle d'élévation du soleil est de 50°. Quelle est la hauteur du poteau ?

Fiche élèves

Fiche outils

- J'ai directement eu l'impression de ne rien comprendre.
- J'ai lu trop rapidement l'énoncé.
- Certains mots m'ont posé problème, je n'en connaissais pas la signification.
- J'ai oublié la question posée.
- Je n'ai eu aucune représentation mentale de la situation.
- J'ai compris le problème mais je n'ai pas su comment démarrer.
- J'ai essayé de traduire le problème autrement mais sans succès.
- Je n'ai pas essayé de traduire le problème.
- Je n'ai pas pu relier entre elles les différentes données du problème.
- J'ai dessiné la situation mais je n'y ai pas indiqué les données.
- Je ne savais pas comment choisir l'inconnue.
- J'ai directement eu une représentation mentale de la situation.
- Je n'ai pas su faire le problème car je ne me souvenais plus des formules.
- J'ai essayé de faire un dessin mais je n'y suis pas arrivé/arrivée.
- J'ai relu plusieurs fois l'énoncé.
- J'ai eu du mal à trouver la formule à appliquer.
- J'ai fait un dessin mais je n'ai pas vérifié qu'il contenait toutes les informations de l'énoncé.
- J'ai cru trouver la solution mais je n'ai pas vérifié si celle-ci était plausible.
- J'ai essayé de comparer avec des problèmes résolus en classe.
- J'ai fait un dessin et cela ne m'a pas aidé/aidée.
- Je n'ai pas trouvé la bonne solution car j'ai fait des erreurs de calcul.
- Je connaissais la formule mais je n'ai pas su l'appliquer à la situation.
- Je dois relire plusieurs fois l'énoncé car sinon je ne le comprends pas.
- Pour comprendre, je dois redire l'énoncé avec mes propres mots.
- J'ai eu l'impression qu'il manquait des données pour trouver la solution.
- …………………………………………………………………………………….
- …………………………………………………………………………………….
- …………………………………………………………………………………….

Fédération Wallonie-Bruxelles / Ministère
Administration générale de l'Enseignement
Service général du Pilotage du Système éducatif
Boulevard du Jardin Botanique, 20-22 – 1000 Bruxelles
www.fw-b.be – 0800 20 000

Graphisme : leopold.kroemmer@cfwb.be
Mai 2015

Le Médiateur de la Wallonie et de la Fédération Wallonie-Bruxelles
Rue Lucien Namèche, 54 – 5000 NAMUR
0800 19 199
courrier@mediateurcf.be
Éditeur responsable : Jean-Pierre HUBIN, Administrateur général
La « Fédération Wallonie-Bruxelles » est l'appellation désignant usuellement la « Communauté française » visée à l'article 2 de la Constitution